

*Schaum*

# TRIGONOMETRÍA

Frank Ayres Jr.

SEGUNDA EDICIÓN

Robert E. Moyer



# TRIGONOMETRÍA

Segunda Edición

# TRIGONOMETRÍA

Segunda Edición

Con soluciones basadas en calculadora manual

**FRANK AYRES JR., Ph. D.**

Antiguo Profesor y Jefe del departamento de Matemáticas  
Colegio Dickinson

**ROBERT E. MOYER, Ph. D.**

Profesor Asociado de Matemáticas  
Colegio Estatal de Fort Valley

Traducción:

María Concepción Ruiz Sánchez

Ingeniero en Comunicaciones y Electrónica  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica IPN  
Centro de Investigación y Estudios Avanzados del IPN

Revisión Técnica:

Ing. Carlos Hirsch Ganievich

Profesor Investigador  
Sección Comunicaciones IPN  
Centro de Investigación y Estudios Avanzados IPN

**McGRAW-HILL**

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA • LISBOA  
MADRID • NUEVA YORK • PANAMÁ • SAN JUAN • SANTIAGO • SAO PAULO  
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES «MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI  
PARÍS • SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS  
SIDNEY • TOKIO • TORONTO

**Frank Ayres Jr.**, Ph. D., antiguo Profesor y Jefe del departamento de Matemáticas del Colegio Dickinson en Carlisle, Pennsylvania. Es autor de 8 libros de la serie Schaum entre los que figuran: Cálculo Diferencial e Integral, 1er. año de Matemáticas de nivel medio, Matrices.

**Robert E. Moyer**, se ha dedicado a la enseñanza de las matemáticas en el colegio estatal de Fort Valley en Fort Valley, Georgia desde 1983. Antes de estar asociado a la Facultad FVSC, fue consultor de matemáticas y computación en la Agencia Cooperativa de Servicio Educacional de Middle, Georgia, por 7 años, sirviendo 5 en el Sistema de Escuelas Públicas del condado, y enseñando matemáticas en preparatoria por 12 años en Carmi IL y Rantour IL. Recibió su doctorado en Filosofía y Educación Matemática en la Universidad de Illinois en 1974, su maestría en Ciencias en 1967 en la Universidad del Sur de Illinois, y su licenciatura en Ciencias en 1964 sobre Educación Matemática.

## **TRIGONOMETRÍA**

Segunda Edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS (c) 1991, respecto a la segunda edición en español por McGRAW-HILL INTERAMERICANA DE MÉXICO, S. A. de C. V.

Atacomulco 499-501, Fracc. Ind. San Andrés Atoto,

53500 Naucalpan de Juárez, Edo. de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial, Reg. Núm. 1890

**ISBN 968-422-785X**

(ISBN 968-451-176-0 primera edición)

Traducido de la segunda edición en inglés de  
SCHAUM'S OUTLINE OF TRIGONOMETRY **Copyright**  
© **MCMLXXXIX**, by McGraw-Hill, Inc., **U.S.A.**

ISBN 0-07-002659-9

**1234567890**

**L.M.-90**

9123456780

**Impreso en México**

**Printed in México**

Esta obra se terminó de  
**Imprimir en noviembre de 1990**  
en **Impresora y Maquiladora de Libros Mig**, S.A. de  
C.V.

**Venados 530**

Col. **Los Olivos**

Del. **Tláhuac**

**13210**, México, D.F.

Se tiraron 13 000 ejemplares

# Contenido

---

<b>Capítulo 1</b>	<b>ÁNGULOS Y APLICACIONES .....</b>	<b>1</b>
	1.1 Introducción .....	1
	1.2 Ángulo plano .....	1
	1.3 Medición de ángulos.....	2
	1.4 Longitud de arco.....	3
	1.5 Longitud de arco en un círculo unitario.....	4
	1.6 Área de un sector.....	5
	1.7 Velocidad angular .....	6

---

<b>Capítulo 2</b>	<b>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENÉRICO .....</b>	<b>11</b>
	2.1 Coordenadas en una línea .....	11
	2.2 Coordenadas en un plano .....	11
	2.3 Ángulos en posición estándar.....	12
	2.4 Funciones trigonométricas de un ángulo genérico .....	13
	2.5 Signos de las funciones en los cuadrantes .....	14
	2.6 Funciones trigonométricas de los ángulos cuadrantales.....	14
	2.7 Funciones trigonométricas indefinidas .....	15
	2.8 Coordenadas de puntos en un círculo unitario .....	16
	2.9 Funciones circulares .....	16

---

<b>Capítulo 3</b>	<b>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO .....</b>	<b>29</b>
	3.1 Funciones trigonométricas de un ángulo agudo.....	29
	3.2 Funciones trigonométricas de ángulos complementarios .....	30
	3.3 Funciones trigonométricas de $30^\circ$ , $45''$ y $60''$ .....	31
	3.4 Valores de las funciones trigonométricas .....	31
	3.5 Exactitud de los resultados utilizando aproximaciones .....	32
	3.6 Selección de la función en la solución de un problema.....	32
	3.7 Ángulos de depresión y elevación .....	33

<b>Capítulo 4</b>	<b>SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS .....</b>	<b>44</b>
	4.1 Introducción .....	44
	4.2 Tablas de las funciones trigonométricas con cuatro decimales .....	44
	4.3 Tablas de valores para las funciones trigonométricas .....	44
	4.4 Uso de las tablas para encontrar un ángulo dado el valor de una función .....	46
	4.5 Valores de las funciones trigonométricas con calculadora .....	47
	4.6 Mediante el uso de una calculadora encuentrese un ángulo dado el valor de una función .....	48
	4.7 Exactitud en los resultados calculados .....	49
<b>Capítulo 5</b>	<b>APLICACIONES PRÁCTICAS .....</b>	<b>60</b>
	5.1 Orientación .....	60
	5.2 Vectores .....	61
	5.3 Suma vectorial .....	61
	5.4 Componentes de un vector .....	63
	5.5 Navegación aérea .....	63
	5.6 Plano inclinado .....	64
<b>Capítulo 6</b>	<b>APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS EN TRIGONOMETRÍA .....</b>	<b>74</b>
	6.1 Introducción .....	74
	6.2 Logaritmos de las funciones trigonométricas .....	74
	6.3 Solución de triángulos rectángulos .....	75
<b>Capítulo 7</b>	<b>REDUCCIÓN A FUNCIONES DE ÁNGULOS AGUDOS POSITIVOS .....</b>	<b>81</b>
	7.1 Ángulos coterminalés .....	81
	7.2 Funciones de ángulos negativos .....	81
	7.3 Ángulos de referencia .....	82
	7.4 Ángulos a partir del valor de una función .....	83
<b>Capítulo 8</b>	<b>VARIANTES GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS .....</b>	<b>90</b>
	8.1 Representación lineal de las funciones trigonométricas .....	90
	8.2 Variantes de las funciones trigonométricas .....	91
	8.3 Gráficas de las funciones trigonométricas .....	92
	8.4 Desplazamientos verticales y horizontales .....	93
	8.5 Funciones periódicas .....	94
	8.6 Curvas senoidales .....	94
<b>Capítulo 9</b>	<b>RELACIONES BÁSICAS E IDENTIDADES .....</b>	<b>103</b>
	9.1 Relaciones básicas .....	103
	9.2 Simplificación de expresiones trigonométricas .....	103
	9.3 Identidades trigonométricas .....	104
<b>Capítulo 10</b>	<b>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE DOS ÁNGULOS .....</b>	<b>113</b>
	10.1 Fórmulas para la suma .....	113
	10.2 Fórmulas para la diferencia .....	113
	10.3 Fórmulas para el doble de un ángulo .....	113
	10.4 Fórmulas para un semiángulo .....	114

<b>Apéndice 1</b>	<b>GEOMETRÍA</b> .....	<b>204</b>
<hr/>		
<b>Capítulo 11</b>	<b>FORMULAS PARA LA SUMA, LA DIFERENCIA Y EL PRODUCTO</b> .....	<b>128</b>
	11.1 Productos de senos y cosenos .....	128
	11.2 Suma y diferencia de senos y cosenos .....	128
<hr/>		
<b>Capítulo 12</b>	<b>TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS</b> .....	<b>133</b>
	12.1 Triángulos oblicuángulos .....	133
	12.2 Ley de los senos .....	133
	12.3 Ley de los cosenos .....	133
	12.4 Solución de triángulos oblicuángulos .....	134
	12.5 Verificación de las soluciones de triángulos oblicuángulos .....	134
	12.6 Ley de las tangentes .....	136
	12.7 Fórmulas de la fracción media de un ángulo .....	137
<hr/>		
<b>Capítulo 13</b>	<b>ÁREA DE UN TRIANGULO</b> .....	<b>159</b>
	13.1 Área de un triángulo .....	159
	13.2 Fórmulas para encontrar el área .....	159
<hr/>		
<b>Capítulo 14</b>	<b>FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS</b> .....	<b>170</b>
	14.1 Relaciones trigonométricas inversas .....	170
	14.2 Gráficas de las relaciones trigonométricas inversas .....	170
	14.3 Funciones trigonométricas inversas .....	170
	14.4 Intervalo de los valores principales .....	172
	14.5 Valores generales de las relaciones trigonométricas inversas .....	172
<hr/>		
<b>Capítulo 15</b>	<b>ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS</b> .....	<b>181</b>
	15.1 Ecuaciones trigonométricas .....	181
	15.2 Resolución de ecuaciones trigonométricas .....	181
<hr/>		
<b>Capítulo 16</b>	<b>NÚMEROS COMPLEJOS</b> .....	<b>190</b>
	16.1 Números imaginarios .....	190
	16.2 Números complejos .....	190
	16.3 Operaciones algebraicas .....	190
	16.4 Representación gráfica de números complejos .....	191
	16.5 Representación gráfica de la suma y la resta .....	191
	16.6 Forma polar y trigonométrica de los números complejos .....	192
	16.7 Multiplicación y división en forma polar .....	193
	16.8 Teorema de Moivre .....	194
	16.9 Raíces de los números complejos .....	194
<hr/>		
<b>Apéndice 2</b>	<b>TABLAS</b> .....	<b>210</b>
	Funciones trigonométricas - Ángulos en intervalos de 10 minutos .....	210
	Funciones trigonométricas - Ángulos en intervalos de décimas de grado .....	216
	Funciones trigonométricas - Ángulos en intervalos de centésimas de radián .....	228
	Tabla de logaritmos común en (base 10) con cuatro decimales .....	232
<b>Apéndice 3</b>	<b>LOGARITMOS</b> .....	<b>234</b>
	<b>ÍNDICE</b> .....	<b>243</b>

En la revisión de este libro, (que es la segunda edición), se conservaron las intenciones de la primera, al mismo tiempo que se reflejan los cambios que ha sufrido el estudio de la trigonometría desde que se escribió aquella. Esta edición se enfoca enteramente a la trigonometría plana, reduce el énfasis en el uso de logaritmos, incluye el uso de la calculadora, proporciona las tablas necesarias para resolver los problemas sin calculadora, y ofrece un resumen de las propiedades geométricas y de los teoremas que son útiles para resolver problemas de trigonometría.

El libro es una obra completa y puede ser utilizado tanto por quienes estén estudiando trigonometría por primera vez, como por aquellos que deseen revisar los principios y procedimientos fundamentales de trigonometría. Cada capítulo contiene un resumen de las definiciones y teoremas necesarios seguido de un conjunto de problemas resueltos. Dichos problemas resueltos, incluyen la comprobación de los teoremas y las derivaciones de las fórmulas.

Los capítulos finalizan con un conjunto de problemas suplementarios y sus respuestas. Los procedimientos que utilizan tablas trigonométricas y aquellos que requieren de una calculadora están incluidos según sea necesario para la solución de problemas. La decisión de cuál de las dos herramientas debe emplearse, si las tablas o la calculadora, se deja al estudiante. Los problemas que llevan la intención específica de ser resueltos por medio de una solución única se indican claramente; de forma indistinta, cualquiera de los dos procedimientos resulta apropiado. El trabajo con logaritmos es completamente opcional. Los ejemplos y problemas demuestran en forma amplia cómo utilizar los logaritmos en trigonometría, pero quienes decidan no utilizarlos pueden omitirlos sin que se pierda la continuidad del material.

La solución de problemas de triángulos, identidades trigonométricas y ecuaciones trigonométricas, requiere del conocimiento del álgebra elemental. Los problemas han sido cuidadosamente seleccionados y sus soluciones se explicarán en detalle y están ordenadas para ilustrar con claridad los procesos algebraicos involucrados, así como el uso de las relaciones trigonométricas básicas.

Robert E. Moyer Fort  
Valley, Georgia  
Noviembre, 1988

Frank Ayres Carlisle,  
Pennsylvania

# Ángulos y aplicaciones



## 1.1 INTRODUCCIÓN

La trigonometría, como la palabra lo indica, se refiere a la medida de los lados y los ángulos de un triángulo. La trigonometría plana, de la que se ocupa este libro, se limita a triángulos que se encuentran en un plano. La trigonometría se basa en ciertas relaciones, llamadas funciones trigonométricas, que se definen en el siguiente capítulo. Las primeras aplicaciones de las funciones trigonométricas fueron para topografía, navegación e ingeniería. Estas funciones desempeñan también un importante papel en el estudio de toda clase de fenómenos vibratorios: sonido, luz, electricidad, etc. En consecuencia, una porción considerable de la asignatura se refiere al estudio de las propiedades y relaciones entre las funciones trigonométricas.

## 1.2 ÁNGULO PLANO

El ángulo plano  $XOP$ , Figura 1-1, está formado por dos líneas  $OX$  y  $OP$ . Al punto  $O$  se le llama *vértice* ya las líneas medias se les llama lados del ángulo.

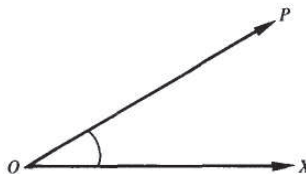
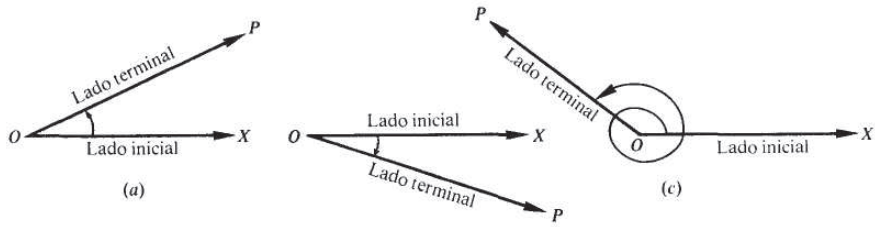


Fig. 1-1

Más comúnmente, puede pensarse que un ángulo plano se genera si se *gira* (en un plano) una línea de la posición inicial  $OX$  a la posición terminal  $OP$ . Entonces,  $O$  es otra vez el vértice,  $\vec{OX}$  al que se llama *lado inicial*, y  $\vec{OP}$  se llama *lado terminal* del ángulo.

Un ángulo así generado se llama *positivo* si la dirección de rotación (indicada por una flecha curvada) va en contra del movimiento de las manecillas del reloj y *negativo* si la dirección de rotación es igual a la de las manecillas del reloj. El ángulo es positivo en la Figura 1-2 (a) y (c), negativo en la Figura 1-2 (b).



(b) Fig. 1-2

### 1.3 MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Un *grado* ( $^{\circ}$ ) se define como la medida central del ángulo subtendido por un arco de círculo igual a  $1/360$  de la circunferencia de un círculo.

Un *minuto* ( $'$ ) es  $1/60$  de un grado; un *segundo* ( $''$ ) es  $1/60$  de un minuto, o sea  $1/3600$  de un grado.

- EJEMPLO 1.1 (a)  $\frac{1}{4}(36^{\circ}24') = 9^{\circ}6'$       (b)  $\frac{1}{2}(127^{\circ}24') = \frac{1}{2}(126^{\circ}84') = 63^{\circ}42'$   
 (c)  $\frac{1}{2}(81^{\circ}15') = \frac{1}{2}(80^{\circ}75') = 40^{\circ}37.5'$  o  $40^{\circ}37'30''$   
 (d)  $\frac{1}{4}(74^{\circ}29'20'') = \frac{1}{4}(72^{\circ}149'20'') = \frac{1}{4}(72^{\circ}148'80'') = 18^{\circ}37'20''$

Quando se convierten ángulos expresados en forma decimal a minutos y segundos, la regla general es que las décimas de ángulo serán convertidas al minuto más cercano y el resto de los ángulos se redondeará a la centésima más cercana y entonces se cambiarán al segundo más cercano. Cuando se convierten ángulos en minutos y segundos a forma decimal, el resultado en minutos se redondea a décimas y los ángulos en segundos redondean el resultado a centésimas.

- EJEMPLO 1.2 (a)  $62.4^{\circ} = 62^{\circ} + 0.4 (60') = 62^{\circ}24'$   
 (b)  $23.9^{\circ} = 29^{\circ} + 0.9 (60') = 23^{\circ}54'$   
 (c)  $29.23^{\circ} = 29^{\circ} + 0.23 (60') = 29^{\circ} 13.8' = 29^{\circ} 13' + 0.8(60'')$   
 $= 29^{\circ}13'48''$   
 (d)  $37.47^{\circ} = 37^{\circ} + 0.47(60') = 37^{\circ}28.2' = 37^{\circ}28' + 0.2(60'')$   
 $= 37^{\circ}28'12''$   
 (e)  $78^{\circ}17' = 78^{\circ} + 17'/60 = 78.3^{\circ}$  (redondeado a décimas)  
 (f)  $58^{\circ}22'16'' = 58^{\circ} + 22'/60 + 16''/3600 = 58.37^{\circ}$  (redondeado a centésimas)

Un *radián* (rad) se define como la medida del ángulo central subtendido por un arco de un círculo igual al radio del círculo. (Véase Figura 1-3.)

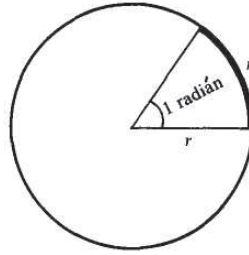


Fig. 1-3

La circunferencia de un círculo =  $2\pi$  (radio) y subtende un ángulo de  $360^\circ$ . Entonces,  $2\pi r$  radianes =  $360^\circ$ ; de tal forma que:

$$1 \text{ radián} = \frac{180^\circ}{\pi} = 57.296^\circ = 57^\circ 17' 45''$$

$$1 \text{ grado} = \frac{\pi}{180} \text{ radián} = 0.017453 \text{ rad},$$

donde  $\pi = 3.14159$ .

EJEMPLO 1.3 (a)  $\frac{7}{12} \pi \text{ rad} = \frac{7\pi}{12} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = 105^\circ$  (c)  $-\frac{\pi}{6} \text{ rad} = -\frac{\pi}{6} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} = -30^\circ$

(b)  $50^\circ = 50 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = \frac{5\pi}{18} \text{ rad}$  (d)  $-210^\circ = -210 \cdot \frac{\pi}{180} \text{ rad} = -\frac{7\pi}{6} \text{ rad}$

(Véanse Probs. 1.1 y 1.2)

#### 1.4 LONGITUD DE ARCO

En un círculo de radio  $r$ , un ángulo central de  $\theta$  radianes. Figura 1-4, intercepta un arco de longitud

$$s = r\theta$$

esto es, la longitud de arco = el radio x el ángulo central en radianes

(NOTA:  $s$  y  $r$  pueden medirse en cualquier unidad de longitud que convenga pero deben expresarse en la misma unidad.)

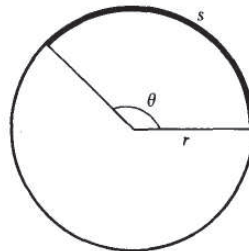


Fig. 1-4

**EJEMPLO 1.4** (a) En un círculo con un radio de 30 pulgadas, la longitud del arco formado por un ángulo central de  $\frac{1}{3}$  rad es

$$s = r\theta = 30\left(\frac{1}{3}\right) = 10 \text{ pulgadas}$$

(b) En el mismo círculo un ángulo central de  $50^\circ$  forma un arco de longitud

$$s = r\theta = 30\left(\frac{5\pi}{18}\right) = \frac{25\pi}{3} \text{ pulgadas}$$

(c) En el mismo círculo un arco de longitud  $1\frac{1}{2}$  pies subtende un ángulo central de

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5} \text{ rad}$$

donde  $r$  y  $s$  están expresados en pulgadas

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{3/2}{5/2} = \frac{3}{5} \text{ rad}$$

donde  $r$  y  $s$  están expresados en pies

(Véanse Probs. 1.3-1.8.)

## 1.5 LONGITUD DE ARCO EN UN CÍRCULO UNITARIO

La correspondencia entre puntos de una recta numérica real y los puntos de un círculo unitario,  $x^2 + y^2 = 1$ , con su centro en el origen, se muestra en la Figura 1-5.

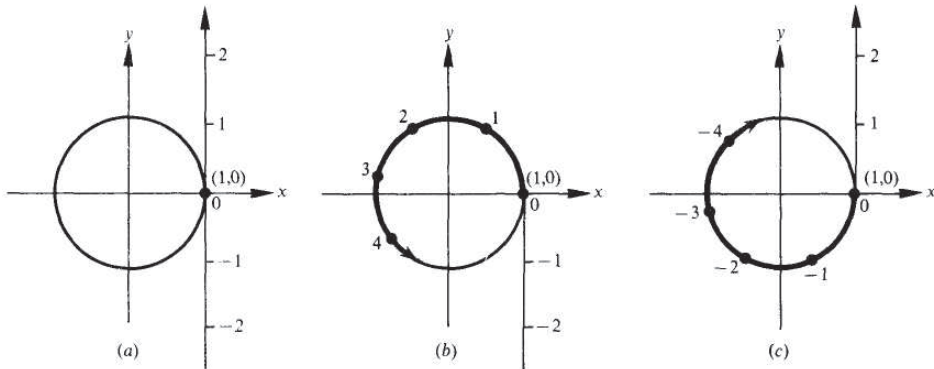


Fig. 1-5

El cero, 0, en la recta numérica se asocia con el punto (1,0) como se muestra en la Figura 1-5(a). Los números positivos reales se envuelven alrededor del círculo en contra de la dirección de las manecillas del reloj, Figura 1-5(b), y los números reales negativos se envuelven alrededor del círculo en la dirección de las manecillas del reloj, Figura 1-5(c). Cada punto en el círculo unitario se asocia con muchos números reales, tanto positivos como negativos.

El radio de un círculo unitario tiene una longitud de 1. Por tanto, la circunferencia del círculo, dada por  $2\pi r$ , es  $2\pi$ . La distancia media de la circunferencia es  $\pi$  y  $1/4$  de circunferencia es  $\pi/2$ . Cada número positivo está relacionado a una longitud de arco  $s$ , y dado que  $s = r\theta = 1 \cdot \theta = \theta$ , cada número real se relaciona con un ángulo  $\theta$  medido en radianes. De la misma forma, cada número negativo real está relacionado con una longitud de arco negativa  $y$ , por lo tanto, con un ángulo negativo medido en radianes. La Figura 1-6(a) muestra los puntos correspondientes a los ángulos positivos, y la Figura 1-6(b) muestra los puntos correspondientes a los ángulos negativos.

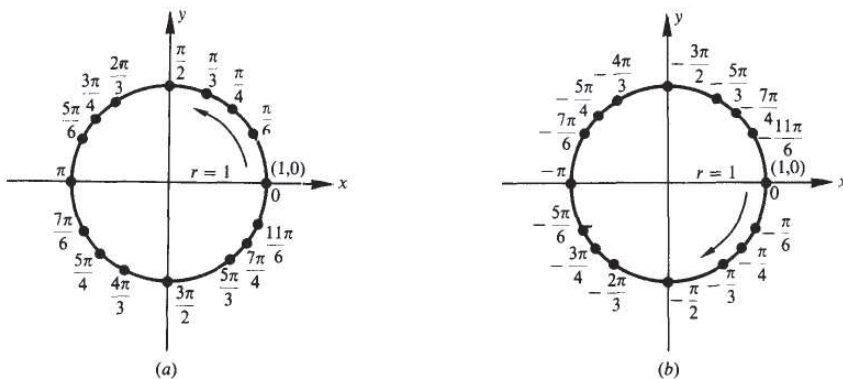


Fig. 1-6

**1.6 ÁREA DE UN SECTOR**

El área  $K$  del sector de un círculo, la parte sombreada de la Figura 1-7, con radio  $r$  y ángulo central  $\theta$  en radianes es

$$K = \frac{1}{2}r^2\theta$$

esto es, el área del sector =  $\frac{1}{2}$  x el radio x el radio x ángulo central en radianes.

(NOTA:  $K$  se medirá en unidades cuadradas de área que corresponden a la unidad de longitud utilizada para medir  $r$ .)

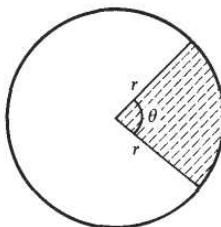


Fig. 1-7

**EJEMPLO 1.5** Para un círculo de radio de 30 pulgadas, el área de un sector formado por un ángulo central de  $\frac{1}{3}$  rad es

$$K = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(30)^2\left(\frac{1}{3}\right) = 150 \text{ pulgadas}^2$$

**EJEMPLO 1.6** Para un círculo de radio de 18 cm, el área del sector formado por un ángulo central de  $50^\circ$  es

$$K = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(18)^2 \frac{5\pi}{18} = 45\pi \text{ cm}^2 \text{ o } 141 \text{ cm}^2 \text{ (redondeado)}$$

(NOTA:  $50^\circ = 5\pi/18$  rad.)

(Véanse Probs. 1.9y 1.10.)

## 1.7 VELOCIDAD ANGULAR

La relación entre la velocidad lineal  $v$  y la velocidad angular  $\omega$  (letra griega *omega*) para un objeto con radio  $r$  es

$$v = r\omega$$

donde  $\omega$  se mide en radianes por unidad de tiempo y  $v$  es distancia por unidad de tiempo.

(NOTA:  $v$  y  $\omega$  utilizan la misma unidad de tiempo y  $r$  y  $v$  utilizan la misma unidad lineal.)

**EJEMPLO 1.7** Una bicicleta con ruedas de 20 pulgadas viaja por un camino a 15 mi/h. Encuentre la velocidad angular de la rueda en revoluciones por minuto.

Debido a que el radio es de 10 pulgadas y la velocidad angular debe estar en revoluciones por minuto ( $r/min$ ), cambie la velocidad lineal de 15 mi/h a unidades de pulgadas/min.

$$v = 15 \frac{\text{mi}}{\text{h}} = \frac{15 \text{ mi}}{1 \text{ h}} \cdot \frac{5280 \text{ pies}}{1 \text{ mi}} \cdot \frac{12 \text{ pulgadas}}{1 \text{ pies}} \cdot \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} = 15,840 \frac{\text{pulgadas}}{\text{min}}$$

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{15,840 \text{ rad}}{10 \text{ min}} = 1,584 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

Para cambiar  $\omega$  a  $r/min$ , multiplique por  $\pi$  revoluciones por radián ( $r/rad$ ).

$$\omega = 1,584 \frac{\text{rad}}{\text{min}} = \frac{1,584 \text{ rad}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ r}}{2\pi \text{ rad}} = \frac{792 \text{ r}}{\pi \text{ min}} \text{ o } 252 \text{ r/min}$$

**EJEMPLO 1.8** Una rueda remolcada por una cinta efectúa una revolución por segundo ( $r/s$ ). Si la rueda es de 18 cm de diámetro, ¿cuál es la velocidad lineal de la cinta en cm/s?

$$1 \frac{\text{r}}{\text{s}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ r}} = 2\pi \text{ rad/s}$$

$$v = r\omega = 9(2\pi) = 18\pi \text{ cm/s o } 57 \text{ cm/s}$$

(Véanse Probs. 1.1.1 a 1.15.)

## Problemas Resueltos

1.1 Exprese en radianes cada uno de los siguientes ángulos:

(a)  $30^\circ$ , (b)  $135^\circ$ , (c)  $25^\circ 30'$ , (d)  $42^\circ 24' 35''$ , (e)  $165.7^\circ$ , (f)  $-3.85^\circ$

(a)  $30^\circ = 30(\pi/180) \text{ rad} = \pi/6 \text{ rad o } 0.5236 \text{ rad}$

(b)  $135^\circ = 135(\pi/180) \text{ rad} = 3\pi/4 \text{ rad o } 2.3562 \text{ rad}$

(c)  $25^\circ 30' = 25.5^\circ = 25.5(\pi/180) \text{ rad} = 0.4451 \text{ rad}$

(d)  $42^\circ 24' 35'' = 42.41^\circ = 42.41 (\pi/180) \text{ rad} = 0.7402 \text{ rad}$

(e)  $165.7^\circ = 165.7(\pi/180) \text{ rad} = 2.8920 \text{ rad}$

(f)  $-3.85^\circ = -3.85(\pi/180) \text{ rad} = -0.0672 \text{ rad}$

1.2 Exprese en grados cada uno de los siguientes ángulos:

(a)  $\pi/3$  rad, (b)  $5\pi/9$  rad, (c)  $2/5$  rad, (d)  $4/3$  rad, (e)  $-\pi/8$  rad,

$$(a) \pi/3 \text{ rad} = (\pi/3)(180^\circ/\pi) = 60^\circ$$

$$(b) 5\pi/9 \text{ rad} = (5\pi/9)(180^\circ/\pi) = 100^\circ$$

$$(c) 2/5 \text{ rad} = (2/5)(180^\circ/\pi) = 72^\circ/\pi = 22.92^\circ \text{ or } 22^\circ 55.2' \text{ o } 22^\circ 55' 12''$$

$$(d) 4/3 \text{ rad} = (4/3)(180^\circ/\pi) = 240^\circ/\pi = 76.39^\circ \text{ or } 76^\circ 23.4' \text{ o } 76^\circ 23' 24''$$

$$(e) -\pi/8 \text{ rad} = -(\pi/8)(180^\circ/\pi) = -22.5^\circ \text{ o } 22^\circ 30'$$

1.3 El minutero de un reloj es de 12 cm de longitud. ¿Qué recorrido realiza la punta de la manecilla en 20 min?

En 20 minutos la manecilla recorre un ángulo  $\theta = 120^\circ = 2\pi/3$  rad, y la punta recorre una distancia  $s = r\theta = 12(2\pi/3) = 8\pi$  cm = 25.1 cm.

1.4 El ángulo central de un círculo, de 30 cm radio, forma un arco de 6 cm. Exprese el ángulo central  $\theta$  en radianes y en grados.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{30} = \frac{1}{5} \text{ rad} = 11^\circ 27' 33''$$

La curva de una vía de ferrocarril se va a tender en un círculo. ¿Qué radio debería usarse si la trayectoria cambia de dirección  $25^\circ$  en una distancia de 120 m?

Se requiere encontrar el radio de un círculo cuyo ángulo central de  $\theta = 25^\circ = 5\pi/36$  rad forme un arco de 120 m. Entonces,

$$r = \frac{s}{\theta} = \frac{120}{5\pi/36} = \frac{864}{\pi} \text{ m} = 275 \text{ m}$$

Un tren se mueve a una velocidad promedio de 8 mi/h a lo largo de una vía circular de 2500 pies. ¿Qué ángulo habrá recorrido en un minuto?

Dado que 8 mi/h =  $8(5280)/60$  pies/min = 704 pies/min, el tren pasa sobre un arco de longitud  $s = 704$  pies en un min. Entonces  $\theta = s/r = 704/2500 = 0.2816$  rad o  $16^\circ 8'$

Suponiendo que la Tierra fuera una esfera de radio 3960 mi, encuentre la distancia del punto  $36^\circ$ N de latitud al ecuador.

Si dos ciudades se encuentran separadas 270 mi en el mismo meridiano. Encuentre su diferencia de latitud.

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{270}{3960} = \frac{3}{44} \text{ rad} \quad \text{o} \quad 3^\circ 54.4'$$

Un sector de círculo tiene un ángulo central de  $50^\circ$  y un área de  $605 \text{ cm}^2$ . Encuentre el radio del círculo.

$K = \frac{1}{2}r^2\theta$ , por lo tanto  $r = \sqrt{2K/\theta}$ .

$$r = \sqrt{\frac{2K}{\theta}} = \sqrt{\frac{2(605)}{(5\pi/18)}} = \sqrt{\frac{4356}{\pi}} = \sqrt{1386.56} \\ = 37.2 \text{ cm}$$

1.10 Un sector de círculo tiene un ángulo central de  $80^\circ$  y un radio de 5 m. ¿Cuál es el área del sector?

$$K = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(5)^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{50\pi}{9} \text{ m}^2 = 17.5 \text{ m}^2$$

1.11 Una rueda gira a una velocidad promedio de 48 r/min. Expresé esta velocidad angular en (a) r/s, (b) rad/min, y (c) rad/s.

$$(a) \quad 48 \frac{\text{r}}{\text{min}} = \frac{48 \text{ r}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} = \frac{4 \text{ r}}{5 \text{ s}}$$

$$(b) \quad 48 \frac{\text{r}}{\text{min}} = \frac{48 \text{ r}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ r}} = 96\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} \text{ o } 301.6 \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

$$(c) \quad 48 \frac{\text{r}}{\text{min}} = \frac{48 \text{ r}}{1 \text{ min}} \cdot \frac{1 \text{ min}}{60 \text{ s}} \cdot \frac{2\pi \text{ rad}}{1 \text{ r}} = \frac{8\pi \text{ rad}}{5 \text{ s}} \text{ o } 5.03 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

1.12 Una rueda de 4 pies de diámetro gira a una velocidad de 80 r/min. Encuentre la distancia (en pies) recorrida por un punto en el borde en 1 s, esto es, la velocidad lineal del punto (en pies/s).

$$80 \frac{\text{r}}{\text{min}} = 80 \left(\frac{2\pi}{60}\right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} = \frac{8\pi \text{ rad}}{3 \text{ s}}$$

Entonces, en un segundo la rueda gira un ángulo de  $= 8\pi / 3$  rad y un punto en el borde de la rueda se moverá una distancia de  $s = r\theta = 2(8\pi/3)$  pies = 16.8 pies. La velocidad lineal es 16.8 pies/s.

1.13 Encuentre el diámetro de una polea que gira a 360 r/min y es impulsada por una cinta que se mueve a 40 pies/s.

$$360 \frac{\text{r}}{\text{min}} = 360 \left(\frac{2\pi}{60}\right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 12\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Entonces, en 1 s la polea girará un ángulo de  $\theta = 12\pi$  rad y un punto en el borde viajará una distancia de  $s = 40$  pies.

$$d = 2r = 2\left(\frac{s}{\theta}\right) = 2\left(\frac{40}{12\pi}\right) \text{ pies} = \frac{20}{3\pi} \text{ pies} = 2.12 \text{ pies}$$

Un punto en el borde de la rueda de una turbina que tiene un diámetro de 10 pies, se mueve con una velocidad lineal de 45 pies/s. Encuentre el promedio de velocidad a la cual la rueda gira (velocidad angular) en rad/s y en r/s.

En un segundo un punto en el borde recorre una distancia de  $s = 45$  pies. Entonces en 1 s la rueda gira un ángulo de  $\theta = s/r = 45/5 = 9$  rad y su velocidad angular es de 9 rad/s.

Dado que  $1 \text{ r} = 2\pi \text{ rad}$  o  $1 \text{ rad} = 1/2\pi \text{ r}$ ,  $9 \text{ rad/s} = 9(1/2\pi) \text{ r/s} = 1.43 \text{ r/s}$ .

Determine la velocidad de la Tierra (en mi/s) en su curso alrededor del Sol. Suponga que la Tierra tiene una órbita circular de radio 93, 000,000 mi y un año = 365 días.

En 365 días la Tierra recorre una distancia de  $2\pi r = 2(3.14)(93,000,000)\text{mi}$ .

$$\text{En 1 s recorrerá la distancia } s = \frac{2(3.14)(93,000,000)}{365(24)(60)(60)} \text{ mi} = 18.5 \text{ mi. Su velocidad es } 18.5 \text{ mi/s.}$$

## Problemas propuestos

1.16 Exprese en radianes cada uno de los siguientes ángulos:

(a)  $25^\circ$ , (b)  $160^\circ$ , (c)  $75^\circ 30'$ , (d)  $112^\circ 40'$ , (e)  $12^\circ 12' 20''$ , (f)  $18.34^\circ$

Resp. (a)  $5\pi/36$  o  $0.4363$  rad (c)  $151\pi/360$  o  $1.3177$  rad (e)  $0.2130$  rad  
(b)  $8\pi/9$  o  $2.7925$  rad (d)  $169\pi/270$  o  $1.9664$  rad (f)  $0.3201$  rad

1.17 Exprese en grados cada uno de los siguientes ángulos:

(a)  $\pi/4$  rad, (b)  $7\pi/10$  rad, (c)  $5\pi/6$  rad, (d)  $1/4$  rad, (e)  $7/5$  rad

Resp. (a)  $45^\circ$ , (b)  $126^\circ$ , (c)  $150^\circ$ , (d)  $14^\circ 19' 26''$  o  $14.32^\circ$ , (e)  $80^\circ 12' 51''$  o  $80.21^\circ$

1.18 En un círculo de 24 pulgadas de radio, encuentre la longitud del arco subtendido por un ángulo central de (a)  $2/3$  rad, (b)  $3\pi/5$  rad, (c)  $75^\circ$ , (d)  $130^\circ$ .

Resp. (a) 16 pulgadas, (b)  $14.4\pi$  o 45.2 pulgadas, (c)  $10\pi$  o 31.4 pulgadas, (d)  $52\pi/3$  o 54.5 pulgadas

1.19 Un círculo tiene un radio de 30 pulgadas. ¿Cuántos radianes hay en el ángulo subtendido por un arco de (a) 30 pulgadas, (b) 20 pulgadas, (c) 50 pulgadas?

Resp. (a) 1 rad, (b)  $2/3$  rad, (c)  $5/3$  rad

1.20 Encuentre el radio del círculo para el cual un arco de 15 pulgadas de longitud subtiende un ángulo de (a) 1 rad, (b)  $2/3$  rad, (c) 3 rad, (d)  $20^\circ$ , (e)  $50^\circ$ .

Resp. (a) 15 pulgadas, (b) 22.5 pulgadas, (c) 5 pulgadas, (d) 43.0 pulgadas, (e) 17.2 pulgadas

1.21 El final de un péndulo de 40 pulgadas describe un arco de 5 pulgadas. ¿Qué ángulo recorre el péndulo al balancearse?

Resp.  $1/8$  rad o  $7^\circ 9' 43''$  o  $7.16^\circ$

1.22 Un tren viaja a una velocidad promedio 12 mi/h en una curva de radio de 3000 pies. ¿Qué ángulo recorre en un minuto?

Resp.  $0.352$  rad o  $20^\circ 10'$  o  $20.17^\circ$

1.23 Una vía de retorno de un ferrocarril consta de dos arcos circulares. El ángulo central de uno es de  $20^\circ$  con un radio de 2500 pies y el ángulo central del otro es de  $25^\circ$  con un radio de 3000 pies. Encuentre la longitud total de los dos arcos.

Resp.  $6250\pi/9$  o 2182 pies

1.24 Encuentre el área del sector determinado por un ángulo central de  $x/3$  rad en un círculo de 32 mm de diámetro.

Resp.  $128\pi/3$  o  $134.04$  mm<sup>2</sup>

1.25 Determine el ángulo central necesario para formar un sector de  $14.6$  cm<sup>2</sup> de área en un círculo de 4.85 cm de radio.

Resp.  $1.24$  rad o  $71.05^\circ$  o  $71^\circ 3'$

1.26 Calcule el área del sector determinado por un ángulo central de  $100^\circ$  en un círculo de 12 cm de radio.

Resp.  $40\pi$  o  $125.7$  cm<sup>2</sup>



- 1.27** Si el área del sector de un círculo es de  $248 \text{ m}^2$  y el ángulo central es de  $135^\circ$ , encuentre el diámetro del círculo.  
*Resp.* diámetro = 29.0 m
- 1.28** Un volante de 10 cm de radio gira a una velocidad promedio de 900 r/min. ¿Qué tan rápido viaja un punto en el borde en m/s?  
*Resp.* in o 9.4 m/s
- 1.29** Un neumático de automóvil tiene un diámetro de 30 pulgadas. ¿A qué velocidad (r/min) gira la rueda en el eje cuando el automóvil mantiene una velocidad de 45 mi/h?  
*Resp.* 504 r/min
- 1.30** En el afilado de ciertas herramientas la velocidad lineal de la superficie del esmeril no debería exceder 6000 pies/s. Encuentre el número máximo de revoluciones por segundo de (a) una rueda de esmeril de 12 pulgadas de diámetro y (b) una rueda de 8 pulgadas.  
*Resp.* (a)  $6000/\pi$  r/s o 1910 r/s, (b)  $9000/\pi$  r/s o 2865 r/s
- 1.31** Si una llanta de automóvil de 78 cm de diámetro gira a 600 r/min, ¿cuál es la velocidad del automóvil en Km/h?  
*Resp.* 88.2 km/h

# Funciones trigonométricas de un ángulo genérico



## 2.1 COORDENADAS EN UNA LINEA

Una *línea dirigida* es una línea en la cual una dirección se toma como positiva y otra como negativa. La dirección positiva se indica con una cabeza de flecha.

Una *escala numérica* se establece en una línea dirigida escogiendo un punto  $O$  (véase Figura 2-1) llamado *origen* y una unidad de medición  $OA = 1$ . En esta escala,  $B$  está 4 unidades a la derecha de  $O$  (esto es, en la dirección positiva de  $O$ ) y  $C$  está 2 unidades a la izquierda de  $O$  (esto es, en la dirección negativa de  $O$ ). La distancia dirigida  $OB = +4$  y la distancia dirigida  $OC = -2$ . Es importante notar que, dado que la línea es dirigida,  $OB \neq BO$  y  $OC \neq CO$ . La distancia dirigida  $BO = -4$ , se mide en sentido contrario a la dirección positiva, y la distancia dirigida  $CO = +2$ . Entonces,  $CB = CO + OB = 2 + 4 = 6$  y  $BC = BO + OC = -4 + (-2) = -6$ .



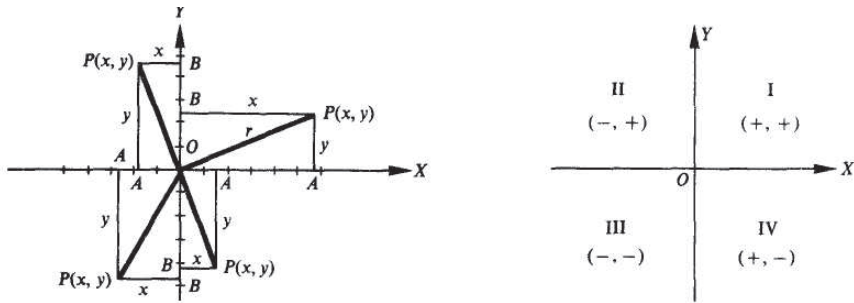
Fig. 2-1

## 2.2 COORDENADAS EN UN PLANO

Un *sistema rectangular de coordenadas* en un plano consiste de dos escalas numéricas (llamadas ejes), una horizontal y la otra vertical, cuyo punto de intersección (*origen*) es el origen de cada escala. Se acostumbra escoger la dirección positiva en cada escala como se indica en la figura, esto es, positiva a la derecha del eje horizontal o eje  $x$ , y positiva hacia arriba en el eje vertical o eje  $y$ . Por conveniencia, debe suponerse la misma unidad de medición en cada eje.

Gracias a este sistema, la posición de un punto  $P$  en el plano puede darse por medio de sus distancias (dirigidas) respecto a estos ejes, a los que se llama *coordenadas*. La coordenada  $x$  o *abscisa* de un punto  $P$  (véase Figura 2-2) es la distancia dirigida  $BP = OA$  y la coordenada  $y$  o *ordenada* es la distancia dirigida  $AP = OB$ . Un punto  $P$  con una abscisa  $x$  y una ordenada  $y$  se denotará como  $P(x, y)$ .

Los ejes dividen al plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes*, cada una de las cuales se numera en contra de la dirección de las manecillas del reloj I, II, III y IV. Los cuadrantes numerados, junto con los signos de las coordenadas de un punto en cada uno, se muestran en la Figura 2-3.



De esta forma, a cada punto en el plano se le asocian tres números:  $x$ ,  $y$  y  $r$ .

La distancia del punto  $P$  o *radio del vector*  $P$  es la distancia no dirigida  $r$  a cualquier punto  $P(x, y)$ , y está dada por

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

(Véanse Probs. 2.1 a 2.3)

### 2.3 ÁNGULOS EN POSICIÓN ESTÁNDAR

Con respecto a un sistema rectangular de coordenadas, se dice que un ángulo se encuentra en *posición estándar* cuando su vértice está en el origen y su lado inicial coincide con el eje positivo  $x$ .

Un ángulo en posición estándar pertenece al *primer cuadrante* o es un *ángulo del primer cuadrante* cuando su lado terminal cae dentro de ese cuadrante. Las definiciones son similares para los demás cuadrantes. Por ejemplo, los ángulos con valores de  $30^\circ$ ,  $59^\circ$ , y  $-330^\circ$  son ángulos del primer cuadrante [véase Figura 2-4(a)];  $119^\circ$  es un ángulo del segundo cuadrante;  $-119^\circ$  es un ángulo del tercer cuadrante; y  $-10^\circ$  y  $710^\circ$  son ángulos del cuarto cuadrante [véase Figura 2-4(b)].

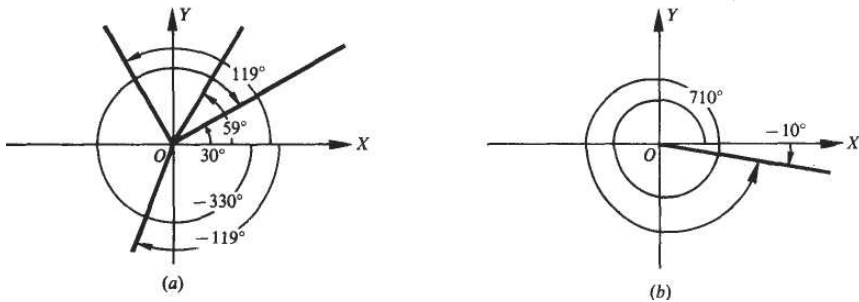


Fig. 2-4

Cuando dos ángulos en posición estándar coinciden en sus lados terminales se les llama *ángulos coterminales*. Por ejemplo,  $30^\circ$  y  $-330^\circ$ , y  $-10^\circ$  y  $710^\circ$  son pares de ángulos coterminales. Existe un número ilimitado de ángulos coterminales para un ángulo específico. Los ángulos coterminales para un ángulo dado, pueden encontrarse agregando múltiplos enteros de  $360^\circ$  al valor del ángulo.

(Véanse Probs. 2.4 y 2.5)

A los ángulos situados en  $0^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ , y  $270^\circ$  junto con sus ángulos coterminales correspondientes se les conoce como *ángulos cuadrantales*.

## 2.4 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENÉRICO

Supóngase que  $\theta$  es un ángulo (no cuadrantal) en posición estándar y dejando que  $P(x, y)$  sea un punto, distinto del origen, localizado en el lado terminal del ángulo. Las seis funciones trigonométricas de  $\theta$ , se definen de la siguiente forma en términos de la abscisa, la ordenada y la distancia del punto  $P$ :

$$\begin{aligned} \text{seno } \theta = \sin \theta &= \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{y}{r} & \text{cotangente } \theta = \cot \theta &= \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y} \\ \text{coseno } \theta = \cos \theta &= \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{x}{r} & \text{secante } \theta = \sec \theta &= \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x} \\ \text{tangente } \theta = \tan \theta &= \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x} & \text{cosecante } \theta = \csc \theta &= \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y} \end{aligned}$$

Como consecuencia inmediata de estas definiciones, se obtienen las relaciones también llamadas *recíprocas*:

$$\begin{aligned} \sin \theta &= 1/\csc \theta & \tan \theta &= 1/\cot \theta & \sec \theta &= 1/\cos \theta \\ \cos \theta &= 1/\sec \theta & \cot \theta &= 1/\tan \theta & \csc \theta &= 1/\sin \theta \end{aligned}$$

Debido a estas relaciones recíprocas, se utiliza más frecuentemente una función, de cada par de relaciones trigonométricas recíprocas. Las funciones trigonométricas que se utilizan con más frecuencia son el seno, el coseno y la tangente. Es evidente a partir de los diagramas de la Figura 2-5 que los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$  cambian de acuerdo con el valor de  $\theta$ . En el Problema 2.6 se demuestra que los valores de las funciones para un ángulo  $\theta$  dado son independientes del punto  $P$  en su lado terminal.

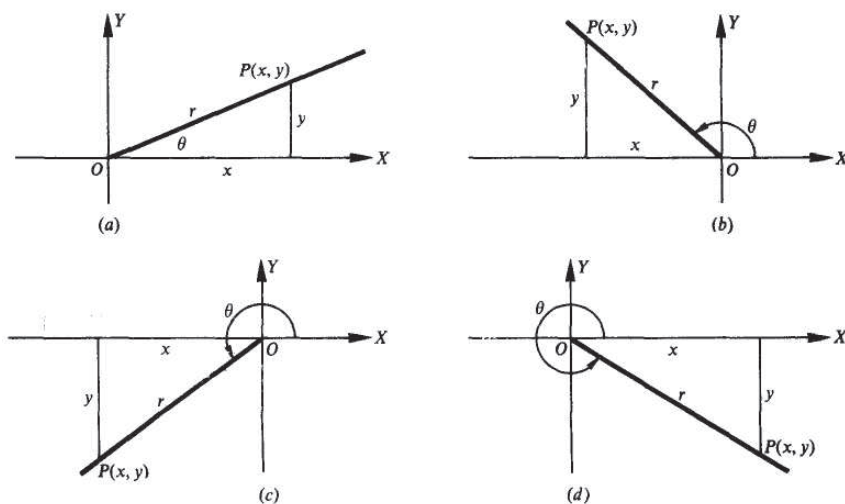
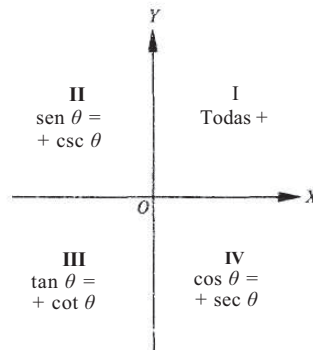


Fig. 2-5

### 2.5 SIGNOS DE LAS FUNCIONES EN LOS CUADRANTES

Dado que  $r$  es siempre positiva, los signos de las funciones trigonométricas en los diferentes cuadrantes dependen de los signos  $x$  y  $y$ . Para determinar estos signos, puede imaginarse un ángulo en posición estándar o utilizar un dispositivo como el que se muestra en la Figura 2-6, donde se enumeran sólo las funciones cuyos signos son positivos.

(Véase Prob. 2.7)



Cuando se da un ángulo, sus funciones trigonométricas están determinadas en forma única. Sin embargo, cuando se da el valor de una función de un ángulo, el ángulo no se determina en forma única. Por ejemplo, si  $\text{sen } \theta = 1/2$ , entonces  $\theta = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, \dots$ . En general, dos posiciones posibles del lado terminal pueden encontrarse, por ejemplo, los lados terminales  $30^\circ$  y  $150^\circ$  de la ilustración anterior. La excepción a esta regla ocurre cuando el ángulo es cuadrantal.

(Véanse Probs. 2.8 a 2.16)

### 2.6 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS ÁNGULOS CUADRANTALES

Para un ángulo cuadrantal, el lado terminal coincide con uno de los ejes. Un punto  $P$  en el lado terminal, distinto del origen, tendrá a  $x = 0$  y  $y \neq 0$ , o bien  $x \neq 0$  y  $y = 0$ . En cualquier caso, dos de las seis funciones estarán indefinidas. Por ejemplo, el lado terminal del ángulo  $0^\circ$  coincide con el eje positivo  $x$  y la ordenada de  $P$  es 0. Dado que en la definición de la cotangente y la cosecante la ordenada se encuentra en el denominador, estas funciones no están definidas. En este libro, se utilizará en estos casos *indefinido* en lugar de un valor numérico, pero algunos autores lo indican escribiendo  $\cot 0^\circ = \infty$ , y otros lo escriben como  $\cot 0^\circ = \pm \infty$ . Se obtuvieron los siguientes resultados en el Problema 2.17.

Ángulo	sen $\theta$	cos $\theta$	tan $\theta$	cot $\theta$	sec $\theta$	csc $\theta$
$0^\circ$	0	1	0	Indefinido	1	Indefinido
$90^\circ$	1	0	Indefinido	0	Indefinido	1
$180^\circ$	0	-1	0	Indefinido	-1	Indefinido
$270^\circ$	-1	0	Indefinido	0	Indefinido	-1

## 2.7 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INDEFINIDAS

Se ha hecho notar que la  $\cot 0^\circ$  y la  $\csc 0^\circ$  no están definidas debido a que la división por cero no se permite, pero los valores de estas funciones son de interés para ángulos cercanos a  $0^\circ$ . En la Figura 2-7(a) considérese  $\theta$  como un pequeño ángulo positivo en posición estándar y en su lado terminal considérese que  $P(x, y)$  se encuentra a cierta distancia  $r$  de  $O$ . En este caso,  $x$  es ligeramente menor a  $r$  y  $y$  es positiva y muy pequeña; entonces,  $\cot \theta = x/y$  y  $\csc \theta = r/y$  son positivas y muy grandes. A continuación, permita que  $\theta$  disminuya hacia  $0^\circ$  con  $P$  a una distancia  $r$  de  $O$ . Ahora,  $x$  se incrementa, pero siempre es menor que  $r$ , mientras  $y$  decrece pero sigue siendo mayor que 0; así,  $\cot \theta$  y  $\csc \theta$  serán cada vez más grandes. (Para comprobar esto, considérese  $r = 1$  y calcule  $\csc \theta$  cuando  $y = 0.1, 0.01, 0.001, \dots$ .) Esta situación se indica de la siguiente forma "Si  $\theta$  se aproxima a 0, entonces  $\cot \theta$  se aproxima a  $+\infty$ ", que es lo que significa cuando se expresa  $\cot 0^\circ = +\infty$ .

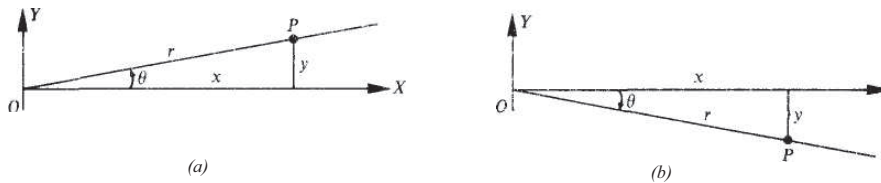


Fig. 2-7

Ahora supóngase que  $\theta$  es un ángulo negativo pero cercano a  $0^\circ$ , como en la Figura 2-7(b) y tómesese un punto  $P(x, y)$  en su lado terminal a una distancia  $r$  de  $O$ . Entonces,  $x$  es positiva y ligeramente menor que  $r$ , mientras que  $y$  es negativa y tiene un valor absoluto pequeño. Tanto la  $\cot \theta$  como la  $\csc \theta$  son negativas con valores absolutos muy grandes. En seguida, incrementétese  $\theta$  a cero, conservando  $P$  a una distancia  $r$  de  $O$ . A continuación,  $x$  se incrementa, pero siempre es menor que  $r$ , mientras que  $y$  sigue siendo negativa con un valor absoluto que decrece a 0; así  $\cot \theta$  y  $\csc \theta$  siguen siendo negativas pero tienen valores absolutos que son cada vez más grandes. Esta situación se indica de la siguiente forma: "Si  $\theta$  se aproxima a  $0^\circ$ , entonces la  $\cot \theta$  se aproxima a  $-\infty$ ", que es lo que significa la expresión  $\cot 0^\circ = -\infty$ .

En cada uno de estos casos,  $\cot 0^\circ = +\infty$  y  $\cot 0^\circ = -\infty$ , el uso del signo  $\pm$  no tiene el significado acostumbrado de "igual a", y debe utilizarse con cautela dado que  $\cot 0^\circ$  es indefinida y  $\infty$  no es un número. La notación se utiliza como una forma corta para describir una situación especial de las funciones trigonométricas.

El comportamiento de las otras funciones trigonométricas que no están definidas puede explorarse en forma similar. La siguiente tabla resume el comportamiento de cada función trigonométrica que se vuelve indefinida para ángulos desde  $0^\circ$  hasta  $360^\circ$ .

Ángulo $\theta$	Valores de las funciones				
$\theta \rightarrow 0^{0^+}$	$\cot$	$\theta \rightarrow +\infty$	$y$	$\csc$	$\theta \rightarrow +\infty$
$\theta \rightarrow 0^{0^-}$	$\cot$	$\theta \rightarrow -\infty$	$y$	$\csc$	$\theta \rightarrow -\infty$
$\theta \rightarrow 90^{0^+}$	$\tan$	$\theta \rightarrow +\infty$	$y$	$\sec$	$\theta \rightarrow +\infty$
$\theta \rightarrow 90^{0^-}$	$\tan$	$\theta \rightarrow -\infty$	$y$	$\sec$	$\theta \rightarrow -\infty$
$\theta \rightarrow 180^{0^-}$	$\cot$	$\theta \rightarrow -\infty$	$y$	$\csc$	$\theta \rightarrow +\infty$
$\theta \rightarrow 180^{0^+}$	$\cot$	$\theta \rightarrow +\infty$	$y$	$\csc$	$\theta \rightarrow -\infty$
$\theta \rightarrow 270^{0^-}$	$\tan$	$\theta \rightarrow +\infty$	$y$	$\sec$	$\theta \rightarrow -\infty$
$\theta \rightarrow 270^{0^+}$	$\tan$	$\theta \rightarrow -\infty$	$y$	$\sec$	$\theta \rightarrow +\infty$

(NOTA: El signo  $+$  indica que el valor es mayor al número establecido;  $180^{0^-}$  significa un valor mayor a  $180^\circ$ . El signo  $-$  indica que el valor es menor al número establecido;  $90^{0^+}$  indica un valor menor de  $90^\circ$ )

## 2.8 COORDENADAS DE PUNTOS EN UN CÍRCULO UNITARIO

Sea  $s$  la longitud de arco en un círculo unitario  $x^2 + y^2 = 1$  y a cada  $s$  le hagamos corresponder un ángulo  $\theta$  en radianes (véase Sec. 1.4). Al utilizar el punto  $(1,0)$  como el punto inicial del arco y  $P(x, y)$  como el punto terminal del arco, pueden determinarse las coordenadas del punto  $P$  en términos del número real  $s$ , como se muestra en la Figura 2-8.

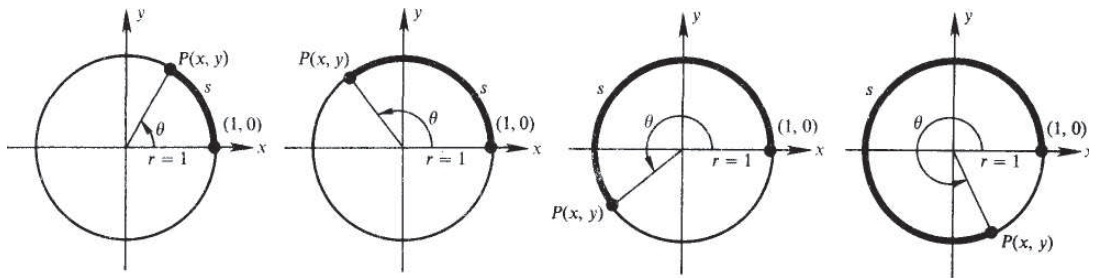


Fig. 2-8

Para cualquier ángulo  $\theta$ ,  $\cos \theta = x/r$  y  $\sin \theta = y/r$ . En un círculo unitario  $r = 1$  y la longitud del arco  $s = r\theta = \theta$  y  $\cos \theta = \cos s = x/1 = x$  y  $\sin \theta = \sin s = y/1 = y$ . El punto  $P$  asociado con la longitud del arco  $s$  se determina por  $P(x, y) = P(\cos s, \sin s)$ . La función envolvente  $W$  relaciona los números reales  $s$  con puntos  $P$  del círculo unitario, siendo denotada por:

$$W(s) = (\cos s, \sin s)$$

Algunas longitudes de arco se relacionan con puntos en el círculo unitario cuyas coordenadas son fáciles de determinar. Si  $s = 0$ , el punto es  $(1, 0)$ ; para  $s = \pi/2$ , un cuarto del círculo unitario, el punto es  $(0, 1)$ ;  $s = \pi$  se relaciona con  $(-1, 0)$ ; y  $s = 3\pi/2$  se relaciona con  $(0, -1)$ . (Véase Sec. 1.5.) Estos valores se resumen en la siguiente tabla:

$s$	$P(x, y)$	$\cos s$	$\sin s$
0	$(1, 0)$	1	0
$\pi/2$	$(0, 1)$	0	1
$\pi$	$(-1, 0)$	-1	0
$3\pi/2$	$(0, -1)$	0	-1

## 2.9 FUNCIONES CIRCULARES

Cada arco de longitud  $s$  determina un simple par ordenado  $(\cos s, \sin s)$  en un círculo unitario. Tanto  $s$  como  $\cos s$  son números reales y definen la función  $(s, \cos s)$  llamada *función cosenoidal circular*. De la misma forma  $s$  y  $\sin s$  son números reales y definen una función  $(s, \sin s)$  llamada *función senooidal circular*. Estas funciones son llamadas *funciones circulares* ya que tanto  $\cos s$  como  $\sin s$  son coordenadas en un círculo unitario. Las funciones circulares  $\sin s$  y  $\cos s$  son similares a las funciones trigonométricas  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  en todos los aspectos ya que, como se mostró en el Capítulo 1, cualquier ángulo medido en grados puede convertirse a radianes y este ángulo medido en radianes se asocia con un arco  $s$  en el círculo unitario. La diferencia importante en las funciones circulares es dado que,  $(s, \cos s)$  y  $(s,$

sen s) son pares ordenados de números reales, todas las propiedades y procedimientos de las funciones de números reales pueden aplicarse a funciones circulares.

Las funciones circulares restantes se definen en función de cos s y sen s.

$$\tan s = \frac{\text{sen } s}{\text{cos } s} \text{ para } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ donde } k \text{ es un entero}$$

$$\cot s = \frac{\text{cos } s}{\text{sen } s} \text{ para } s \neq k\pi \text{ donde } k \text{ es un entero}$$

$$\sec s = \frac{1}{\text{cos } s} \text{ para } s \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ donde } k \text{ es un entero}$$

$$\csc s = \frac{1}{\text{sen } s} \text{ para } s \neq k\pi \text{ donde } k \text{ es un entero}$$

Debe notarse que las funciones circulares están definidas dondequiera que las funciones trigonométricas estén definidas y que los valores de los dominios que se descartan corresponden a los valores donde las funciones trigonométricas están indefinidas.

En las aplicaciones no hay necesidad de distinguir entre funciones trigonométricas de ángulos en radianes y funciones circulares de números reales.

## Problemas Resueltos

- 2.1 Utilizando el sistema de coordenadas rectangulares, localice los siguientes puntos y determine el valor de r para cada inciso:

$A(1, 2)$ ,  $B(-3, 4)$ ,  $C(-3, -3\sqrt{3})$ ,  $D(4, -5)$  (véase Fig. 2-9).

Para A:  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$

Para B:  $r = \sqrt{9 + 16} = 5$

Para C:  $r = \sqrt{9 + 27} = 6$

Para D:  $r = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

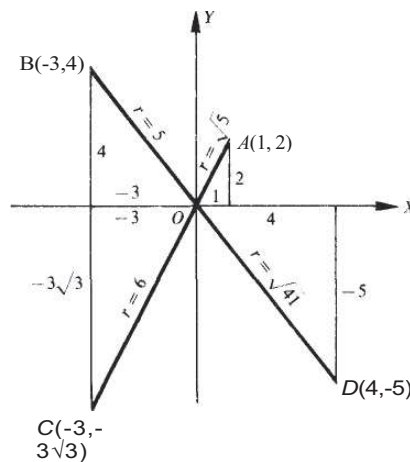


Fig. 2-9

2.2 Determine la coordenada faltante de  $P$  en cada uno de los siguientes incisos:

- (a)  $x = 2, r = 3, P$  en el primer cuadrante  
 (b)  $x = -3, r = 5, P$  en el segundo cuadrante  
 (c)  $y = -1, r = 3, P$  en el tercer cuadrante  
 (d)  $x = 2, r = \sqrt{5}, P$  en el cuarto cuadrante  
 (e)  $x = 3, r = 3$   
 (f)  $y = -2, r = 2$   
 (g)  $x = 0, r = 2, y$  positiva  
 (h)  $y = 0, r = 1, x$  negativa

(a) Utilizando la relación  $x^2 + y^2 = r^2$ , se tiene  $4 + y^2 = 9$ ; entonces,  $y^2 = 5$  y  $y = \pm \sqrt{5}$ .  
 Dado que  $P$  está en el primer cuadrante, la coordenada faltante es  $y = \sqrt{5}$ .

(b) Aquí,  $9 + y^2 = 25, y^2 = 16, y = \pm 4$ .

Dado que  $P$  está en el segundo cuadrante la coordenada faltante es  $y = -4$ .

(c) Se tiene que  $x^2 + 1 = 9, x^2 = 8, y = \pm 2\sqrt{2}$ .

Dado que  $P$  está en el tercer cuadrante, la coordenada faltante es  $x = -2\sqrt{2}$ .

(d)  $y^2 = 5 - 4$  y  $y = \pm 1$ . Dado que  $P$  está en el cuarto cuadrante, la coordenada faltante es  $y = -1$ . (e)

Aquí  $y^2 = r^2 - x^2 = 9 - 9 = 0$  y la coordenada faltante es  $y = 0$ . (f)  $x^2 = r^2 - y^2 = 0$  y  $x = 0$ .

(g)  $y^2 = r^2 - x^2 = 4$  y  $y = 2$  es la coordenada faltante. (h)

$x^2 = r^2 - y^2 = 1$  y  $x = -1$  es la coordenada faltante.

2.3 En qué cuadrantes puede estar localizado  $P(x, y)$  si

- (a)  $\angle x$  es positiva y  $y \neq 0$ ? (c)  $\angle y/r$  es positiva? (e)  $\angle y/x$  es positivo?  
 (b)  $\angle y$  es negativa y  $x \neq 0$ ? (cf)  $\angle rx$  es negativo?

- (a) En el primer cuadrante si  $y$  es positiva y en el cuarto cuadrante si  $y$  es negativa.  
 (b) En el cuarto cuadrante cuando  $x$  es positiva y en el tercer cuadrante cuando  $x$  es negativa.  
 (c) En el primer y segundo cuadrantes.  
 (d) En el segundo y tercer cuadrantes.  
 (e) En el primer cuadrante cuando  $x$  y  $y$  son positivas y en el tercer cuadrante cuando  $x$  y  $y$  son negativas.

2.4 (a) Grafique los siguientes ángulos en posición estándar y determine aquellos que son coterminales:

$$125^\circ, 210^\circ, -150^\circ, 385^\circ, 930^\circ, -370^\circ, -955^\circ, -870^\circ$$

(b) Mencione otros cinco ángulos coterminales de  $125^\circ$ .

(a) Los ángulos en posición estándar se muestran en la Figura 2-10. Los ángulos  $125^\circ$  y  $-955^\circ$  son coterminales ya que  $-955^\circ = 125^\circ + 3 \cdot 360^\circ$  (o bien,  $125^\circ = -955^\circ + 3 \cdot 360^\circ$ ). Los ángulos  $210^\circ, -150^\circ, 930^\circ, y -870^\circ$  son coterminales dado que  $-150^\circ = 210^\circ - 1 \cdot 360^\circ, 930^\circ = 210^\circ + 2 \cdot 360^\circ, y -870^\circ = 210^\circ - 3 \cdot 360^\circ$ . En la Figura 2-10 se puede notar que hay un solo ángulo en el primer cuadrante,  $385^\circ$ , y tan solo un ángulo en el cuarto cuadrante,  $-370^\circ$ , por lo tanto, estos ángulos no pueden ser coterminales con ninguno de los otros.

(b) Cualquier ángulo coterminal con  $125^\circ$  puede ser descrito de la forma  $125^\circ + A \cdot 360^\circ$  donde  $k$  es un entero. De esta forma,  $485^\circ = 125^\circ + 1 \cdot 360^\circ, 845^\circ = 125^\circ + 2 \cdot 360^\circ, -235^\circ = 125^\circ - 1 \cdot 360^\circ, -595^\circ = 125^\circ - 2 \cdot 360^\circ, y -2395^\circ = 125^\circ - 7 \cdot 360^\circ$  son ángulos coterminales de  $125^\circ$ .

2

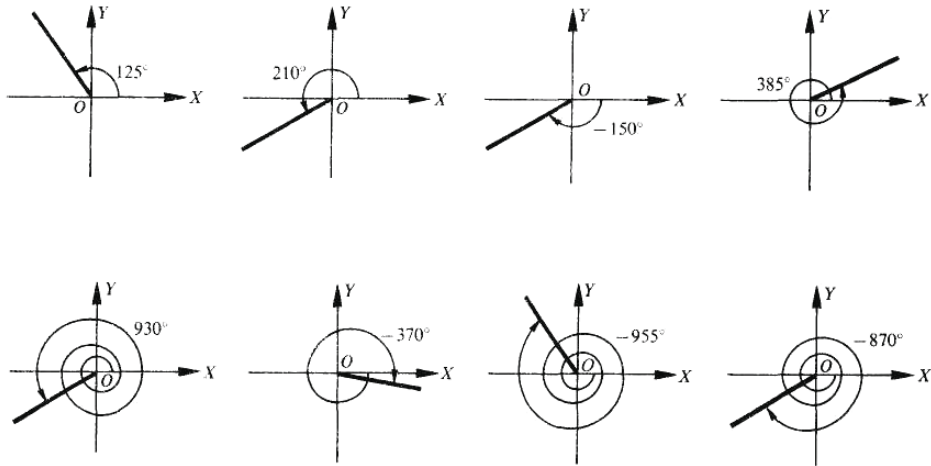


Fig. 2-10

2.5 Determine un ángulo positivo y un ángulo negativo coterminales con cada uno de los siguientes ángulos en radianes:

- (a)  $\pi/6$ , (b)  $5\pi/4$ , (c) 0, (d)  $-17\pi/6$ , (e)  $-10\pi/3$ , (f)  $7\pi/2$

$K 380^\circ = K (2\pi \text{ radianes}) = 2K\pi$  donde  $K$  es un entero

(a)  $\pi/b + 2n = 13\pi/6; \pi/6 - 2\pi = -11\pi/6$

(b)  $5\pi/4 + 2\pi = 13\pi/4; 5\pi/4 - 2\pi = -3\pi/4$

(c)  $0 + 2\pi = 2\pi; 0 - 2\pi = -2\pi$

(d)  $-17\pi/6 + 4\pi = 7\pi/6; -17\pi/6 + 2\pi = -5\pi/6$

(e)  $-10\pi/3 + 4\pi = 2\pi/3; -10\pi/3 + 2\pi = -4\pi/3$

(f)  $7\pi/2 - 2\pi = 3\pi/2; 7\pi/2 - 4\pi = -\pi/2$

2.6 Demuestre que los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo  $t$  no dependen de la elección del punto  $P$  en el lado terminal del ángulo.

En el lado terminal de cada ángulo de la Figura 2-11, si  $P$  y  $P'$  tienen coordenadas como se indica y las distancias  $OP$  y  $OP'$  se denotan por  $r$  y  $r'$  respectivamente. Trace una perpendicular  $AP$  y  $A'P'$  al eje  $x$ . En cada uno de los diagramas de la Figura 2-11, los triángulos  $OAP$  y  $OA'P'$ , con lados  $a, b, r$  y  $a', b', r'$  respectivamente, son similares; así, usando la Figura 2-11(a):

(1)  $b/r = b'/r'$        $a/r = a'/r'$        $b/a = b'/a'$        $a/b = a'/b'$        $r/a = r'/a'$        $r/b = r'/b'$

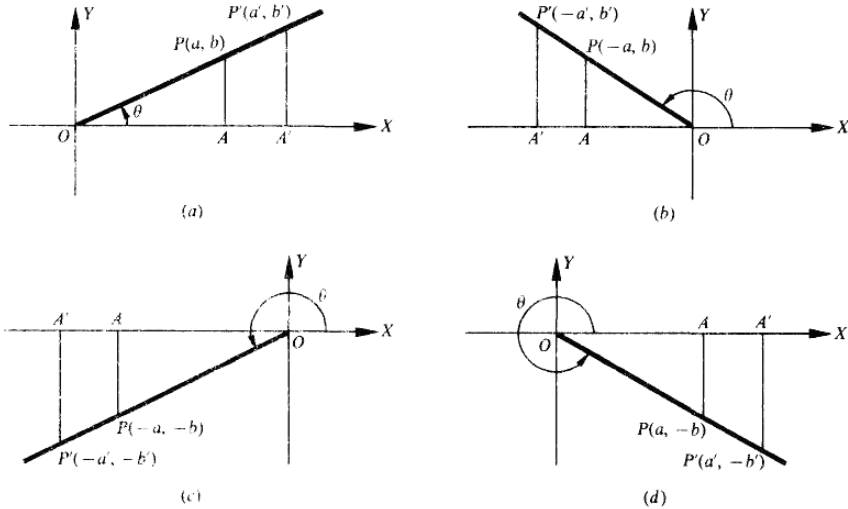


Fig. 2-11

Dado que las relaciones son las relaciones trigonométricas para ángulos del primer cuadrante, los valores de las funciones de cualquier ángulo en el primer cuadrante son independientes de la elección de P. De (1) y Figura 2-11(b) se obtiene lo siguiente:

$$b/r = b'/r' \quad -a/r = -a'/r' \quad b/-a = b'/-a' \quad -a/b = -a'/b' \quad r/-a = r'/-a' \quad r/b = r'/b'$$

Dado que estas relaciones son relaciones trigonométricas para ángulos del segundo cuadrante, los valores de las funciones de cualquier ángulo en el segundo cuadrante son independientes de la elección de P.

Se deja al lector el uso de la Figura 2-11(c) y (d) respectivamente, para considerar los casos,

$$-b/r = -b'/r', \quad -a/r = -a'/r', \text{ etc.} \quad \text{y} \quad -b/r = -b'/r', \quad a/r = a'/r', \text{ etc.}$$

2.7 Determine los signos de las funciones seno, coseno y tangente en cada cuadrante.

sen  $\pi = y/r$ . Dado que y es positiva en los cuadrantes I y II y negativa en los cuadrantes III y IV y r es siempre positiva, sen  $\theta$  es positivo en los cuadrantes I y II y negativo en los cuadrantes III y IV

cos  $\theta = x/r$ . Dado que x es positiva en los cuadrantes I y IV y negativa en los cuadrantes II y III, cos  $\theta$  es positivo en los cuadrantes I y IV y negativo en los cuadrantes II y III

tan  $\pi = y/x$ . Dado que x y y tienen los mismos signos en los cuadrantes I y III, y signos opuestos en los cuadrantes II y IV, entonces tan  $\pi$  es positiva en los cuadrantes I y III y negativa en los cuadrantes II y IV. (NOTA: El recíproco de una función trigonométrica tiene el mismo signo tanto en la función, como en cada cuadrante.)

2.8 Determine los valores de las funciones trigonométricas de un ángulo  $\theta$  (el ángulo positivo más pequeño en posición estándar) si P es un punto en el lado terminal de  $\theta$  y las coordenadas de P son

(a) P(3,4), (b) P(-3,4), (c) P(-1, -3)

$$\text{sen } \theta = y/r = 4/5$$

$$\text{sen } \theta = 4/5$$

$$\text{sen } \theta = -3/\sqrt{10} = -3\sqrt{10}/10$$

$$(a) \quad r = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$
  
[Véase Figura 2-12(a).]

$$(b) \quad r = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5$$
  
[Véase Figura 2-12(b).]

$$(c) \quad r = \sqrt{(-1)^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}$$
  
[Véase Figura 2-12(c).]

$$\text{cot } \theta = x/y = 3/4$$

$$\text{cot } \theta = -3/4$$

$$\text{cot } \theta = -1/(-3) = 1/3$$

$$\text{sec } \theta = r/x = 5/3$$

$$\text{sec } \theta = 5/(-3) = -5/3$$

$$\text{sec } \theta = \sqrt{10}/(-1) = -\sqrt{10}$$

$$\text{esc } \theta = r/y = 5/4$$

$$\text{esc } \theta = 5/4$$

$$\text{esc } \theta = \sqrt{10}/(-3) = -\sqrt{10}/3$$

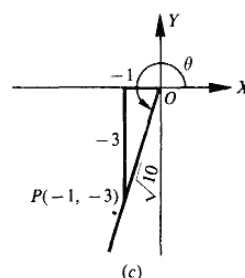
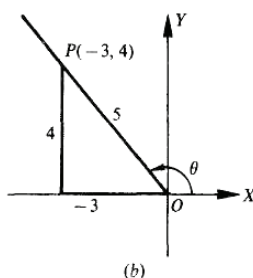
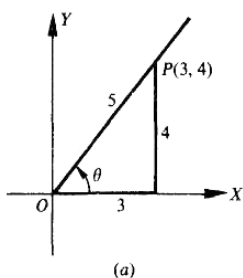


Fig. 2-12

Observe las relaciones recíprocas. Por ejemplo, en (b)

$$\text{sen } \theta = \frac{1}{\text{csc } \theta} = \frac{4}{5} \quad \text{cos } \theta = \frac{1}{\text{sec } \theta} = \frac{3}{5} \quad \text{tan } \theta = \frac{1}{\text{cot } \theta} = \frac{4}{3} \quad \text{etc.}$$

Observe en (c) la racionalización de los denominadores:

$$\text{sen } \theta = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$$

$$\text{cos } \theta = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10}$$

Siempre que el denominador de una fracción sea un número irracional, se dará también una fracción equivalente con un denominador racional.

2.9 En qué cuadrante quedará localizado  $\theta$ , si

(a) ¿sen  $\theta$  y eos  $\theta$  son negativos?

(c) ¿sen  $\theta$  es positivo y sec  $\theta$  es negativa?

(b) ¿sen  $\theta$  y tan  $\theta$  son positivos?

(d) ¿sec  $\theta$  es negativa y tan  $\theta$  es negativa?

### FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENÉRICO

- (a) Dado que el  $\text{sen } \theta = y/r$  y  $\text{cos } \theta = x/r$ , tanto  $x$  como  $y$  son negativos. (Recuerde que  $r$  es siempre positiva.) Así,  $\theta$  es un ángulo que se encuentra en el tercer cuadrante.
- (b) Dado que  $\text{sen } \theta$  es positivo, y es positivo; como  $\text{tan } \theta = y/x$  es positivo,  $x$  es también positivo. Así,  $\theta$  es un ángulo del primer cuadrante.
- (c) Dado que  $\text{sen } \theta$  es positivo, y es positivo; dado que  $\text{sec } \theta$  es negativa  $x$  es negativa. Así,  $\theta$  es un ángulo del segundo cuadrante.
- (d) Dado que  $\text{sec } \theta$  es negativa,  $x$  es negativa; dado que  $\text{tan } \theta$  es negativa, y es positiva. Así,  $\theta$  es un ángulo del segundo cuadrante.

**2.10** En qué cuadrante quedará localizado  $t\theta$ , si

- (a) ¿ $\text{sen } \theta$  es positivo?      (b) ¿ $\text{cos } \theta$  es negativo?      (c) ¿ $\text{tan } \theta$  es negativa?      (a) ¿ $\text{sec } \theta$  es positiva?
- (a) Dado que el  $\text{sen } \theta$  es positivo, y es positivo. Entonces  $x$  puede ser positivo o negativo y  $\theta$  puede ser un ángulo del primer o segundo cuadrante.
- (b) Dado que  $\text{cos } \theta$  es negativo,  $x$  es negativo. Entonces  $y$  puede ser positivo o negativo y  $\theta$  será un ángulo del segundo o tercer cuadrante.
- (c) Dado que  $\text{tan } \theta$  es negativa,  $y$  puede ser positivo y  $x$  negativo, o bien negativo y  $x$  positivo. Así,  $\theta$  puede ser un ángulo del segundo o cuarto cuadrante.
- (d) Dado que  $\text{sec } \theta$  es positiva,  $x$  es positiva. Así,  $\theta$  es un ángulo que puede estar en el primero o cuarto cuadrante.

**2.11** Encuentre los valores de  $\text{cos } \theta$  y  $\text{tan } \theta$ , dado que  $\text{sen } \theta = 8/17$  y  $\theta$  en el cuadrante I.

Sea  $P$  un punto en la línea terminal de  $\theta$ . Dado que  $\text{sen } \theta = y/r = 8/17$ , se considera  $y = 8$  y  $r = 17$ . Ya que  $\theta$  está en el primer cuadrante,  $x$  es positiva: así

$$x = \sqrt{r^2 - y^2} = \sqrt{(17)^2 - (8)^2} = 15$$

Para dibujar la figura, localice el punto  $P(15, 8)$ , únalo al origen, e indique el ángulo  $\theta$ . (Véase Figura 2-13.)

$$\text{cos } \theta = \frac{x}{r} = \frac{15}{17} \quad \text{y} \quad \text{tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{8}{15}$$

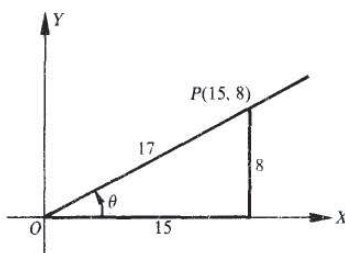


Fig. 2-13

La elección de  $y = 8$  y  $r = 17$  es por conveniencia. Note que  $8/17 = 16/34$  y que se hubiera podido tomar  $y = 16$ ,  $r = 34$ . Entonces  $x = 30$ ,  $\text{cos } \theta = 30/34 = 15/17$  y  $\text{tan } \theta = 16/30 = 8/15$ .

(Véase Prob. 2.6.)

2.12 Encuentre los valores del  $\text{sen } \theta$  y la  $\text{tan } \theta$ , dado que  $\text{cos } \theta = 5/6$

Dado que el  $\text{cos } \theta$  es positivo,  $\theta$  está en el cuadrante I o IV.

Dado que  $\text{cos } \theta = x/r = 5/6$ , se toma  $x = 5$  y  $r = 6$ ;  $y = \pm\sqrt{((6)^2 - (5)^2)} = \pm\sqrt{11}$  (a) Para  $\theta$  en el cuadrante I [Figura 2-14(a)] se tiene que  $x = 5$ ,  $y = \sqrt{11}$ , y  $r = 6$ ; entonces

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{\sqrt{11}}{6} \quad \text{y} \quad \text{tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{11}}{5}$$

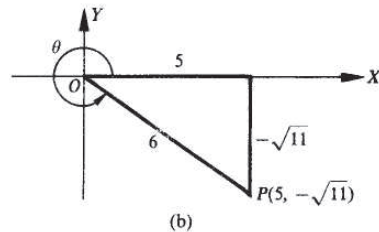
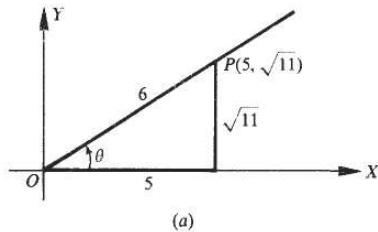


Fig. 2-14

(b) Para  $\theta$  en el cuadrante IV [Figura 2-14(b)] se tiene  $x = 5$ ,  $y = -\sqrt{11}$ , y  $r = 6$ ; entonces

$$\text{sen } \theta = \frac{y}{r} = \frac{-\sqrt{11}}{6} \quad \text{y} \quad \text{tan } \theta = \frac{y}{x} = \frac{-\sqrt{11}}{5}$$

2.13 Encuentre los valores de  $\text{sen } \theta$  y  $\text{cos } \theta$ , dado que  $\text{tan } \theta = -3/4$

Dado que  $\text{tan } \theta = y/x$  es negativa,  $\theta$  está en el cuadrante II (considere a  $x = -4$  y  $y = 3$ ) o en el cuadrante IV (considere a  $x = 4$  y  $y = -3$ ). En cualquier caso  $r = \sqrt{16 + 9} = 5$ .

(a) Para  $\theta$  en el cuadrante II [Figura 2-15(a)],  $\text{sen } \theta = y/r = 3/5$  y  $\text{cos } \theta = x/r = -4/5$ . (b)

Para  $\theta$  en el cuadrante IV [Figura 2-15(b)],  $\text{sen } \theta = y/r = -3/5$  y  $\text{cos } \theta = x/r = 4/5$ .

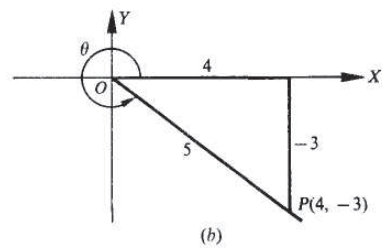
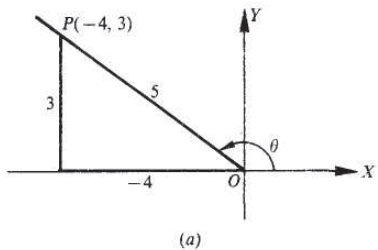


Fig. 2-15

- 2.14 Encuentre el  $\sin \theta$ , dado que  $\cos \theta = -4/5$  y que  $\tan \theta$  es positiva.

Dado que el  $\cos \theta = x/r$  es negativo,  $x$  es negativa. Dado que  $\tan \theta = y/x$  es positiva,  $y$  deberá ser positiva en el cuadrante II (Véase Figura 2.16.)

Tomando  $x = -4$  y  $r = 5$ ;  $\sqrt{5^2 - (-4)^2} = 3$ . Así,  $\sin \theta = y/r = 3/5$ .

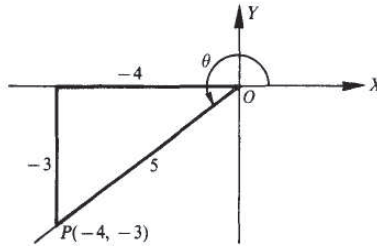


Fig. 2-16

- 2.15 Encuentre los otros valores de las funciones faltantes de  $\theta$ , dado que  $\sin \theta = \sqrt{3}/2$  y  $\cos \theta = -1/2$ .

Dado que  $\sin \theta = y/r$  es positivo,  $y$  es positivo. Dado que  $\cos \theta = x/r$  es negativo,  $x$  es negativa. Así,  $\theta$  se encuentra en el cuadrante II. (Véase Figura 2-17.)

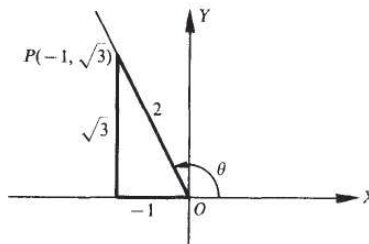


Fig. 2-17

Considerando  $x = -1$ ,  $y = \sqrt{3}$ , y  $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ , se tiene

$$\tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{\sqrt{3}}{-1} = -\sqrt{3} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{-1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = -2 \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

2.16 Determine los valores del  $\cos \theta$  y la  $\tan \theta$ , si  $\sin \theta = m/n$ , es una fracción negativa.

Dado que el  $\sin \theta$  es negativo,  $\theta$  está en el cuadrante III o IV.

(a) En el cuadrante III: Considere  $y = m$ ,  $r = n$ ,  $x = -\sqrt{n^2 - m^2}$ ; entonces

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{-\sqrt{n^2 - m^2}}{n} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{-m}{-\sqrt{n^2 - m^2}} = \frac{-m\sqrt{n^2 - m^2}}{n^2 - m^2}$$

(b) En el cuadrante IV: Considere  $y = m$ ,  $r = n$ ,  $x = +\sqrt{n^2 - m^2}$ ; entonces

$$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{n^2 - m^2}}{n} \quad \text{y} \quad \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{m}{\sqrt{n^2 - m^2}} = \frac{m\sqrt{n^2 - m^2}}{n^2 - m^2}$$

2.17 Determine los valores de las funciones trigonométricas de

(a)  $0^\circ$ , (b)  $90^\circ$ , (c)  $180^\circ$ , (d)  $270^\circ$

Sea  $P$  cualquier punto (diferente de 0) en el lado terminal de  $\theta$ . Cuando  $\theta = 0^\circ$ ,  $x = r$  y  $y = 0$ ; cuando  $\theta = 90^\circ$ ,  $x = 0$  y  $y = r$ ; cuando  $\theta = 180^\circ$ ,  $x = -r$  y  $y = 0$ ; y cuando  $\theta = 270^\circ$ ,  $x = 0$  y  $y = -r$ .

(a)  $\theta = 0^\circ$ ;  $x = r$ ,  $y = 0$

[Véase Figura 2-18(a)]

$$\sin 0^\circ = y/r = 0/r = 0$$

$$\cos 0^\circ = x/r = r/r = 1$$

$$\tan 0^\circ = y/x = 0/r = 0$$

$$\cot 0^\circ = x/y = \text{indefinido}$$

$$\sec 0^\circ = r/x = r/r = 1$$

$$\csc 0^\circ = r/y = \text{indefinido}$$

(c)  $\theta = 180^\circ$ ;  $x = -r$ ,  $y = 0$

[Véase Figura 2-18(c)]

$$\sin 180^\circ = y/r = 0/r = 0$$

$$\cos 180^\circ = x/r = -r/r = -1$$

$$\tan 180^\circ = y/x = 0/(-r) = 0$$

$$\cot 180^\circ = x/y = \text{indefinido}$$

$$\sec 180^\circ = r/x = r/(-r) = -1$$

$$\csc 180^\circ = r/y = \text{indefinido}$$

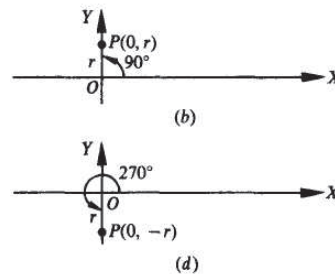
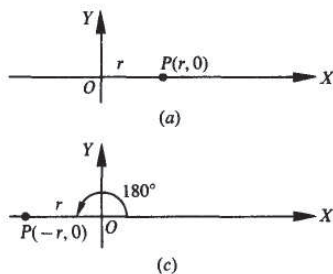


Fig. 2-18

## FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO GENÉRICO

(b)  $0 = 90^\circ; x = 0, y = r$

[Véase Figura 2-18(i)]

$$\text{sen } 90^\circ = y/r = r/r = 1$$

$$\text{cos } 90^\circ = x/r = 0/r = 0$$

$$\text{tan } 90^\circ = y/x = \text{Indefinido}$$

$$\text{cot } 90^\circ = x/y = 0/r = 0$$

$$\text{sec } 90^\circ = r/x = \text{Indefinido}$$

$$\text{csc } 90^\circ = r/y = r/r = 1$$

(d)  $0 = 270^\circ; x = 0, y = -r$

[Véase Figura 2-18(cf)]

$$\text{sen } 270^\circ = y/r = -r/r = -1$$

$$\text{cos } 270^\circ = x/r = 0/r = 0$$

$$\text{tan } 270^\circ = y/x = \text{Indefinido}$$

$$\text{cot } 270^\circ = x/y = 0/(-r) = 0$$

$$\text{sec } 270^\circ = r/x = \text{Indefinido}$$

$$\text{csc } 270^\circ = r/y = r/(-r) = -1$$

2.18 Evalúe: (a)  $\text{sen } 0^\circ + 2 \text{cos } 0^\circ + 3 \text{sen } 90^\circ + 4 \text{cos } 90^\circ + 5 \text{sec } 0^\circ + 6 \text{csc } 90^\circ$

(b)  $\text{sen } 180^\circ + 2 \text{cos } 180^\circ + 3 \text{sen } 270^\circ + 4 \text{cos } 270^\circ - 5 \text{sec } 180^\circ - 6 \text{csc } 270^\circ$

(a)  $0 + 2(1) + 3(1) + 4(0) + 5(1) + 6(1) = 16$

(b)  $0 + 2(-1) + 3(-1) + 4(0) - 5(-1) - 6(-1) = 6$

- 2.19 Utilizando un transportador construya un ángulo de  $20^\circ$  en posición estándar. Con O como el origen, describa un arco de radio de 10 unidades que toque con el lado terminal de P. De P trace una perpendicular al eje de las x, llegando al punto A. Las medidas serán  $OA = 9.4$ ,  $AP = 3.4$ , y P tiene coordenadas (9.4, 3.4). Entonces encuentre las funciones trigonométricas de  $20^\circ$  (véase Figura 2-19).

$$\text{sen } 20^\circ = 3.4/10 = 0.34$$

$$\text{cot } 20^\circ = 9.4/3.4 = 2.8$$

$$\text{cos } 20^\circ = 9.4/10 = 0.94$$

$$\text{sec } 20^\circ = 10/9.4 = 1.1$$

$$\text{tan } 20^\circ = 3.4/9.4 = 0.36$$

$$\text{csc } 20^\circ = 10/3.4 = 2.9$$

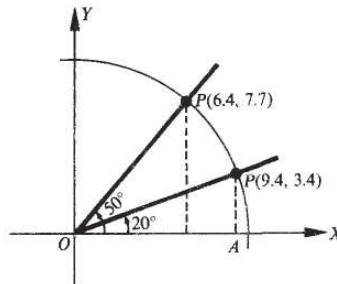


Fig. 2-19

- 2.20 Obtenga las funciones trigonométricas de  $50^\circ$  como en el Prob. 2.19. Use como referencia la Figura 2-19.

El punto P, estando en el lado terminal y a una distancia de 10 unidades del origen, tiene las siguientes coordenadas (6.4, 7.7). Entonces

$$\operatorname{sen} 50^\circ = 7.7/10 = 0.77 \quad \operatorname{cot} 50^\circ = 6.4/7.7 = 0.83$$

$$\operatorname{cos} 50^\circ = 6.4/10 = 0.64 \quad \operatorname{sec} 50^\circ = 10/6.4 = 1.6$$

$$\operatorname{tan} 50^\circ = 7.7/6.4 = 1.2 \quad \operatorname{csc} 50^\circ = 10/7.7 = 1.3$$

### Problemas Suplementarios

- 2.21 Especifique el cuadrante donde termina cada uno de los siguientes ángulos y escriba los signos del seno, el coseno y la tangente de cada uno.

(a)  $125^\circ$ , (b)  $75^\circ$ , (c)  $320^\circ$ , (d)  $212^\circ$ , (e)  $460^\circ$ , (f)  $750^\circ$ , (g)  $-250^\circ$ , (h)  $-1000^\circ$

Resp. (a) II; +, -, -; (b) I; +, +, +; (c) IV; -, +, -; (d) III; -, +, +;  
(e) II; +, -, -; (f) I; +, +, +; (g) II; +, -, -; (h) I; +, +, +

- 2.22 ■ ¿En qué cuadrante quedará localizado  $\theta$ , si

- |                                                                              |                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{cos} \theta$ son positivos? | (e) $\operatorname{tan} \theta$ es positiva y $\operatorname{sec} \theta$ es negativa? |
| (b) $\operatorname{cos} \theta$ y $\operatorname{tan} \theta$ son positivos? | (f) $\operatorname{tan} \theta$ es negativa y $\operatorname{sec} \theta$ es positiva? |
| (c) $\operatorname{sen} \theta$ y $\operatorname{sec} \theta$ son negativos? | (g) $\operatorname{sen} \theta$ es positiva y $\operatorname{cos} \theta$ es negativa? |
| (d) $\operatorname{cos} \theta$ y $\operatorname{cot} \theta$ son negativos? | (h) $\operatorname{sec} \theta$ es positiva y $\operatorname{csc} \theta$ es negativa? |

Resp. (a) I, (b) I, (c) III, (d) II, (e) III, (f) IV, (g) II, (h) IV

- 2.23 Denote por  $\theta$  al ángulo positivo más pequeño cuyo lado terminal pase a través de un punto dado, y encuentre las funciones trigonométricas de  $\theta$ .

(a)  $P(-5, 12)$ , (b)  $P(7, -24)$ , (c)  $P(2, 3)$ , (d)  $P(-3, -5)$

Resp. Las respuestas se enlistan en el siguiente orden:  $\operatorname{sen} \theta$ ,  $\operatorname{eos} \theta$ ,  $\operatorname{tan} \theta$ ,  $\operatorname{cot} \theta$ ,  $\operatorname{sec} \theta$ ,  $\operatorname{csc} \theta$

(a)  $12/13, -5/13, -12/5, -5/12, -13/5, 13/12$

(b)  $-24/25, 7/25, -24/7, -7/24, 25/7, -25/24$

(c)  $3/\sqrt{13} = 3\sqrt{(13/13)}, 2\sqrt{13} = 2\sqrt{(13/13)}, 3/2, 2/3, \sqrt{(13/2)}, \sqrt{(13/3)}$

(d)  $-5/\sqrt{34} = -5\sqrt{(34/34)}, -3/\sqrt{34} = -3\sqrt{(34/34)}, 5/3, 3/5, -\sqrt{(34/3)}, -\sqrt{(34/5)}$

- 2.24 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ , dado que:

(a)  $\operatorname{sen} \theta = 7/25$       (d)  $\operatorname{cot} \theta = 24/7$       (g)  $\operatorname{tan} \theta = 3/5$       (h)  $\operatorname{csc} \theta = -2/\sqrt{3} = -2\sqrt{(3/3)}$

(b)  $\operatorname{cos} \theta = -4/5$       (e)  $\operatorname{sen} \theta = -2/3$       (f)  $\operatorname{cot} \theta = \sqrt{(6/2)}$

(c)  $\operatorname{tan} \theta = -5/12$       (i)  $\operatorname{sec} \theta = -\sqrt{5}$

Resp. Las respuestas se enlistan en el siguiente orden:  $\operatorname{sen} \theta$ ,  $\operatorname{cos} \theta$ ,  $\operatorname{tan} \theta$ ,  $\operatorname{cot} \theta$ ,  $\operatorname{sec} \theta$ ,  $\operatorname{csc} \theta$

(a) I:  $7/25, 24/25, 7/24, 24/7, 25/24, 25/7$   
II:  $7/25, -24/25, -7/24, -24/7, -25/24, 25/7$

(b) II:  $3/5, -4/5, -3/4, -4/3, -5/4, 5/3$ ;  
III:  $-3/5, -4/5, 3/4, 4/3, -5/4, -5/3$

- (c) II:  $5/13, -12/13, -5/12, -12/5, -13/12, 13/5$   
 IV:  $-5/13, 12/13, -5/12, -12/5, 13/12, -13/5$
- (d) I:  $7/25, 24/25, 7/24, 24/7, 25/24, 25/7$   
 III:  $-7/25, -24/25, 7/24, 24/7, -25/24, -25/7$
- (e) III:  $-2/3, -\sqrt{5}/3, 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/2, -3/\sqrt{5} = -3\sqrt{5}/5, -3/2$   
 IV:  $-2/3, \sqrt{5}/3, -2/\sqrt{5} = -2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/2, 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5, -3/2$
- (f) I:  $\sqrt{11}/6, 5/6, \sqrt{11}/5, 5/\sqrt{11} = 5\sqrt{11}/11, 6/5, 6/\sqrt{11} = 6\sqrt{11}/11$   
 IV:  $-\sqrt{11}/6, 5/6, -\sqrt{11}/5, -5/\sqrt{11} = -5\sqrt{11}/11, 6/5, -6/\sqrt{11} = -6\sqrt{11}/11$
- (g) I:  $3/\sqrt{34} = 3\sqrt{34}/34, 5/\sqrt{34} = 5\sqrt{34}/34, 3/5, 5/3, \sqrt{34}/5, \sqrt{34}/3$   
 III:  $-3/\sqrt{34} = -3\sqrt{34}/34, -5/\sqrt{34} = -5\sqrt{34}/34, 3/5, 5/3, -\sqrt{34}/5, -\sqrt{34}/3$
- (h) I:  $2/\sqrt{10} = \sqrt{10}/5, \sqrt{3}/\sqrt{5} = \sqrt{15}/5, 2/\sqrt{6} = \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/2, \sqrt{5}/\sqrt{3} = \sqrt{15}/3, \sqrt{10}/2$   
 III:  $-2/\sqrt{10} = -\sqrt{10}/5, -\sqrt{3}/\sqrt{5} = -\sqrt{15}/5, 2/\sqrt{6} = \sqrt{6}/3, \sqrt{6}/2, -\sqrt{5}/\sqrt{3} = -\sqrt{15}/3, -\sqrt{10}/2$
- (i) II:  $2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5, -1/\sqrt{5} = -\sqrt{5}/5, -2, -1/2, -\sqrt{5}, \sqrt{5}/2$   
 III:  $-2/\sqrt{5} = -2\sqrt{5}/5, -1/\sqrt{5} = -\sqrt{5}/5, 2, 1/2, -\sqrt{5}, -\sqrt{5}/2$
- (j) III:  $-\sqrt{3}/2, -1/2, \sqrt{3}, 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3, -2, -2/\sqrt{3} = -2\sqrt{3}/3$   
 IV:  $-\sqrt{3}/2, 1/2, -\sqrt{3}, -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3, 2, -2/\sqrt{3} = -2\sqrt{3}/3$

2.25 Evalúe cada una de las siguientes expresiones:

- (a)  $\tan 180^\circ - 2 \cos 180^\circ + 3 \csc 270^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ$   
 (b)  $\operatorname{sen} 0^\circ + 3 \cot 90^\circ + 5 \sec 180^\circ - 4 \cos 270^\circ$   
 (c)  $3 \operatorname{sen} \pi + 4 \cos 0 - 3 \cos \pi + \operatorname{sen} \pi/2$   
 (d)  $4 \cos \pi/2 - 5 \operatorname{sen} 3\pi/2 - 2 \operatorname{sen} \pi/2 + \operatorname{sen} 0$

Resp. (a) 0, (b) -5, (c) 6, (d) 3

2.26 Indique el cuadrante en que termina cada uno de los siguientes ángulos, medidos en radianes.

- (a)  $\pi/4$ , (b)  $5\pi/6$ , (c)  $11\pi/3$ , (d)  $-3\pi/4$ , (e)  $8\pi/3$ , (f)  $17\pi/6$ , (g)  $23\pi/6$

Resp. (a) I, (b) II, (c) IV, (d) III, (e) II, (f) II, (g) IV

2.27 Indique un punto en el círculo unitario que corresponda a cada uno de los siguientes números reales:

- (a)  $17\pi$ , (b)  $-13\pi/2$ , (c)  $7\pi/2$ , (d)  $28\pi$

Resp. (a)  $W(17\pi) = W(\pi) = (\cos \pi, \operatorname{sen} \pi) = (-1, 0)$   
 (b)  $W(-13\pi/2) = W(\pi/2) = (\cos \pi/2, \operatorname{sen} \pi/2) = (0, 1)$   
 (c)  $W(7\pi/2) = W(3\pi/2) = (\cos 3\pi/2, \operatorname{sen} 3\pi/2) = (0, -1)$   
 (d)  $W(28\pi) = W(0) = (\cos 0, \operatorname{sen} 0) = (1, 0)$

# Funciones trigonométricas de un ángulo agudo



## 3.1 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

Para tratar cualquier triángulo rectángulo es conveniente (véase Figura 3-1) designar los vértices como  $A$ ,  $B$  y  $C$  siendo  $C$  el vértice del ángulo recto, deben también denotarse los ángulos como  $A$ ,  $B$  y  $C$  siendo  $C = 90^\circ$ , y denominarse los lados opuestos a los ángulos como  $a$ ,  $b$  y  $c$  respectivamente. Con respecto al ángulo  $A$ , su *lado opuesto* será  $a$  y su *lado adyacente* será  $b$ ; en tanto que para el ángulo  $B$ , su *lado opuesto* será  $b$  y su *lado adyacente* será  $a$ . El lado  $c$  siempre se llamará *hipotenusa*.

Si se coloca el triángulo rectángulo en un sistema de coordenadas (Figura 3-2) de tal forma que el ángulo  $A$  se encuentre en posición estándar, el punto  $B$  localizado en el lado terminal del ángulo  $A$  tiene las coordenadas  $(b, a)$  y la distancia  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$  por lo que las funciones trigonométricas del ángulo  $A$  pueden definirse en términos del ángulo recto, de la siguiente forma:

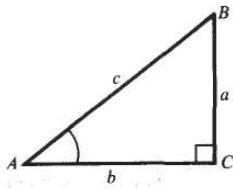


Fig. 3-1

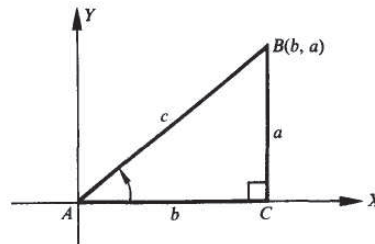


Fig. 3-2

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{cot} A = \frac{b}{a} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}$$

$$\operatorname{cos} A = \frac{b}{c} = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{sec} A = \frac{c}{b} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\operatorname{tan} A = \frac{a}{b} = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}$$

$$\operatorname{csc} A = \frac{c}{a} = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}$$

### 3.2 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS

Los ángulos agudos  $A$  y  $B$  del triángulo rectángulo  $ABC$  son complementarios, es decir,  $A + B = 90^\circ$ . En la Figura 3-1 se tiene:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} B &= b/c = \cos A & \cot B &= a/b = \tan A \\ \cos B &= a/c = \operatorname{sen} A & \sec B &= c/a = \operatorname{csc} A \\ \tan B &= b/a = \cot A & \operatorname{csc} B &= c/b = \sec A \end{aligned}$$

Estas relaciones asocian las funciones por pares, a saber seno y coseno, tangente y cotangente, secante y cosecante; y se dice que cada función de un par es la *cofunción* de la otra. Así, toda función de un ángulo agudo es igual a la cofunción correspondiente de su ángulo complementario.

EJEMPLO 3.1 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos del triángulo rectángulo  $ABC$  en la Figura 3-3.

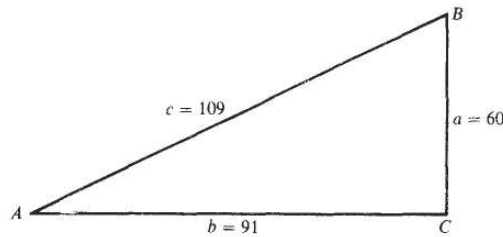


Fig. 3-3

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109} \quad \tan B = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cos A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109} \quad \operatorname{csc} A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60}$$

$$\tan A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91} \quad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} = \frac{91}{109} \quad \cot A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{b}{a} = \frac{91}{60}$$

$$\cos B = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c} = \frac{60}{109} \quad \operatorname{csc} B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{c}{b} = \frac{109}{91}$$

$$\sec B = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{c}{a} = \frac{109}{60} \quad \cot B = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{a}{b} = \frac{60}{91}$$

### 3.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE 30°, 45° Y 60°

Los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos particulares 30°, 45° y 60° (véase Apéndice I: Geometría), se pueden calcular en forma exacta. Los siguientes resultados se obtienen en los Probs. 3.8 y 3.9. Para cada fracción con denominador irracional, se presenta en la tabla sólo la fracción equivalente, con denominador racional.

Angulo $\theta$	sen $\theta$	cos $\theta$	tan $\theta$	cot $\theta$	sec $\theta$	csc $\theta$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$

### 3.4 VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Los valores de las funciones trigonométricas para ángulos que no son casos particulares, se necesitan para resolver muchos problemas de aplicación. Estos valores pueden encontrarse en tablas de funciones trigonométricas, o bien, utilizando una calculadora. Los problemas del 3.10 al 3.15 ilustran algunas aplicaciones simples de las funciones trigonométricas. Para dichos problemas se incluye la siguiente tabla, con dos cifras decimales.

Ángulo $\theta$	sen $\theta$	cos $\theta$	tan $\theta$	cot $\theta$	sec $\theta$	csc $\theta$
15°	0.26	0.97	0.27	3.73	1.04	3.86
20°	0.34	0.94	0.36	2.75	1.06	2.92
30°	0.50	0.87	0.58	1.73	1.15	2.00
40°	0.64	0.77	0.84	1.19	1.31	1.56
45°	0.71	0.71	1.00	1.00	1.41	1.41
50°	0.77	0.64	1.19	0.84	1.56	1.31
60°	0.87	0.50	1.73	0.58	2.00	1.15
70°	0.94	0.34	2.75	0.36	2.92	1.06
75°	0.97	0.26	3.73	0.27	3.86	1.04

Cuando utilice la calculadora para encontrar los valores de las funciones trigonométricas, debe asegurarse de seguir el procedimiento indicado por el manual de la calculadora. En general, el procedimiento es: (1) asegúrese de que la calculadora esté en el modo de grados (degree mode), (2) introduzca el valor del ángulo en grados, (3) presione la tecla de la función trigonométrica deseada, y (4) lea el valor de la función desplegado en la pantalla.

**EJEMPLO 3.2** Encuentre  $\tan 15^\circ$  utilizando calculadora. Con la calculadora en modo de grados, introduzca el número 15 y presione la tecla (tan). El número 0.267949 aparecerá en la pantalla; por lo tanto,  $\tan 15^\circ = 0.267949$ . El número de dígitos que se despliegan depende de la calculadora que se utilice, pero la mayoría de las calculadoras presentan al menos seis dígitos. En este libro, si el valor indicado en la calculadora no es exacto, será redondeado a seis dígitos cuando se utilice en un problema o ejemplo. Cuando sea necesario se redondearán los resultados finales.

Al utilizar la calculadora para encontrar un ángulo agudo, cuando se conoce el valor de una función trigonométrica, se utiliza la operación inversa, tecla (inv) o la tecla de las segundas funciones (2nd). Se introduce el valor de la función, después se presiona la tecla (inv) o la segunda función (2nd) y se presiona la tecla de la función trigonométrica deseada. Se utiliza el modo de grados para obtener el resultado en grados.

**EJEMPLO 3.3** Encuentre el ángulo agudo  $A$  si  $\sin A = 0.2651$ . Con la calculadora en modo de grados, introduzca el número .2651 y presione las teclas (inv) y (sen). La medida del ángulo agudo  $A$  es 15.3729. El resultado más cercano en grados es  $A = 15^\circ$ .

### 3.5 EXACTITUD DE LOS RESULTADOS UTILIZANDO APROXIMACIONES

Cuando se utilizan números aproximados, surge la necesidad de redondear los resultados. En este capítulo se indican los ángulos con el valor más cercano en grados y las longitudes a la unidad más cercana. Si en un problema se deben calcular varios valores intermedios, se debe esperar el resultado final para redondearlo. Cada resultado intermedio debe tener al menos un dígito más que el resultado final para que el redondeo final no afecte directamente la unidad de exactitud.

### 3.6 SELECCIÓN DE LA FUNCIÓN EN LA SOLUCIÓN DE UN PROBLEMA

Para encontrar un lado de un triángulo rectángulo, cuando se conocen un ángulo y un lado, pueden utilizarse dos funciones trigonométricas: una función y su recíproco. En la solución manual del problema se acostumbra tomar el lado desconocido como el numerador de la fracción. De esta forma, la operación que se realice será una multiplicación en lugar de una división. Al utilizar calculadora se eligen las funciones seno, coseno o tangente, ya que esas funciones están representadas en las teclas de la calculadora.

**EJEMPLO 3.4** Un cable de sujeción, se amarra a 12 m de la base de un mástil, y el cable forma un ángulo de  $15^\circ$  con el suelo. ¿Cuánto mide dicho cable?

A partir de la Figura 3-4 puede verse que tanto el  $\sin 15^\circ$  como la  $\csc 15^\circ$  relacionan la longitud conocida de 12 m y la longitud deseada  $x$ . Cualquiera de las dos funciones puede utilizarse para resolver el problema. La solución manual, esto es, si se usan las tablas y no la calculadora, se facilita utilizando  $\csc 15^\circ$ , pero no todas las tablas incluyen los valores de la secante y de la cosecante. La solución con calculadora exige el uso del  $\sin 15^\circ$ , ya que no cuentan con la función cosecante.

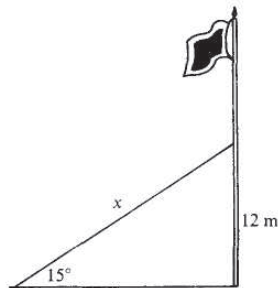


Fig. 3-4

3

	Solución manual	Solución con calculadora
	$\csc 15^\circ = x / 12$	$\text{sen } 15^\circ = 12 / x$
	$x = 12 \csc 15^\circ$	$x = 12 / \text{sen } 15^\circ$
	$x = 12(3.86)$	$x = 12 / 0.258819$
	$x = 46.32$	$x = 46.3644$
	$x = 46 \text{ m}$	$x = 46 \text{ m}$

El cable es de 46 m de longitud.

En cada solución el número entero en metros es el mismo, pero los resultados de los cálculos son diferentes, ya que dependen del redondeo que se utilizó al determinar el valor de la función. Redondear con pocos decimales, como en la tabla incluida en esta sección, generalmente lleva a que los resultados de los cálculos sean diferentes. Si se utilizan las tablas del Apéndice 2 que contienen cuatro decimales, serán pocos los resultados donde la elección de la función afecte los cálculos. Además, utilizando estas tablas, los resultados coincidirán con mayor frecuencia con los obtenidos por calculadora.

Para los problemas de este capítulo, se mostrará una solución manual y otra por calculadora, y se indicará la respuesta a cada uno de los procedimientos. En los capítulos posteriores, sólo se indicará la respuesta cuando los resultados de cada método sean diferentes.

La decisión de utilizar o no la calculadora se deja al alumno. Si no puede utilizar la calculadora para aplicar los procedimientos estudiados, entonces se recomienda que no practique utilizando una. En ocasiones habrá procedimientos en los que se utilicen únicamente tablas y otros en los que se aplique sólo la calculadora. Lo anterior se indicará en forma clara y podrá omitirse si no está utilizando ese método.

### 3.7 ÁNGULOS DE DEPRESIÓN Y ELEVACIÓN

Un ángulo de depresión es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto abajo de ésta. El ángulo de elevación es aquel que se forma desde la línea de vista horizontal del observador hasta un objeto situado arriba de ésta.

En la Figura 3-5 el ángulo de depresión del punto *A* al punto *B* es  $\alpha$  y el ángulo de elevación del punto *B* al punto *A* es  $\beta$ . Dado que ambos ángulos se miden a partir de las líneas horizontales, las cuales son paralelas, la línea de vista de *AB* es transversal, y como los ángulos opuestos internos de dos líneas paralelas son iguales,  $\alpha = \beta$ . (Ver Apéndice 1: Geometría.)

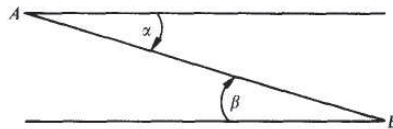


Fig. 3-5

## Problemas resueltos

- 3.1 Encuentre las funciones de los ángulos agudos del triángulo rectángulo  $ABC$ , Figura 3-6, dado que  $b = 24$  y  $c = 25$ .

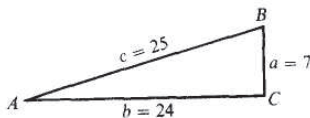


Fig. 3-6

Dado que  $a^2 = c^2 - b^2 = (25)^2 - (24)^2 = 49$ ,  $a = 7$ . Entonces

$$\operatorname{sen} A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{7}{25} \quad \cot A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}} = \frac{24}{7}$$

$$\cos A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{24}{25} \quad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}} = \frac{25}{24}$$

$$\tan A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}} = \frac{7}{24} \quad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}} = \frac{25}{7}$$

$$\operatorname{sen} B = 24/25 \quad \cot B = 7/24$$

$$\cos B = 7/25 \quad \sec B = 25/7$$

$$\tan B = 24/7 \quad \csc B = 25/24$$

- 3.2 Calcule los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo  $ABC$ , Figura 3-7, dado que  $a = 2$  y  $c = 2\sqrt{5}$

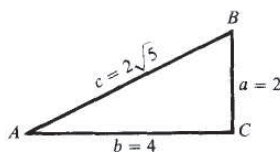


Fig. 3-7

Dado que  $b^2 = c^2 - a^2 = (2\sqrt{5})^2 - (2)^2 = 20 - 4 = 16$ ,  $b = 4$ . Entonces

$$\operatorname{sen} A = 2/2\sqrt{5} = \sqrt{5}/5 = \cos B \quad \cot A = 4/2 = 2 = \tan B$$

$$\cos A = 4/2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5 = \operatorname{sen} B \quad \sec A = 2\sqrt{5}/4 = \sqrt{5}/2 = \csc B$$

$$\tan A = 2/4 = 1/2 = \cot B \quad \csc A = 2\sqrt{5}/2 = \sqrt{5} = \sec B$$

- 3.3 Determine los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo  $A$ , dado que el  $\text{sen } A = 3/7$ .

Construya el triángulo rectángulo  $ABC$ , Figura 3-8, con  $a = 3$ ,  $c = 7$  y  $b = \sqrt{7^2 - 3^2} = \sqrt{10}$  unidades. Entonces

$$\begin{aligned} \text{sen } A &= 3/7 & \cot A &= 2\sqrt{10}/3 \\ \cos A &= 2\sqrt{10}/7 & \sec A &= 7/2\sqrt{10} = 7\sqrt{10}/20 \\ \tan A &= 3/2\sqrt{10} = 3\sqrt{10}/20 & \csc A &= 7/3 \end{aligned}$$

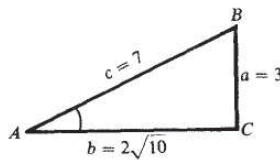


Fig. 3-8

- 3.4 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas del ángulo agudo  $B$ , dado que  $\tan B = 1.5$ .

Refiérase a la Figura 3-9. Construya el triángulo rectángulo  $ABC$  considerando  $b = 15$  y  $a = 10$  unidades. (Observe que  $1.5 = 3/2$ , por lo que el triángulo rectángulo con  $b = 3$  y  $a = 2$  serviría de igual forma.) Entonces  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10^2 + 15^2} = 5\sqrt{13}$  y

$$\begin{aligned} \text{sen } B &= 15/5\sqrt{13} = 3\sqrt{13}/13 & \cot B &= 2/3 \\ \cos B &= 10/5\sqrt{13} = 2\sqrt{13}/13 & \sec B &= 5\sqrt{13}/10 = \sqrt{13}/2 \\ \tan B &= 15/10 = 3/2 & \csc B &= 5\sqrt{13}/15 = \sqrt{13}/3 \end{aligned}$$

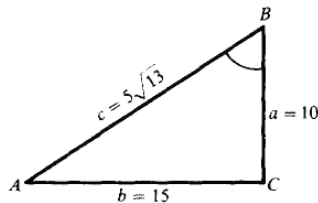


Fig. 3-9

- 3.5 Si  $A$  es un ángulo agudo y  $\text{sen } A = 2x/3$ , determine los valores de las funciones restantes.

Construya el triángulo rectángulo  $ABC$  considerando  $a = 2x$  y  $c = 3$ , como en la Figura 3-10.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO AGUDO

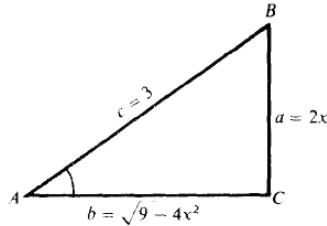


Fig. 3-10

Entonces  $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{9 - 4x^2}$  y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{2x}{3} & \cos A &= \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{3} & \tan A &= \frac{2x}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{2x\sqrt{9 - 4x^2}}{9 - 4x^2} \\ \cot A &= \frac{\sqrt{9 - 4x^2}}{2x} & \sec A &= \frac{3}{\sqrt{9 - 4x^2}} = \frac{3\sqrt{9 - 4x^2}}{9 - 4x^2} & \csc A &= \frac{3}{2x} \end{aligned}$$

3.6 Si  $A$  es un ángulo agudo y  $\tan A = x = x/1$ , determine el valor de las funciones restantes.

Construya el triángulo rectángulo  $ABC$  considerando  $a = x$  y  $b = 1$ , como en la Figura 3-11. Entonces  $c = \sqrt{x^2 + 1}$  y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} A &= \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} & \cos A &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 + 1} & \tan A &= x \\ \cot A &= \frac{1}{x} & \sec A &= \sqrt{x^2 + 1} & \csc A &= \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \end{aligned}$$

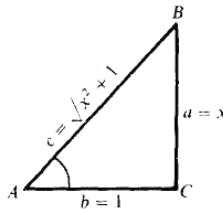


Fig. 3-11

3.7 Si  $A$  es un ángulo agudo:

- (a) ¿Por qué el  $\operatorname{sen} A < 1$ ?
- (b) ¿Cuándo el  $\operatorname{sen} A = \cos A$ ?
- (c) ¿Por qué  $\operatorname{sen} A < \csc A$ ?
- (d) ¿Por qué  $\operatorname{sen} A < \tan A$ ?
- (e) ¿Cuándo  $\operatorname{sen} A < \cos A$ ?
- (f) ¿Cuándo  $\tan A > 1$ ?

En un triángulo rectángulo ABC:

- (a) El lado  $a <$  al lado  $c$ ; por lo que  $\text{sen } A = a/c < 1$ .
- (b)  $\text{Sen } A = \text{cos } A$  cuando  $a/c = b/c$ ; entonces  $a = b$ ,  $A = B$  y  $A = 45^\circ$ .
- (c)  $\text{Sen } A < 1$  (inciso (a)) y  $\text{csc } A = 1/\text{sen } A > 1$ .
- (d)  $\text{Sen } A = a/c$ ,  $\text{tan } A = a/b$ , y  $b < c$ ; por lo que  $a/c < a/b$  o  $\text{sen } A < \text{tan } A$ .
- (e)  $\text{Sen } A < \text{cos } A$  cuando  $a < b$ ; entonces  $A < B$  o  $A < 90^\circ - A$ , y  $A < 45^\circ$ .
- (f)  $\text{Tan } A = a/b > 1$  cuando  $a > b$ ; entonces  $A > B$  y  $A > 45^\circ$ .

3.8 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de  $45^\circ$ . (Véase Figura 3-12.)

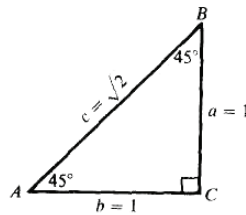


Fig. 3-12

En cualquier triángulo rectángulo isósceles ABC,  $A = S = 45^\circ$  y  $a = b$ . Sea  $a = b = 1$ ; entonces  $c = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$  y

$$\text{sen } 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \cot 45^\circ = 1$$

$$\text{cos } 45^\circ = 1/\sqrt{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad \sec 45^\circ = \sqrt{2}$$

$$\text{tan } 45^\circ = 1/1 = 1 \quad \text{csc } 45^\circ = \sqrt{2}$$

3.9 Encuentre los valores exactos de las funciones trigonométricas de  $30^\circ$  y  $60^\circ$ . (Véase Figura 3-13.)

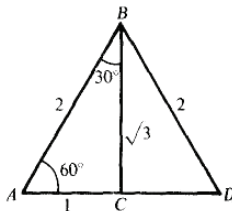


Fig. 3-13

En cualquier triángulo equilátero  $ABD$ , cada ángulo mide  $60^\circ$ . La bisectriz de cualquier ángulo, por ejemplos, es la perpendicular al centro del lado opuesto del ángulo. Suponga que los lados del triángulo equilátero miden 2 unidades. Entonces, el triángulo rectángulo  $ABC$ ,  $AB = 2$ ,  $AC = 1$  y  $BC = \sqrt{(2^2 - 1^2)} = \sqrt{3}$

$$\operatorname{sen} 30^\circ = 1/2 = \cos 60^\circ \qquad \cot 30^\circ = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$$

$$\cos 30^\circ = \sqrt{(3/2)} = \operatorname{sen} 60^\circ \qquad \sec 30^\circ = 2/\sqrt{3} = 2(\sqrt{3})/3 = \operatorname{csc} 60^\circ$$

$$\tan 30^\circ = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3 = \cot 60^\circ \qquad \operatorname{csc} 30^\circ = 2 = \sec 60^\circ$$

(NOTA: En los Probs. 3.10 a 3.15 se muestran dos procedimientos, una solución manual y otra con calculadora, cuando los resultados son diferentes. El uso de cualquiera de ellos depende del acceso que se tenga a una calculadora durante el proceso de solución. Si le está restringido el acceso a una calculadora, entonces enfóquese a la solución manual. En la solución por calculadora, se muestran los pasos para ilustrar el procedimiento, más que como una guía de los pasos a seguir. Los pasos que se muestran de cada solución tienen como objetivo el que usted observe todos los detalles del procedimiento utilizado.)

- 3.10** Cuando el Sol se encuentra a  $20^\circ$  sobre el horizonte, ¿cuánto medirá la sombra proyectada por un edificio de 50 m de altura?

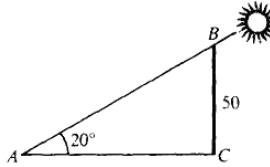


Fig. 3-14

En la Figura 3-14,  $A = 20^\circ$ ,  $CB = 50$  y  $AC$  es la longitud que se debe calcular.

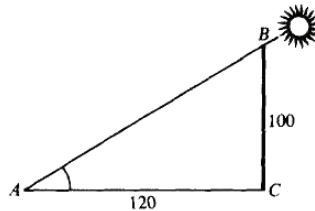
Solución manual	Solución con calculadora
$\cot A = AC/CB$	$\tan A = CB/AC$
$AC = CB \cot A$	$AC = CB / \tan A$
$AC = 50 \cot 20^\circ$	$AC = 50 / \tan 20^\circ$
$AC = 50(2.75)$	$AC = 50 / 0.363970$
$AC = 137.5$	$AC = 137.374$
$AC = 138 \text{ m}$	$AC = 137 \text{ m}$

■NOTA: La diferencia entre las respuestas de los dos procedimientos se debe a que  $\cot 20^\circ$  se redondeó con dos decimales en la tabla. Cada respuesta es la correcta para ese procedimiento.)

- 3.11** Un árbol de 100 pies de altura proyecta una sombra de 120 pies de longitud. Encuentre el ángulo de elevación del Sol,

En la Figura 3-15,  $CB = 100$ ,  $AC = 120$  y se quiere encontrar  $A$ .

Fig. 3-15



Solución manual	Solución con calculadora
$\tan A = CB/AC$	$\tan A = CB/AC$
$\tan A = 100/120$	$\tan A = 100/120$
$\tan A = 0.83$	$\tan A = 0.833333$
$A = 40^\circ$	$A = 39.8056^\circ$
	$A = 40^\circ$

(Como 0.83 es el valor más cercano de  $\tan 40^\circ$ , se toma  $A = 40^\circ$ .)

- 3.12 Una escalera está apoyada contra la pared de un edificio y su base se encuentra a una distancia de 12 pies del edificio. ¿A qué altura está el extremo superior de la escalera y cuál es su longitud si el ángulo que forma con el suelo es de  $70^\circ$  ?

De la Figura 3-16,  $\tan A = CB/AC$ ; entonces  $CB = AC \tan A = 12 \tan 70^\circ = 12(2.75) = 33$ . La parte superior de la escalera está a 33 pies sobre el suelo. El procedimiento de la solución con calculadora es el mismo. Manual:  $\sec A = AB/AC$ ; entonces  $AB = AC \sec A = 12 \sec 70^\circ = 12(2.92) = 35.04$ .



Fig. 3-16

Calculadora:  $\cos A = AC/AB$ ; entonces  $AB = AC/(\cos A) = 12/(\cos 70^\circ) = 12/0.342020 = 35.0857$ .

La escalera mide 35 pies de largo.

- 3.13** De lo alto de un faro, de 120 m sobre el nivel del mar, el ángulo de depresión de un bote es de  $15^\circ$ . ¿A qué distancia está el bote del faro?

En la Figura 3-17, el triángulo rectángulo  $ABC$  tiene  $A = 15^\circ$  y  $CB = 120$ . Entonces la solución es la siguiente:

Manual:  $\cot A = AC/CB$  y  $AC = CB \cot A = 120 \cot 15^\circ = 120(3.73) = 447.6$ . Calculadora:  $\tan A = CB/AC$  y  $AC = CB/(\tan A) = 120/(\tan 15^\circ) = 120/0.267949 = 447.846$ . El bote se encuentra a 448 m del faro.

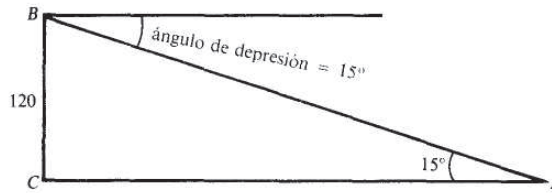


Fig. 3-17

- 3.14** Determine la longitud de la cuerda de un círculo de radio 20 cm subtendida por un ángulo central de  $150^\circ$ .

En la Figura 3-18,  $OC$  es la bisectriz de  $\angle AOB$ . Entonces  $BC = AC$  y  $OAC$  es un triángulo rectángulo. Manual:

En  $\triangle OAC$ ,  $\sin \angle COA = AC/OA$  y  $AC = OA \sin \angle COA = 20 \sin 75^\circ = 20(0.97) = 19.4$ ;  $BA = 2(19.4) = 38.8$ . Calculadora:  $AC = OA \sin \angle COA = 20 \sin 75^\circ = 20(0.965926) = 19.3185$ ;  $BA = 2(19.3185) = 38.6370$  La longitud de la cuerda es de 39 cm.

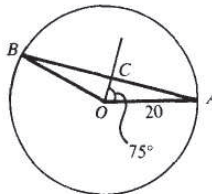


Fig. 3-18

- 3.15** Encuentre la altura de un árbol, si el ángulo de elevación de su parte superior cambia de  $20^\circ$  a  $40^\circ$  cuando el observador avanza 75 pies hacia la base de éste. Véase Figura 3-19.

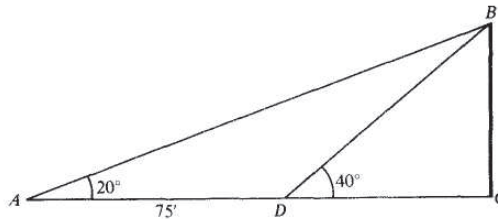


Fig. 3-19

3

En el triángulo rectángulo  $ABC$ ,  $\cot A = AC/CB$ ; entonces  $AC = CB \cot A$  o  $DC + 75 = CB \cot 20^\circ$ .  
 En el triángulo rectángulo  $DSC$ ,  $\cot D = DC/CB$ ; entonces  $DC = CB \cot 40^\circ$ .

Manual:

$$DC = CB \cot 20^\circ - 75 = CB \cot 40^\circ$$

$$CB(\cot 20^\circ - \cot 40^\circ) = 75$$

$$CB(2.75 - 1.19) = 75$$

∴  $CB = 75/1.56 = 48.08$

Calculadora:

$$\cot 20^\circ = 1/\tan 20^\circ = 1/0.363970 = 2.74748$$

$$\cot 40^\circ = 1/\tan 40^\circ = 1/0.839100 = 1.19175$$

$$CB(\cot 20^\circ - \cot 40^\circ) = 75$$

$$CB(2.74748 - 1.19175) = 75$$

$$CB(1.55573) = 75$$

$$CB = 75/1.55573 = 48.2089$$

El árbol mide 48 pies de altura.

- 3.16 Una torre colocada sobre el nivel del suelo se encuentra al norte del punto  $d$  y al oeste del punto  $6$ , estando este último punto a una distancia  $c$  de  $A$ . Si los ángulos de elevación hacia la parte superior de la torre son  $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente, encontrar la altura  $h$  de la torre.

En el triángulo rectángulo  $ACD$  de la Figura 3-20,  $\cot \alpha = AC/h$  y en el triángulo rectángulo  $BCD$ ,  $\cot \beta = BC/h$ , Entonces  $AC = h \cot \alpha$  y  $BC = h \cot \beta$ .

Como  $ABC$  es un triángulo rectángulo,  $(AC)^2 + (BC)^2 = c^2 = h^2(\cot \alpha)^2 + h^2(\cot \beta)^2$  y

$$h = \frac{c}{\sqrt{(\cot \alpha)^2 + (\cot \beta)^2}}$$

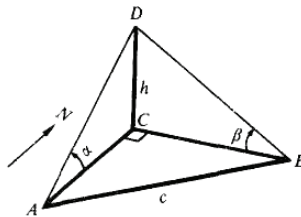


Fig. 3-20

- 3.17 Si se realizan orificios regularmente espaciados en un círculo, demuestre que la distancia  $d$  entre los centros de dos orificios sucesivos está dada por  $d = 2r \sin(180^\circ/n)$ , donde  $r$  es el radio del círculo y  $n$  es el número de orificios. Hallar  $d$  cuando  $r = 20$  pulgadas y  $n = 8$ .

En la Figura 3-21, sean  $A$  y  $S$  los centros de dos orificios consecutivos en el círculo de radio  $r$  y centro  $O$ . Sea  $C$  el punto en el cual la bisectriz del ángulo  $O$  del triángulo  $AOB$  se intersecta con  $AB$ . En el triángulo rectángulo  $AOC$ .

$$\text{sen } \angle AOC = \frac{AC}{r} = \frac{\frac{1}{2}d}{r} = \frac{d}{2r}$$

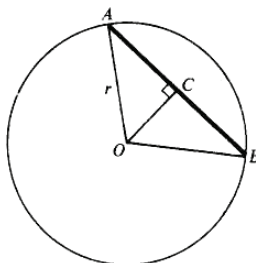


Fig. 3-21

Entonces

$$\begin{aligned} d &= 2r \text{ sen } \angle AOC = 2r \text{ sen } \frac{1}{2} \angle AOB \\ &= 2r \text{ sen } \frac{1}{2} \left( \frac{360^\circ}{n} \right) = 2r \text{ sen } \frac{180^\circ}{n} \end{aligned}$$

Cuando  $r = 20$  y  $n = 4$ ,  $d = 2 \cdot 20 \text{ sen } 45^\circ = 2 \cdot 20 (\sqrt{2}/2) = 20\sqrt{2}$  pulgadas.

### Problemas propuestos

- 3.18 Hallar los valores exactos de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos del triángulo rectángulo  $ABC$ , dado que:

(a)  $a = 3$ ,  $b = 1$ ; (b)  $a = 2$ ,  $c = 5$ ; (c)  $b = \sqrt{7}$ ,  $c = 4$  Resp. Las respuestas se dan en el siguiente

orden: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante.

- (a) A:  $3/\sqrt{10}$ ,  $1/\sqrt{10}$ ,  $3\sqrt{10}/10$ ,  $1/\sqrt{10}$ ,  $3$ ,  $1/3$ ,  $\sqrt{10}$ ,  $\sqrt{10}/3$ ;  
 B:  $1/\sqrt{10}$ ,  $3/\sqrt{10}$ ,  $3\sqrt{10}/10$ ,  $1/\sqrt{10}$ ,  $1/3$ ,  $3$ ,  $\sqrt{10}/3$ ,  $\sqrt{10}$
- (b) A:  $2/5$ ,  $\sqrt{21}/5$ ,  $2/\sqrt{21}$ ,  $2\sqrt{21}/21$ ,  $\sqrt{21}/2$ ,  $5/\sqrt{21}$ ,  $5\sqrt{21}/21$ ,  $5/2$ ;  
 B:  $\sqrt{21}/5$ ,  $2/5$ ,  $\sqrt{21}/2$ ,  $2/\sqrt{21}$ ,  $2\sqrt{21}/21$ ,  $5/2$ ,  $5/\sqrt{21}$ ,  $5\sqrt{21}/21$
- (c) A:  $3/4$ ,  $\sqrt{7}/4$ ,  $3/\sqrt{7}$ ,  $3\sqrt{7}/7$ ,  $\sqrt{7}/3$ ,  $4/\sqrt{7}$ ,  $4\sqrt{7}/7$ ,  $4/3$ ;  
 B:  $\sqrt{7}/4$ ,  $3/4$ ,  $\sqrt{7}/3$ ,  $3/\sqrt{7}$ ,  $3\sqrt{7}/7$ ,  $4/3$ ,  $4/\sqrt{7}$ ,  $4\sqrt{7}/7$

- 3.19 ¿Cuál de las dos funciones es mayor y por qué?:

(a)  $\text{sen } 55^\circ$  o  $\text{cos } 55^\circ$  (c)  $\text{tan } 15^\circ$  o  $\text{cot } 15^\circ$   
 (b)  $\text{sen } 40^\circ$  o  $\text{cos } 40^\circ$  (d)  $\text{sec } 55^\circ$  o  $\text{csc } 55^\circ$

Resp. (a)  $\text{sen } 55^\circ$ , (b)  $\text{cos } 40^\circ$ , (c)  $\text{cot } 15^\circ$ , (d)  $\text{sec } 55^\circ$

**3.20** Encontrar los valores de cada una de las siguientes expresiones:

(a)  $\sin 30^\circ + \tan 45^\circ$

(b)  $\cot 45^\circ + \cos 60^\circ$

(c)  $\sin 30^\circ \cos 60^\circ + \cos 30^\circ \sin 60^\circ$

(d)  $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \sin 30^\circ \sin 60^\circ$

(e)  $\frac{\tan 60^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 30^\circ}$

(f)  $\frac{\csc 30^\circ + \csc 60^\circ + \csc 90^\circ}{\sec 0^\circ + \sec 30^\circ + \sec 60^\circ}$

Resp. (a)  $3/2$ , (b)  $3/2$ , (c)  $1$ , (d)  $0$ , (e)  $1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$ , (f)  $1$

**3.21** Un hombre maneja 500 m a lo largo de un camino inclinado  $20^\circ$  con respecto a la horizontal. ¿A qué altura se encuentra con respecto al punto de partida?

Resp. Manual: 170 m; calculadora: 171 m (la respuesta manual difiere debido al redondeo de los valores en las tablas).

**3.22** Un árbol quebrado por el viento forma un ángulo recto con el suelo. Si la parte quebrada forma un ángulo de  $50^\circ$  con el piso y la copa del árbol se eleva ahora a 20 pies desde la base, ¿qué altura tenía el árbol?

" Resp. 55 pies.

**3.23** Dos caminos rectos se cortan formando un ángulo entre ellos de  $75^\circ$ . Encuentre la distancia más corta desde un camino hasta una estación de gasolina situada en el otro camino a 1000 m del punto de intersección.

Resp. Manual: 3730 m; calculadora: 3732 (la respuesta manual difiere debido al redondeo de los valores en las tablas).

**3.24** Dos edificios con techo plano se encuentran a una distancia de 60 m. Desde el techo del edificio más bajo, de 40 m de altura, el ángulo de elevación hasta el borde del techo del edificio más alto es de  $40^\circ$ . ¿Cuáles la altura del edificio más alto?

Resp. 90 m.

**3.25** Una escalera, cuya base está de un lado de la calle, forma un ángulo de  $30^\circ$  con el piso cuando su parte superior descansa contra un edificio, y forma un ángulo de  $40^\circ$  con el piso cuando descansa contra un edificio al otro lado de la calle. Si la escalera mide 50 pies de largo, ¿cuál es el ancho de la calle?

Resp. 82 pies.

**3.26** ¿Cuál es el perímetro de un triángulo isósceles cuya base mide 40 cm y cuyos ángulos de base miden  $70^\circ$ ?

Resp. 157 cm.

# Solución de triángulos rectángulos

## 4

### 4.1 INTRODUCCIÓN

La solución de triángulos rectángulos depende de la aproximación de los valores, de las funciones trigonométricas de los ángulos agudos con que se cuente. Una parte importante de la solución es determinar en forma apropiada el valor de la función trigonométrica que se quiere utilizar. La solución será diferente cuando se utilicen tablas, como en las Secciones 4.2 a la 4.4, o cuando se utilice una calculadora, como en las Secciones 4.5 y 4.6.

En general, el procedimiento será usar los datos que se dan para escribir una ecuación valiéndose de una función trigonométrica, y resolver la ecuación para encontrar el valor que se desconoce. Los datos que se conocen son los dos lados del triángulo rectángulo o uno de los lados y un ángulo agudo. Una vez que se haya obtenido uno de los valores, puede calcularse el segundo ángulo agudo y el otro lado que queda. El segundo ángulo agudo se obtiene valiéndose del hecho de que los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son complementarios (esto es, la suma de ambos es igual a  $90^\circ$ ). El tercer lado se encuentra utilizando la definición de una segunda función trigonométrica o por medio del teorema de Pitágoras. (Véase Apéndice I: Geometría).

### 4.2 TABLAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON CUATRO DECIMALES

El Apéndice 2 contiene tres tablas diferentes de los valores de las funciones trigonométricas con cuatro decimales, en la Tabla 1, se dan ángulos en intervalos de  $10'$ , en la Tabla 2, se dan ángulos en intervalos de  $0.1^\circ$  y en la Tabla 3, los intervalos son de  $0.01$  rad. Las tablas que se incluyen en los textos difieren en varias formas, tales como en el número de dígitos, cuándo utilizar u omitir los valores enlistados de la cosecante y la secante, y las unidades de medición de los ángulos.

Los ángulos en las Tablas 1 y 2, se enumeran en las columnas de la izquierda y de la derecha. Los ángulos menores a  $45^\circ$ , se localizan en la columna del lado izquierdo y la función se lee en la parte superior de la tabla. Para los ángulos mayores a  $45^\circ$ , los valores se localizan en la columna del lado derecho y la función se lee en la parte inferior de la tabla. En cada renglón la suma de los ángulos de la columna izquierda con los de la derecha es de  $90^\circ$ , y las tablas están basadas en la igualdad de la cofunciones de ángulos complementarios.

En la Tabla 3, los ángulos en radianes se enlistan exclusivamente en la columna izquierda y la función puede leerse en la parte superior de la tabla.

### 4.3 TABLAS DE VALORES PARA LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En este capítulo, puede utilizarse la Tabla 1 o la Tabla 2 para encontrar los valores de las funciones trigonométricas siempre que se utilice una solución manual. Cuando el ángulo contenga únicamente un número exacto, o múltiplos exactos de  $10'$ , el valor se leerá directamente de las tablas.

**EJEMPLO 4.1** Encuentre el sen  $24^{\circ}40'$ 

Localice  $24^{\circ}40'$  ( $<45^{\circ}$ ) en la columna de la izquierda y lea el valor 0.4173 que contiene la casilla que coincide con el sen A de la parte superior de la tabla.

**EJEMPLO 4.2** Hallar el cos  $72^{\circ}$ 

Localice  $72^{\circ}$  ( $>45^{\circ}$ ) en la columna de la derecha y lea el valor 0.3090 en la columna señalada con cos A en la parte inferior de la tabla.

**EJEMPLO 4.3**

- (a)  $\tan 55^{\circ}20' = 1.4460$ . Dado que  $55^{\circ}20' > 45^{\circ}$ , lea en la parte superior de la tabla.  
 (b)  $\cot 41^{\circ}50' = 1.1171$ . Lea en la parte inferior de la tabla dado que  $41^{\circ}50' < 45^{\circ}$ .

Si el número de minutos del ángulo dado no es múltiplo de 10, como en  $24^{\circ}43'$ , se interpola entre los valores de los dos ángulos más cercanos ( $24^{\circ}40'$  y  $24^{\circ}50'$ ) utilizando el método de las partes proporcionales.

**EJEMPLO 4.4** Encuentre el sen  $24^{\circ}43'$  Se encuentra:

$$\begin{aligned}\text{sen } 24^{\circ}40' &= 0.4173 \\ \text{sen } 24^{\circ}50' &= 0.4200\end{aligned}$$

$$\text{Diferencia de } 10' = \frac{0.0027}{10} = \text{diferencia tabular}$$

La corrección =  $0.6 (0.0026) = 0.00156$  o 0.0016 cuando se redondea con 4 decimales. A medida que el ángulo crece, el coseno del ángulo se disminuye así:

$$\text{sen } 24^{\circ}43' = 0.4173 + 0.0008 = 0.4181$$

Si se cuenta con una tabla de 5 decimales, el valor que se leerá directamente será 0.41813 y luego se redondea a 0.4181.

**EJEMPLO 4.5** Encuentre el cos  $64^{\circ}26'$ 

Se encuentra:

$$\begin{aligned}\cos 64^{\circ}20' &= 0.4331 \\ \cos 64^{\circ}30' &= 0.4305\end{aligned}$$

$$\text{Diferencia tabular} = 0.0026$$

La corrección = a la diferencia de  $3' = 0.3 (0.0027) = 0.00081$  o 0.0008 cuando se redondea con 4 decimales. A medida que el ángulo aumenta, aumenta también el seno del ángulo; así:

$$\cos 64^{\circ}26' = 0.4331 - 0.0016 = 0.4315$$

Para abreviar, se puede proceder en la misma forma que en el ejemplo 4.4:

- (a) Localice  $\text{sen } 24^{\circ}40' = 0.4173$ . Para efectos de simplificación, omita momentáneamente el punto decimal y utilice sólo la secuencia 4173.  
 (b) Encuentre (mentalmente) la diferencia tabular 27, esto es, la diferencia entre la secuencia 4173 correspondiente a  $24^{\circ}40'$  y la secuencia 4200 correspondiente a  $24^{\circ}50'$ .  
 (c) Encuentre  $0.3 (27) = 8.1$ , redondeando al entero más cercano. Este valor es la corrección.  
 (d) Sume (desde seno) la corrección a 4173 y obtenga 4181. Entonces,

$$\text{sen } 24^{\circ}43' = 0.4181$$

Cuando se interpola de un ángulo menor a otro mayor, como en el ejemplo 4.4: (1) La corrección se suma para encontrar el seno, la tangente y la secante. (2) La corrección se resta para encontrar el coseno, la cotangente y la cosecante.

**EJEMPLO 4.6** Encuentre  $\cos 27.23^\circ$ 

$$\begin{aligned} \text{Se encuentra} \quad & \cos 27.20^\circ = 0.8894 \\ & \cos 27.30^\circ = \underline{0.8886} \\ & \text{Diferencia tabular} = \underline{0.0008} \end{aligned}$$

La corrección =  $0.3 (0.0008) = 0.00024$  o  $0.0002$  cuando se redondea con 4 decimales. Como el ángulo crece, el coseno decrece, por lo que:

$$\cos 27.23^\circ = 0.8894 - 0.0002 = 0.8892$$

**EJEMPLO 4.7** Encuentre  $\sec 57.08^\circ$ 

$$\begin{aligned} \text{Se encuentra} \quad & \sec 57.00^\circ = 1.8361 \\ & \sec 57.10^\circ = \underline{1.8410} \\ & \text{Diferencia tabular} = \underline{0.0049} \end{aligned}$$

La corrección =  $0.8 (0.0049) = 0.00392$  o  $0.0039$  cuando se redondea con 4 decimales. Como el ángulo crece, la secante crece, por lo que

$$\sec 57.08^\circ = 1.8361 + 0.0039 = 1.8400$$

(Véanse Probs. 4.1 y 4.2)

**4.4 USO DE LAS TABLAS PARA ENCONTRAR UN ÁNGULO DADO EL VALOR DE UNA FUNCIÓN**

El procedimiento es el inverso al que se expuso en el inciso anterior.

**EJEMPLO 4.8** Al leer directamente de la Tabla 1, se tiene

$$0.2924 = \text{sen } 17^\circ \quad 2.7725 = \text{tan } 70^\circ 10'$$

**EJEMPLO 4.9** Encuentre A, dado que  $\text{sen } A = 0.4234$  (Utilice la Tabla 1)

El valor dado en la tabla no es un entero. Sin embargo, se tiene

$$\begin{array}{ll} 0.4226 = \text{sen } 25^\circ 0' & 0.4226 = \text{sen } 25^\circ 0' \\ 0.4253 = \text{sen } 25^\circ 10' & 0.4234 = \text{sen } A \\ \hline 0.0027 = \text{diferencia tabular} & 0.0008 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0.0008}{0.0027} (10) = \frac{8}{27} (10) = 3 \text{ al minuto más cercano}$$

Al sumar la corrección (dado que es función seno), se tiene  $25^\circ 0' + 3' = 25^\circ 3' = A$

**EJEMPLO 4.10** Encuentre A, dado que  $\cot A = 0.6345$  (Utilice la Tabla 1)

$$\begin{array}{ll} \text{Se encuentra que,} & 0.6330 = \cot 57^\circ 40' & 0.6330 = \cot 57^\circ 40' \\ & 0.6371 = \cot 57^\circ 30' & 0.6345 = \cot A \\ & 0.0041 = \text{diferencia tabular} & 0.0015 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0.0015}{0.0041} (10) = \frac{15}{41} (10) = 4 \text{ al minuto más cercano}$$

Al restar la corrección (dado que es función cotangente), se tiene  $57^{\circ}40' - 4' = 57^{\circ}36' = A$ . Para abreviar, se puede proceder en forma similar al ejemplo 4.9:

- (a) Localice el valor cercano más pequeño,  $0.4226 = \text{sen } 25^{\circ}0'$ . Utilice momentáneamente el valor sin punto decimal, quedando la secuencia 4226.  
 (b) Encuentre la diferencia tabular, 27.  
 (c) Encuentre la diferencia parcial, 8, entre 4226 y la secuencia dada 4234.  
 (d) Encuentre  $\frac{8}{27}(10) = 3'$  y súmelo a  $25^{\circ}0'$ .

**EJEMPLO 4.11** Encuentre  $A$ , dado que  $\text{sen } A = 0.4234$ . (Utilice la Tabla 2.) El valor dado en la tabla no es entero. Se encuentra:

$$\begin{array}{ll} 0.4226 = \text{sen } 25.00^{\circ} & 0.4226 = \text{sen } 25.00^{\circ} \\ 0.4242 = \text{sen } 25.10^{\circ} & 0.4234 = \text{sen } A \\ \hline 0.0016 = \text{diferencia tabular} & 0.0008 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0.0008}{0.0016}(0.1) = 0.05, \text{ al centésimo más cercano.}$$

Al sumar la corrección (dado que es función seno), se tiene  $A = 25.00^{\circ} + 0.05 = 25.05^{\circ}$ .

**EJEMPLO 4.12** Encuentre  $A$ , dado que  $\text{cot } A = 0.6345$ . (Utilice la Tabla 2)

Se encuentra que,

$$\begin{array}{ll} 0.6322 = \text{cot } 57.60'' & 0.6322 = \text{cot } 57.60'' \\ 0.6346 = \text{cot } 57.50'' & 0.6345 = \text{cot } A \\ \hline 0.0024 = \text{diferencia tabular} & 0.0023 = \text{diferencia parcial} \end{array}$$

$$\text{Corrección} = \frac{0.0023}{0.0024}(0.1) = 0.10, \text{ a la centésima más cercana.}$$

Al restar la corrección (dado que es función cotangente), se tiene  $A = 57.60^{\circ} - 0.10^{\circ} = 57.50^{\circ}$ .

(Véase Prob. 4.4)

#### 4.5 VALORES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS CON CALCULADORA

Los valores de las funciones trigonométricas que se obtienen por calculadora dependen del número de dígitos que puedan desplegar, comúnmente 8, 10 o 12. El número de los decimales varía con el tamaño del número, pero por lo general, son al menos cuatro. Cuando se utilice calculadora en este libro, los valores de las funciones trigonométricas se redondearán a seis decimales, a menos que el valor exacto requiera menos dígitos.

**EJEMPLO 4.13** Encuentre  $\text{sen } 24^{\circ}40'$

- (a) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).  
 (b) Introduzca 24, presione la tecla (+), introduzca 40, presione la tecla (+), introduzca 60, presione la tecla (=).  
 (c) Presione la tecla (sen).  
 (d)  $\text{sen } 24^{\circ}40' = 0.417338$  redondeado a 6 dígitos.

**EJEMPLO 4.14** Encuentre  $\tan 48^\circ 23'$ .

- La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- introduzca 48, presione la tecla (+), introduzca 23, presione la tecla (+), introduzca 60, presione la tecla (=).
- Presione la tecla (tan).
- $\tan 48^\circ 23' = 1.12567$  redondeado a 6 dígitos.

**EJEMPLO 4.15** Encuentre  $\cos 53.28^\circ$

- La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- Introduzca 53.28
- Presione la tecla (cos).
- $\cos 53.28^\circ = 0.597905$  redondeado a 6 dígitos.

Para los valores de las funciones cotangente, secante y cosecante, se utiliza el recíproco de la función similar correspondiente, (Véase Sec.2.4.)

**EJEMPLO 4.16** Encuentre  $\cot 37^\circ 20'$

- La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- Introduzca 37, presione la tecla (+), introduzca 20, presione la tecla (-), introduzca 60, presione la tecla (=).
- Presione la tecla (tan).
- Presione la tecla (1/x) o divida 1 entre el valor de  $\tan 37^\circ 20'$  de (c)
- $\cot 37^\circ 20' = 1.31110$  redondeado a 6 dígitos.

Si se utiliza una calculadora que tenga las teclas paréntesis "(y)", éstas deben usarse para simplificar los problemas al realizar operaciones continuas.

Al utilizar los paréntesis en el Ejemplo 4.14, queda:

- La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- Presione la tecla ((), introduzca 48, presione la tecla (+), introduzca 23, presione la tecla (+), introduzca 60, presione la tecla ()) y presione la tecla (tan).
- $\tan 48^\circ 23' = 1.12567$  redondeado a 6 dígitos.

Este procedimiento se indicará en la solución por calculadora como  $\tan 48^\circ 23' = \tan (48 + \frac{23}{60})^\circ = 1.12567$ .

(Véase Prob. 4.3)

#### 4.6 MEDIANTE EL USO DE UNA CALCULADORA ENCUÉNTRERE UN ÁNGULO DADO EL VALOR DE UNA FUNCIÓN

Los valores de los ángulos pueden encontrarse fácilmente en grados y decimales. Si los ángulos se desean en minutos, se toma la parte decimal y se multiplica por 60', redondeando el resultado a 10', 1' o 0.1' según se requiera.

**EJEMPLO 4.17** Encuentre A, cuando el  $\sin A = 0.4234$ .

- La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- introduzca 0.4234, presione la tecla (inv.), y la tecla (sen).
- $A = 25.05^\circ$  al centésimo más cercano, o bien:
- Recuerde el número entero de grados,  $25^\circ$ .

- (e) Presione la tecla (-), introduzca 25, presione la tecla (=), presione la tecla (x), introduzca 60 y presione la tecla (=).
- (f) El valor redondeado al minuto más cercano es 3'.
- (g)  $A = 25^{\circ}3'$  al minuto más próximo.

**EJEMPLO 4.18** Encuentre A, cuando el  $\cos A = 0.8163$ .

- (a) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- (b) Introduzca 0.8163, presione la tecla (inv.), y la tecla (cos).
- (c)  $A = 35.28^{\circ}$  al centésimo más cercano, o bien:
- (d) Recuerde el número entero de grados,  $35^{\circ}$ .
- (e) Presione la tecla (-), introduzca 35, presione la tecla (=), presione la tecla (x), introduzca 60 y presione la tecla (=).
- (f) El valor redondeado al minuto más cercano es 17'.
- (g)  $A = 35^{\circ}17'$  al minuto más próximo.

Cuando se dan los valores de la cotangente, secante o cosecante, se utiliza el recíproco del valor dado para encontrar la función similar correspondiente.

**EJEMPLO 4.19** Encuentre A, cuando la  $\sec A = 3.4172$ .

- (a) La calculadora debe estar en modo grados (degree mode).
- (b) Introduzca 3.4172, presione la tecla (1/x) o bien introduzca 1, presione (+), introduzca 3.4172 y presione la tecla (=)
- (c) Presione la tecla (inv.), y la tecla (cos).
- (d)  $A = 72.98^{\circ}$  al centésimo más cercano, o bien:
- (e) Recuerde el número entero de grados,  $72^{\circ}$ .
- (f) Presione la tecla (-), introduzca 72, presione la tecla (=), presione la tecla (x) introduzca 60 y presione la tecla (=).
- (g) El valor redondeado al minuto más cercano es 59'.
- (h)  $A = 72^{\circ}59'$  al minuto más próximo.

#### 4.7 EXACTITUD EN LOS RESULTADOS CALCULADOS

Los errores en los resultados calculados pueden deberse a:

- (a) Errores en la obtención de los datos. Estos errores provienen de los resultados de las mediciones.
- (b) La utilización de valores de las funciones trigonométricas, ya sea de tablas o de calculadora, siempre son aproximaciones de una gran cantidad de dígitos.

Una medición de 35 m, significa que es correcta para el metro más cercano; esto es, la longitud verdadera se encuentra entre 34.5 y 35.5 m. En forma similar, una longitud de 35.0 m significa que la longitud real está entre 34.95 y 35.05 m; una longitud de 35.8 m significa que la verdadera longitud está entre 35.75 y 35.85 m; una longitud de 35.80 m significa que la longitud real está entre 35.795 y 35.805 m; y así sucesivamente.

En el número 35 hay dos cifras significativas, 3 y 5. También son significativas en 3.5, 0.35, 0.035, 0.0035, pero no ocurre lo mismo en 35.0, 3.50, 0.350, 0.0350. En 35.0, 3.50, 0.350, 0.0350 hay tres cifras significativas 3, 5 y 0. Esta es otra forma de decir que 35 y 35.0 no son la misma medida.

Es imposible determinar las cifras significativas en mediciones tales como 350, 3500, 35000,... Por ejemplo, 350 puede significar que el resultado verdadero se encuentre entre 345 y 355 o entre 349.5 y 350.5. Una forma de indicar la precisión de un número que termina en cero se logra insertando el punto decimal; de esta forma, 350.0. Tiene cuatro dígitos significativos. Los ceros entre dígitos significativos diferentes de cero son también dígitos significativos.

Un resultado calculado no puede tener más decimales que los que tenga el menos exacto de los datos medidos. Enseguida se muestra una relación entre la exactitud de longitudes y ángulos.

- (a) Distancias expresadas con 2 dígitos significativos y ángulos expresados al grado más cercano.
- (b) Distancias expresadas con 3 dígitos significativos y ángulos expresados al 10' más cercano o al  $0.1^{\circ}$  más cercano.

- (c) Distancias expresadas con 4 dígitos significativos y ángulos expresados al 1' más cercano o al  $0.01^\circ$  más cercano.  
 (d) Distancias expresadas con 5 dígitos significativos y ángulos expresados al 0.1' más cercano o al  $0.001^\circ$  más cercano.

(NOTA: Si se utilizan varias aproximaciones en la obtención de un resultado, en cada paso intermedio deben utilizarse, al menos, dígitos más significativos de los que se requieren para la exactitud del resultado final.)

### Problemas resueltos

4.1 Encuentre el valor de la función utilizando tablas.

- (a)  $\text{sen } 56^\circ 34' = 0.8345$ ;  $8339 + 0.4(16) = 8339 + 6$   
 (b)  $\text{cos } 19^\circ 45' = 0.9412$ ;  $9417 - 0.5(10) = 9417 - 5$   
 (c)  $\text{tan } 77^\circ 12' = 4.4016$ ;  $43897 + 0.2(597) = 43897 + 119$   
 (d)  $\text{cot } 40^\circ 36' = 1.1667$ ;  $11708 - 0.6(68) = 11708 - 41$   
 (e)  $\text{sec } 23^\circ 47' = 1.0928$ ;  $10918 + 0.7(14) = 10918 + 10$   
 (f)  $\text{csc } 60^\circ 4' = 1.1539$ ;  $11547 - 0.4(19) = 11547 - 8$   
 (g)  $\text{sen } 46.35^\circ = 0.7236$ ;  $7230 + 0.5(12) = 7230 + 6$   
 (h)  $\text{cos } 18.29^\circ = 0.9495$ ;  $9500 - 0.9(6) = 9500 - 5$   
 (i)  $\text{tan } 82.19^\circ = 7.2908$ ;  $72066 + 0.9(936) = 72066 + 842$   
 (j)  $\text{cot } 13.84^\circ = 4.0591$ ;  $40713 - 0.4(305) = 40713 - 122$   
 (k)  $\text{sec } 29.71^\circ = 1.1513$ ;  $11512 + 0.1(12) = 11512 + 1$   
 (l)  $\text{csc } 11.08^\circ = 5.2035$ ;  $52408 - 0.8(466) = 52408 - 373$

4.2 En una solución manual, si la corrección es 6.5, 13.5, 10.5, etc., debe redondearse de tal forma que el resultado final sea par.

- (a)  $\text{sen } 28^\circ 37' = 0.4790$ ;  $4772 + 0.7(25) = 4772 + 17.5$   
 (b)  $\text{cot } 65^\circ 53' = 0.4476$ ;  $4487 - 0.3(35) = 4487 - 10.5$   
 (c)  $\text{cos } 35^\circ 25' = 0.8150$ ;  $8158 - 0.5(17) = 8158 - 8.5$   
 (d)  $\text{sec } 39^\circ 35' = 1.2976$ ;  $12960 + 0.5(31) = 12960 + 15.5$

4.3 Encuentre el valor de la función utilizando calculadora.

- (a)  $\text{sen } 56^\circ 34' = 0.834527$ ;  $\text{sen } (56 + 34/60)^\circ$   
 (b)  $\text{cos } 19^\circ 45' = 0.941176$ ;  $\text{cos } (19 + 45/60)^\circ$   
 (c)  $\text{tan } 77^\circ 12' = 4.40152$ ;  $\text{tan } (77 + 12/60)^\circ$   
 (d)  $\text{cot } 40^\circ 36' = 1.16672$ ;  $1/\text{tan } 40^\circ 36' = 1/\text{tan}(40 + 36/60)^\circ$   
 (e)  $\text{sec } 23^\circ 47' = 1.09280$ ;  $1/\text{cos } 23^\circ 47' = 1/\text{cos } (23 + 47/60)^\circ$   
 (f)  $\text{csc } 60^\circ 4' = 1.15393$ ;  $1/\text{sen } 60^\circ 4' = 1/\text{sen } (60 + 4/60)^\circ$

- (a)  $\text{sen } 46.35^\circ = 0.723570$
- (b)  $\text{cos } 18.29^\circ = 0.949480$
- (c)  $\text{tan } 82.19^\circ = 7.29071$
- (d)  $\text{cot } 13.84^\circ = 4.05904$
- (e)  $\text{sec } 29.71^\circ = 1.15135$
- (f)  $\text{csc } 11.08^\circ = 5.20347$

4.4 Encuentre A aproximando al minuto más cercano y al centésimo de grado más cercano.

- (a)  $\text{sen } A = 0.6826$ ,  $A = 43^\circ 3'$ ;  $43^\circ 0' + 6 / 21 (10') = 43^\circ 0' + 3'$ ;  $A = 43.05^\circ$ ;  
 $43.00^\circ + 6 / 13 (0.1^\circ) = 43.00^\circ + 0.05^\circ$
- (b)  $\text{cos } A = 0.5957$ ,  $A = 53^\circ 26'$ ;  $53^\circ 30' - (10') = 53^\circ 30' - 4'$ ;  $A = 53.44^\circ$ ;  
 $53.50^\circ - 9 / 14 (0.1^\circ) = 53.50^\circ - 0.06^\circ$
- (c)  $\text{tan } A = 0.9470$ ,  $A = 43^\circ 26'$ ;  $43^\circ 2 + 35/55 (10') = 43^\circ 20' + 6'$ ;  $A = 43.44^\circ$ ;  
 $43.40^\circ + 13/33 (0.1^\circ) = 43.40^\circ + 0.04^\circ$
- (d)  $\text{cot } A = 1.7580$ ,  $A = 29^\circ 38'$ ;  $29^\circ 40' - 24 / 119 (10') = 29^\circ 40' - 2'$ ;  $A = 29.63^\circ$ ;  
 $29.70^\circ - 48 / 7 (0.1^\circ) = 29.70^\circ - 0.07^\circ$
- (e)  $\text{sec } A = 2.3198$ ,  $A = 64^\circ 28'$ ;  $64^\circ 20' + 110/140 (10') = 64^\circ 20' + 8'$ ;  $A = 64.46^\circ$ ;  
 $64.40^\circ + 54 / 84 (0.1^\circ) = 64.40^\circ + 0.06^\circ$
- (f)  $\text{csc } A = 1.5651$ ,  $A = 39^\circ 43'$ ;  $39^\circ 50' - 40 / 55 (10') = 39^\circ 50' - 7'$ ;  $A = 39.71^\circ$ ;  
 $39.80^\circ - 29 / 33 (0.1^\circ) = 39.80^\circ - 0.09^\circ$

4.5 Resuelva el triángulo rectángulo donde  $A = 35^\circ 10'$  y  $c = 72.5$ .

$B = 90^\circ - 35^\circ 10' = 54^\circ 50'$  (Véase Figura 4-1.)

$$a / c = \text{sen } A \quad a = c \text{ sen } A = 72.5 (0.5760) = 41.8$$

$$b / c = \text{cos } A \quad b = c \text{ cos } A = 72.5 (0.8175) = 59.3$$

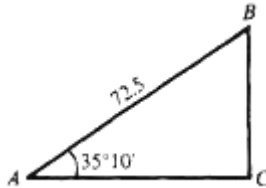


Fig. 4-1

- 4.6 Resuelva el triángulo rectángulo donde  $a = 24.36$  y  $A = 58^\circ 53'$ .  $B = 90^\circ - 51^\circ 53' = 31^\circ 7'$ . (Véase Figura 4-2.)

$$\begin{array}{ll} b/a = \cot A & b = a \cot A = 24.36 (0.6036) = 14.70 \\ \text{o} & a/b = \tan A \quad b = a / \tan A = 24.36 / 1.6567 = 14.70 \\ c/a = \csc A & c = a / \csc A = 24.36 (1.1681) = 28.45 \\ \text{o} & a/c = \sin A \quad c = a / \sin A = 24.36 / 0.8562 = 28.45 \end{array}$$



Fig. 4-2

- 4.7 Resuelva el triángulo rectángulo ABC donde  $a = 43.9$  y  $b = 24.3$ . (Véase Figura 4-3.)

$$\begin{array}{ll} \tan A = 43.9 / 24.3 = 1.8066; A = 61^\circ 0' & \text{y} \quad B = 90^\circ - A = 29^\circ 0', \text{ o } A = 61.0^\circ \quad \text{y} \quad B = 90^\circ - A = 29.0^\circ \\ c/a = \csc A & c = a \csc A = 43.9 (1.1434) = 50.2 \\ \text{o} & a/c = \sin A, \quad c = a/\sin A = 43.9/0.8746 = 50.2 \end{array}$$

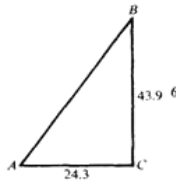


Fig. 4-3

- 4.8 Resuelva el triángulo rectángulo ABC donde  $b = 15.25$  y  $c = 32.68$ . (Véase Figura 4-4.)

$$\begin{array}{ll} \sin B = 15.25 / 32.68 = 0.4666; B = 27^\circ 49' & \text{y} \quad A = 90^\circ - B = 62^\circ 11', \text{ o } B = 27.82^\circ \quad \text{y} \quad A = 90^\circ - B = 62.18^\circ \\ a/b = \cot B & a = b \cot B = 15.25 (1.8953) = 28.90 \\ \text{o} & b/a = \tan B \quad a = b/\tan B = 15.25 / 0.5276 = 28.90 \end{array}$$

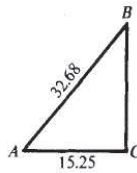


Fig. 4-4

(NOTA: Véase Apéndice 1, Geometría, para las propiedades usadas en los Probs. 4.9 a 4.11.)

- 4.9 La base de un triángulo isósceles mide 20.4 y los ángulos de la base miden  $48^{\circ}40'$ . Encuentre la longitud de sus lados iguales y la altura del triángulo.

En la Figura 4-5,  $BD$  es perpendicular a  $AC$ , siendo ésta la bisectriz. En el triángulo rectángulo  $ABD$ .

$$AB / AD = \sec A \quad AB = 10.2(1.5141) = 15.4$$

$$AD / AB = \cos A \quad AB = 10.2 / 0.6604 = 15.4$$

$$DB / AD = \tan A \quad DB = 10.2 (1.1369) = 11.6$$

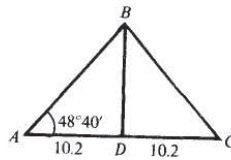


Fig. 4-5

- 4.10 Considerando la Tierra como una esfera de radio 3960 m, encuentre el radio  $r$  del paralelo 40 de latitud. Refiérase la Figura 4-6.

En el triángulo rectángulo  $OCB$ ,  $\angle OBC = 40^{\circ}$  y  $OB = 3960$ .

$$\text{Entonces} \quad \cos \angle OBC = CB / OB \quad \text{y} \quad r = CB = 3960 \cos 40^{\circ}$$

Manual:  $r = 3960 \cos 40^{\circ} = 3960(0.7660) = 3033$ .

Calculadora:  $r = 3960 \cos 40^{\circ} = 3960(0.766044) = 3033.53$ .

El radio  $r$  del paralelo 40 es 3030 m, con tres dígitos significativos.

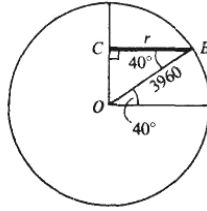


Fig. 4-6

- 4.11 Encuentre el perímetro de un octágono regular inscrito en un círculo de 150 cm de radio.

En la Figura 4-7 dos vértices consecutivos A y B del octágono se encuentran unidos al centro O del círculo. El triángulo OAB es isósceles cuyos lados iguales miden 150 y  $\angle AOB = 360^\circ/8 = 45^\circ$ . Como en el problema 4.9, la bisectriz  $\angle AOB$  forma el triángulo rectángulo MOB.

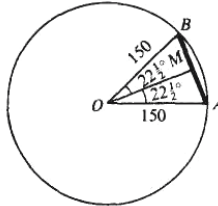


Fig. 4-7

Entonces  $MB = OB \sin \angle MOB = 150 \sin 22^\circ 30' = 150(0.3827) = 57.4$  y el perímetro del octágono es  $16MB = 16(57.4) = 918\text{cm}$ .

- 4.12 Para calcular el ancho de un río, un topógrafo instala su base en C en una orilla y mira a un punto B en la orilla opuesta; luego, girando un ángulo de  $90^\circ$ , mide una distancia  $CA = 225$  m. Finalmente, instalando la base en A, mide  $\angle CAB$  de  $48^\circ 20'$ . Encuentre el ancho del río.

Véase Figura 4-8. En el triángulo rectángulo ACB,

$$CB = AC \tan \angle CAB = 225 \tan 48^\circ 20' = 225(1.1237) = 253 \text{ m}$$

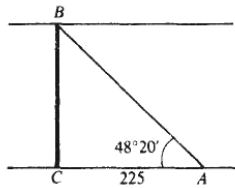


Fig. 4-8

- 4.13 En la Figura 4-9, la línea  $AD$  atraviesa un pantano. Para localizar un punto en esta línea, un topógrafo se desvía un ángulo de  $51^\circ 16'$  en  $A$  y mide una distancia de 1585 pies hasta el punto  $C$ . Luego, se desvía un ángulo de  $90^\circ$  en  $C$  y traza una línea  $CB$ . Si  $B$  está sobre  $AD$ , ¿a qué distancia estará  $C$  para alcanzar  $B$ ?

$$CB = AC \tan 51^\circ 16'$$

$$= 1585(1.2467) = 1976 \text{ pies}$$

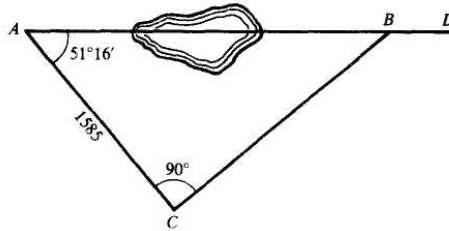


Fig. 4-9

- 4.14 Desde un punto  $A$  a nivel del suelo, los ángulos de elevación de la punta  $D$  y de la base  $B$  de un mástil situado en la cumbre de una colina son  $47^\circ 54'$  y  $39^\circ 45'$ . Encuentre la altura de la colina si la altura del mástil es de 115.5 pies. Véase Figura 4-10.

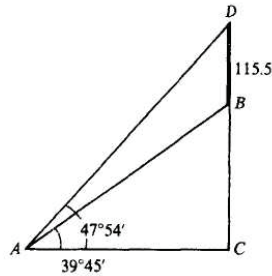


Fig. 4-10

Manual: Sea  $C$  el punto en que la línea del mástil encuentra a la horizontal que pasa por  $A$  en  $C$ . En el triángulo rectángulo  $ACD$ ,  $AC = DC \cot 47^\circ 54' = (115.5 + BC)(0.9036)$ . En el triángulo rectángulo  $ACB$ ,  $AC = BC \cot 39^\circ 45' = BC(1.12024)$ .

Entonces

$$(115.5 + BC)(0.9036) = BC(1.12024)$$

Y

$$BC = \frac{115.5(0.9036)}{1.2024 - 0.9036} = 349.283$$

Calculadora: En el triángulo rectángulo  $ACD$ ,  $AC = DC/\tan 47^\circ 54' = (DB + BC)/\tan 47^\circ 54'$ .  
En el triángulo rectángulo  $ACB$ ,  $AC = BC / \tan 39^\circ 45'$ .

Entonces

$$\frac{BC}{\tan 39^{\circ}45'} = \frac{DB + BC}{\tan 47^{\circ}54'}$$

$$BC \tan 47^{\circ}54' = DB \tan 39^{\circ}45' + BC \tan 39^{\circ}45'$$

$$BC \tan 47^{\circ}54' - BC \tan 39^{\circ}45' = DB \tan 39^{\circ}45'$$

$$(\tan 47^{\circ}54' - \tan 39^{\circ}45') BC = DB \tan 39^{\circ}45'$$

$$\begin{aligned} BC &= \frac{DB \tan 39^{\circ}45'}{\tan 47^{\circ}54' - \tan 39^{\circ}45'} \\ &= \frac{115.5 \tan (39 + 45/60)^{\circ}}{\tan (47 + 54/60)^{\circ} - \tan (39 + 45/60)^{\circ}} \\ &= 349.271 \end{aligned}$$

La altura de la colina es de 349.3 pies.

- 4.15 Desde lo alto de un faro, a 175 pies sobre el nivel del agua, el ángulo de depresión de un bote que está al sur es  $18^{\circ}50'$ . Calcular la velocidad del bote si después de moverse hacia el oeste durante 2 min, el ángulo de depresión es  $14^{\circ}20'$ . En la Figura 4-11,  $AD$  es el faro,  $C$  es la posición del bote al sur del faro y  $B$  es la posición 2 min después.

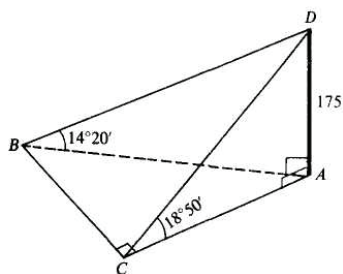


Fig. 4-11

Manual: En el triángulo rectángulo  $CAD$ ,  $AC = AD \cot LACD = 175 \cot 18^{\circ}50' = 175(2.9319) = 513$ . En el triángulo rectángulo  $BAD$ ,  $AB = AD \cot LABD = 175 \cot 14^{\circ}20' = 175(3.9136) = 685$ .

En el triángulo rectángulo  $ABC$ ,  $BC = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2} = \sqrt{(685)^2 - (513)^2} = 453.6$ .

Calculadora: En el triángulo rectángulo  $CAD$ ,  $AC = 175/\tan 18^{\circ}50'$ .

En el triángulo rectángulo  $BAD$ ,  $AB = 175/\tan 14^{\circ}20'$ .

En el triángulo rectángulo  $ABC$ ,  $BC = \sqrt{(AB)^2 - (AC)^2}$ .

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{[175/\tan (14 + 20/60)^{\circ}]^2 - [175/\tan (18 + 50/60)^{\circ}]^2} \\ &= 453.673 \end{aligned}$$

El bote viaja 454 pies en 2 min; su velocidad es 227 pies/min.

4

**Problemas propuestos**

**4.16** Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos, con cuatro decimales. (a)  $18^{\circ}47'$ , (b)  $32^{\circ}13'$ , (c)  $58^{\circ}24'$ , (d)  $79^{\circ}45'$

Resp.	ángulo	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
(a)	$18^{\circ}47'$	0.3220	0.9468	0.3401	2.9403	1.0563	3.1057
(b)	$32^{\circ}13'$	0.5331	0.8460	0.6301	1.5869	1.1820	1.8757
(c)	$58^{\circ}24'$	0.8517	0.5240	1.6255	0.6152	1.9084	1.1741
(d)	$79^{\circ}45'$	0.9840	0.1780	5.5304	0.1808	5.6201	1.0162

[NOTA: Con calculadora, los valores son los mismos excepto para (a)  $\cos 18^{\circ}47' = 0.9467$ , (t)  $\cos 79^{\circ}45' = 0.1779$ , (ci)  $\tan 79^{\circ}45' = 5.5301$ , y (d)  $\sec 79^{\circ}45' = 5.6198$ .]

**4.17** Encontrar los valores de las seis funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos, con cuatro decimales.

(a)  $29.43^{\circ}$ , (b)  $73.67^{\circ}$ , (c)  $61.72^{\circ}$ , (d)  $12.08^{\circ}$

Resp.	ángulo	seno	coseno	tangente	cotangente	secante	cosecante
(a)	$29.43^{\circ}$	0.4914	0.8710	0.5642	1.7725	1.1482	2.0352
(b)	$73.67^{\circ}$	0.9596	0.2812	3.4131	0.2930	3.5566	1.0420
(c)	$61.72^{\circ}$	0.8807	0.4738	1.8588	0.5380	2.1107	1.1355
(d)	$12.08^{\circ}$	0.2093	0.9779	0.2140	4.6726	1.0226	4.7784

[NOTA: Con calculadora, los valores son los mismos excepto para (b)  $\sin 73.67^{\circ} = 0.9597$ , (c)  $\sin 61.72^{\circ} = 0.8806$ , y (d)  $\cot 12.08^{\circ} = 4.6725$ .]

**4.18** Encuentre el ángulo (agudo) A, dado:

(a) $\sin A = 0.5741$	Resp. $A = 35^{\circ}2'$ o $35.04^{\circ}$	(e) $\cos A = 0.9382$	Resp. $A = 20^{\circ}15'$ o $20.25^{\circ}$
(b) $\sin A = 0.9468$	$A = 71^{\circ}13'o$ $71.23^{\circ}$	(f) $\cos A = 0.6200$	$A = 51^{\circ}41'o$ $51.68^{\circ}$
(c) $\sin A = 0.3510$	$A = 20^{\circ}33'$ o $20.55^{\circ}$	(g) $\cos A = 0.7120$	$A = 44^{\circ}36'o$ $44.60^{\circ}$
(d) $\sin A = 0.8900$	$A = 62^{\circ}52'$ o $62.88^{\circ}$	(h) $\cos A = 0.4651$	$A = 62^{\circ}17'o$ $62.28^{\circ}$
(i) $\tan A = 0.2725$	$A = 15^{\circ}15'o$ $15.24^{\circ}$	(m) $\cot A = 0.2315$	$A = 76^{\circ}58'o$ $76.97^{\circ}$
(j) $\tan A = 1.1652$	$A = 49^{\circ}22'o$ $49.38^{\circ}$	(n) $\cot A = 2.9715$	$A = 18^{\circ}36'o$ $18.60^{\circ}$
(k) $\tan A = 0.5200$	$A = 27^{\circ}28'o$ $27.47^{\circ}$	(o) $\cot A = 0.7148$	$A = 54^{\circ}27'o$ $54.44^{\circ}$
(l) $\tan A = 2.7775$	$A = 70^{\circ}12'$ o $70.20^{\circ}$	(p) $\cot A = 1.7040$	$A = 30^{\circ}24'o$ $30.41^{\circ}$
(q) $\sec A = 1.1161$	$A = 26^{\circ}22'o$ $26.37^{\circ}$	(u) $\csc A = 3.6882$	$A = 15^{\circ}44'o$ $15.73^{\circ}$
(r) $\sec A = 1.4382$	$A = 45^{\circ}57'$ o $45.95^{\circ}$	(v) $\csc A = 1.0547$	$A = 71^{\circ}28'o$ $71.47^{\circ}$

## SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

- (s)  $\sec A = 1.2618$        $A = 37^\circ 35'$  o  $37.58^\circ$       (w)  $\csc A = 1.7631$        $A = 34^\circ 33'$  o  $34.55^\circ$   
 (t)  $\sec A = 2.1584$        $A = 62^\circ 24'$  o  $62.40^\circ$       (x)  $\csc A = 1.3436$        $A = 48^\circ 6'$  o  $48.10^\circ$

[NOTA: Las respuestas con calculadora son las mismas excepto para (b)  $71^\circ 14'$ ; (d)  $62.87^\circ$  y (j)  $49.36^\circ$ .]

## 4.19 Resolver cada uno de los triángulos rectángulos ABC, dado:

- |                                      |                                                                                               |
|--------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| (a) $A = 35^\circ 20'$ , $c = 112$   | Resp. $B = 54^\circ 40'$ , $a = 64.8$ , $b = 91.4$                                            |
| (b) $B = 48^\circ 40'$ , $c = 225$   | $A = 41^\circ 20'$ , $a = 149$ , $b = 169$                                                    |
| (c) $A = 23^\circ 18'$ , $c = 346.4$ | $B = 66^\circ 42'$ , $a = 137.0$ , $b = 318.1$                                                |
| (d) $B = 54^\circ 12'$ , $c = 182.5$ | $A = 35^\circ 48'$ , $a = 106.7$ , $b = 148.0$                                                |
| (e) $A = 32^\circ 10'$ , $a = 75.4$  | $B = 57^\circ 50'$ , $b = 120$ , $c = 142$                                                    |
| (f) $A = 58^\circ 40'$ , $b = 38.6$  | $B = 31^\circ 20'$ , $a = 63.4$ , $c = 74.2$                                                  |
| (g) $B = 49^\circ 14'$ , $b = 222.2$ | $A = 40^\circ 46'$ , $a = 191.6$ , $c = 293.4$                                                |
| (h) $A = 66^\circ 36'$ , $a = 112.6$ | $B = 23^\circ 24'$ , $b = 48.73$ , $c = 122.7$                                                |
| (i) $A = 29^\circ 48'$ , $b = 458.2$ | $B = 60^\circ 12'$ , $a = 262.4$ , $c = 528.0$                                                |
| (j) $a = 25.4$ , $b = 38.2$          | $A = 33^\circ 40'$ , $B = 56^\circ 20'$ , $c = 45.9$ o $A = 33.6^\circ$ , $B = 56.4^\circ$    |
| (k) $a = 45.6$ , $b = 84.8$          | $A = 28^\circ 20'$ , $B = 61^\circ 40'$ , $c = 96.3$ o $A = 28.3^\circ$ , $B = 61.7^\circ$    |
| (l) $a = 38.64$ , $b = 48.74$        | $A = 38^\circ 24'$ , $B = 51^\circ 36'$ , $c = 62.20$ o $A = 38.41^\circ$ , $B = 51.59^\circ$ |
| (m) $a = 506.2$ , $c = 984.8$        | $A = 30^\circ 56'$ , $B = 59^\circ 4'$ , $b = 844.7$ o $A = 30.93^\circ$ , $B = 59.07^\circ$  |
| (n) $b = 672.9$ , $c = 888.1$        | $A = 40^\circ 44'$ , $B = 49^\circ 16'$ , $a = 579.6$ o $A = 40.74^\circ$ , $B = 49.26^\circ$ |
| (o) $A = 23.2^\circ$ , $b = 117$     | $B = 66.8^\circ$ , $a = 46.1$ , $b = 108$                                                     |
| (p) $A = 58.61^\circ$ , $b = 87.24$  | $B = 31.39^\circ$ , $a = 143.0$ , $c = 167.5$                                                 |

[NOTA: Con calculadora, los valores son los mismos excepto para (d)  $a = 106.8.3$

- 4.20 Encuentre la base y la altura de un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice es igual a  $65^\circ$  y sus lados iguales de 415 cm.  
 Resp. base = 446 cm, altura = 350 cm.
- 4.21 La base de un triángulo isósceles es de 15.90 pulgadas y los ángulos de la base miden  $54^\circ 28'$ . Encuentre los lados iguales y la altura.  
 Resp. lado = 13.68 pulgadas, altura = 11.13 pulgadas.
- 4.22 El radio de un círculo es de 21.4 m. Encuentre (a) la longitud de la cuerda subtendida por un ángulo central de  $110^\circ 40'$  y (b) la distancia entre dos cuerdas paralelas del mismo lado del centro, subtendidas por ángulos centrales de  $118^\circ 40'$  y  $52^\circ 20'$ .  
 Resp. (a) 35.2 m, (b) 8.29 m.
- 4.23 Demuestre que la base  $b$  de un triángulo isósceles está dada por  $b$  siendo  $a$  la longitud de sus lados iguales y su ángulo en el vértice ( $\theta$ ).  
 $b = 2a \sin \frac{1}{2} \theta$

**4.24** Demuestre que el perímetro  $P$  de un polígono regular de  $n$  lados inscrito en un círculo de radio  $r$  está dado por  $P = 2nr \operatorname{sen}(180^\circ/n)$ .

**4.25** Una rueda de 5 pies de diámetro, sube por un plano inclinado de  $18^\circ 20'$ . ¿Cuál es la altura desde el centro de la rueda hasta la base del plano cuando ha rodado 5 pies?

*Resp.* 3.95 pies.

**4.26** Una pared de 15 pies de altura, está a 10 pies de una casa. Encuentre la longitud de la escalera más corta que toque el borde superior de la pared y que alcance una ventana a 20.5 pies del piso.

*Resp.* 42.5 pies

# Aplicaciones prácticas

# 5

## 5.1 ORIENTACIÓN

La orientación de un punto B a un punto A, en el plano horizontal, se define generalmente, como el ángulo (agudo en todos los casos) que se forma entre la línea que va de A a B y la línea norte-sur que atraviesa por A. La orientación se lee desde la línea norte o sur hacia el este o el oeste. El ángulo que se utiliza para expresar la orientación está dado por lo general, en grados y minutos. Por ejemplo, véase la Figura 5-1.

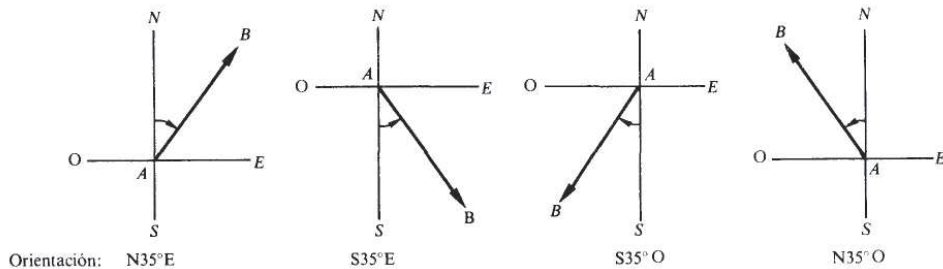


Fig. 5-1

En aeronáutica, la orientación de B hacia A se indica por lo general, como el ángulo que forma la línea AB con la línea del norte que atraviesa A, y se mide en la dirección de las manecillas del reloj, a partir del norte (esto es, parte del norte y gira hacia el este). Por ejemplo, véase Figura 5-2.

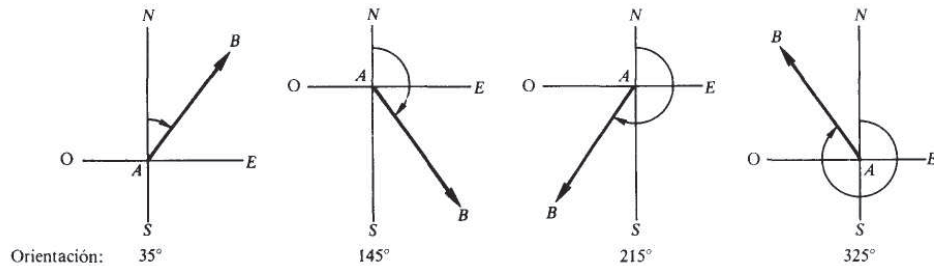


Fig. 5-2

## 5.2 VECTORES

Cualquier cantidad física, como la fuerza o la velocidad, que tenga tanto magnitud como dirección, se le conoce como *cantidad o magnitud vectorial*. Una magnitud vectorial, puede representarse por medio de un segmento dirigido (flecha) llamado *vector*. La *dirección* de un vector es la de la magnitud dada y la *longitud* del vector es proporcional a la magnitud de dicha cantidad.

EJEMPLO 5.1 Un avión vuela en dirección N40°E a 200 mi/h. Su velocidad se representa por el vector AB en la Figura 5-3.

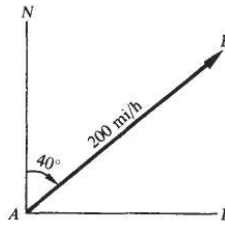


Fig. 5-3

EJEMPLO 5.2 Un bote de motor que navega a una velocidad de 12 mi/h en aguas tranquilas, cruza perpendicularmente un río, donde la velocidad de la corriente es de 4 mi/h. En la Figura 5-4, el vector CD representa la velocidad de la corriente y el vector AB representa la velocidad del bote en aguas tranquilas, ambas en la misma escala. Así, el vector AB es tres veces más largo que el vector CD.

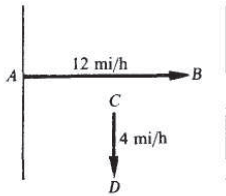


Fig. 5-4

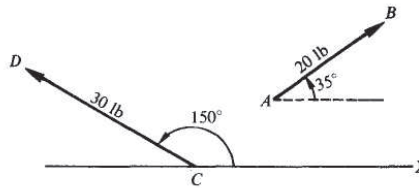


Fig. 5-5

EJEMPLO 5.3 En la Figura 5-5, el vector AB representa una fuerza de 20 libras y forma un ángulo de 35° con la dirección positiva del eje x y el vector CD representa una fuerza de 30 libras a 150° con la dirección positiva del eje x. Ambos vectores están dibujados en la misma escala.

Se dice que dos vectores son iguales, si tienen la misma magnitud y dirección. Un vector no tiene una posición fija en un plano y puede moverse libremente en el plano, siempre que su magnitud y dirección no cambien.

## 5.3 SUMA VECTORIAL

La *resultante* o *vector suma* de cierto número de vectores, todos en el mismo plano, es aquel vector en el plano que produciría el mismo efecto que el que producen todos los vectores originales cuando actúan juntos.

Si dos vectores  $\alpha$  y  $\beta$  tienen la misma dirección, su resultante es un vector R cuya magnitud es igual a la suma de las magnitudes de los dos vectores y cuya dirección es la de los dos vectores. Véase Figura 5-6(a).

Si dos vectores tienen direcciones opuestas, su resultante es un vector  $R$  cuya magnitud es la diferencia (magnitud mayor - magnitud menor) de las magnitudes de los dos vectores y cuya dirección es la del vector de mayor magnitud. Véase Figura 5-6(b).

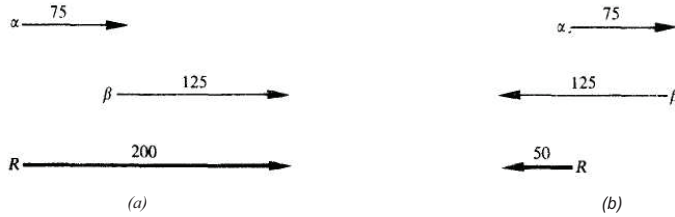


Fig. 5-6

En todos los demás casos, la magnitud y la dirección de la resultante de dos vectores se obtienen por cualquiera de los siguientes métodos:

- (1) *Método del paralelogramo.* Trace ambos vectores a partir de un punto  $O$  cualquiera del plano y complete el paralelogramo tomando a estos vectores como lados adyacentes. La diagonal que parte del punto  $O$  es la resultante o suma vectorial de los dos vectores dados. Así, en la Figura 5-7(b), el vector  $R$  es la resultante de los vectores  $\alpha$  y  $\beta$  de la Figura 5-7(a).
- (2) *Método del triángulo.* Escoja uno de los vectores e indique su extremo como el punto  $O$ . Coloque la punta final del segundo vector a partir de la punta de la flecha del primero. La resultante es el segmento de línea que cierra el triángulo y su dirección parte de  $O$ . Así, en la Figura 5-7(c) y 5-7(d),  $R$  es la resultante de los vectores  $\alpha$  y  $\beta$ .

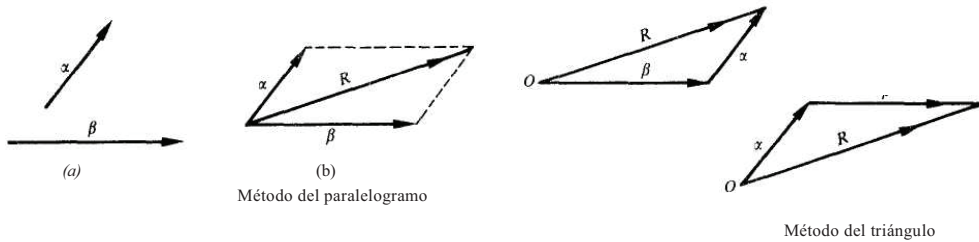


Fig. 5-7

**EJEMPLO 5.4** La resultante  $R$  de los dos vectores del Ejemplo 5.2 representa la velocidad y la dirección en la cual navega el bote. La Figura 5-8(a) ilustra el método del paralelogramo; las Figuras 5-8(b) y (c) ilustran el método del triángulo.

La magnitud de  $R = \sqrt{(12)^2 + 4^2} = 13$  mi/h redondeado.

De la Figura 5-8(a) o (b),  $\tan \theta = \frac{4}{12} = 0.3333$  y  $\theta = 18^\circ$ .

Así, el bote se mueve corriente abajo en una dirección que forma un ángulo de  $\theta = 18^\circ$  con la dirección hacia la que apunta el bote. Es decir, formando un ángulo de  $90^\circ - \theta = 72^\circ$  con la orilla del río. (Véase Secc. 4.7 para los procedimientos de redondeo.)

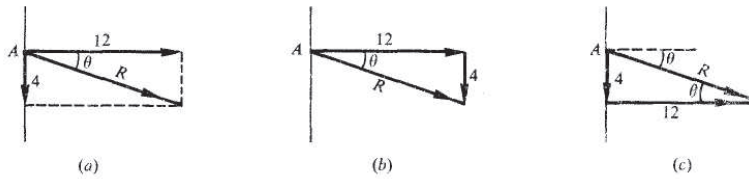


Fig. 5-8

#### 5.4 COMPONENTES DE UN VECTOR

La componente de un vector  $\alpha$  en la dirección de  $L$  es la proyección perpendicular del vector  $\alpha$  sobre  $L$ . En muchas ocasiones, puede ser conveniente descomponer un vector en dos componentes que tengan direcciones perpendiculares.

**EJEMPLO 5.5** En las Figuras 5-8(a), (b) y (c), las componentes de  $R$  son (1) 4 mi/h en la dirección de la corriente y (2) 12 mi/h en la dirección perpendicular a la corriente.

**EJEMPLO 5.6** En la Figura 5-9, la fuerza  $F$  tiene una componente horizontal  $F_h = F \cos 30^\circ$  y una componente vertical  $F_v = F \sin 30^\circ$ . Note que  $F$  es el vector suma o la resultante de  $F_h$  y  $F_v$ .

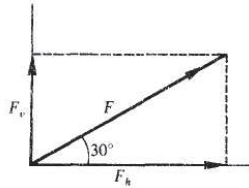


Fig. 5-9

#### 5.5 NAVEGACIÓN AÉREA

La *orientación* de un aeroplano es la dirección (determinada por la lectura de una brújula) hacia donde se dirige el aeroplano. La orientación se mide a partir del norte en el mismo sentido de las manecillas del reloj, y se expresa en grados y minutos. La *velocidad aérea* (determinada por la lectura de un anemómetro) es la velocidad del aeroplano en aire tranquilo. El *curso* (o *ruta*) de un aeroplano es la dirección y sentido en que se mueve éste con respecto a la Tierra. El curso se mide desde el norte y en el sentido de las manecillas del reloj.

La *velocidad terrestre* es la velocidad del aeroplano con respecto a la Tierra. El *ángulo de deriva* (ángulo de desviación) es la diferencia (positiva) entre la orientación y la ruta. En la Figura 5-10:

$NO$  es la línea que señala el norte y pasa por  $O$

$\angle NOA$  es la orientación

$OA$  = la velocidad aérea

$AN$  es la recta que señala el norte y pasa por  $A$

$\angle NAO$  es el ángulo de la dirección del viento, cedido en sentido de las manecillas del reloj, desde la recta que señala el norte

$AB$  = la velocidad del viento

$\angle NOB$  es la ruta  $OB$  = es la velocidad terrestre

$\angle AOB$  es el ángulo de deriva

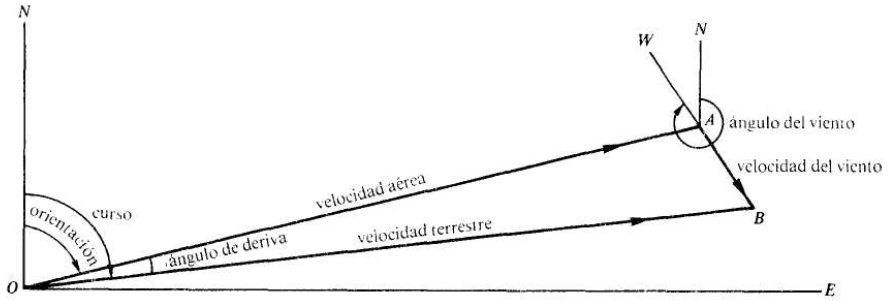


Fig. 5-10

Observe que hay tres vectores que se relacionan entre sí:  $OA$ , que representa la velocidad aérea y la orientación;  $AB$  que representa la dirección y velocidad del viento; y  $OB$ , que representa la velocidad terrestre y la ruta. El vector de la velocidad terrestre es la resultante del vector de la velocidad aérea y del vector del viento.

**EJEMPLO 5.7** En la Figura 5-11, se ilustra un aeroplano que vuela a 240 mi/h con una orientación de  $60^\circ$  cuando el viento sopla a  $330^\circ$  y a una velocidad de 30 mi/h.

Para construir la figura, coloque en  $O$  el vector que corresponde a la velocidad aérea, trace a continuación (observando los sentidos de las flechas) el vector que corresponde a la velocidad del viento, finalmente, cierre el triángulo. Note que el vector correspondiente a la velocidad terrestre no se ha trazado a partir del vector correspondiente a la velocidad del viento.

$$\begin{aligned} \text{En el triángulo resultante: } \text{Velocidad terrestre} &= \sqrt{(240)^2 + (30)^2} = 242 \text{ mi/h} \\ \tan \theta &= 30/240 = 0.1250 \text{ y } \theta = 7^\circ 10' \\ \text{Ruta} &= 60^\circ + \theta = 67^\circ 10' \end{aligned}$$

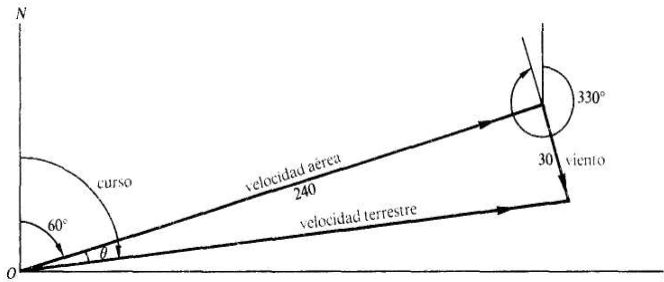


Fig. 5-11

## 5.6 PLANO INCLINADO

Un objeto con peso  $W$  en un plano inclinado, con ángulo de inclinación  $\alpha$ , ejerce una fuerza  $F_a$  en contra del plano inclinado y una fuerza  $F_a'$ , hacia abajo del plano. Las fuerzas  $F_a$  y  $F_a'$ , son los vectores componentes del peso  $W$ . Véase Figura 5-12(a).

El ángulo  $\theta$  formado por la fuerza  $F_a$  contra el plano inclinado y el peso  $W$  es igual al ángulo de inclinación del plano  $\alpha$ . Como  $\theta = \alpha$ ,  $F_a = W \cos \alpha$  y  $F_a' = W \sin \alpha$ . Véase Figura 5-12(b).

La fuerza mínima necesaria para mantener un objeto sin que resbale hacia abajo por el plano inclinado (sin considerar la fuerza de fricción), debe tener la misma magnitud de  $F_d$  pero la dirección contraria.

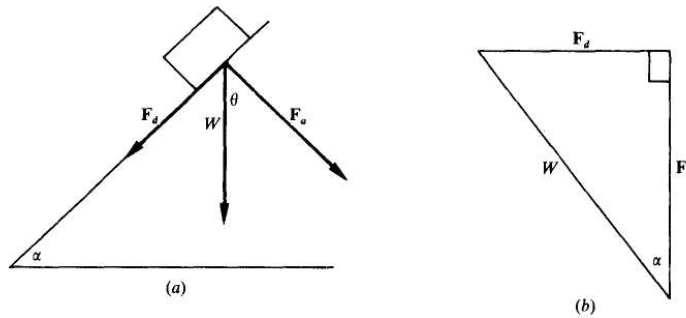


Fig. 5-12

**EJEMPLO 5.8** Un barril de 500 lb descansa en un plano inclinado de  $11.2^\circ$ . ¿Cuál es la fuerza mínima necesaria (sin considerar la fricción) para evitar que el barril ruede por el plano, y cuál es la fuerza que ejerce dicho barril sobre el plano inclinado? (Véase Figura 5-13.)

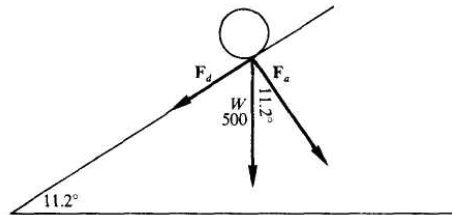


Fig. 5-13

$$\begin{aligned} F_d &= 500 \text{ sen } 11.2^\circ \\ &= 500 (0.1942) \\ &= 97.1 \\ F_d &= 97.1 \text{ lb} \\ F_a &= 500 \text{ cos } 11.2^\circ \end{aligned}$$

Manual	Calculadora
$F_a = 500(0.9810)$	$F_a = 500(0.980955)$
$= 490.5$	$= 490.478$
$F_a = 491 \text{ lb}$	$F_a = 490 \text{ lb}$

La fuerza mínima necesaria para evitar que el barril ruede hacia abajo en el plano inclinado es de 97.1 lb y la fuerza ejercida en contra del plano es de 491 lb (o 490 lb si se utiliza calculadora).

### Problemas resueltos

Utilice los procedimientos de redondeo establecidos en la Sección 4.7.

- 5.1 Una lancha de motor navega en la dirección  $N40^\circ E$  por 3 h a una velocidad de 20 mi/h. ¿Qué distancia hacia el norte y hacia el este ha recorrido?

Suponga que el bote sale de A. Utilice la recta norte-sur que pasa por A, y dibuje la línea AD, de modo que la orientación de D desde A sea  $N40^\circ E$ . En AD Localice B de tal forma que  $AB = 3(20) = 60$  mi. El punto C se localiza al trazar desde B una línea perpendicular a la línea NAS. En el triángulo rectángulo ABC, véase Figura 5-14,

$$AC = AB \cos A = 60 \cos 40^\circ = 60(0.7660) = 45.96$$

y

$$CB = AB \operatorname{sen} A = 60 \operatorname{sen} 40^\circ = 60(0.6428) = 38.57$$

La lancha ha recorrido 46 mi al norte y 39 mi al este.

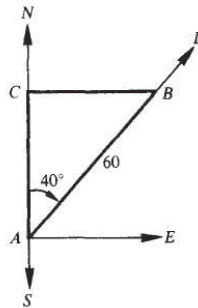


Fig. 5-14

- 5.2 Tres barcos están situados de tal manera que A se encuentra a 225 mi al norte de C, y B a 375 mi al este de C. ¿Cuál es la orientación de (a) B con respecto a A y (b) A con respecto a B?

En el triángulo rectángulo ABC, véase Figura 5-15,

$$\tan \angle CAB = 375/225 = 1.6667 \quad \text{y} \quad \angle CAB = 59^\circ 0'$$

- (a) La orientación de B con respecto a A (ángulo SAB) es  $S59^\circ 0' E$ .  
 (b) La orientación de A con respecto a B (ángulo N'BA) es  $N59^\circ 0' O$ .

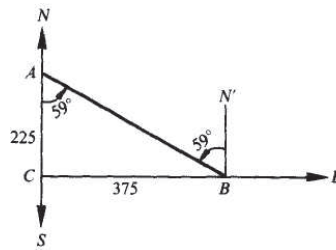


Fig. 5-15

- 5.3 Tres barcos están situados de tal manera que  $A$  se encuentra a 225 mi al este de  $C$ , en tanto que  $B$ , al sur de  $C$ , tiene una orientación de  $S25^{\circ}10' E$  de  $A$ . (a) ¿Cuál es la distancia de  $B$  a  $A$ ? (b) ¿Cuál es la distancia de  $B$  a  $C$ ? (c) ¿Cuál es la orientación de  $A$  con respecto a  $B$ ?

De la Figura 5-16.  $\angle SAB = 25^{\circ}10'$  y  $\angle BAC = 64^{\circ}50'$ . Entonces

$$AB = AC \sec \angle BAC = 225 \sec 64^{\circ}50' = 225(2.3515) = 529.1$$

o  $AB = AC / \cos \angle BAC = 225 / \cos 64^{\circ}50' = 225 / 0.4253 = 529.0$

y  $CB = AC \tan \angle BAC = 225 \tan 64^{\circ}50' = 225(2.1283) = 478.9.$

(a)  $A$  se encuentra a 529 mi de  $B$ . (b)  $B$  se encuentra a 479 mi de  $C$ .

(c) Dado que  $\angle LCB = 25^{\circ}10'$ , la orientación  $A$  de  $B$  es  $N25^{\circ}10' O$ .

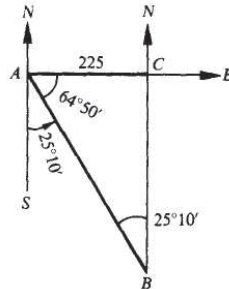


Fig. 5-16

- 5.4 Desde un bote que navega hacia el norte a 16.5 km/h se observan directamente al este los restos de un naufragio  $K$  y una torre de observación  $T$ . Una hora después, el bote tiene una orientación de  $S34^{\circ}40' E$  con respecto a los restos del naufragio y  $S65^{\circ}10' E$  con respecto a la torre de observación. Encuentre la distancia entre los restos del naufragio y la torre.

En la Figura 5-17, C, K y T representan respectivamente al bote, a los restos del naufragio y a la torre cuando están alineados. Una hora más tarde el bote se encuentra en el punto A, a 16.5 km al norte de C. En el triángulo rectángulo 'ACK,

$$CK = 16.5 \tan 34^{\circ}40' = 16.5 (0.6916)$$

En el triángulo rectángulo ACT,

$$CT = 16.5 \tan 65^{\circ}10' = 16.5 (2.1609)$$

Entonces

$$KT = CT - CK = 16.5 (2.1609 - 0.6916) = 24.2 \text{ Km}$$

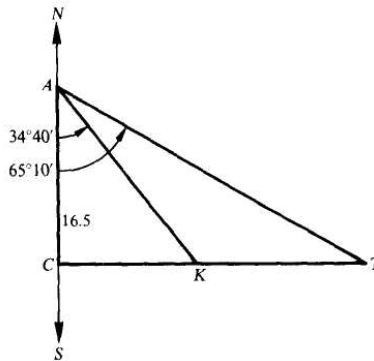


Fig. 5-17

- 5.5 Un barco que navega hacia el este observa una luz a N62°10' E. Después de recorrer 2250 m, la luz se encuentra a N48°25'E. Si el barco mantiene la misma ruta, ¿cuál será la distancia más corta de la luz a la que pasará el barco?

En la Figura 5-18, L es la posición de la luz, A es la primera posición del barco, S es la segunda posición, y C es la posición más cercana al punto L.

En el triángulo rectángulo ACL,  $AC = CL \cot LCAL = CL \cot 27^{\circ}50' = 1.8940CL$

En el triángulo rectángulo BCL,  $BC = CL \cot LCBL = CL \cot 41^{\circ}35' = 1.1270CL$

Dado que,  $AC = BC + 2250$ ,  $1.8940CL = 1.1270CL + 2250$  y  $CL = \frac{2250}{1.8940 - 1.1270} = 2934$

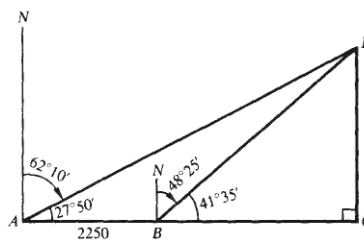


Fig. 5-18

APLICACIONES PRÁCTICAS

- 5.6 Refiérase a la Figura 5-19. Un cuerpo en O está sometido a dos fuerzas, una de 150 lb hacia el norte y la otra de 200 lb al este. Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante.

$$\text{En el triángulo rectángulo } OBC, OC = \sqrt{(OB)^2 + (BC)^2} = \sqrt{(200)^2 + (150)^2} = 250 \text{ lb,}$$

$$\tan LBOC = 150/200 = 0.7500, \text{ y } LBOC = 36^\circ 50'.$$

La magnitud de la fuerza resultante es 250 lb y su dirección N53°10'E.

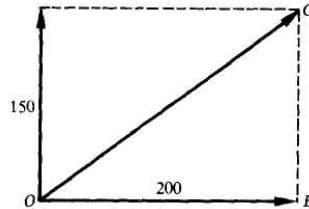


Fig. 5-19

- 5.7 Un aeroplano vuela horizontalmente a una velocidad de 240 mi/h cuando se dispara una bala a una velocidad de 2750 pies/s, de tal forma que su trayectoria forma un ángulo recto con la dirección del movimiento del aeroplano. Encuentre la resultante de la velocidad y la dirección de la bala.

$$\text{La velocidad del aeroplano es } 240 \text{ mi/h} = \frac{240(5280) \text{ pies/s}}{60(60)} = 352 \text{ pies/s.}$$

En la Figura 5-20, el vector AB representa la velocidad del aeroplano, el vector AC representa la velocidad inicial de la bala y el vector AD representa la resultante de la velocidad de la bala.

$$\text{En el triángulo rectángulo } ACD, AD = \sqrt{(352)^2 + (2750)^2} = 2770 \text{ pies/s,}$$

$$\tan LCAD = 352/2750 = 0.1280, \text{ y } LCAD = 7^\circ 20' \text{ o } 7.3^\circ.$$

Así, la bala viaja a 2770 pies/s a lo largo de una trayectoria de dirección 82°40' o 82.7° con respecto a la trayectoria del aeroplano.

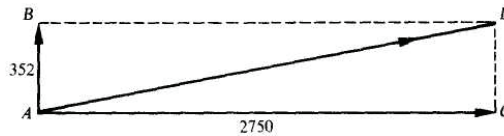


Fig. 5-20

- 5.8 La corriente de un río lleva una velocidad de 125 pies/min hacia el sur. Un bote de motor, que se mueve a 475 pies/min en aguas tranquilas, se enfila hacia el este para cruzar el río. (a) Encuentre la velocidad y dirección en que se mueve el bote, (b) ¿Cuál debe ser la orientación del bote para atravesar el río directamente hacia el este y cuál es la velocidad que resulta en este caso?

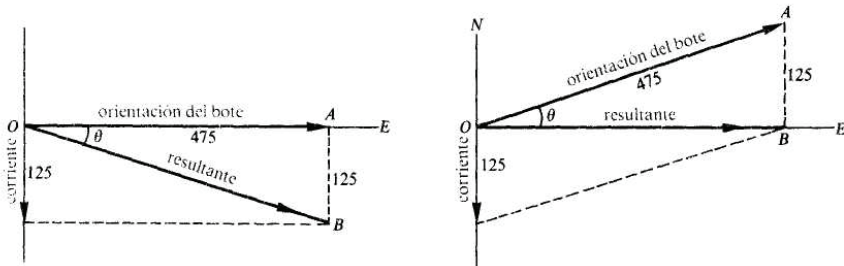
- (a) Hágase referencia a la Figura 5-21. En el triángulo rectángulo  $OAB$   $OB = \sqrt{(475)^2 + (125)^2} = 491$ ,

$$\tan \theta = 125/475 = 0.2632, \text{ y } \theta = 14^\circ 40'.$$

De esta forma, el bote se mueve a 491 pies/min en dirección  $S75^\circ 20'E$ .

- (b) Véase la Figura 5-22. En el triángulo rectángulo  $OAB$ ,  $\sin \theta = 125/475 = 0.2632$  y  $\theta = 15^\circ 20'$ . De esta forma la orientación del bote es  $N74^\circ 40'E$  y su velocidad en dicha dirección es

$$OB = \sqrt{(475)^2 - (125)^2} = 458 \text{ pies/min}$$



- 5.9 Un poste del telégrafo se mantiene vertical por un cable que forma un ángulo de  $25^\circ$  con el poste y que ejerce una fuerza de tensión en la parte superior de  $F = 300$  lb. Encuentre las componentes horizontal y vertical  $F_h$  y  $F_v$  de la fuerza  $F$ . Véase Figura 5-23.

$$F_h = 300 \sin 25^\circ = 300(0.4226) = 127 \text{ lb}$$

$$F_v = 300 \cos 25^\circ = 300(0.9063) = 272 \text{ lb}$$

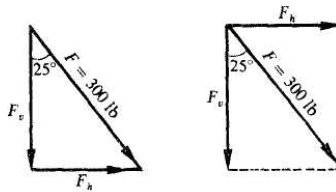


Fig. 5-23

- 5.10 Un hombre tira de una cuerda atada a un trineo con una fuerza de 100 lb. La cuerda forma un ángulo de  $27^\circ$  con el piso, (a) Encuentre la fuerza efectiva que mueve al trineo a lo largo del suelo y la fuerza que tiende a levantar verticalmente al trineo, (b) Calcule la fuerza que el hombre debe ejercer, para que la fuerza efectiva que desliza al trineo sobre el suelo sea de 100 lb.

- (a) En las Figs. 5-24 y 5-25, las 100 lb de fuerza de tracción aplicada al trineo se dividen en sus componentes horizontal y vertical,  $F_h$  y  $F_v$  respectivamente. Entonces,  $F_h$  es la fuerza que tiende a mover el trineo por el suelo y  $F_v$  es la fuerza que tiende a elevar el trineo.

$$F_h = 100 \cos 27^\circ = 100(0.8910) = 89 \text{ lb} \quad F_v = 100 \sin 27^\circ = 100(0.4540) = 45 \text{ lb}$$

- (b) En la Figura 5-26, la componente horizontal de la fuerza requerida  $F$  es  $F_h = 100 \text{ lb}$ . Entonces

$$F = 100/\cos 27^\circ = 100/0.8910 = 112 \text{ lb}$$

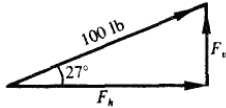


Fig. 5-24

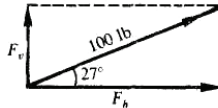


Fig. 5-25

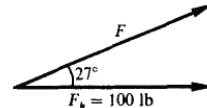


Fig. 5-26

- 5.11** Un bloque que pesa  $W = 500 \text{ lb}$ , descansa en un plano inclinado que forma un ángulo de  $29^\circ$  con la horizontal, (a) Encuentre la fuerza que tiende a mover el bloque hacia abajo de la rampa y la fuerza que ejerce el bloque sobre la rampa. (b) ¿Cuál es la fuerza mínima que debe aplicarse para evitar que el bloque se deslice hacia abajo por la rampa? Desprecie la fricción.
- (a) Refiérase a la Figura 5-27. Encuentre las dos componentes del peso del bloque  $F_1$  y  $F_2$ , que son la paralela y la perpendicular a la rampa respectivamente.  $F_1$  es la fuerza que tiende a mover el bloque hacia abajo de la rampa y  $F_2$  es la fuerza que ejerce el bloque sobre la rampa.

$$F_1 = W \sin 29^\circ = 500(0.4848) = 242 \text{ lb}$$

$$F_2 = W \cos 29^\circ = 500(0.8746) = 437 \text{ lb}$$

- (b) 242 lb hacia arriba de la rampa.

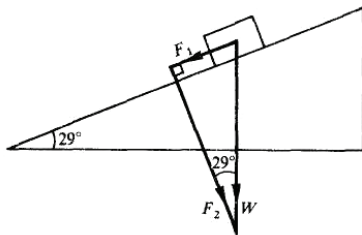


Fig. 5-27

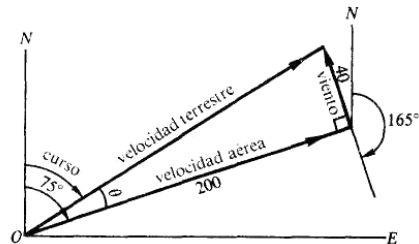


Fig. 5-28

- 5.12** La orientación de un aeroplano es  $75^\circ$  y la velocidad aérea es 200 mi/h. Encuentre la velocidad terrestre y la ruta si el viento sopla a 40 mi/h con  $165^\circ$ . Refiérase a la Figura 5-28.

Construcción de la figura: coloque el vector de la velocidad aérea a partir de  $O$ , a continuación, trace el vector correspondiente al viento y cierre el triángulo.

Solución: velocidad terrestre =  $\sqrt{(200)^2 - (40)^2} = 204 \text{ mi/h}$ ,  $\tan \theta = 40/200 = 0.2000$  y  $\theta = 11^\circ 20''$  y la ruta =  $75^\circ - \theta = 63^\circ 40'$ .

- 5.13 La velocidad aérea de un aeroplano es de 200 km/h. El viento sopla a una velocidad de 270° a 30 km/h. Encuentre la orientación y la velocidad terrestre para que se mantenga una trayectoria de 0°. Refiérase a la Figura 5-29.

Construcción: el vector de la velocidad terrestre se traza a lo largo de  $ON$ . El vector del viento parte desde  $O$ , y es seguido por el vector de la velocidad aérea (200 unidades de la punta del vector del viento hasta el punto  $ON$ ), y cierre el triángulo.

Solución: velocidad terrestre =  $\sqrt{(200)^2 - (30)^2} = 198$  km/h,  $\text{sen } \theta = 30/200 = 0.1500$  y  $\theta = 8^\circ 40'$ , y la orientación =  $360^\circ - \theta = 351^\circ 20'$ .

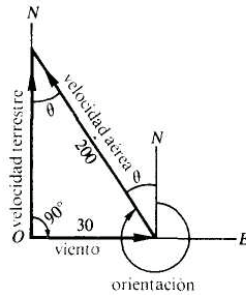


Fig. 5-29

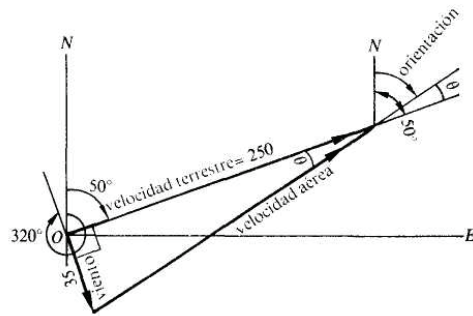


Fig. 5-30

- 5.14 El viento sopla a una velocidad de 35 mi/h desde 320°. Encuentre la velocidad aérea y la orientación, si la velocidad terrestre y la ruta son respectivamente, 250 mi/h y 50°. Refiérase a la Figura 5-30.

Construcción: Trace los vectores correspondientes a la velocidad terrestre  $O$  y el viento a partir del punto  $O$ , y cierre el triángulo. Solución: Velocidad aérea =  $\sqrt{(250)^2 + (35)^2} = 252$  mi/h,  $\tan \theta = 35/250 = 0.1400$  y  $\theta = 8^\circ$ , y la orientación =  $50^\circ - 8^\circ = 42^\circ$ .

## Problemas propuestos

Utilice los procedimientos de redondeo establecidos en la sección 4.7.

- 5.15 Un aeroplano vuela 100 km en dirección S38°10'E. ¿Qué distancia hacia el sur y qué distancia hacia el este ha recorrido?  
Resp. 78.6 km al sur, 61.8 km al este
- 5.16 Un aeroplano se orienta hacia el este con una velocidad aérea de 240 km/h. Si sopla un viento de 40 km/h desde el norte, encuentre la velocidad terrestre y la ruta.  
Resp. Velocidad terrestre. 243 km/h; ruta = 99°30' o S80°30'E.
- 5.17 Sobre un cuerpo actúa una fuerza de 75 lb en dirección al oeste, y una fuerza de 125 lb hacia el norte. Encuentre la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.  
Resp. 146 lb, N31°0'O

- 5.18 Calcule las componentes rectangulares de una fuerza de 525 lb dirigida a  $38.4^\circ$  con la horizontal.
- Resp.* 411 lb, 326 lb
- 5.19 Un aviador dirige su aeroplano hacia el oeste, debido a que el viento sopla desde el sur, el curso del aeroplano forma un ángulo de  $20^\circ$  con la orientación. Si la velocidad aérea es de 100 mi/h, ¿cuál es la velocidad terrestre y cuál la velocidad del viento?
- Resp.* Velocidad terrestre, 106 mi/h; viento, 36 mi/h
- 5.20 Se orienta un aeroplano hacia el este mientras sopla un viento a 40 mi/h desde el sur. ¿Cuál es la velocidad aérea necesaria para mantener un curso de  $N72^\circ O$  y cuál es la velocidad terrestre?
- Resp.* Velocidad aérea 123 mi/h; Velocidad terrestre 129 mi/h
- 5.21 Un lanchón se remolca hacia el norte a 18 mi/h. Un hombre atraviesa la cubierta de oeste a este a 6 pies/s. Encontrar la magnitud y la dirección de la velocidad resultante.
- Resp.* 27 pies/s,  $N12^\circ 50'E$
- 5.22 La ruta de un barco va desde un punto A hasta un punto C situado a 56 km al norte y 258 km al este de A. Después de recorrer 120 mi en dirección  $N25^\circ 10'E$  hasta un punto P, el barco se orienta hacia C. Encontrar la distancia entre P desde C, y la dirección que ha de tomar para llegar a C.
- Resp.* 214 km,  $S75^\circ 40'E$
- 5.23 Un alambre tenso de 78 pies de largo se extiende desde el extremo superior de un poste de 56 pies de altura hasta el suelo, y ejerce sobre el poste una tracción de 290 lb. ¿Cuál es la tracción horizontal en el extremo superior del poste?
- Resp.* 201 lb
- 5.24 Un bloque de 200 lb de peso está colocado en un plano inclinado sin fricción que forma un ángulo de  $37.6^\circ$  con la horizontal. Una cuerda paralela al piso y sujeta por una clavija, mantiene al bloque en su sitio. Encontrar la tensión ejercida sobre la cuerda.
- Resp.* 1221b
- 5.25 Un hombre desea levantar un peso de 300 lb hasta lo alto de una pared de 20 m de altura, tirando del bloque sobre un plano inclinado. ¿Cuál es la menor longitud del plano inclinado que puede utilizar, si su fuerza de empuje es de 140 lb?
- Resp.* 43 m
- 5.26 Por una pista con una inclinación  $40^\circ$  sobre la horizontal, se empuja hacia arriba una embarcación de 1501b. Encontrar (a) la fuerza que la embarcación ejerce contra la pista y (b) la fuerza necesaria para subir la embarcación.
- Resp.* (a) 115 lb, (b) 96 lb

# Aplicación de los logaritmos en trigonometría

## 6

### 6.1 INTRODUCCIÓN

Se pueden utilizar logaritmos para simplificar algunos de los cálculos necesarios para resolver los problemas de trigonometría. Cuando se resuelven problemas manualmente, los logaritmos ofrecen otra opción para multiplicar, dividir, elevar un número a una potencia, y obtener alguna raíz. Los logaritmos no son necesarios si se utiliza una calculadora, ya que se dispone de procedimientos para la multiplicación, división, potenciación y raíz.

Dado que los logaritmos no se utilizan en adiciones y sustracciones, la decisión de utilizar o no logaritmos dependerán del procedimiento que se utilice para resolver el problema. Si las adiciones y sustracciones pueden realizarse al principio o al final del procedimiento, entonces los logaritmos serán fáciles de utilizar para resolver las demás operaciones. En el apéndice 3, Logaritmos, se revisan las reglas de los logaritmos y se incluyen ejemplos donde se muestra la variedad de cálculos que se pueden efectuar con ellos.

### 6.2 LOGARITMOS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En el apéndice 2, se muestra la Tabla A., que contiene a los logaritmos comunes o en base 10, con una exactitud de 4 decimales y que puede utilizarse para encontrar directamente el logaritmo de un número con tres o menos dígitos significativos. Si el número tiene cuatro dígitos significativos, se interpola utilizando el método de partes proporcionales para obtener el logaritmo. Si el número tiene más de cuatro dígitos significativos, primero se redondea a cuatro dígitos significativos y después se obtiene el logaritmo por interpolación.

Otras tablas de logaritmos que se utilizan frecuentemente son las tablas de cinco decimales de las que se obtiene directamente el logaritmo de un número de cuatro cifras significativas y las tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas que son una combinación de las tablas de las funciones trigonométricas y de las tablas de logaritmos. Se puede encontrar el valor de una función trigonométrica utilizando la Tabla 1, si es necesario se redondea el resultado a cuatro cifras significativas, y se encuentra el logaritmo del valor redondeado usando la Tabla 4.

**EJEMPLO 6.1** Encuentre los logaritmos siguientes.

- (a)  $\log \operatorname{sen} 22^{\circ}30' = \log (0.3827) = 9.5829 - 10$
- (b)  $\log \operatorname{tan} 23^{\circ}50' = \log (2.2460) = 0.3514$
- (c)  $\log \operatorname{csc} 3^{\circ}40' = \log (15.6368) = \log (15.64) = 1.1942$
- (d)  $\log \operatorname{cos} 38^{\circ}21' = \log (0.7842) = 9.8944 - 10$
- (e)  $\log \operatorname{cot} 87^{\circ}34' = \log (0.0425) = 8.6284 - 10$
- (f)  $\log \operatorname{sec} 67^{\circ}28' = \log (2.6095) = \log (2.610) = 0.4166$

EJEMPLO 6.2 Encuentre el ángulo A, aproximando al minuto más cercano.

- (a)  $\log \operatorname{sen} A = 9.3975 - 10$       (d)  $\log \cot A = 0.4471$   
 (b)  $\log \cos A = 9.5964 - 10$       (e)  $\log \sec A = 0.3354$   
 (c)  $\log \tan A = 9.9862 - 10$       (f)  $\log \csc A = 0.1983$
- (a)  $\operatorname{sen} A = \operatorname{antilog}(9.3975 - 10) = 0.2498$ ;  $A = 14^\circ 28'$   
 (b)  $\cos A = \operatorname{antilog}(9.5964 - 10) = 0.3948$ ;  $A = 66^\circ 45'$   
 (c)  $\tan A = \operatorname{antilog}(9.9862 - 10) = 0.9688$ ;  $A = 44^\circ 6'$   
 (d)  $\cot A = \operatorname{antilog}(0.4471) = 2.799$ ;  $A = 19^\circ 40'$   
 (e)  $\sec A = \operatorname{antilog}(0.3354) = 2.164$ ;  $A = 62^\circ 29'$   
 (f)  $\csc A = \operatorname{antilog}(0.1983) = 1.579$ ;  $A = 39^\circ 18'$

### 6.3 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Cualquier triángulo rectángulo puede resolverse utilizando las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, la relación  $A + B = 90^\circ$ , y el Teorema de Pitágoras  $a^2 + b^2 = c^2$ . (Véase Figura 6-1.)

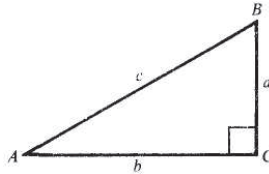


Fig. 6-1

Cuando se conoce uno de los ángulos agudos y uno de los lados, se utiliza la relación entre ángulos para encontrar el otro ángulo, y las funciones trigonométricas pueden usarse para encontrar los lados desconocidos.

EJEMPLO 6.3 Resuelva el triángulo ABC, dado  $A = 24^\circ 18'$  y  $a = 291.1$  cm. (Véase Figura 6-1.)

Para encontrar el ángulo B, utilice la relación  $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 24^\circ 18' = 65^\circ 42'$ .

Para encontrar el lado b, utilice  $b = a \cot A = 291.1 \cot 24^\circ 18' = 291.1 (2.2148)$ .

$$\log b = \log [291.1 (2.215)] = \log 291.1 + \log 2.215 = 2.4640 + 0.3454 = 2.8094$$

$$b = \operatorname{antilog} 2.8094 = 644.7 \text{ cm}$$

Para encontrar el lado c, utilice  $c = a \csc A = 291.1 \csc 24^\circ 18' = 291.1 (2.4300)$ .

$$\log c = \log [291.1 (2.430)] = \log 291.1 + \log 2.430 = 2.4640 + 0.3856 = 2.8496$$

$$c = \operatorname{antilog} 2.8496 = 707.3 \text{ cm}$$

Cuando se dan dos lados de un triángulo rectángulo, el tercer lado puede encontrarse utilizando el teorema de Pitágoras. Un ángulo agudo se encuentra calculando la razón de dos lados conocidos y observando la función trigonométrica correspondiente teniendo este valor. El segundo ángulo agudo se encuentra utilizando la relación del ángulo.

**EJEMPLO 6.4** Resuelva el triángulo rectángulo ABC, dado  $a = 48.62$  m y  $b = 37.64$  m. (Véase Figura 6-1.)

Para encontrar el lado  $c$ , utilice la relación  $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(48.62)^2 + (37.64)^2}$ .

$$\log (48.62)^2 = 2 \log 48.62 = 2(1.6868) = 3.3736$$

$$(48.62)^2 = \text{antilog } 3.3736 = 2364 \log (37.64)^2 = 2$$

$$\log 37.64 = 2(1.5756) = 3.1512$$

$$(37.64)^2 = \text{antilog } 3.1512 = 1416$$

$$c = \sqrt{(48.62)^2 + (37.64)^2} = \sqrt{2364 + 1416} = \sqrt{3780}$$

$$\log c = \log \sqrt{3780} = \frac{1}{2} \log 3780 = \frac{1}{2}(3.5775) = 1.7888$$

$$c = \text{antilog } 1.7888 = 61.49 \text{ m}$$

Para encontrar el ángulo  $A$ , utilice  $\tan A = a/b = 48.62/37.64$ .

$$\log \tan A = \log (48.62/37.64) = \log 48.62 - \log 37.64$$

$$= 1.6868 - 1.5756 = 0.1112$$

$$\tan A = \text{antilog } 0.1112 = 1.292$$

$$A = 52^\circ 16'$$

Para encontrar el ángulo  $B$ , utilice  $B = 90^\circ - A = 90^\circ - 52^\circ 16' = 37^\circ 44'$

## Problemas resueltos

**6.1 Verifique cada uno de los siguientes logaritmos.**

(a)  $\log \sin 14^\circ 28' = \log 0.2476 = 9.3938 - 10$

(b)  $\log \cos 66^\circ 45' = \log 0.3948 = 9.5964 - 10$

(c)  $\log \tan 31^\circ 26' = \log 0.6112 = 9.7862 - 10$

(d)  $\log \cot 45^\circ 55' = \log 0.9685 = 9.9861 - 10$

(e)  $\log \sec 72^\circ 14' = \log 3.2772 = \log 3.277 = 0.5155$

(f)  $\log \csc 32^\circ 37' = \log 1.8552 = \log 1.855 = 0.2684$

$$(g) \quad \log \tan 70^{\circ}21' = \log 2.8006 = \log 2.801 = 0.4474$$

$$(h) \quad \log \cot 11^{\circ}17' = \log 5.0123 = \log 5.012 = 0.7000$$

6.2 Verifique cada una de las siguientes relaciones.

$$(a) \quad \text{Si } \log \operatorname{sen} A = 9.9002 - 10, \operatorname{sen} A = 0.7947 \quad \text{y} \quad A = 52^{\circ}38'$$

$$(b) \quad \text{Si } \log \operatorname{cos} A = 9.9360 - 10, \operatorname{cos} A = 0.8630 \quad \text{y} \quad A = 30^{\circ}21'$$

$$(c) \quad \text{Si } \log \operatorname{tan} A = 9.8715 - 10, \operatorname{tan} A = 0.7438 \quad \text{y} \quad A = 36^{\circ}38'$$

$$(d) \quad \text{Si } \log \operatorname{cot} A = 9.1015 - 10, \operatorname{cot} A = 0.1263 \quad \text{y} \quad A = 82^{\circ}48'$$

$$(e) \quad \text{Si } \log \operatorname{sec} A = 0.4598, \operatorname{sec} A = 2.883 \quad \text{y} \quad A = 69^{\circ}42'$$

$$(f) \quad \text{Si } \log \operatorname{csc} A = 0.1993, \operatorname{csc} A = 1.582 \quad \text{y} \quad A = 39^{\circ}12'$$

$$(g) \quad \text{Si } \log \operatorname{tan} A = 1.2261, \operatorname{tan} A = 16.83 \quad \text{y} \quad A = 86^{\circ}36'$$

$$(h) \quad \text{Si } \log \operatorname{cot} A = 0.0125, \operatorname{cot} A = 1.029 \quad \text{y} \quad A = 44^{\circ}11'$$

6.3 Resuelva el triángulo rectángulo ABC, dado que  $a = 562.8$  cm y  $A = 64^{\circ}24'$ . (Véase Figura 6-2.)

$$B = 90^{\circ} - A = 90^{\circ} - 64^{\circ}24' = 25^{\circ}36'$$

$$b = a \cot A = 562.8 \cot 64^{\circ}24' = 562.8 (0.4792)$$

$$\log b = \log [562.8 (0.4792)] = \log 562.8 + \log 0.4792$$

$$= 2.7503 + 9.6805 - 10 = 2.4308$$

$$b = \operatorname{antilog} 2.4308 = 269.6 \text{ cm}$$

$$c = a \operatorname{csc} A = 562.8 \operatorname{csc} 64^{\circ}24' = 562.8 (1.1089) \log$$

$$c = \log [562.8 (1.109)] = \log 562.8 + \log 1.109$$

$$= 2.7053 + 0.0449 = 2.7952$$

$$c = \operatorname{antilog} 2.7952 = 624.0 \text{ cm}$$

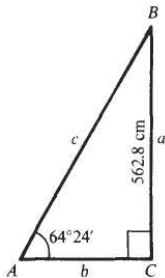


Fig. 6-2

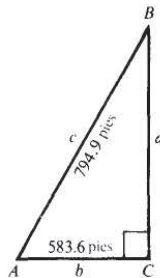


Fig. 6-3

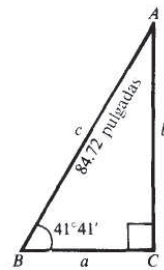


Fig. 6-4

## APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS EN TRIGONOMETRÍA

- 6.4 Resuelva el triángulo rectángulo ABC, dado que  $b = 583.6$  pies y  $c = 794.9$  pies. (Véase Figura 6-3.)

$$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{(c-b)(c+b)}$$

$$= \sqrt{(794.9 - 583.6)(794.9 + 583.6)} = \sqrt{211.3(1378.5)}$$

$$\log a = \sqrt{\log 211.3(1379)} = [\log 211.3 + \log 1379]$$

$$= \frac{1}{2}(2.3249 + 3.1396) = \frac{1}{2}(5.4645) = 2.7322$$

$$a = \text{antilog } 2.7322 = 539.8 \text{ ft}$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{583.6}{794.9}$$

$$\log \cos A = \log (583.6/794.9) = \log 583.6 - \log 794.9$$

$$= 2.7661 - 2.9003 = (12.7661 - 10) - 2.9003$$

$$= (12.7661 - 2.9003) - 10 = 9.8658 - 10$$

$$\cos A = \text{antilog } (9.8658 - 10) = 0.7342$$

$$A = 42^\circ 46'$$

$$B = 90^\circ - A = 90^\circ - 42^\circ 46' = 47^\circ 14'$$

- 6.5 Resuelva el triángulo rectángulo ABC, dado que  $c = 84.72$  pulgadas y  $B = 41^\circ 41'$ . (Véase Figura 6-4.)

$$A = 90^\circ - B = 90^\circ - 41^\circ 41' = 48^\circ 19'$$

$$a = c \cos B = 84.72 \cos 41^\circ 41' = 84.72(0.7468)$$

$$\log a = \log [84.72(0.7468)] = \log 84.72 + \log 0.7468$$

$$= 1.9280 + 9.8732 - 10 = 11.8012 - 10 = 1.8012$$

$$a = \text{antilog } 1.8012 = 63.27 \text{ pulgadas}$$

$$b = c \sin B = 84.72 \sin 41^\circ 41' = 84.72(0.6650) \log$$

$$b = \log [84.72(0.6650)] = \log 84.72 + \log 0.6650$$

$$= 1.9280 + 9.8228 - 10 = 11.7508 - 10 = 1.7508$$

$$b = \text{antilog } 1.7508 = 56.34 \text{ pulgadas}$$

- 6.6 A una altura de 23,240 pies, el piloto de un avión mide un ángulo de depresión de la luz en un aeropuerto y en cuenta que es de  $28^\circ 45'$ . ¿A qué distancia de la luz está el avión?

En la Figura 6-5, A es la posición de la luz, B es la posición del piloto, y  $c = AB$  es la distancia que se busca. Entonces

$$c = a / \sin A$$

$$\log a = 4.3663$$

$$(-) \log \sin A = 9.6821 - 10$$

$$\log c = 4.6842$$

$$c = 48,330$$

La distancia buscada es 48,330 pies.

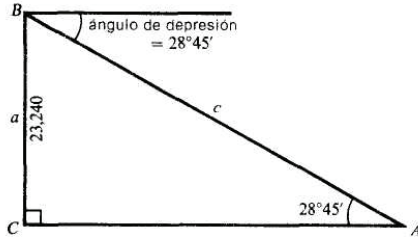


Fig. 6-5

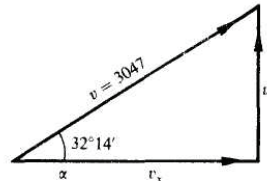


Fig. 6-6

- 6.7 Una granada se lanza con un ángulo de elevación de  $32^\circ 14'$  con una velocidad inicial de 3047 pies/s. Encuentre las componentes horizontal y vertical de la velocidad.

A partir de la Figura 6-6,  $v = 3047$  pies/s,  $\alpha = 32^\circ 14'$ , y

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$\log v = 3.4839$$

$$(+)\log \cos \alpha = 9.9273 - 10$$

$$\log v_x = 34112$$

$$v_x = 2578 \text{ pies/s}$$

$$v_y = v \sin \alpha$$

$$\log v = 3.4839$$

$$(+)\log \sin \alpha = 9.7270 - 10$$

$$\log v_y = 3.2109$$

$$v_y = 1625 \text{ pies/s}$$

- 6.8 Dos fuerzas, una de 151.7 lb y otra de 225.8 lb, actúan en ángulo recto entre sí. Encuentre la magnitud de la resultante y el ángulo de ésta con respecto a la fuerza más grande. (Véase Figura 6-7). Utilizando el triángulo rectángulo ABC,

$$\tan A = CB/AC$$

$$\log CB = 2.1810$$

$$(-)\log AC = 2.3537$$

$$\log \tan A = 9.8273 - 10$$

$$A = 33^\circ 52'$$

$$AB = CB/\sin A$$

$$\log CB = 2.1810$$

$$(-)\log \sin A = 9.7461 - 10$$

$$\log AB = 2.4349$$

$$AB = 272.2$$

La magnitud de la fuerza resultante es 272.2 lb, y forma un ángulo de  $33^\circ 52'$  con la fuerza más grande.

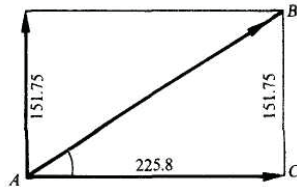


Fig. 6-7

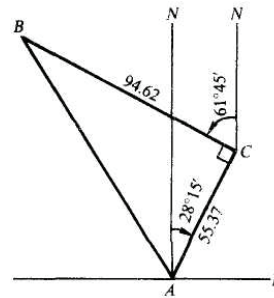


Fig. 6-8

**APLICACIÓN DE LOS LOGARITMOS EN TRIGONOMETRÍA**

- 6.9** Un barco navega 55.37 mi en dirección N28°15'E y después navega 94.62 mi con dirección N61°45 O. ¿A qué distancia se encuentra del punto inicial y cuál es su orientación con respecto a dicho punto?

En la Figura 6-8, el barco empieza en A, navega hasta C y finalmente se dirige a B. En el triángulo rectángulo ABC,

$$\begin{array}{ll} \tan LCAB = BC/AC & AB = BC/\text{sen } LCAB \\ \log BC = 1.9760 & \log BC = 1.9760 \\ (-) \log AC = \underline{1.7433} & (-) \log \text{sen } LCAB = \underline{9.9360 - 10} \\ \log \tan L CAB = 0.2327 & \log AB = 2.0400 \\ LCAB = 59^{\circ}40' & AB = 109.6 \end{array}$$

El barco se encuentra a 109.6 mi del punto inicial. Dado que  $LNAB = LCAB - LKAN = 59^{\circ}40' - 28^{\circ}15' = 31^{\circ}25'$ , la orientación es entonces N31°25'0.

**Problemas propuestos**

Resuelva cada UPO de los siguientes triángulos rectángulos ABC, dado que:

- 6.10**  $a = 25.72$ ,  $A = 36^{\circ} 20'$  Resp.  $B = 53'40'$ ,  $b = 34.97$ ,  $c = 43.41$
- 6.11**  $a = 342.9$ ,  $A = 55^{\circ} 33'$  Resp.  $B = 34^{\circ}27'$ ,  $b = 235.2$ ,  $c = 416.0$
- 6.12**  $a = 574.2$ ,  $B = 56 21'$  Resp.  $A = 33^{\circ}39'$ ,  $b = 862.6$ ,  $c = 1037$
- 6.13**  $c = 44.26$ ,  $A = 56^{\circ} 14'$  Resp.  $B = 33^{\circ}46'$ ,  $a = 36.80$ ,  $b = 24.60$
- 6.14**  $c = 287.7$ ,  $A = 38^{\circ} 10'$  Resp.  $B = 51^{\circ}50'$ ,  $a = 177.8$ ,  $b = 226.2$
- 6.15**  $c = 67.55$ ,  $B = 47^{\circ}26'$  Resp.  $A = 42^{\circ}34'$ ,  $a = 45.69$ ,  $b = 49.75$
- 6.16**  $a = 42.42$ ,  $b = 58.48$  Resp.  $A = 35^{\circ}58'$ ,  $B = 54^{\circ}2'$ ,  $c = 72.25$
- 6.17**  $a = 384.7$ ,  $b = 254.9$  Resp.  $A = 56^{\circ}28'$ ,  $B = 33^{\circ}32'$ ,  $c = 461.6$
- 6.18** Para unir dos ciudades A y B, se construye una carretera. Si B se localiza a 133.8 mi al este y 256.8 mi al norte de A, determine la longitud y la dirección de la carretera con respecto a A.  
Resp. 289.6 mi, N27°31'E
- 6.19** Dos fuerzas, una de 281.7 lb y otra de 323.5 lb, actúan en ángulo recto entre sí. Encuentre la magnitud de la resultante y el ángulo de ésta con respecto a la fuerza más grande.  
Resp. 428.9 lb, 41°3
- 6.20** Encuentre la base de un triángulo isósceles cuyo ángulo en el vértice mide 48°28' y sus lados iguales miden 168.1.  
Resp. 138.0

# Reducción a funciones de ángulos agudos positivos



## 7.1 ÁNGULOS COTERMINALES

Sea  $\theta$  cualquier ángulo; entonces,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(\theta + n360^\circ) = \operatorname{sen} \theta & \cot(\theta + n360^\circ) = \cot \theta \\ \operatorname{cos}(\theta + n360^\circ) = \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sec}(\theta + n360^\circ) = \operatorname{sec} \theta \\ \tan(\theta + n360^\circ) = \tan \theta & \operatorname{csc}(\theta + n360^\circ) = \operatorname{csc} \theta \end{array}$$

donde  $n$  es cualquier entero positivo, negativo o cero.

**Ejemplo 7.1**

- (a)  $\operatorname{sen} 400^\circ = \operatorname{sen}(40^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen} 40^\circ$
- (b)  $\operatorname{cos} 850^\circ = \operatorname{cos}(130^\circ + 2 \cdot 360^\circ) = \operatorname{cos} 130^\circ$
- (c)  $\tan(-1000^\circ) = \tan(80^\circ - 3 \cdot 360^\circ) = \tan 80^\circ$

Si  $x$  es un ángulo medido en radianes, entonces

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(x + 2n\pi) = \operatorname{sen} x & \cot(x + 2n\pi) = \cot x \\ \operatorname{cos}(x + 2n\pi) = \operatorname{cos} x & \operatorname{sec}(x + 2n\pi) = \operatorname{sec} x \\ \tan(x + 2n\pi) = \tan x & \operatorname{csc}(x + 2n\pi) = \operatorname{csc} x \end{array}$$

donde  $n$  es cualquier entero.

**Ejemplo 7.2**

- (a)  $\operatorname{sen} 11\pi/5 = \operatorname{sen}(\pi/5 + 2\pi) = \operatorname{sen} \pi/5$
- (b)  $\operatorname{cos}(-27\pi/11) = \operatorname{cos}[17\pi/11 - 2(2\pi)] = \operatorname{cos} 17\pi/11$
- (c)  $\tan 137\pi = \tan[\pi + 68(2\pi)] = \tan \pi$

## 7.2 FUNCIONES DE ÁNGULOS NEGATIVOS

Sea  $\theta$  cualquier ángulo; entonces,

$$\begin{array}{ll} \operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen} \theta & \cot(-\theta) = -\cot \theta \\ \operatorname{cos}(-\theta) = \operatorname{cos} \theta & \operatorname{sec}(-\theta) = \operatorname{sec} \theta \\ \tan(-\theta) = -\tan \theta & \operatorname{csc}(-\theta) = -\operatorname{csc} \theta \end{array}$$

EJEMPLO 7.3  $\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ$ ,  $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ$ ,  $\tan(-200^\circ) = -\tan 200^\circ$ . Para una prueba de estas relaciones, véase Prob. 7.1.

### 7.3 ÁNGULOS DE REFERENCIA

Si  $\theta$  es un ángulo cuadrantal, entonces los valores de una función son los mismos que en la Sección 2.6 y no se necesita un ángulo de referencia. Como cualquier ángulo  $A$  puede expresarse como  $\theta + n360^\circ$ , donde  $n$  es un entero y  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ , los ángulos de referencia se calcularán desde ángulos de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ .

Un ángulo de referencia  $R$  para un ángulo  $\theta$  en posición estándar es el ángulo agudo positivo que se encuentra entre el eje  $x$  y el lado terminal del ángulo  $\theta$ . Los valores de las seis funciones trigonométricas de los ángulos de referencia  $R$  para  $\theta$ , concuerdan con los valores de la función para  $\theta$  excepto, quizá, en el signo. Cuando los signos de las funciones de  $R$  son determinados por el cuadrante del ángulo  $\theta$ , como en la Sección 2.5, entonces cualquier función de  $\theta$  puede expresarse como una función del ángulo agudo  $R$ . Así, las tablas pueden utilizarse para encontrar el valor de una función trigonométrica de cualquier ángulo.

Cuadrante para $\theta$	Relación	Signos de la función
I	$R = \theta$	Todas las funciones son positivas
II	$R = 180^\circ - \theta$	Sólo $\sin R$ y $\csc R$ son positivas
III	$R = \theta - 180^\circ$	Sólo $\tan R$ y $\cot R$ son positivas
IV	$R = 360^\circ - \theta$	Sólo $\cos R$ y $\sec R$ son positivas

Véase el problema 7.2 para una verificación de la igualdad de los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$  y el signo de los valores de su ángulo de referencia  $R$ .

EJEMPLO 7.4 Expresar cada uno como función de un ángulo agudo

(a)  $\sin 232^\circ$ , (b)  $\cos 312^\circ$ , (c)  $\tan 912^\circ$ , (d)  $\sec(-227^\circ)$

(a)  $\sin 232^\circ = -\sin(232^\circ - 180^\circ) = -\sin 52^\circ$   
 $232^\circ$  está en el cuadrante III, así que el seno es negativo y  $R = \theta - 180^\circ$ .

(b)  $\cos 312^\circ = +\cos(360^\circ - 312^\circ) = \cos 48^\circ$   
 $312^\circ$  está en el cuadrante IV, así que el coseno es positivo y  $R = 360^\circ - \theta$ .

(c)  $\tan 912^\circ = \tan[192^\circ + 2(360^\circ)] = \tan 192^\circ$   
 $= +\tan(192^\circ - 180^\circ) = \tan 12^\circ$   
 Como  $912^\circ \geq 360^\circ$ , se encuentra primero el ángulo cotermino.  $192^\circ$  está en el cuadrante III, así que la tangente es positiva y  $R = \theta - 180^\circ$ .

(d)  $\sec(-227^\circ) = \sec(133^\circ - 360^\circ) = \sec 133^\circ$   
 $= -\sec(180^\circ - 133^\circ) = -\sec 47^\circ$   
 Como  $-227^\circ < 0^\circ$ , se encuentra primero el ángulo cotermino.  $133^\circ$  está en el cuadrante II, así que la secante es negativa y  $R = 180^\circ - \theta$ .

Quando se determina el valor de una función trigonométrica usando una calculadora, no es necesario un ángulo de referencia. El valor de la función se calcula como se indicó en la Sección 4.5. Sin embargo, cuando se desea encontrar, usando calculadora, el valor de un ángulo a partir de un determinado valor de la función y cuya posición debe estar dentro de un cuadrante específico, generalmente es necesario un ángulo de referencia.

#### 7.4 ÁNGULOS A PARTIR DEL VALOR DE UNA FUNCIÓN

Como los ángulos coterminales tienen el mismo valor de las funciones, existe un número ilimitado de ángulos que tienen el mismo valor para una función trigonométrica. Aun cuando se limiten a ángulos que estén dentro del intervalo de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ , existen generalmente dos ángulos que tienen el mismo valor de la función. Todos los ángulos que tienen el mismo valor de la función, también tienen el mismo ángulo de referencia. El cuadrante en el que se encuentra el ángulo, está determinado por el signo del valor de la función. Las relaciones de la Sección 7.3, se utilizan para encontrar el ángulo  $\theta$ , una vez que el ángulo de referencia se encuentra utilizando la tabla (véase Sección 4.4) o una calculadora (véase Sección 4.6).

**EJEMPLO 7.5** Encontrar todos los ángulos  $\theta$  entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$  cuando:

(a)  $\sin \theta = 0.6293$ ,    (b)  $\cos \theta = -0.3256$ ,    (c)  $\tan \theta = -1.2799$

- (a) Como  $\sin \theta = 0.6293$  es positivo, las soluciones de  $\theta$  están en los cuadrantes I y II porque el seno es positivo en esos cuadrantes.  
 $\sin R = 0.6293$ ; así,  $R = 39^\circ$ .  
 En el cuadrante I,  $R = \theta$ , así  $\theta = 39^\circ$ .  
 En el cuadrante II,  $R = 180^\circ - \theta$ , así,  $\theta = 180^\circ - R = 180^\circ - 39^\circ = 141^\circ$ .  
 $\theta = 39^\circ$  y  $141^\circ$ .
- (b) Como  $\cos \theta = -0.3256$  es negativo, las soluciones de  $\theta$  están en los cuadrantes II y III porque el coseno es negativo en esos cuadrantes.  
 $\cos R = 0.3256$ ; así,  $R = 71^\circ$ .  
 En el cuadrante II,  $R = 180^\circ - \theta$ , así  $\theta = 180^\circ - R = 180^\circ - 71^\circ = 109^\circ$ .  
 En el cuadrante III,  $R = \theta - 180^\circ$ , así,  $\theta = 180^\circ + R = 180^\circ + 71^\circ = 251^\circ$ .  
 $\theta = 109^\circ$  y  $251^\circ$ .
- (c) Como  $\tan \theta = -1.2799$  es negativo, las soluciones de  $\theta$  están en los cuadrantes II y IV porque la tangente es negativa en esos cuadrantes.  
 $\tan R = 1.2799$ ; así,  $R = 52^\circ$ .  
 En el cuadrante II,  $R = 180^\circ - \theta$ ; así,  $\theta = 180^\circ - R = 180^\circ - 52^\circ = 128^\circ$ .  
 En el cuadrante IV,  $R = 360^\circ - \theta$ ; así,  $\theta = 360^\circ - R = 360^\circ - 52^\circ = 308^\circ$ .  
 $\theta = 128^\circ$  y  $308^\circ$ .

**EJEMPLO 7.6** Encontrar todos los ángulos  $n$  cuando (a)  $\sin \theta = -0.2079$  y (b)  $\tan \theta = 0.5543$ .

- (a)  $\sin R = 0.2079$ ; así  $R = 12^\circ$ . El seno es negativo en los cuadrantes III y IV.  
 En el cuadrante III,  $\theta = 180^\circ + R = 180^\circ + 12^\circ = 192^\circ$ .  
 En el cuadrante IV,  $\theta = 360^\circ - R = 360^\circ - 12^\circ = 348^\circ$ .  
 Todos los ángulos coterminales con estos valores de  $\theta$  son requeridos, así  $\theta = 192^\circ + n360^\circ$  y  $348^\circ + n360^\circ$ , donde  $n$  es cualquier entero.
- (b)  $\tan R = 0.5543$ ; así  $R = 29^\circ$ . La tangente es positiva en los cuadrantes I y III.  
 En el cuadrante I,  $\theta = R = 29^\circ$ .  
 En el cuadrante III,  $\theta = 180^\circ + R = 180^\circ + 29^\circ = 209^\circ$ .  
 Todos los ángulos coterminales con esos valores de  $\theta$  son requeridos, así  $\theta = 29^\circ + n360^\circ$  y  $209^\circ + n360^\circ$  donde  $n$  es cualquier entero.

Problemas resueltos

7.1 Obtenga las fórmulas para las funciones de  $-\theta$  en términos de las funciones de  $\theta$ .

En la Figura 7-1,  $\theta$  y  $-\theta$  se construyen en una posición estándar, y son numéricamente iguales. En sus respectivos lados terminales los puntos  $P(x, y)$  y  $P_1(x_1, y_1)$  se localizan de forma tal que  $OP = OP_1$ . En cada una de las figuras, los dos triángulos son congruentes y  $r_1 = r$ ,  $x_1 = x$ , y  $y_1 = -y$ . Entonces,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(-\theta) &= \frac{y_1}{r_1} = \frac{-y}{r} = \frac{y}{r} = -\operatorname{sen} \theta & \cot(\theta) &= \frac{x_1}{y_1} = \frac{x}{-y} = -\frac{x}{y} = -\cot \theta \\ \cos(-\theta) &= \frac{x_1}{r_1} = \frac{x}{r} = \cos \theta & \sec(-\theta) &= \frac{r_1}{x_1} = \frac{r}{x} = \sec \theta \\ \tan(-\theta) &= \frac{y_1}{x_1} = \frac{-y}{x} = \frac{y}{x} = -\tan \theta & \csc(-\theta) &= \frac{r_1}{y_1} = \frac{r}{-y} = \frac{r}{y} = -\csc \theta \end{aligned}$$

Las relaciones anteriores son también válidas cuando es un ángulo cuadrantal, excepto en aquellos casos en que la función no esté definida. Esto puede verificarse, basándose en el hecho de que  $-0^\circ$  y  $0^\circ$ ,  $-90^\circ$  y  $270^\circ$ ,  $-180^\circ$  y  $180^\circ$ , y  $-270^\circ$  y  $90^\circ$ , son coterminales.

Por ejemplo,  $\operatorname{sen}(-0^\circ) = \operatorname{sen} 0^\circ = 0 = -\operatorname{sen} 0^\circ$ ,  $\operatorname{sen}(-90^\circ) = \operatorname{sen} 270^\circ = -1 = -\operatorname{sen} 90^\circ$ ,  $\cos(-180^\circ) = \cos 180^\circ$  y  $\cot(-270^\circ) = \cot 90^\circ = 0 = -\cot 270^\circ$ .

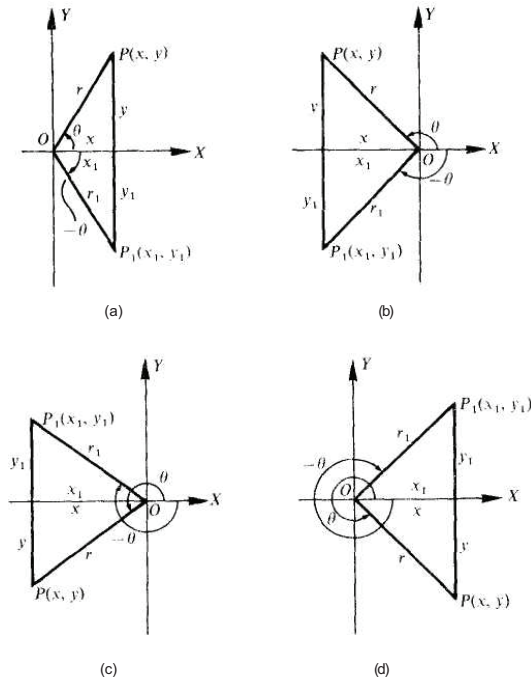


Fig. 7-1

7.2 Verifique la igualdad de las funciones trigonométricas para  $\theta$  y su ángulo de referencia  $R$  donde  $x > 0$ ,  $y > 0$  y  $r$

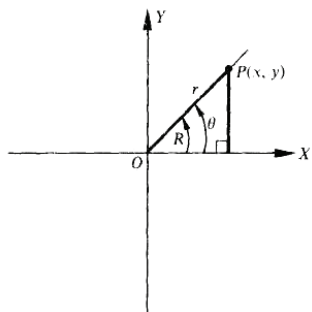
$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

(a)  $\theta$  está en el cuadrante I. Véase Figura 7-2(a).

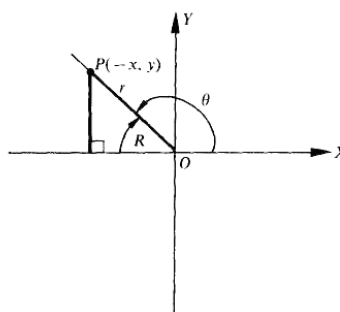
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} = \operatorname{sen} R & \cot \theta &= \frac{x}{y} = \cot R \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{x}{r} = \operatorname{cos} R & \sec \theta &= \frac{r}{x} = \sec R \\ \tan \theta &= \frac{y}{x} = \tan R & \csc \theta &= \frac{r}{y} = \csc R \end{aligned}$$

(b)  $\theta$  está en el cuadrante II. Véase Figura 7-2(b).

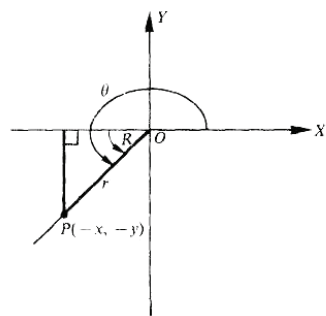
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r} = \operatorname{sen} R & \cot \theta &= \frac{-x}{y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R \\ \operatorname{cos} \theta &= \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\operatorname{cos} R & \sec \theta &= \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R \\ \tan \theta &= \frac{y}{-x} = -\left(\frac{y}{x}\right) = -\tan R & \csc \theta &= \frac{r}{y} = \csc R \end{aligned}$$



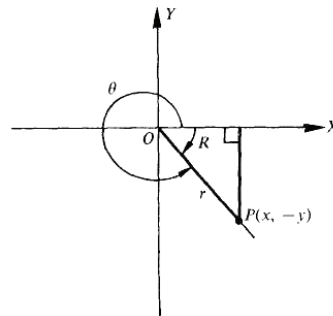
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 7-2

## REDUCCIÓN A FUNCIONES DE ÁNGULOS AGUDOS POSITIVOS

(c)  $\theta$  está en el cuadrante III. Véase Figura 7-2(c).

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\operatorname{sen} R & \cot \theta &= \frac{-x}{-y} = \frac{x}{y} = \cot R \\ \cos \theta &= \frac{-x}{r} = -\left(\frac{x}{r}\right) = -\cos R & \sec \theta &= \frac{r}{-x} = -\left(\frac{r}{x}\right) = -\sec R \\ \tan \theta &= \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan R & \csc \theta &= \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R\end{aligned}$$

(d)  $\theta$  está en el cuadrante IV. Véase Figura 7-2(d).

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \theta &= \frac{-y}{r} = -\left(\frac{y}{r}\right) = -\operatorname{sen} R & \cot \theta &= \frac{x}{-y} = -\left(\frac{x}{y}\right) = -\cot R \\ \cos \theta &= \frac{x}{r} = \cos R & \sec \theta &= \frac{r}{x} = \sec R \\ \tan \theta &= \frac{-y}{-x} = \frac{y}{x} = \tan R & \csc \theta &= \frac{r}{-y} = -\left(\frac{r}{y}\right) = -\csc R\end{aligned}$$

### 7.3 Exprese lo siguiente como funciones de ángulos agudos positivos.

(a)  $\operatorname{sen} 130^\circ$ , (b)  $\tan 325^\circ$ , (c)  $\operatorname{sen} 200^\circ$ , (d)  $\cos 370^\circ$ , (e)  $\tan 165^\circ$ , (f)  $\sec 250^\circ$ , (g)  $\operatorname{sen} 670^\circ$ , (h)  $\cot 930^\circ$ , (i)  $\csc 865^\circ$ , (j)  $\operatorname{sen} (-100^\circ)$ , (k)  $\cos (-680^\circ)$ , (l)  $\tan (-290^\circ)$

- (a)  $\operatorname{sen} 130^\circ = +\operatorname{sen} (180^\circ - 130^\circ) = \operatorname{sen} 50^\circ$   
 (b)  $\tan 325^\circ = -\tan (360^\circ - 325^\circ) = -\tan 35^\circ$   
 (c)  $\operatorname{sen} 200^\circ = -\operatorname{sen} (200^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{sen} 20^\circ$   
 (d)  $\cos 370^\circ = \cos (10^\circ + 360^\circ) = \cos 10^\circ$   
 (e)  $\tan 165^\circ = -\tan (180^\circ - 165^\circ) = -\tan 15^\circ$   
 (f)  $\sec 250^\circ = -\sec (250^\circ - 180^\circ) = -\sec 70^\circ$   
 (g)  $\operatorname{sen} 670^\circ = \operatorname{sen} (310^\circ + 360^\circ) = \operatorname{sen} 310^\circ = -\operatorname{sen} (360^\circ - 310^\circ)$   
 $= -\operatorname{sen} 50^\circ$   
 (h)  $\cot 930^\circ = \cot [210^\circ + 2(360^\circ)] = \cot 210^\circ = +\cot (210^\circ - 180^\circ) = \cot 30^\circ$   
 (i)  $\csc 865^\circ = \csc [145^\circ + 2(360^\circ)] = \csc 145^\circ = +\csc (180^\circ - 145^\circ) = \csc 35^\circ$   
 (j)  $\operatorname{sen} (-100^\circ) = -\operatorname{sen} 100^\circ = -[+\operatorname{sen}(180^\circ - 100^\circ)] = -\operatorname{sen} 80^\circ$  o  $\operatorname{sen} (-100^\circ) = \operatorname{sen} (260^\circ - 360^\circ) = \operatorname{sen} 260^\circ = -\operatorname{sen} (260^\circ - 180^\circ) = -\operatorname{sen} 80^\circ$   
 (k)  $\cos (-680^\circ) = +\cos 680^\circ = \cos (320^\circ + 360^\circ) = \cos 320^\circ$   
 $= +\cos (360^\circ - 320^\circ) = \cos 40^\circ$   
 o  $\cos (-680^\circ) = \cos [40^\circ - 2(360^\circ)] = \cos 40^\circ$   
 (l)  $\tan (-290^\circ) = -\tan 290^\circ = -[-\tan (360^\circ - 290^\circ)] = +\tan 70^\circ$   
 o  $\tan (-290^\circ) = \tan (70^\circ - 360^\circ) = \tan 70^\circ$

7

7.4 Encuentre el valor exacto del seno, coseno y tangente de

(a)  $120^\circ$ , (b)  $210^\circ$ , (c)  $315^\circ$ , (d)  $-135^\circ$ , (e)  $-240^\circ$ , (f)  $-330^\circ$

(a)  $120^\circ$  está en el cuadrante II; ángulo de referencia =  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

$$\text{sen } 120^\circ = \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \text{cos } 120^\circ = -\text{cos } 60^\circ = 1/2 \quad \text{tan } 120^\circ = -\text{tan } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

(b)  $210^\circ$  está en el cuadrante III; ángulo de referencia =  $210^\circ - 180^\circ = 30^\circ$

$$\text{sen } 210^\circ = -\text{sen } 30^\circ = -1/2 \quad \text{cos } 210^\circ = -\text{cos } 30^\circ = -\sqrt{3}/2 \quad \text{tan } 210^\circ = \text{tan } 30^\circ = \sqrt{3}/3$$

(c)  $315^\circ$  está en el cuadrante IV; ángulo de referencia =  $360^\circ - 315^\circ = 45^\circ$ .

$$\text{sen } 315^\circ = -\text{sen } 45^\circ = -\sqrt{2}/2 \quad \text{cos } 315^\circ = \text{cos } 45^\circ = \sqrt{2}/2 \quad \text{tan } 315^\circ = -\text{tan } 45^\circ = -1$$

(d)  $-135^\circ$  es coterminal con  $-135^\circ + 360^\circ = 225^\circ$ ;  $225^\circ$  está en el cuadrante III; ángulo de referencia =  $225^\circ - 180^\circ = 45^\circ$

$$\text{sen } (-135^\circ) = -\text{sen } 45^\circ = -\sqrt{2}/2 \quad \text{cos } (-135^\circ) = -\text{cos } 45^\circ = -\sqrt{2}/2$$

$$\text{tan } (-135^\circ) = \text{tan } 45^\circ = 1$$

(e)  $-240^\circ$  es coterminal con  $-240^\circ + 360^\circ = 120^\circ$ ;  $120^\circ$  está en el cuadrante II; ángulo de referencia =  $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ .

$$\text{sen } (-240^\circ) = \text{sen } 60^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \text{cos } (-240^\circ) = -\text{cos } 60^\circ = 1/2$$

$$\text{tan } (-240^\circ) = -\text{tan } 60^\circ = -\sqrt{3}$$

(f)  $-330^\circ$  es coterminal con  $-330^\circ + 360^\circ = 30^\circ$ ;  $30^\circ$  está en el cuadrante I; ángulo de referencia =  $30^\circ$

$$\text{sen } (-330^\circ) = \text{sen } 30^\circ = 1/2 \quad \text{cos } (-330^\circ) = \text{cos } 30^\circ = \sqrt{3}/2 \quad \text{tan } (-330^\circ) = \text{tan } 30^\circ = \sqrt{3}/3$$

7.5 Use la Tabla 1 para encontrar:

(a)  $\text{sen } 125^\circ 14' = +\text{sen } (180^\circ - 125^\circ 14') = \text{sen } 54^\circ 46' = 0.8168$

(b)  $\text{cos } 169^\circ 40' = -\text{cos } (180^\circ - 169^\circ 40') = -\text{cos } 10^\circ 20' = -0.9838$

(c)  $\text{tan } 200^\circ 23' = +\text{tan } (200^\circ 23' - 180^\circ) = \text{tan } 20^\circ 23' = 0.3716$

(d)  $\text{cot } 250^\circ 44' = +\text{cot } (250^\circ 44' - 180^\circ) = \text{cot } 70^\circ 44' = 0.3495$

(e)  $\text{cos } 313^\circ 18' = +\text{cos } (360^\circ - 313^\circ 18') = \text{cos } 46^\circ 42' = 0.6858$

(f)  $\text{sen } 341^\circ 52' = -\text{sen } (360^\circ - 341^\circ 52') = -\text{sen } 18^\circ 8' = -0.3112$

## REDUCCIÓN A FUNCIONES DE ÁNGULOS AGUDOS POSITIVOS

7.6 Use la Tabla 2 para encontrar:

- (a)  $\tan 97.2^\circ = -\tan (180^\circ - 97.2^\circ) = -\tan 82.8^\circ = -7.9158$   
 (b)  $\cos 147.8^\circ = -\cos (180^\circ - 147.8^\circ) = -\cos 32.2^\circ = -0.8462$   
 (c)  $\cot 241.28^\circ = +\cot (241.28^\circ - 180^\circ) = \cot 61.28^\circ = 0.5480$   
 (d)  $\sen 194.37^\circ = -\sen (194.37^\circ - 180^\circ) = -\sen 14.37^\circ = -0.2482$   
 (e)  $\cos 273.1^\circ = +\cos (360^\circ - 273.1^\circ) = \cos 86.9^\circ = 0.0541$   
 (f)  $\tan 321.61^\circ = -\tan (360^\circ - 321.61^\circ) = -\tan 38.39^\circ = -0.7923$

7.7 Utilice una calculadora para encontrar:

- (a)  $\sen 158^\circ 38' - \sen (158 + 38/60)^\circ = 0.364355$   
 (b)  $\cos 264^\circ 21' = \cos (264 + 21/60)^\circ = -0.098451$   
 (c)  $\tan 288^\circ 14' = \tan (288 + 14/60)^\circ = -3.03556$   
 (d)  $\tan 112.68^\circ = -2.39292$   
 (e)  $\sen 223.27^\circ = -0.685437$   
 (f)  $\cos 314.59^\circ = 0.702029$

7.8 Demuestre que  $\sen \theta$  y  $\tan 1/2 \theta$  tienen el mismo signo.

- (a) Suponga que  $\theta = n \cdot 180^\circ$ . Si  $n$  es par (incluyendo cero), dígame  $2m$ , entonces  $\sen (2m \cdot 180^\circ) = \tan (m \cdot 180^\circ) = 0$ . Se excluye el caso en el que  $n$  es impar porque  $\tan 1/2 \theta$  no está definido.  
 (b) Suponga que  $\theta = n \cdot 180^\circ + \Phi$ , donde  $0^\circ < \Phi < 180^\circ$ . Si  $n$  es par, incluyendo cero,  $\theta$  está en el cuadrante I o en el cuadrante II y  $\sen \theta$  es positivo mientras  $1/2 \theta$  está en el cuadrante I o en el cuadrante III y  $\tan 1/2 \theta$  es positivo. Si  $n$  es impar,  $\theta$  está en el cuadrante III o IV y  $\sen \theta$  es negativo, mientras  $1/2 \theta$  está en el cuadrante II o IV y  $\tan 1/2 \theta$  es negativo.

7.9 Calcule todos los valores positivos de  $\theta$  menores que  $360^\circ$  para los cuales  $\sen \theta = -1/2$

Habrán dos ángulos (véase capítulo 2), uno en el tercer cuadrante y otro en el cuarto cuadrante. El ángulo de referencia de cada uno tiene su seno igual a  $1/2$  y es  $30^\circ$ . Así, los ángulos requeridos son  $\theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$  y  $\theta = 360^\circ - 30^\circ = 330^\circ$ .

(NOTA): Para obtener todos los valores de  $\theta$  para los cuales  $\sen \theta = 1/2$  es necesario sumar  $n \cdot 360^\circ$  a cada una de las soluciones anteriores; así,  $\theta = 210^\circ + n \cdot 360^\circ$  y  $\theta = 330^\circ + n \cdot 360^\circ$ , donde  $n$  es cualquier entero.)

7.10 Encuentre todos los valores positivos de  $\theta$  menores que  $360^\circ$  para los cuales  $\cos \theta = 0.9063$ .

Existen dos soluciones,  $\theta = 25^\circ$  en el primer cuadrante y  $\theta = 360^\circ - 25^\circ = 335^\circ$  en el cuarto cuadrante.

7.11 Determine todos los valores positivos de  $1/4 \theta$  menores que  $360^\circ$ , dado que  $\sen \theta = 0.6428$ .

Los dos ángulos positivos menores que  $360^\circ$  para los cuales  $\sen \theta = 0.6428$  son  $\theta = 40^\circ$  y  $\theta = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$ . Pero si  $1/4 \theta$  es tal que debe incluir todos los valores menores que  $360^\circ$ ,  $\theta$  debe incluir todos los valores menores que  $4^\circ$ ;  $360^\circ = 1440^\circ$ . Por consiguiente, para  $\theta$  se toman los dos ángulos anteriores y todos los ángulos coterminales menores que  $1440^\circ$ ; esto es,

$$\theta = 40^\circ, 400^\circ, 760^\circ, 1120^\circ; 140^\circ, 500^\circ, 860^\circ, 1220^\circ$$

$$1/4\theta = 10^\circ, 100^\circ, 190^\circ, 280^\circ; 35^\circ, 125^\circ, 215^\circ, 305^\circ$$

### Problemas propuestos

7.12 Exprese cada uno de los siguientes en términos de funciones de ángulos agudos positivos.

(a) $\operatorname{sen} 145^\circ$	(d) $\operatorname{cot} 155^\circ$	(g) $\operatorname{sen} (-200^\circ)$	(j) $\operatorname{cot} 610^\circ$
(b) $\operatorname{cos} 215^\circ$	(e) $\operatorname{sec} 325^\circ$	(h) $\operatorname{cos} (-760^\circ)$	(k) $\operatorname{sec} 455^\circ$
(c) $\operatorname{tan} 440^\circ$	(f) $\operatorname{csc} 190^\circ$	(i) $\operatorname{tan} (-1385^\circ)$	(l) $\operatorname{csc} 825^\circ$

Resp. (a)  $\operatorname{sen} 35^\circ$  (g)  $\operatorname{sen} 20^\circ$   
 (b)  $-\operatorname{cos} 35^\circ$  (h)  $\operatorname{cos} 40^\circ$   
 (c)  $\operatorname{tan} 80^\circ$  (i)  $\operatorname{tan} 55^\circ$   
 (d)  $-\operatorname{cot} 25^\circ$  (j)  $\operatorname{cot} 70^\circ$   
 (e)  $\operatorname{sec} 35^\circ$  (k)  $-\operatorname{sec} 85^\circ$   
 (f)  $-\operatorname{csc} 10^\circ$  (l)  $\operatorname{csc} 75^\circ$

7.13 Encuentre los valores exactos del seno, coseno y tangente de

(a)  $150^\circ$ , (h)  $225^\circ$ , (c)  $300^\circ$ , (d)  $-120^\circ$ , (e)  $-210^\circ$ , (f)  $-315^\circ$

Resp. (a)  $1/2, -\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$  (d)  $-\sqrt{3}/2, -1/2, \sqrt{3}$   
 (b)  $-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 1$  (e)  $1/2, -\sqrt{3}/2, -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3$   
 (c)  $-\sqrt{3}/2, 1/2, -\sqrt{3}$  (f)  $\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1$

7.14 Usando las Tablas apropiadas, verificar:

Resp. (a)  $\operatorname{sen} 155^\circ 13' = 0.4192$  (f)  $\operatorname{tan} 129.48^\circ = -1.2140$   
 (b)  $\operatorname{cos} 104^\circ 38' = -0.2526$  (g)  $\operatorname{sen} 110.32^\circ = 0.9378$   
 (c)  $\operatorname{tan} 305^\circ 24' = -1.4071$  (h)  $\operatorname{cos} 262.35^\circ = -0.1332$   
 (d)  $\operatorname{sen} 114^\circ 18' = 0.9114$  (i)  $\operatorname{tan} 211.84^\circ = 0.6210$   
 (e)  $\operatorname{cos} 166^\circ 51' = -0.9738$  (j)  $\operatorname{cos} 314.92^\circ = 0.7061$

7.15 Encuentre todos los ángulos  $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ , para los cuales:

(a)  $\operatorname{sen} \theta = \sqrt{2}/2$ , (b)  $\operatorname{cos} \theta = -1$ , (c)  $\operatorname{sen} \theta = -0.6180$ , (d)  $\operatorname{cos} \theta = 0.5125$ , (e)  $\operatorname{tan} \theta = -1.5301$

Resp. (a)  $45^\circ, 135^\circ$  (c)  $218^\circ 10', 321^\circ 50'$  o  $218.17^\circ, 321.83^\circ$   
 (b)  $180^\circ$  (d)  $59^\circ 10', 300^\circ 50'$  o  $59.17^\circ, 300.83^\circ$   
 (e)  $123^\circ 10', 303^\circ 10'$  o  $123.17^\circ, 303.17^\circ$

# Variantes y gráficas de las funciones trigonométricas

# 8

## 8.1 REPRESENTACIÓN LINEAL DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Sea  $\theta$  un ángulo dado en posición estándar. (Véase Figura 8-1 para  $\theta$  en cada uno de los cuadrantes.) Con el vértice  $O$  como centro, se describe un círculo de radio unitario que corta el lado inicial  $OX$  de  $\theta$  en  $A$ , el eje positivo  $y$  en  $B$ , y el

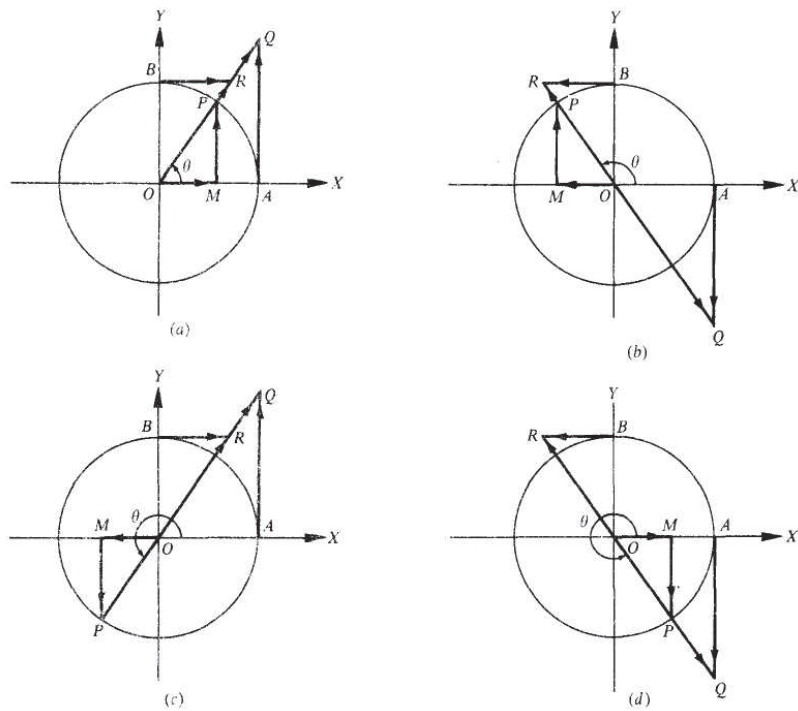


Fig. 8-1

lado terminal de  $\theta$  en  $P$ . Se dibuja  $MP$  perpendicular a  $OX$ ; se dibujan también las tangentes al círculo en  $A$  y en  $B$  hasta que encuentren el lado terminal de  $\theta$  o sus extensiones a través de  $O$  en los puntos  $Q$  y  $R$  respectivamente.

En cada parte de la Figura 8-1, los triángulos rectángulos  $OMP$ ,  $OAQ$ , y  $OBR$  son similares, y

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{MP}{OP} = MP & \cot \theta &= \frac{OM}{MP} = \frac{BR}{OB} = BR \\ \cos \theta &= \frac{OM}{OP} = OM & \sec \theta &= \frac{OP}{OM} = \frac{OQ}{OA} = OQ \\ \tan \theta &= \frac{MP}{OM} = \frac{AQ}{OA} = AQ & \csc \theta &= \frac{OP}{MP} = \frac{OR}{OB} = OR \end{aligned}$$

Los segmentos  $MP$ ,  $OM$ ,  $AQ$ , etc., son segmentos de líneas dirigidos. La magnitud de la función está dada por la longitud del segmento correspondiente y el signo está dado por la dirección indicada. Los segmentos dirigidos  $OQ$  y  $OR$  se consideran positivos cuando se miden en el lado terminal del ángulo y negativos cuando se miden en el lado terminal extendido.

## 8.2 VARIANTES DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

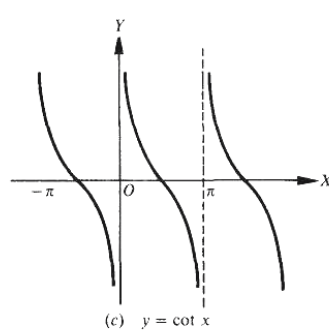
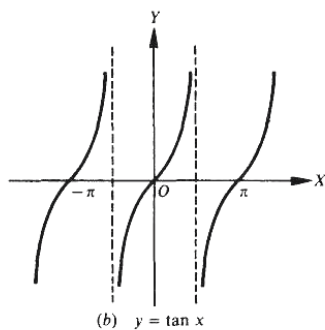
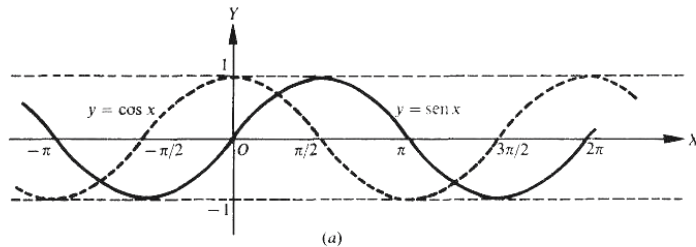
Sea que  $P$  se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj, sobre el círculo unitario, empezando en  $A$ , de tal forma que  $\theta = <$ .  $AOP$  varíe continuamente de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ . Usando la Figura 8-1, se observa cómo las funciones trigonométricas varían ( $I$ . = crece,  $D$ . = decrece).

Mientras $\theta$ crece desde	$0^\circ$ a $90^\circ$	$90^\circ$ a $180^\circ$	$180^\circ$ a $270^\circ$	$270^\circ$ a $360^\circ$
$\operatorname{sen} \theta$	$I$ . de 0 a 1	$I$ . >, de 1 a 0	$D$ . de 0 a -1	$I$ . de -1 a 0
$\cos \theta$	$D$ . de 1 a 0	$D$ . de 0 a -1	$I$ . de -1 a 0	$I$ . de 0 a 1
$\tan \theta$	$I$ . desde 0 sin límite ( $0$ a $+\infty$ )	$I$ . de valores negativos grandes a 0 ( $-\infty$ a 0)	$D$ . desde 0 sin límite ( $0$ a $+\infty$ )	$I$ . de valores negativos grandes a 0 ( $-\infty$ a 0)
$\operatorname{csc} \theta$	$D$ . de valores positivos grandes a 0 ( $+\infty$ a 0)	$D$ . desde 0 sin límite ( $0$ a $+\infty$ )	$D$ . de valores positivos grandes a 0 ( $+\infty$ a 0)	$D$ . desde 0 sin límite ( $0$ a $+\infty$ )
$\sec \theta$	$I$ . desde 1 sin límite ( $1$ a $+\infty$ )	$I$ . de valores negativos grandes a -1 ( $-\infty$ a -1)	$D$ . desde -1 sin límite ( $-1$ a $-\infty$ )	$D$ . de valores positivos grandes a 1 ( $+\infty$ a 1)
$\operatorname{csc} \theta$	$D$ . de valores positivos grandes a 1 ( $+\infty$ a 1)	$I$ . desde 1 sin límite ( $1$ a $+\infty$ )	$I$ . de valores negativos grandes a -1 ( $-\infty$ a -1)	$I$ . desde $-\infty$ sin límite ( $-1$ a $-\infty$ )

## 8.3 GRÁFICAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

En la siguiente tabla los valores del ángulo  $x$  se dan en radianes. Siempre que una función trigonométrica no esté definida para el valor de  $x$ , se escribirá  $\pm \infty$  en lugar del valor de la función

$x$	$y = \text{sen } x$	$y = \text{cos } x$	$y = \text{tan } x$	$y = \text{cot } x$	$y = \text{sec } x$	$y = \text{csc } x$
0	0	1.00	0	$\pm \infty$	1.00	$\pm \infty$
$\pi/6$	0.50	0.87	0.58	1.73	1.15	2.00
$\pi/4$	0.71	0.71	1.00	1.00	1.41	1.41
$\pi/3$	0.87	0.50	1.73	0.58	2.00	1.15
$\pi/2$	1.00	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	1.00
$2\pi/3$	0.87	-0.50	-1.73	-0.58	-2.00	1.15
$3\pi/4$	0.71	-0.71	-1.00	-1.00	-1.41	1.41
$5\pi/6$	0.50	-0.87	-0.58	-1.73	-1.15	2.00
$\pi$	0	-1.00	0	$\pm \infty$	-1.00	$\pm \infty$
$7\pi/6$	-0.50	-0.87	0.58	1.73	-1.15	-2.00
$5\pi/4$	-0.71	-0.71	1.00	1.00	-1.41	-1.41
$4\pi/3$	-0.87	-0.50	1.73	0.58	-2.00	-1.15
$3\pi/2$	-1.00	0	$\pm \infty$	0	$\pm \infty$	-1.00
$5\pi/3$	-0.87	0.50	-1.73	-0.58	2.00	-1.15
$7\pi/4$	-0.71	0.71	-1.00	-1.00	1.41	-1.41
$11\pi/6$	-0.50	0.87	-0.58	-1.73	1.15	-2.00
$2\pi$	0	1.00	0	$\pm \infty$	1.00	$\pm \infty$



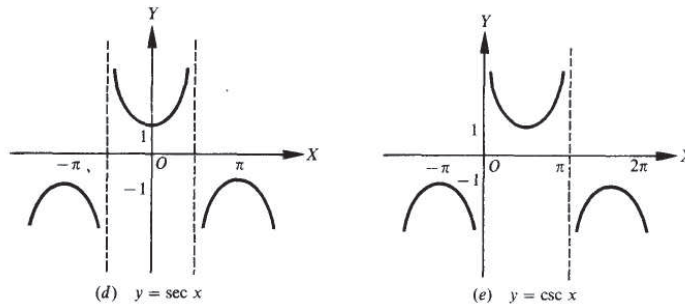


Fig. 8-2

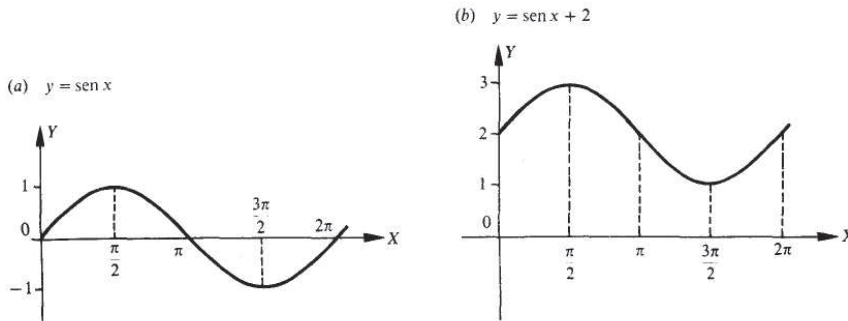
[NOTA 1. Como  $\sin(1/2\pi + x) = \cos x$ , la gráfica de  $y = \cos x$  puede obtenerse más fácilmente despezando la gráfica de  $y = \sin x$  una distancia  $1/2 \pi$  hacia la izquierda.]

[NOTA 2. Como  $\csc(1/2\pi + x) = \sec x$ , la gráfica de  $y = \sec x$  puede obtenerse desplazando la gráfica de  $y = \csc x$  una distancia  $1/2 \pi$  hacia la derecha.]

#### 8.4 DESPLAZAMIENTOS VERTICALES Y HORIZONTALES

La gráfica de una función trigonométrica, puede ser desplazada verticalmente si se le suma a la función una constante diferente de cero, y horizontalmente, sumando una constante diferente de cero al ángulo de la función trigonométrica. La Figura 8-3(a) es la gráfica de  $y = \sin x$  y las partes restantes de la Figura 8-3, son el resultado de desplazar la gráfica.

Si  $c$  es un número positivo, entonces al sumarlo a una función trigonométrica da como resultado que la gráfica sea desplazada hacia arriba  $c$  unidades [véase Figura 8-3(6)], y al restarlo de la función trigonométrica resulta un desplazamiento hacia abajo  $c$  unidades [véase Figura 8-3(c)].



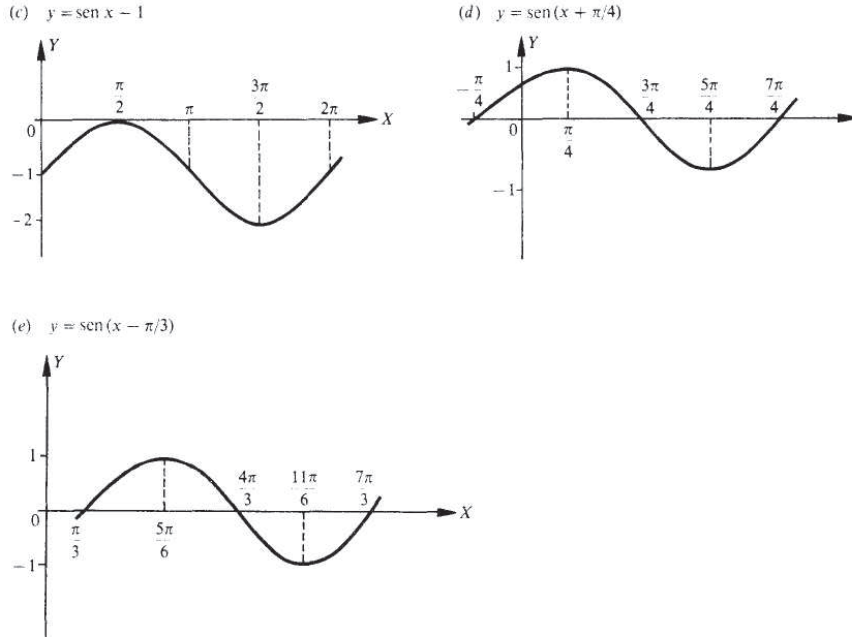


Fig. 8-3

Para un número positivo  $d$ , una función trigonométrica es desplazada a la izquierda  $d$  unidades cuando  $d$  se suma al ángulo [véase Figura 8-3(d)] y se desplaza a la derecha  $d$  unidades si  $d$  se resta del ángulo [véase Figura 8-3(e)].

## 8.5 FUNCIONES PERIÓDICAS

Cualquier función de la variable  $x$ ,  $f(x)$ , que repite sus valores en ciclos bien determinados, es llamada *periódica*. Al intervalo mínimo de valores de  $x$ , a los cuales corresponde un ciclo completo de la función, se le llama *periodo* de la función. Es evidente, a partir de las gráficas de las funciones trigonométricas, que el seno, coseno, secante y cosecante tienen periodo  $2\pi$ , mientras que la tangente y la cotangente son de periodo  $\pi$ .

## 8.6 CURVAS SENOIDALES

La *amplitud* (máxima ordenada) y el periodo (longitud de onda) de  $y = \text{sen } x$ , son respectivamente 1 y  $2\pi$ . Para un valor dado de  $x$ , el valor de  $y = a \text{ sen } x$ ,  $a > 0$ , es a veces el valor de  $y = \text{sen } x$ . Así, la amplitud de  $y = a \text{ sen } x$  es  $a$  y el periodo es  $2\pi$ . Si  $bx = 2\pi$ ,  $x = 2\pi/b$ , la amplitud de  $y = \text{sen } bx$ ,  $b > 0$ , es 1 y el periodo es  $2\pi/b$ .

La curva general de seno (senoidal) de la ecuación

$$y = a \text{ sen } bx \quad a > 0, b > 0$$

tiene amplitud  $a$  y periodo  $2\pi/b$ . Así, la gráfica de  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$  tiene amplitud 3 y periodo  $2\pi/2 = \pi$ . La Figura 8-4 muestra las gráficas de  $y = \operatorname{sen} x$  y  $y = 3 \operatorname{sen} 2x$  en los mismos ejes.

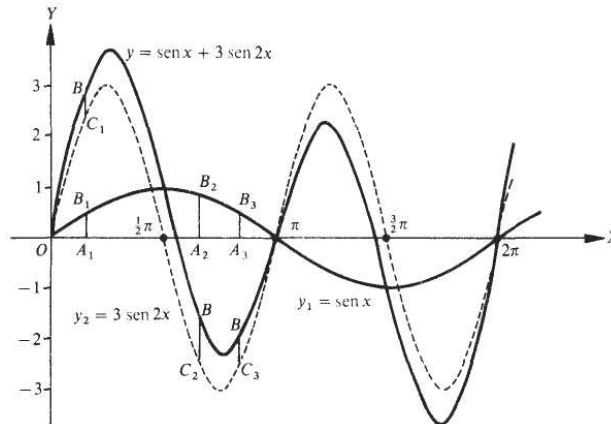


Fig. 8-4

Se pueden obtener formas más complicadas de movimientos ondulatorios, combinando dos o más curvas senoidales. El método de adición de coordenadas correspondientes, se ilustra en el siguiente ejemplo,

**EJEMPLO 8.1** Construya la gráfica de  $y = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x$ . Véase Figura 8-4.

Primero las gráficas de  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $y_2 = 3 \operatorname{sen} 2x$  se construyen en los mismos ejes. Entonces, correspondiendo a un valor dado,  $x = OA_1$ , la ordenada  $A_1B$  de  $y = \operatorname{sen} x + 3 \operatorname{sen} 2x$  es la suma algebraica de las ordenadas  $A_1B_1$  de  $y_1 = \operatorname{sen} x$  y  $AC_1$  de  $y_2 = 3 \operatorname{sen} 2x$ . Igual mente,  $A_2B = A_2B_2 + A_2C_2$ ,  $A_3B = A_3B_3 + A_3C_3$ , etc.

## Problemas resueltos

**8.1 Dibuje las gráficas de las siguientes funciones para un periodo.**

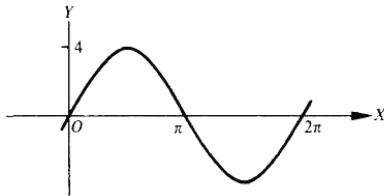
- (a)  $y = 4 \operatorname{sen} x$       (c)  $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$       (e)  $y = 3 \cos \frac{1}{2} x = 3 \operatorname{sen}(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \pi)$   
 (b)  $y = \operatorname{sen} 3x$       (d)  $y = 2 \cos x = 2 \operatorname{sen}(x + \frac{1}{2} \pi)$

En cada caso, se usará la misma curva y se pondrá en el eje  $y$ , y se eligen las unidades en cada uno de los ejes que satisfaga los requerimientos de amplitud y periodo de cada función.

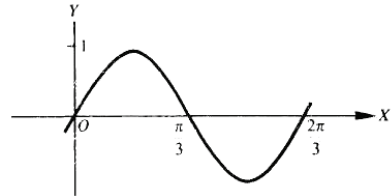
- (a)  $y = 4 \operatorname{sen} x$  tiene amplitud = 4 y periodo =  $2\pi$ .  
 (b)  $y = \operatorname{sen} 3x$  tiene amplitud = 1 y periodo =  $2\pi/3$ .  
 (c)  $y = 3 \operatorname{sen} \frac{1}{2} x$  tiene amplitud = 3 y periodo =  $2\pi / \frac{1}{2} = 4\pi$ .

(d)  $y = 2 \cos x$  tiene amplitud = 2 y periodo =  $2\pi$ . Observe la posición del eje y.

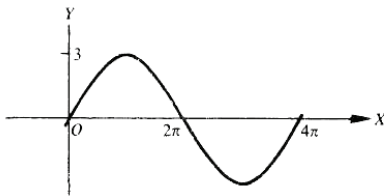
(e)  $y = 3 \cos 1/2 x$  tiene amplitud = 3 y periodo =  $4\pi$



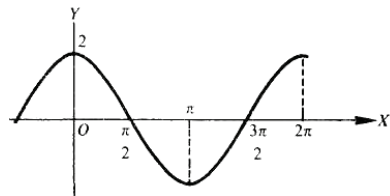
(a)  $y = 4 \text{ sen } x$



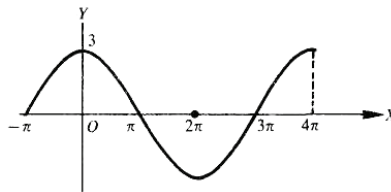
(b)  $y = \text{sen } 3x$



(c)  $y = 3 \text{ sen } 1/2 x$



(d)  $y = 2 \text{ cos } x$



(f)  $y = \text{cos } 1/2 x$

Fig. 8-5

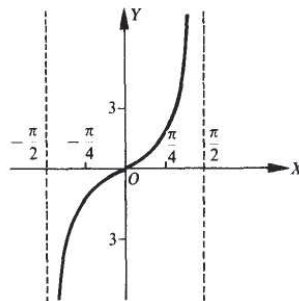
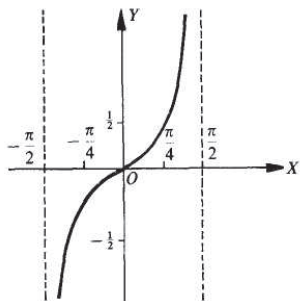
**8.2 Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones:**

(a)  $y = 1/2 \tan x$     (b)  $y = 3 \tan x$ ,    (c)  $y = \tan 3x$ ,    (d)  $y = \tan 1/4 x$

En cada caso, se usa la misma Figura colocándola en el eje y y escogiendo las unidades adecuadas para el eje x que satisfagan el periodo de la curva.

(a)  $y = 1/2 \tan x$  tiene periodo  $\pi$

(b)  $y = 3 \tan x$  tiene periodo  $\pi$



(c)  $y = \tan 3x$  tiene periodo  $\pi/3$

(d)  $y = \tan 1/4 x$  tiene periodo  $\pi/1/4 = 4\pi$

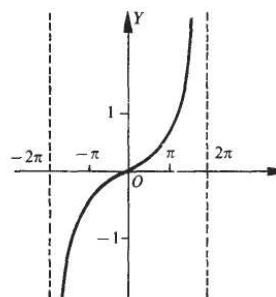
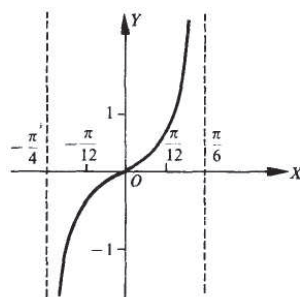


Fig. 8-6

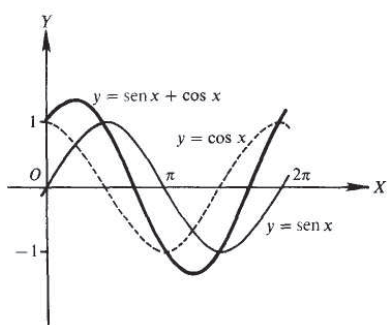
**8.3 Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones:**

(a)  $y = \sin x + \cos x$

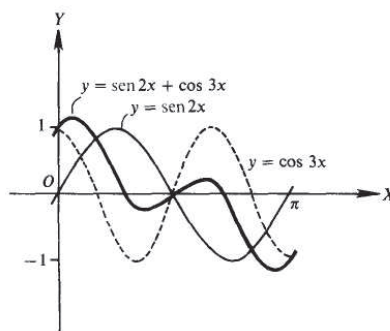
(c)  $y = \sin 2x - \cos 3x$

(b)  $y = \sin 2x + \cos 3x$

(d)  $y = 3 \sin 2x + 2 \cos 3x$



(a)



(b)

VARIANTES Y GRÁFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

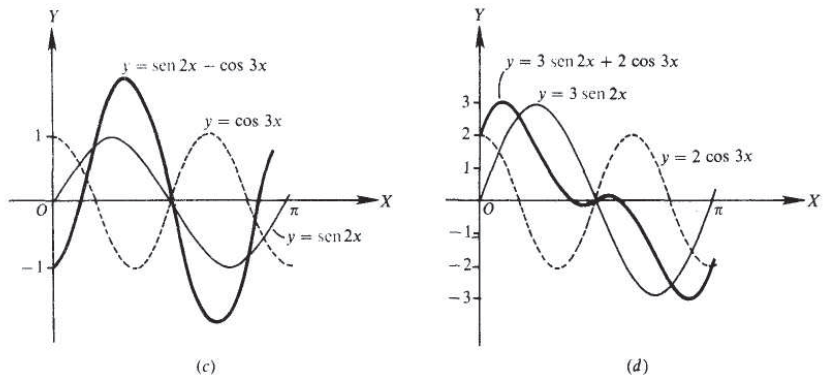


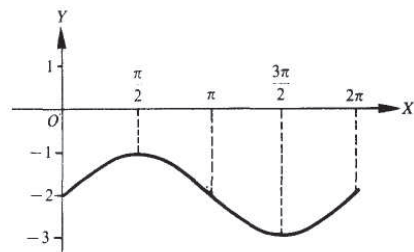
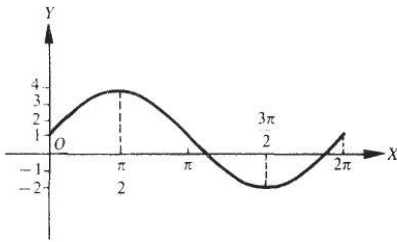
Fig. 8-7

8.4 Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones:

- (a)  $y = 3 \text{ sen } x + 1$       (c)  $y = \text{cos } x + 2$   
 (b)  $y = \text{sen } x - 2$       (d)  $y = \text{cos } x - 1$

(a)  $y = 3 \text{ sen } x$  es desplazado hacia arriba 1 unidad

(b)  $y = \text{sen } x$  es desplazado hacia abajo 2 unidades



(c)  $y = \text{cos } x$  es desplazado hacia arriba 2 unidades

(d)  $y = 1/2 \text{ cos } x$  es desplazado hacia abajo 1 unidad

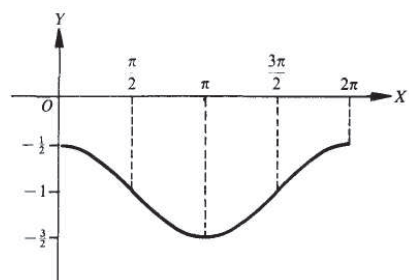
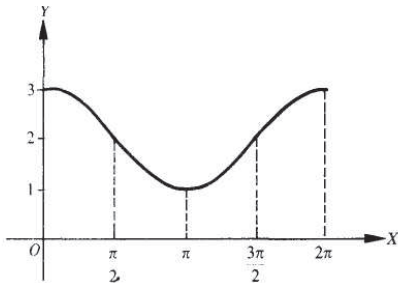


Fig. 8-8

8

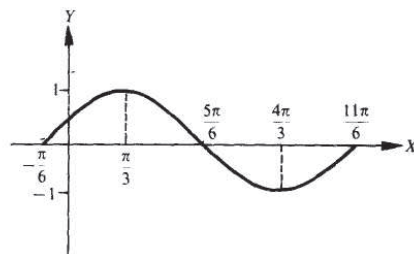
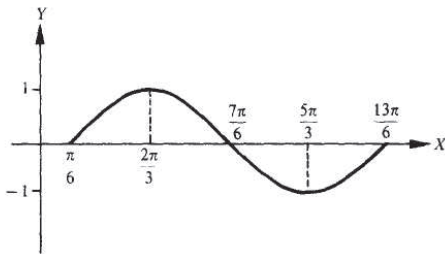
**8.5 Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones:**

(a)  $y = \text{sen}(x - \pi/6)$       (c)  $y = \text{cos}(x - \pi/4)$

(b)  $y = \text{sen}(x + \pi/6)$       (d)  $y = \text{cos}(x + \pi/3)$

(a)  $y = \text{sen } x$  es desplazado a la derecha  $\pi/6$  unidades

(b)  $y = \text{sen } x$  es desplazado a la izquierda  $\pi/6$  unidades



(c)  $y = \text{cos } x$  es desplazado a la derecha  $\pi/4$  unidades

(d)  $y = \text{cos } x$  es desplazado a la izquierda  $\pi/3$  unidades

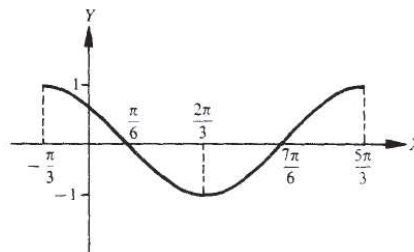
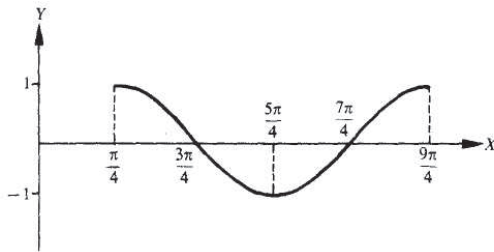


Fig. 8-9

**Problemas propuestos**

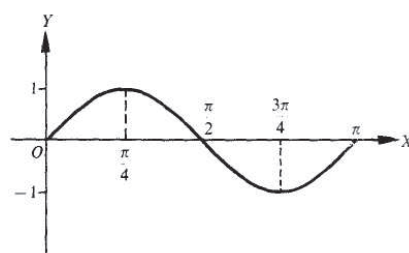
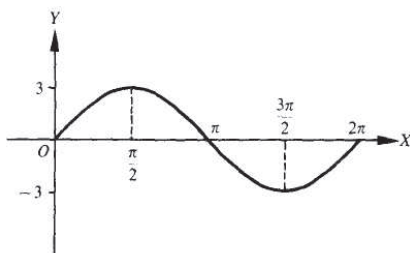
**8.6 Dibuje las gráficas de las siguientes funciones para un período.**

- (a)  $y = 3 \text{ sen } x$ ,    (b)  $y = \text{sen } 2x$ ,    (c)  $y = 4 \text{ sen } x/2$ ,    (d)  $y = 4 \text{ cos } x$ ,    (e)  $y = 2 \text{ cos } x/3$ ,    (f)  $y = 2 \text{ tan } x$ ,  
 (g)  $y = \text{tan } 2x$

Resp. (a)  $y = 3 \operatorname{sen} x$

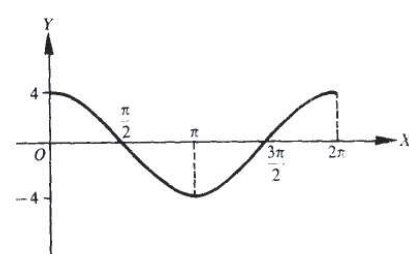
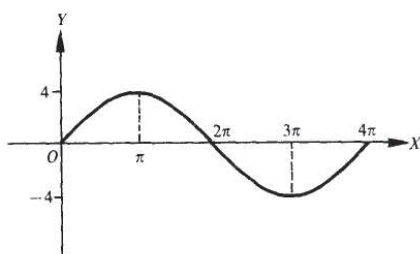
(b)  $y = \operatorname{sen} 2x$

8



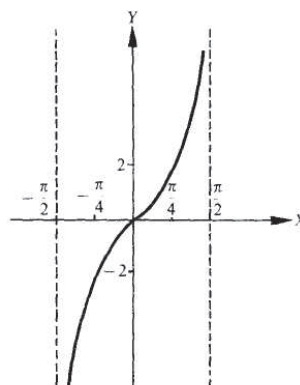
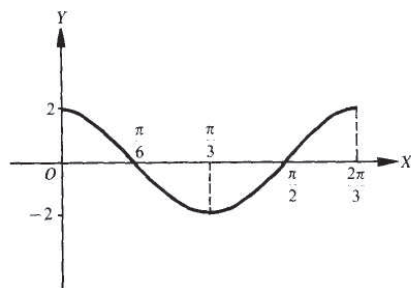
(c)  $y = 4 \operatorname{sen} x/2$

(d)  $y = 4 \cos x$



(e)  $v = 2 \cos x/3$

(f)  $y = 2 \tan x$



(g)  $y = \tan 2x$

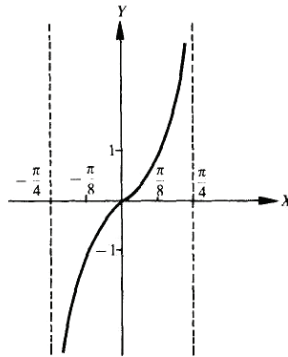


Fig.8-10

8.7 Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones para un periodo.

(a)  $y = \sin x + 2 \cos x$       (c)  $y = \sin 2x + \sin 3x$

(b)  $y = \sin 3x + \cos 2x$       (d)  $y = \sin 3x - \cos 2x$

Resp. (a)  $y = \sin x + 2 \cos x$

(b)  $y = \sin 3x + \cos 2x$

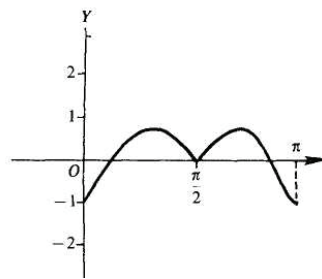
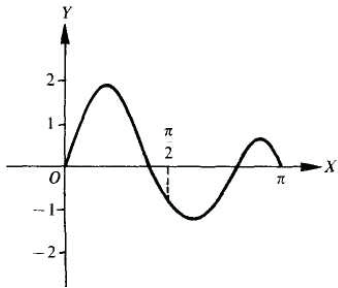
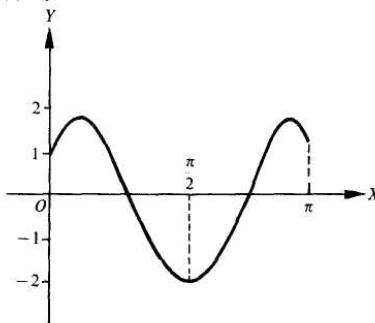
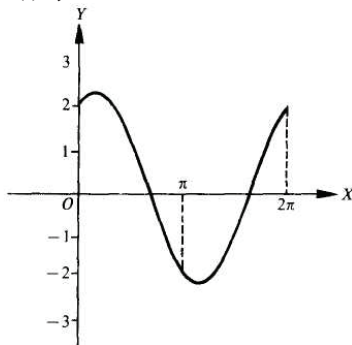


Fig. 8-11

(c)  $y = \sin 2x + \sin 3x$

(d)  $y = \sin 3x - \cos 2x$

8.8 Construya la gráfica de cada una de las siguientes funciones para un periodo.

- (a)  $y = \text{sen } x + 3$
- (b)  $y = \text{cos } x - 2$
- (c)  $y = \text{sen}(x - \pi/4)$
- (d)  $y = \text{cos}(x + \pi/6)$

Resp.

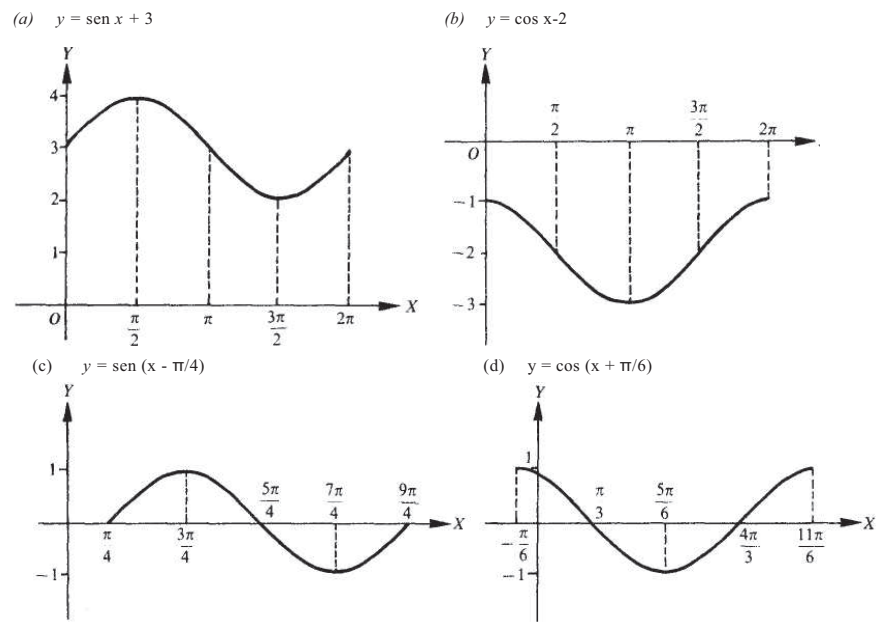


Fig. 8-12

# Relaciones básicas e identidades



## 9.1 RELACIONES BÁSICAS

Relaciones recíprocas	Relaciones de cocientes	Relaciones pitagóricas
$\csc \theta = \frac{1}{\sen \theta}$	$\tan \theta = \frac{\sen \theta}{\cos \theta}$	$\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$
$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta}$	$\cot \theta = \frac{\cos \theta}{\sen \theta}$	$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$
$\cot \theta = \frac{1}{\tan \theta}$		$1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

Las relaciones básicas son válidas para cualquier valor de  $\theta$ , para el cual las funciones que contiene están definidas. Así,  $\sen^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  es válida para todo valor de  $\theta$ , mientras  $\tan \theta = \sen \theta / \cos \theta$  es válida para todos los valores de  $\theta$ , en los que  $\theta$  está definida, es decir, para toda  $\theta \neq 90^\circ$ , donde  $n$  es impar. Observe que para los valores excluidos de  $\theta$ ,  $\cos \theta = 0$  y  $\sen \theta \neq 0$ .

Las demostraciones de las relaciones del cociente y las pitagóricas, aparecen en los problemas 9.1 y 9.2. Las relaciones inversas fueron tratadas en el capítulo 2.

(Véanse además Probs. 9.3 a 9.6.)

## 9.2 SIMPLIFICACIÓN DE EXPRESIONES TRIGONOMÉTRICAS

Con frecuencia es conveniente transformar o reducir una expresión dada que utilice funciones trigonométricas a otra función más sencilla.

### EJEMPLO 9.1

(a) Usando  $\csc \theta = \frac{1}{\sen \theta}$ ,  $\cos \theta \csc \theta = \cos \theta \frac{1}{\sen \theta} = \frac{\cos \theta}{\sen \theta} = \cot \theta$ .

(b) Usando  $\tan \theta = \frac{\sen \theta}{\cos \theta}$ ,  $\cos \theta \tan \theta = \cos \theta \frac{\sen \theta}{\cos \theta} = \sen \theta$ .

**EJEMPLO 9.2** Utilizando la relación  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ ,

$$(a) \quad \sin^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \sin \theta = (1) \sin \theta = \sin \theta.$$

$$(b) \quad \frac{\cos^2 \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{1 - \sin^2 \theta}{1 - \sin \theta} = \frac{(1 - \sin \theta)(1 + \sin \theta)}{1 - \sin \theta} = 1 + \sin \theta.$$

(NOTA. La relación  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  puede ser escrita como  $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$  y también como  $\cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta$ . Cada forma es igualmente útil. En el Ejemplo 9.2 la segunda de estas dos formas fue utilizada.)

(Ver Probs. 9.7 a 9.9.)

### 9.3 IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

Una ecuación que utiliza funciones trigonométricas, que sea válida para todos los valores angulares en los cuales las funciones están definidas, se llama una *identidad trigonométrica*. Las ocho relaciones básicas de la sección 9.1 se consideran identidades trigonométricas; también lo son:

$$\cos \theta \csc \theta = \cot \theta \quad \text{y} \quad \cos \theta \tan \theta = \sin \theta$$

del Ejemplo 9.1.

Una identidad trigonométrica se verifica transformando alguno de sus miembros (cualquiera) en el otro. En general, uno comienza por el lado más complicado. En algunos casos, ambos miembros se transforman a una nueva forma.

#### Pasos generales para verificar identidades

1. Conocer las ocho relaciones básicas y reconocer las formas alternativas de cada una.
2. Conocer los procedimientos de adición y sustracción, reducción y transformación de fracciones en fracciones equivalentes.
3. Conocer las técnicas de factorización y de los productos especiales.
4. Usar solamente procedimientos de sustitución y de simplificación que permitan trabajar en un solo lado de la ecuación.
5. Seleccionar el lado de la ecuación que parezca ser más complicado, e intentar transformarlo en el otro miembro de la ecuación. (Véase Ejemplo 9.3.)
6. Transformar, independientemente, ambos lados de la ecuación en la misma forma. (Véase Ejemplo 9.4.)
7. Evitar sustituciones que introduzcan raíces.
8. Usar sustituciones para cambiar todas las funciones trigonométricas en expresiones que contengan únicamente senos y cosenos y, entonces, simplificar. (Véase Ejemplo 9.5.)
9. Multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por el conjugado de cualquiera de ellos. (Véase Ejemplo 9.0.)
10. Simplificar la raíz cuadrada de una fracción utilizando conjugados para transformarla en el cociente con cuadrados perfectos. (Véase Ejemplo 9.7.)

**EJEMPLO 9.3** Verifique la identidad  $\theta + 2 \cot \theta = \frac{\sin^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta}$

Dejamos el lado izquierdo sin cambiar y se escribe nuevamente el lado derecho como la suma de dos fracciones, se reducen fracciones y se substituyen las relaciones básicas para transformar la expresión.

9

$$\begin{aligned} \tan \theta + 2 \cot \theta &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + 2 \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\operatorname{sen}^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} + \frac{2 \cos^2 \theta}{\operatorname{sen} \theta \cos \theta} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} + \frac{2 \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \\ \tan \theta + 2 \cot \theta &= \tan \theta + 2 \cot \theta \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.4** Verifique la identidad  $x + \cot x = \frac{\csc x}{\cos x}$

Se transforma el lado derecho de la ecuación hasta que aparezca completamente simplificado. Como la parte izquierda es todavía diferente de la derecha, se cambia, aquélla, a su nueva forma.

$$\begin{aligned} \tan x + \cot x &= \frac{\csc x}{\cos x} \\ &= \csc x \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos x} \\ &= \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} + \frac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} =$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cos x}$$

**EJEMPLO 9.5** Verifique la identidad  $\frac{\sec x}{\cot x + \tan x} = \operatorname{sen} x$ .

Se modifican todas las funciones en el lado izquierdo por expresiones en términos de senos y cosenos, y, entonces, se simplifican.

$$\frac{\sec x}{\cot x + \tan x} = \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\cos x} = \\ &\frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} x \cos x} = \end{aligned}$$

## RELACIONES BÁSICAS E IDENTIDADES

$$\begin{aligned} \frac{\cos x \operatorname{sen} x}{\cos x \operatorname{sen} x} \cdot \frac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}} &= \\ \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x} &= \\ \frac{\operatorname{sen} x}{1} &= \\ \operatorname{sen} x &= \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.6** Verifique la identidad  $\frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x}$ .

Se multiplican el numerador y el denominador del lado izquierdo por  $1 - \cos x$ , el cual es el conjugado del denominador. (El conjugado de una expresión de dos términos equivale a la expresión determinada cuando el signo entre ambos términos es reemplazado por su opuesto.) La única vez que se usará este procedimiento será cuando el producto de la expresión y su conjugado dé la forma de una relación pitagórica

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} &= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \\ \frac{1 - \cos x}{1 - \cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} &= \\ \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{1 - \cos^2 x} &= \\ \frac{(1 - \cos x) \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^2 x} &= \\ \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \frac{1 - \cos x}{\operatorname{sen} x} \end{aligned}$$

**EJEMPLO 9.7** Verifique la identidad

$$\sqrt{\frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}} = \frac{1}{\sec x + \tan x}$$

Como el lado izquierdo tiene la raíz, se multiplica el numerador y el denominador de la fracción dentro de la raíz por el conjugado de alguno de ellos. Se usará el conjugado del numerador, ya que éste hará que el denominador sea el cuadrado del valor que se quiere en el denominador.

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x}} &= \frac{1}{\sec x + \tan x} \\ \sqrt{\frac{\sec x - \tan x}{\sec x + \tan x} \cdot \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}} &= \\ \sqrt{\frac{\sec^2 x - \tan^2 x}{(\sec x + \tan x)^2}} &= \end{aligned}$$

$$\sqrt{\frac{1}{(\sec x + \tan x)^2}} = \frac{1}{\sec x + \tan x} = \frac{1}{\sec x + \tan x}$$

La práctica nos indicará qué sustitución hacer y cuál procedimiento es el más sencillo de usar. La forma empleada en los Ejemplos 0.3, 0.4 y 0.5 son las más frecuentes.

(Ver Probs. 0.10 a 0.10.)

### Problemas resueltos

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \text{ y } \cot \theta = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}$$

#### 0.1 Pruebe las relaciones de los cocientes

Para cualquier ángulo  $\theta$ ,  $\text{sen } \theta = y/r$ ,  $\text{cos } \theta = x/r$ ,  $\tan \theta = y/x$ , y  $\cot \theta = x/y$ , donde  $P(x, y)$  es cualquier punto en el lado terminal de  $t$  a una distancia  $r$  del origen.

$$\text{Entonces } \tan \theta = \frac{y}{x} = \frac{y/r}{x/r} = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} \text{ y } \cot \theta = \frac{x}{y} = \frac{x/r}{y/r} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}. \quad \left( \text{También, } \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta} \right)$$

#### 0.2 Pruebe las relaciones pitagóricas (a) $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ , (b) $1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ y (c) $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ .

Para  $P(x, y)$ , definido como en el problema 0.1, se tiene  $A = (x^2 + y^2 = r^2)$ .

(a) Dividiendo  $A$  entre  $r^2$ ,  $(x/r)^2 + (y/r)^2 = 1$  y  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$ .

(b) Dividiendo  $A$  entre  $x^2$ ,  $1 + (y/x)^2 + (r/x)^2 = 1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta$ .  $\left(\frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta}\right)^2 + 1 = \left(\frac{1}{\text{cos } \theta}\right)^2$  o  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ .  
También, dividiendo  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$  entre  $\text{cos}^2 \theta$ ,

(c) Dividiendo  $A$  entre  $y^2$ ,  $(x/y)^2 + 1 = (r/y)^2$  y  $\cot^2 \theta + 1 = \csc^2 \theta$ .

También, dividiendo  $\text{sen}^2 \theta + \text{cos}^2 \theta = 1$  entre  $\text{sen}^2 \theta$ ,  $1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$ .  
o  $1 + \left(\frac{\text{cos } \theta}{\text{sen } \theta}\right)^2 = \left(\frac{1}{\text{sen } \theta}\right)^2 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$

#### 0.3 Exprese cada una de las otras funciones de $\theta$ en términos de $\text{sen } \theta$ .

$$\text{cos}^2 \theta = 1 - \text{sen}^2 \theta \quad \text{y} \quad \text{cos } \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}$$

$$\tan \theta = \frac{\text{sen } \theta}{\text{cos } \theta} = \frac{\text{sen } \theta}{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}} \quad \cot \theta = \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\pm \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta}}{\text{sen } \theta}$$

## RELACIONES BÁSICAS E IDENTIDADES

$$\sec \theta = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}} \quad \csc \theta = \frac{1}{\sin \theta}$$

Observe que  $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$ . Al escribir  $\cos \theta = \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$  se limita al ángulo  $\theta$  a aquellos cuadrantes (primero y cuarto) en los cuales el coseno es positivo.

Ahora,  $\sin \theta$  y  $\cos \theta$  son ambos positivos cuando  $\theta$  es un ángulo del primer cuadrante, mientras que  $\sin \theta = +$  y  $\cos \theta = -$  cuando  $\theta$  es un ángulo del segundo cuadrante. Así,

0.4 Exprese cada una de las otras funciones de  $\theta$  en términos de  $\tan \theta$ .

$$\begin{aligned} \sec^2 \theta &= 1 + \tan^2 \theta & \text{y} & \quad \sec \theta = \pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta} & \quad \cos \theta &= \frac{1}{\sec \theta} = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\ \frac{\sin \theta}{\cos \theta} &= \tan \theta & \text{y} & \quad \sin \theta = \tan \theta \cos \theta = \tan \theta \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\tan \theta}{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}} \\ \csc \theta &= \frac{1}{\sin \theta} = \frac{\pm \sqrt{1 + \tan^2 \theta}}{\tan \theta} & \quad \cot \theta &= \frac{1}{\tan \theta} \end{aligned}$$

0.5 Utilizando las relaciones básicas, encuentre los valores de las funciones de  $\theta$ , dado  $\sin \theta = 3/5$ .

$$\text{De } \cos^2 \theta = 1 - \sin^2 \theta, \cos \theta = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = \pm \sqrt{1 - (3/5)^2} = \pm \sqrt{16/25} = \pm 4/5.$$

Primer cuadrante		Segundo cuadrante	
$\sin \theta = 3/5$	$\cot \theta = 4/3$	$\sin \theta = 3/5$	$\cot \theta = -4/3$
$\cos \theta = 4/5$	$\sec \theta = 5/4$	$\cos \theta = -4/5$	$\sec \theta = -5/4$
$\tan \theta = \frac{3/5}{4/5} = 3/4$	$\csc \theta = 5/3$	$\tan \theta = -3/4$	$\csc \theta = 5/3$

0.6 Usando las relaciones básicas, encuentre los valores de las funciones de  $\theta$ , dado  $\tan \theta = -5/12$ .

Como  $\tan \theta = -$   $\theta$  está en el segundo o en el cuarto cuadrante.

Segundo cuadrante	Cuarto cuadrante
$\tan \theta = -5/12$	$\tan \theta = -5/12$
$\cot \theta = \sqrt{1 + \tan^2 \theta} = -12/5$	$\cot \theta = -12/5$
$\sec \theta = -\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = -13/12$	$\sec \theta = 13/12$
$\cos \theta = 1/\sec \theta = -12/13$	$\cos \theta = 12/13$
$\csc \theta = \sqrt{1 + \cot^2 \theta} = 13/5$	$\csc \theta = -13/5$
$\sin \theta = 1/\csc \theta = 5/13$	$\sin \theta = -5/13$

0.7 Realice las operaciones indicadas.

(a)  $(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta) = \sin^2 \theta - \cos^2 \theta$

(b)  $(\sin A + \cos A)^2 = \sin^2 A + 2 \sin A \cos A + \cos^2 A$

$$(c) (\sin x + \cos y)(\sin y - \cos x) = \sin x \sin y - \sin x \cos x + \sin y \cos y - \cos x \cos y$$

$$(d) (\tan^2 A - \cot A)^2 - \tan^4 A - 2 \tan^2 A \cot A + \cot^2 A$$

$$(e) 1 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta + \cos \theta}{\sin \theta}$$

$$(f) 1 - \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{2}{\cos^2 \theta} = \frac{\cos^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + 2}{\cos^2 \theta}$$

9.8 Factorice.

$$(a) \sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta = \sin \theta (\sin \theta - \cos \theta)$$

$$(b) \sin^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \sin^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)$$

$$(c) \sin^2 \theta + \sin \theta \sec \theta - \theta \sec^2 \theta = (\sin \theta + 3 \sec \theta)(\sin \theta - 2 \sec \theta)$$

$$(d) \sin^3 \theta \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \cos^3 \theta + \sin \theta \cos^2 \theta = \sin \theta \cos^2 \theta (\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + 1)$$

$$(e) \sin^4 \theta - \cos^4 \theta = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)(\sin \theta - \cos \theta)(\sin \theta + \cos \theta)$$

9.9 Simplifique cada una de las siguientes funciones.

$$(a) \sec \theta - \sec \theta \sin^2 \theta = \sec \theta (1 - \sin^2 \theta) = \sec \theta \cos^2 \theta = \frac{1}{\cos \theta} \cos^2 \theta = \cos \theta$$

$$(b) \sin \theta \sec \theta \cot \theta = \sin \theta \frac{1}{\cos \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta \cos \theta}{\cos \theta \sin \theta} = 1$$

$$(c) \sin^2 \theta (1 + \cot^2 \theta) = \sin^2 \theta \csc^2 \theta = \sin^2 \theta \frac{1}{\sin^2 \theta} = 1$$

$$- \cos^2 \theta \frac{1}{\cos^2 \theta} = -1$$

$$(d) \sin^2 \theta \sec^2 \theta - \sec^2 \theta = (\sin^2 \theta - 1) \sec^2 \theta = -\cos^2 \theta \sec^2 \theta (9 =$$

$$(e) (\sin \theta + \cos \theta)^2 + (\sin \theta - \cos \theta)^2 = \sin^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta + \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = 2(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = 2$$

$$(f) \tan^2 \theta \cos^2 \theta + \cot^2 \theta \sin^2 \theta = \frac{\sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \cos^2 \theta + \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \sin^2 \theta = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$

$$(g) \tan \theta + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} + \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta} = \frac{\sin \theta (1 + \sin \theta) + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)}$$

$$= \frac{\sin \theta + \sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{\sin \theta + 1}{\cos \theta (1 + \sin \theta)} = \frac{1}{\cos \theta} = \sec \theta$$

Verifique las siguientes identidades.

9.10  $\sec^2 \theta \csc^2 \theta = \sec^2 \theta + \csc^2 \theta$

$$\sec^2 \theta + \csc^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} = \frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta} = \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\cos^2 \theta} = \csc^2 \theta \sec^2 \theta$$

$$9.11 \quad \sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \tan^4 \theta + \tan^2 \theta$$

$$\tan^4 \theta + \tan^2 \theta = \tan^2 \theta (\tan^2 \theta + 1) = \tan^2 \theta \sec^2 \theta = (\sec^2 \theta - 1) \sec^2 \theta = \sec^4 \theta - \sec^2 \theta$$

o

$$\sec^4 \theta - \sec^2 \theta = \sec^2 \theta (\sec^2 \theta - 1) = \sec^2 \theta \tan^2 \theta = (1 + \tan^2 \theta) \tan^2 \theta = \tan^2 \theta + \tan^4 \theta$$

$$9.12 \quad 2 \csc x = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} + \frac{1 + \cos x}{\operatorname{sen} x} &= \frac{\operatorname{sen}^2 x + (1 + \cos x)^2}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} = \frac{\operatorname{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} \\ &= \frac{2 + 2 \cos x}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} = \frac{2(1 + \cos x)}{\operatorname{sen} x (1 + \cos x)} = \frac{2}{\operatorname{sen} x} = 2 \csc x \end{aligned}$$

$$9.13 \quad \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$$

$$\frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{\cos^2 x}{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{(1 - \operatorname{sen} x)(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x (1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{1 - \operatorname{sen} x}{\cos x}$$

$$9.14 \quad \frac{\sec A - \csc A}{\sec A + \csc A} = \frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$$

$$\frac{\sec A - \csc A}{\sec A + \csc A} = \frac{\frac{1}{\cos A} - \frac{1}{\operatorname{sen} A}}{\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\operatorname{sen} A}} = \frac{\frac{\operatorname{sen} A - \cos A}{\cos A \operatorname{sen} A}}{\frac{\operatorname{sen} A + \cos A}{\cos A \operatorname{sen} A}} = \frac{\operatorname{sen} A - \cos A}{\operatorname{sen} A + \cos A} = \frac{\tan A - 1}{\tan A + 1}$$

$$9.15 \quad \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\sec x}{1 + \cos x}$$

$$\begin{aligned} \frac{\tan x - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} &= \frac{\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - \operatorname{sen} x}{\operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x \operatorname{sen}^3 x} = \frac{\operatorname{sen} x (1 - \cos x)}{\cos x \operatorname{sen}^3 x} \\ &= \frac{1 - \cos x}{\cos x \operatorname{sen}^2 x} = \frac{1 - \cos x}{\cos x (1 - \cos^2 x)} = \frac{1}{\cos x (1 + \cos x)} = \frac{\sec x}{1 + \cos x} \end{aligned}$$

$$9.16 \quad \frac{\cos A \cot A - \operatorname{sen} A \tan A}{\csc A - \sec A} = 1 + \operatorname{sen} A \cos A$$

$$\frac{\cos A \cot A - \operatorname{sen} A \tan A}{\csc A - \sec A} = \frac{\cos A \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A} - \operatorname{sen} A \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}}{\frac{1}{\operatorname{sen} A} - \frac{1}{\cos A}} = \frac{\cos^3 A - \operatorname{sen}^3 A}{\cos A - \operatorname{sen} A}$$

$$= \frac{(\cos A - \operatorname{sen} A)(\cos^2 A + \cos A \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A)}{\cos A - \operatorname{sen} A} = \cos^2 A + \cos A \operatorname{sen} A + \operatorname{sen}^2 A = 1 + \cos A \operatorname{sen} A$$

$$9.17 \quad \frac{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta + 1}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1} = \frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta}$$

$$\frac{\operatorname{sen} \theta + 1}{\cos \theta} = \frac{(\operatorname{sen} \theta + 1)(\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)} = \frac{\operatorname{sen}^2 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta - 1}{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)}$$

$$= \frac{-\cos^2 \theta + \operatorname{sen} \theta \cos \theta + \cos \theta}{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)} = \frac{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta - \cos \theta + 1)}{\cos \theta (\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1)} = \frac{\operatorname{sen} \theta - \cos \theta + 1}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - 1}$$

$$9.18 \quad \frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \tan \theta + \sec \theta$$

$$\frac{\tan \theta + \sec \theta - 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\tan \theta + \sec \theta + \tan^2 \theta - \sec^2 \theta}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{(\tan \theta + \sec \theta)(1 + \tan \theta - \sec \theta)}{\tan \theta - \sec \theta + 1}$$

$$= \tan \theta + \sec \theta$$

o

$$\tan \theta + \sec \theta = (\tan \theta + \sec \theta) \frac{\tan \theta - \sec \theta + 1}{\tan \theta - \sec \theta + 1} = \frac{\tan^2 \theta - \sec^2 \theta + \tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta - \sec \theta + 1}$$

$$= \frac{-1 + \tan \theta + \sec \theta}{\tan \theta - \sec \theta + 1}$$

(NOTA: Cuando esta identidad se expresa en términos de senos de  $\theta$  y cosenos de  $\theta$ , se convierte en la obtenida en el Prob. 9.17.)

## Problemas propuestos

9.19 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ , dado que  $\operatorname{sen} \theta = 2/3$ .

$$\text{Resp. Cuadrante I: } 2/3, \sqrt{5}/3, 2/\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/5, \sqrt{5}/2, 3/\sqrt{5} = 3\sqrt{5}/5, 3/2$$

$$\text{Cuadrante II: } 2/3, -\sqrt{5}/3, -2/\sqrt{5} = -2\sqrt{5}/5, -\sqrt{5}/2, -3/\sqrt{5} = -3\sqrt{5}/5, 3/2$$

9.20 Determine los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ , sabiendo que  $\cos \theta = -5/6$ .

$$\text{Resp. Cuadrante II: } \sqrt{11}/6, -5/6, -\sqrt{11}/5, -5/\sqrt{11} = -5\sqrt{11}/11, -6/5, 6/\sqrt{11} = 6\sqrt{11}/11$$

$$\text{Cuadrante III: } -\sqrt{11}/6, -5/6, \sqrt{11}/5, 5/\sqrt{11} = 5\sqrt{11}/11, -6/5, -6/\sqrt{11} = -6\sqrt{11}/11$$

9.21 Encuentre los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ , dado que  $\tan \theta = 5/4$ .

$$\text{Resp. Cuadrante I: } 5/\sqrt{41} = 5\sqrt{41}/41, 4/\sqrt{41} = 4\sqrt{41}/41, 5/4, 4/5, \sqrt{41}/4, \sqrt{41}/5$$

$$\text{Cuadrante III: } -5/\sqrt{41} = -5\sqrt{41}/41, -4/\sqrt{41} = -4\sqrt{41}/41, 5/4, 4/5, -\sqrt{41}/4, -\sqrt{41}/5$$

9.22 Calcule los valores de las funciones trigonométricas de  $\theta$ , dado que  $\cot \theta = -\sqrt{3}$ .

Resp. Cuadrante II:  $1/2, \sqrt{3}/2, -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3 = -2/\sqrt{3} = -2\sqrt{3}/3, 2$

Cuadrante IV:  $-1/2, \sqrt{3}/2, -1/\sqrt{3} = -\sqrt{3}/3 = -3, 2/\sqrt{3} = 2\sqrt{3}/3, -2$

9.23 Deduzca el valor de  $\frac{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta - \tan \theta}{\operatorname{sec} \theta + \csc \theta - \cot \theta}$  cuando  $\tan \theta = -4/3$ .

Resp. Cuadrante II: 23/5; Cuadrante IV: 34/35

Verifique las siguientes identidades:

9.24  $\operatorname{sen} \theta \operatorname{sec} \theta = \tan \theta$

9.25  $(1 - \operatorname{sen}^2 A)(1 + \tan^2 A) = 1$

9.26  $(1 - \cos \theta)(1 + \sec \theta) \cot \theta = \operatorname{sen} \theta$

9.27  $\csc^2 x (1 - \cos^2 x) = 1$

9.28  $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\csc \theta} + \frac{\cos \theta}{\sec \theta} = 1$

9.29  $\frac{1 - 2 \cos^2 A}{\operatorname{sen} A \cos A} = \tan A - \cot A$

9.30  $\tan^2 x \csc^2 x \cot^2 x \operatorname{sen}^2 x = 1$

9.31  $\operatorname{sen} A \cos A (\tan A + \cot A) = 1$

9.32  $1 - \frac{\cos^2 \theta}{1 + \operatorname{sen} \theta} = \operatorname{sen} \theta$

9.33  $\frac{1}{\operatorname{sec} \theta + \tan \theta} = \operatorname{sec} \theta - \tan \theta$

9.34  $\frac{1}{1 - \operatorname{sen} A} + \frac{1}{1 + \operatorname{sen} A} = 2 \sec^2 A$

9.35  $\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1} = (\cot x - \csc x)^2$

9.36  $\tan \theta - \csc \theta \sec \theta (1 - 2 \cos^2 \theta) = \cot \theta$

9.37  $\tan \theta - \csc \theta \sec \theta (1 - 2 \cos^2 \theta) = \cot \theta$

9.38  $\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

9.39  $\frac{\operatorname{sen} x + \tan x}{\cot x + \csc x} = \operatorname{sen} x \tan x$

9.40  $\frac{\operatorname{sen} \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = \frac{\sec \theta}{\sec \theta + \csc \theta}$

9.41  $\frac{\operatorname{sen}^3 \theta + \cos^3 \theta}{\operatorname{sen} \theta + \cos \theta} = 1 - \operatorname{sen} \theta \cos \theta$

9.42  $\cot \theta + \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} = \csc \theta$

9.43  $\frac{\operatorname{sen} \theta \cos \theta}{\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta} = \frac{\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$

9.44  $(\tan x + \tan y)(1 - \cot x \cot y) + (\cot x + \cot y)(1 - \tan x \tan y) = 0$

9.45  $(x \operatorname{sen} \theta - y \cos \theta)^2 + (x \cos \theta + y \operatorname{sen} \theta)^2 = x^2 + y^2$

9.46  $(2r \operatorname{sen} \theta \cos \theta)^2 + r^2(\cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta)^2 = r^2$

9.47  $(r \operatorname{sen} \theta \cos \Phi)^2 + (r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \Phi)^2 + (r \cos \theta)^2 = r^2$

# Funciones trigonométricas de dos ángulos

10

## 10.1 FORMULAS PARA LA SUMA

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tan}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tan} \alpha + \operatorname{tan} \beta}{1 - \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}$$

Para la demostración de estas fórmulas, véanse los Probs. 10.1 al 10.3.

## 10.2 FORMULAS PARA LA DIFERENCIA

$$\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{cos}(\alpha - \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$$

$$\operatorname{tan}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tan} \alpha - \operatorname{tan} \beta}{1 + \operatorname{tan} \alpha \operatorname{tan} \beta}$$

Para la demostración de estas fórmulas, véase el Prob. 10.4.

## 10.3 FORMULAS PARA EL DOBLE DE UN ÁNGULO

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\operatorname{cos} 2\alpha = \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 2 \operatorname{cos}^2 \alpha - 1$$

$$\operatorname{tan} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tan} \alpha}{1 - \operatorname{tan}^2 \alpha}$$

Para la demostración de estas fórmulas, véase el Prob. 10.14.

## 10.4 FORMULAS PARA UN SEMIÁNGULO

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

$$\operatorname{cos} \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

$$\operatorname{tan} \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} = \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

Para la demostración de estas fórmulas, véase el Prob. 10.15.

## Problemas resueltos

- 10.1 Demuestre (1)  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta$   
 y (2)  $\operatorname{cos}(\alpha + \beta) = \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$  cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos agudos positivos.  
 Sean  $\alpha$  y  $\beta$  ángulos agudos positivos, tales que  $\alpha + \beta < 90^\circ$  [Fig. 10-1 (a)] y  $\alpha + \beta > 90^\circ$  [Fig. 10-1(b)].

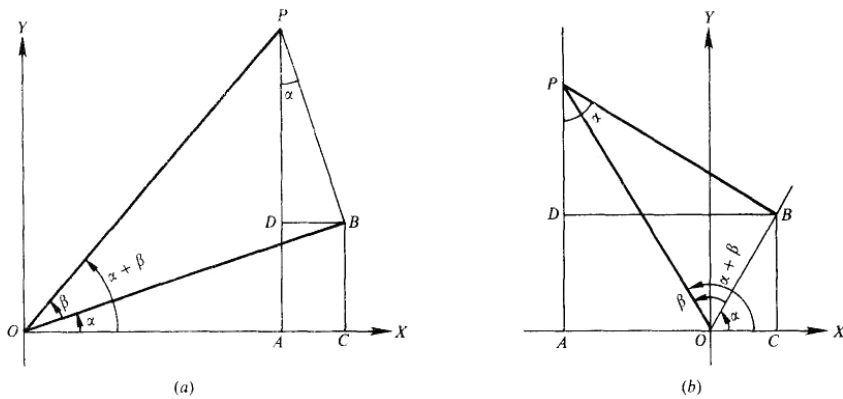


Fig. 10-1

Para construir estas figuras, coloque el ángulo «en posición estándar, y sitúe el ángulo  $\beta$  de tal forma que su vértice se encuentre en el origen  $O$  y su lado inicial coincida con el lado final del ángulo  $\alpha$ . Sea  $P$  cualquier punto en el lado terminal del ángulo ( $\alpha + \beta$ ). Dibuje la recta  $PA$  perpendicular a  $OX$ ,  $PB$  perpendicular al lado terminal de  $\alpha$ ,  $BC$  perpendicular a  $OX$ , y  $BD$  perpendicular a  $AP$ . Ahora  $\angle APB = \alpha$  porque sus lados correspondientes son perpendiculares ( $OA$  y  $AP$ ,  $OB$  y  $BP$ ). Entonces

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \frac{AP}{OP} = \frac{AD + DP}{OP} = \frac{CB + DP}{OP} = \frac{CB}{OP} + \frac{DP}{OP} = \frac{CB}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} + \frac{DP}{BP} \cdot \frac{BP}{OP} \\ &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \frac{OA}{OP} = \frac{OC - AC}{OP} = \frac{OC - DB}{OP} = \frac{OC}{OP} - \frac{DB}{OP} = \frac{OC}{OB} \cdot \frac{OB}{OP} - \frac{DB}{BP} \cdot \frac{BP}{OP} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

10.2 Demuestre que (1) y (2) del Prob. 10.1 son válidas, cuando  $\alpha$  y  $\beta$  son ángulos cualesquiera.

Primero, verifique las fórmulas para el caso en que  $\alpha = 0^\circ$  y  $\beta = 0^\circ$ . Puesto que,

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(0^\circ + 0^\circ) &= \operatorname{sen} 0^\circ \cos 0^\circ + \cos 0^\circ \operatorname{sen} 0^\circ = 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 0 = \operatorname{sen} 0^\circ \\ \cos(0^\circ + 0^\circ) &= \cos 0^\circ \cos 0^\circ - \operatorname{sen} 0^\circ \operatorname{sen} 0^\circ = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1 = \cos 0^\circ\end{aligned}$$

las fórmulas son válidas en este caso.

Ahora, se demostrará que si (1) y (2) son válidas para dos ángulos dados,  $\alpha$  y  $\beta$  las fórmulas también lo serán cuando, por ejemplo,  $\alpha$  se incremente  $90^\circ$ . Sean  $\alpha$  y  $\beta$  dos ángulos para los cuales se consideren válidas las ecuaciones (1) y (2), y tome en cuenta los siguientes postulados:

$$\begin{aligned}(a) \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta + 90^\circ) &= \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ) \cos \beta + \cos(\alpha + 90^\circ) \operatorname{sen} \beta \\ \text{y} \quad (b) \quad \cos(\alpha + \beta + 90^\circ) &= \cos(\alpha + 90^\circ) \cos \beta - \operatorname{sen}(\alpha + 90^\circ) \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

De las gráficas de la Sec. 8.3, puede notarse que  $\operatorname{sen}(\theta + 90^\circ) = \cos \theta$  y  $\cos(\theta + 90^\circ) = -\operatorname{sen} \theta$ . Por consiguiente,  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta + 90^\circ) = \cos(\alpha + \beta)$  y  $\cos(\alpha + \beta + 90^\circ) = -\operatorname{sen}(\alpha + \beta)$ . Entonces (a) y (b) se reducen a

$$\begin{aligned}(a') \quad \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + (-\operatorname{sen} \alpha) \operatorname{sen} \beta = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \text{y} \quad (b') \quad -\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= -\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta \\ \text{o} \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

las que, se asume, son relaciones válidas. Así, (a) y (b) son relaciones válidas.

Se puede proponer el mismo argumento para demostrar que si (1) y (2) son válidas para dos ángulos  $\alpha$ , y  $\beta$  también lo son cuando  $\beta$  se incremente  $90^\circ$ . Por lo tanto, las fórmulas son válidas cuando ambos,  $\alpha$  y  $\beta$ , se incrementan  $90^\circ$ . Ahora cualquier ángulo positivo puede expresarse como un múltiplo de  $90^\circ$  más  $\theta$ , donde  $\theta$  sería  $0^\circ$  o un ángulo agudo. De este modo, con un número finito de repeticiones del argumento, es posible probar que las fórmulas son válidas para cualquier par de ángulos positivos dados.

Se dejará al lector la demostración para el caso en que, en lugar de un incremento, hay una disminución de  $90^\circ$  y así, probar que (1) y (2) son válidas cuando un ángulo es positivo y el otro negativo, o bien, cuando ambos son negativos.

10.3 Corrobore  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ .

$$\begin{aligned}\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta} \\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} - \frac{\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta}{\cos \alpha \cos \beta}} = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

**10.4** Demuestre las fórmulas para la diferencia.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{sen} \alpha \cos(-\beta) + \cos \alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \operatorname{sen} \alpha (\cos \beta) + \cos \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{cos}(\alpha - \beta) &= \operatorname{cos}[\alpha + (-\beta)] = \operatorname{cos} \alpha \cos(-\beta) - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}(-\beta) \\ &= \operatorname{cos} \alpha (\cos \beta) - \operatorname{sen} \alpha (-\operatorname{sen} \beta) = \operatorname{cos} \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tan(\alpha - \beta) &= \tan[\alpha + (-\beta)] = \frac{\tan \alpha + \tan(-\beta)}{1 - \tan \alpha \tan(-\beta)} \\ &= \frac{\tan \alpha + (-\tan \beta)}{1 - \tan \alpha (-\tan \beta)} = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}\end{aligned}$$

**10.5** Encuentre los valores del seno, coseno y tangente de  $15^\circ$ , utilizando (a)  $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$  y (b)  $15^\circ = 60^\circ - 45^\circ$ . (a)

$$\operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos}(45^\circ - 30^\circ) = \operatorname{cos} 45^\circ \cos 30^\circ + \operatorname{sen} 45^\circ \operatorname{sen} 30^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} = \frac{1 - 1/\sqrt{3}}{1 + 1(1/\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$(b) \operatorname{sen} 15^\circ = \operatorname{sen}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ \cos 45^\circ - \operatorname{cos} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$$

$$= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\operatorname{cos} 15^\circ = \operatorname{cos}(60^\circ - 45^\circ) = \operatorname{cos} 60^\circ \cos 45^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} + 1)$$

$$= \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \tan(60^\circ - 45^\circ) = \frac{\tan 60^\circ - \tan 45^\circ}{1 + \tan 60^\circ \tan 45^\circ} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

**10.6** Determine los valores del seno, coseno y tangente para  $\pi/12$  radianes.

Donde  $\pi/3$  y  $\pi/4$  son ángulos especiales y  $\pi/3 - \pi/4 = \pi/12$ , pueden ser usados para encontrar los valores requeridos.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{\pi}{12} &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \cos \frac{\pi}{12} &= \cos \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{3} \cos \frac{\pi}{4} + \operatorname{sen} \frac{\pi}{3} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \tan \frac{\pi}{12} &= \tan \left( \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{3} - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \frac{\pi}{3} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}(1)} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 - 2\sqrt{3} + 1}{3 - 1} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

10.7 Halle los valores del seno, coseno y tangente de  $5\pi/12$  radianes.

Donde  $\pi/6$  y  $\pi/4$  son ángulos especiales y  $\pi/6 + \pi/4 = 5\pi/12$ , pueden ser usados para encontrar los valores requeridos.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \frac{5\pi}{12} &= \operatorname{sen} \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4} \\ \cos \frac{5\pi}{12} &= \cos \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \cos \frac{\pi}{6} \cos \frac{\pi}{4} - \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\ \tan \frac{5\pi}{12} &= \tan \left( \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{6} + \tan \frac{\pi}{4}}{1 - \tan \frac{\pi}{6} \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + 1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 1} = \frac{\sqrt{3} + 3}{3 - \sqrt{3}} \\ &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3 - \sqrt{3}} \cdot \frac{3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} = \frac{9 + 6\sqrt{3} + 3}{9 - 3} = \frac{12 + 6\sqrt{3}}{6} = 2 + \sqrt{3}\end{aligned}$$

10.8 Reescriba cada una de las siguientes expresiones como una sola función de un ángulo.

- (a)  $\operatorname{sen} 75^\circ \cos 28^\circ - \cos 75^\circ \operatorname{sen} 28^\circ$   
 (b)  $\cos 31^\circ \cos 48^\circ - \operatorname{sen} 31^\circ \operatorname{sen} 48^\circ$   
 (c)  $2 \operatorname{sen} 75^\circ \cos 75^\circ$   
 (d)  $1 - 2 \operatorname{sen}^2 37^\circ$

- Resp, (a)  $\operatorname{sen} 75^\circ \cos 28^\circ - \cos 75^\circ \operatorname{sen} 28^\circ = \operatorname{sen} (75^\circ - 28^\circ) = \operatorname{sen} 47^\circ$   
 (b)  $\cos 31^\circ \cos 48^\circ - \operatorname{sen} 31^\circ \operatorname{sen} 48^\circ = \cos (31^\circ + 48^\circ) = \cos 79^\circ$   
 (c)  $2 \operatorname{sen} 75^\circ \cos 75^\circ = \operatorname{sen} 2(75^\circ) = \operatorname{sen} 150^\circ$   
 (d)  $1 - 2 \operatorname{sen}^2 37^\circ = \cos 2(37^\circ) = \cos 74^\circ$

10.9 Reescriba cada una de las siguientes expresiones como una sola función de un ángulo.

$$(a) \frac{\tan 37^\circ + \tan 68^\circ}{1 - \tan 37^\circ \tan 68^\circ} \quad (d) \sqrt{\frac{1 + \cos 160^\circ}{2}}$$

$$(b) \frac{2 \tan 31^\circ}{1 - \tan^2 31^\circ} \quad (e) \frac{\sin 142^\circ}{1 + \cos 142^\circ}$$

$$(c) \sqrt{\frac{1 - \cos 84^\circ}{2}} \quad (f) \frac{1 - \cos 184^\circ}{\sin 184^\circ}$$

Resp. (a)  $\frac{\tan 37^\circ + \tan 68^\circ}{1 - \tan 37^\circ \tan 68^\circ} = \tan(37^\circ + 68^\circ) = \tan 105^\circ$

(b)  $\frac{2 \tan 31^\circ}{1 - \tan^2 31^\circ} = \tan 2(31^\circ) = \tan 62^\circ$

(c)  $\sqrt{\frac{1 - \cos 84^\circ}{2}} = \sin \frac{1}{2}(84^\circ) = \sin 42^\circ$

(d)  $\sqrt{\frac{1 + \cos 160^\circ}{2}} = \cos \frac{1}{2}(160^\circ) = \cos 80^\circ$

(e)  $\frac{\sin 142^\circ}{1 + \cos 142^\circ} = \tan \frac{1}{2}(142^\circ) = \tan 71^\circ$

(f)  $\frac{1 - \cos 184^\circ}{\sin 184^\circ} = \tan \frac{1}{2}(184^\circ) = \tan 92^\circ$

10.10 Compruebe que (a)  $\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = \sqrt{2} \sin \theta$  y (b)  $\sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = \cos \theta$ .

(a)  $\sin(45^\circ + \theta) - \sin(45^\circ - \theta) = (\sin 45^\circ \cos \theta + \cos 45^\circ \sin \theta) - (\sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta)$

$$= 2 \cos 45^\circ \sin \theta = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \theta = \sqrt{2} \sin \theta$$

(b)  $\sin(30^\circ + \theta) + \cos(60^\circ + \theta) = (\sin 30^\circ \cos \theta + \cos 30^\circ \sin \theta) + (\cos 60^\circ \cos \theta - \sin 60^\circ \sin \theta)$

$$= \left( \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) + \left( \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin \theta \right) = \cos \theta$$

10.11 Simplifique: (a)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$ , (b)  $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$ ,

(c)  $\frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha}$ ,

(d)  $(\sin A \cos \beta - \cos A \sin \beta)^2 + (\cos A \cos \beta + \sin A \sin \beta)^2$

(a)  $\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta) = (\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta) + (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$   
 $= 2 \sin \alpha \cos \beta$

(b)  $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) - (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)$   
 $= -2 \sin \alpha \sin \beta$

$$(c) \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan(\alpha + \beta) \tan \alpha} = \tan[(\alpha + \beta) - \alpha] = \tan \beta$$

$$(d) (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)^2 + (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 = \sin^2(\alpha - \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) = 1$$

10.12 Encuentre  $\sin(\alpha + \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$ ,  $\sin(\alpha - \beta)$  y  $\cos(\alpha - \beta)$  y determine el cuadrante al que pertenece  $(\alpha + \beta)$  y  $(\alpha - \beta)$ , dados los siguientes valores

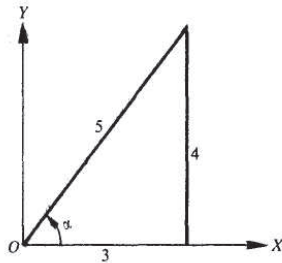
(a)  $\sin \alpha = 4/5$ ,  $\cos \beta = 5/13$ ;  $\alpha$  y  $\beta$  pertenecen al cuadrante I.

(b)  $\sin \alpha = 2/3$ ,  $\cos \beta = 3/4$ ;  $\alpha$  en el cuadrante II,  $\beta$  en el cuadrante IV.

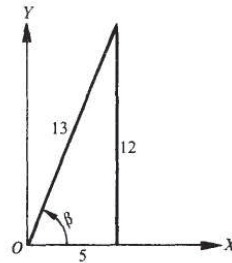
(a)  $\cos \alpha = 3/5$ , ver figura 10-2 (a), y  $\sin \beta = 12/13$ , ver figura 10-2(b).

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{56}{65} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{33}{65} \end{aligned} \right\} (\alpha + \beta) \text{ en el cuadrante II}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13} - \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = -\frac{16}{65} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{13} + \frac{4}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{63}{65} \end{aligned} \right\} (\alpha - \beta) \text{ en el cuadrante IV}$$



(a)



(b)

Fig.10-2

(b)  $\cos \alpha = -\sqrt{5}/3$ , ver Figura 10-3(a), y  $\sin \beta = -\sqrt{7}/4$ , ver Figura 10-3(b).

$$\left. \begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} + \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{6 + \sqrt{35}}{12} \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{5} + 2\sqrt{7}}{12} \end{aligned} \right\} (\alpha + \beta) \text{ en el cuadrante II}$$

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{6 - \sqrt{35}}{12} \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = \left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right) \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) = \frac{-3\sqrt{5} - 2\sqrt{7}}{12} \end{aligned} \right\} (\alpha - \beta) \text{ en el cuadrante II}$$

10.13 Demuestre que (a)  $\cot(\alpha + \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$  y (b)  $\cot(\alpha - \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$ .

$$(a) \cot(\alpha + \beta) = \frac{1}{\tan(\alpha + \beta)} = \frac{1 - \tan \alpha \tan \beta}{\tan \alpha + \tan \beta} = \frac{1 - \frac{1}{\cot \alpha \cot \beta}}{\frac{1}{\cot \alpha} + \frac{1}{\cot \beta}} = \frac{\cot \alpha \cot \beta - 1}{\cot \beta + \cot \alpha}$$

$$(b) \cot(\alpha - \beta) = \cot[\alpha + (-\beta)] = \frac{\cot \alpha \cot(-\beta) - 1}{\cot(-\beta) + \cot \alpha} = \frac{-\cot \alpha \cot \beta - 1}{-\cot \beta + \cot \alpha} = \frac{\cot \alpha \cot \beta + 1}{\cot \beta - \cot \alpha}$$

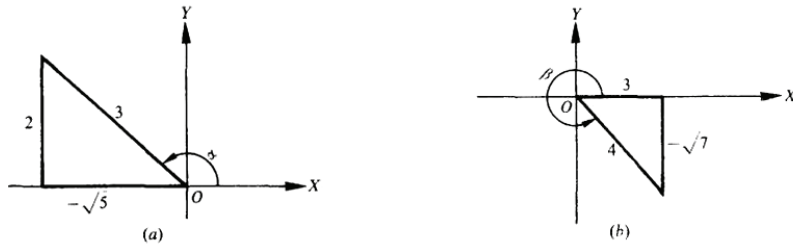


Fig.10-3

10.14 Compruebe las fórmulas del ángulo doble.

En  $\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$ ,  $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ , y  $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$ , poner  $\beta = \alpha$ . Entonces

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + \cos \alpha \operatorname{sen} \alpha = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$$

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos \alpha \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha \\ &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha - (1 - \operatorname{sen}^2 \alpha) - \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha = \cos^2 \alpha - \\ &\quad (1 - \cos^2 \alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\tan \alpha + \tan \alpha}{1 - \tan \alpha \tan \alpha} = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$$

10.15 Verifique las fórmulas de un semiángulo.

En  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \alpha$ , poner  $\alpha = 1/2 \theta$ . Entonces

10

$$\cos \theta = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta \quad \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{2} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$$

En  $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$ , poner  $\alpha = \frac{1}{2} \theta$ . Entonces

$$\cos \theta = 2 \cos^2 \frac{1}{2} \theta - 1 \quad \cos^2 \frac{1}{2} \theta = \frac{1 + \cos \theta}{2} \quad \text{y} \quad \cos \frac{1}{2} \theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$$

Finalmente, 
$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2} \theta &= \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta}{\cos \frac{1}{2} \theta} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 + \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 + \cos \theta)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos^2 \theta}{(1 + \cos \theta)^2}} = \pm \frac{\operatorname{sen} \theta}{1 + \cos \theta} \\ &= \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}} = \pm \sqrt{\frac{(1 - \cos \theta)^2}{1 - \cos^2 \theta}} = \pm \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} \end{aligned}$$

El símbolo + no se necesita, ya que  $\tan \frac{1}{2} \theta$  y  $\operatorname{sen} \theta$  siempre tienen el mismo signo (Prob. 7.8, Cap. 7) y  $1 - \cos \theta$  siempre es positivo.

10.16 Utilizando las fórmulas de un semiángulo, encuentre los valores exactos de (a)  $\operatorname{sen} 15^\circ$ , (b)  $\operatorname{sen} 292 \frac{1}{2}^\circ$ , y (c)  $\operatorname{sen} \frac{\pi}{8}$ .

$$(a) \operatorname{sen} 15^\circ = \sqrt{\frac{1 - \cos 30^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{3}/2}{2}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{3}}$$

$$(b) \operatorname{sen} 292 \frac{1}{2}^\circ = -\sqrt{\frac{1 - \cos 585^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \cos 225^\circ}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + 1/\sqrt{2}}{2}} = -\frac{1}{2} \sqrt{2 + \sqrt{2}}$$

$$(c) \operatorname{sen} \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1 - \cos \pi/4}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{2}/2}{2}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}} = \frac{1}{2} \sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

10.17 Encuentre los valores del seno, coseno y tangente de  $\frac{1}{2} \theta$ , dado que (a)  $\operatorname{sen} \theta = 5/13$ ,  $\theta$  en el cuadrante II y (b)  $\cos \theta = 3/7$ , con  $\theta$  en el cuadrante IV.

(a)  $\operatorname{sen} \theta = 5/13$ ,  $\cos \theta = -12/13$ , y  $\frac{1}{2} \theta$  en el cuadrante I, véase figura 10-4(a).

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 12/13}{2}} = \sqrt{\frac{25}{26}} = \frac{5\sqrt{26}}{26}$$

$$\cos \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 12/13}{2}} = \sqrt{\frac{1}{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$$

$$\tan \frac{1}{2} \theta = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} = \frac{1 + 12/13}{5/13} = 5$$

(b)  $\operatorname{sen} \theta = -2\sqrt{10}/7$ ,  $\cos \theta = 3/7$ , y  $\frac{1}{2} \theta$  en el cuadrante II, véase figura 10-4(b).

$$\operatorname{sen} \frac{1}{2} \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 - 3/7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{7}$$

$$\cos \frac{1}{2} \theta = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1 + 3/7}{2}} = -\frac{\sqrt{35}}{7}$$

$$\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{1 - \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{1 - 3/7}{-2\sqrt{10}/7} = -\frac{\sqrt{10}}{5}$$

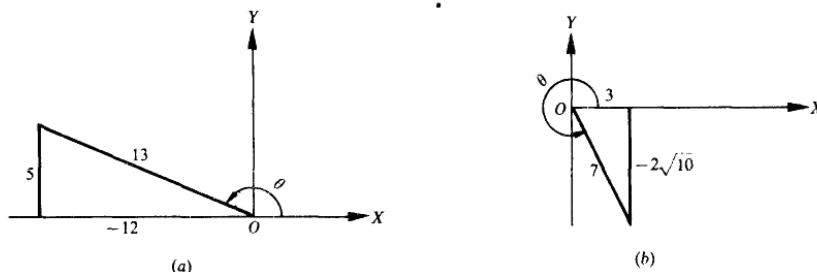


Fig.10-4

10.18 Demuestre que (a)  $\sin \theta = 2 \sin \frac{1}{2}\theta \cos \frac{1}{2}\theta$  (d)  $\cos 6\theta = 1 - 2 \sin^2 3\theta$

(b)  $\sin A = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos 2A}{2}}$  (e)  $\sin^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos \theta)$ ,  $\cos^2 \frac{1}{2}\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta)$ .

(c)  $\tan 4x = \frac{\sin 8x}{1 + \cos 8x}$

(a) Se obtiene de  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$  cuando  $\alpha = \frac{1}{2}\theta$ .

$$\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} \text{ cuando } \theta = 2A.$$

(b) Se consigue de  $\sin -1/2\theta =$

(c) Se logra de  $\tan \frac{1}{2}\theta = \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta}$  cuando  $\theta = 8x$ .

(d) Se obtiene de  $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$  cuando  $\alpha = 3\theta$ .

(e) Las fórmulas se logran por medio de la raíz de  $\sin \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}}$  y  $\cos \frac{1}{2}\theta = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}}$ .

10.19 Exprese (a)  $\sin 3\alpha$  en términos de  $\sin \alpha$  y (b)  $\cos 4\alpha$  en términos de  $\cos \alpha$ .

(a)  $\sin 3\alpha = \sin (2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha$   
 $= (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cos \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 2 \sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha$   
 $= 2 \sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) + (1 - 2 \sin^2 \alpha) \sin \alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$

(b)  $\cos 4\alpha = \cos 2(2\alpha) = 2 \cos^2 2\alpha - 1 = 2(2 \cos^2 \alpha - 1)^2 - 1 = 8 \cos^4 \alpha - 8 \cos^2 \alpha + 1$

10.20 Verifique que  $\cos 2x = \cos^4 x - \sin^4 x$ .

$$\cos^4 x - \sin^4 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x) = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$$

10.21 Verifique que  $1 - \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x = \frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sen}^3 x + \cos^3 x}{\operatorname{sen} x + \cos x} &= \frac{(\operatorname{sen} x + \cos x)(\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x \cos x + \cos^2 x)}{\operatorname{sen} x + \cos x} \\ &= 1 - \operatorname{sen} x \cos x = 1 - 1/2(\operatorname{sen} 2x) = 1 - 1/2 \operatorname{sen} 2x \end{aligned}$$

10.22 Compruebe  $\cos \theta = \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) + \operatorname{sen}(\theta + 60^\circ)$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\theta + 30^\circ) + \operatorname{sen}(\theta + 60^\circ) &= (\operatorname{sen} \theta \cos 30^\circ + \cos \theta \operatorname{sen} 30^\circ) + (\cos \theta \cos 60^\circ - \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} 60^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \theta + \frac{1}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos \theta - \frac{\sqrt{3}}{2} \operatorname{sen} \theta = \cos \theta \end{aligned}$$

10.23 Corrobore que  $\cos x = \frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x}$ .

$$\frac{1 - \tan^2 \frac{1}{2}x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2}x} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x}}{\sec^2 \frac{1}{2}x} = \frac{\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x}{\cos^2 \frac{1}{2}x}\right) \cos^2 \frac{1}{2}x}{\sec^2 \frac{1}{2}x \cos^2 \frac{1}{2}x} = \cos^2 \frac{1}{2}x - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = \cos x$$

10.24 Confirme que  $2 \tan 2x = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x}$ .

$$\begin{aligned} \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{\cos x - \operatorname{sen} x} - \frac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} &= \frac{(\cos x + \operatorname{sen} x)^2 - (\cos x - \operatorname{sen} x)^2}{(\cos x - \operatorname{sen} x)(\cos x + \operatorname{sen} x)} \\ &= \frac{(\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x) - (\cos^2 x - 2 \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen}^2 x)}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} \\ &= \frac{4 \operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x} = \frac{2 \operatorname{sen} 2x}{\cos 2x} = 2 \tan 2x \end{aligned}$$

10.25 Demuestre que  $\operatorname{sen}^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2A + \frac{1}{8} \cos 4A$ .

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^4 A &= (\operatorname{sen}^2 A)^2 = \left(\frac{1 - \cos 2A}{2}\right)^2 = \frac{1 - 2 \cos 2A + \cos^2 2A}{4} \\ &= \frac{1}{4} \left(1 - 2 \cos 2A + \frac{1 + \cos 4A}{2}\right) = \frac{3}{8} - \frac{1}{2} \cos 2A + \frac{1}{8} \cos 4A \end{aligned}$$

10.26 Verifique que  $\tan^6 x = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x - 1$ .

$$\begin{aligned}\tan^6 x &= \tan^4 x \tan^2 x = \tan^4 x (\sec^2 x - 1) = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \tan^2 x \\ &= \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x (\sec^2 x - 1) = \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \tan^2 x \\ &= \tan^4 x \sec^2 x - \tan^2 x \sec^2 x + \sec^2 x - 1\end{aligned}$$

10.27 Cuando  $A + B + C = 180^\circ$ , demuestre que  $\sen 2A + \sen 2B + \sen 2C = 4 \sen A \sen B \sen C$ .  
Considerando que  $C = 180^\circ - (A + B)$ ,

$$\begin{aligned}\sen 2A + \sen 2B + \sen 2C &= \sen 2A + \sen 2B + \sen [360^\circ - 2(A + B)] \\ &= \sen 2A + \sen 2B - \sen 2(A + B) \\ &= \sen 2A + \sen 2B - \sen 2A \cos 2B - \cos 2A \sen 2B \\ &= (\sen 2A) (1 - \cos 2B) + (\sen 2B) (1 - \cos 2A) \\ &= 2\sen 2A \sen^2 B + 2 \sen 2B \sen^2 A \\ &= 4 \sen A \cos A \sen^2 B + 4 \sen B \cos B \sen^2 A \\ &= 4 \sen A \sen B (\sen A \cos B + \cos A \sen B) \\ &= 4 \sen A \sen B \sen (A + B) \\ &= 4 \sen A \sen B \sen [180^\circ - (A + B)] \\ &= 4 \sen A \sen B \sen C\end{aligned}$$

10.28 Cuando  $A + B + C = 180^\circ$ , compruebe que  $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$ .  
Considerando que  $C = 180^\circ - (A + B)$ ,

$$\begin{aligned}\tan A + \tan B + \tan C &= \tan A + \tan B + \tan [180^\circ - (A + B)] = \tan A + \tan B - \tan (A + B) \\ &= \tan A + \tan B - \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = (\tan A + \tan B) \left( 1 - \frac{1}{1 - \tan A \tan B} \right) \\ &= (\tan A + \tan B) \left( -\frac{\tan A \tan B}{1 - \tan A \tan B} \right) = -\tan A \tan B \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= -\tan A \tan B \tan (A + B) = \tan A \tan B \tan [180^\circ - (A + B)] = \tan A \tan B \tan C\end{aligned}$$

### Problemas propuestos

10.29 Encuentre los valores del seno, coseno y tangente de (a)  $75^\circ$  y (b)  $255^\circ$ .

Resp. (a)  $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, 2 + \sqrt{3}$  (b)  $-\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, 2 + \sqrt{3}$

10.30 Halle los valores del seno, coseno y tangente de (a)  $7\pi/12$  y (b)  $11\pi/12$ .

$$\text{Resp. (a)} \quad \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, -2 - \sqrt{3}$$

$$(b) \quad \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}, \frac{-\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}, -2 + \sqrt{3}$$

10.31 Escriba nuevamente cada una de las siguientes expresiones como una sola función de un ángulo.

$$(a) \quad \text{sen } 173^\circ \cos 82^\circ + \cos 173^\circ \text{sen } 82^\circ \quad \text{Resp.} \quad \text{sen } 255^\circ$$

$$(b) \quad \cos 86^\circ \cos 73^\circ + \text{sen } 86^\circ \text{sen } 73^\circ \quad \text{Resp.} \quad \cos 13^\circ$$

$$(c) \quad \frac{\tan 87^\circ - \tan 21^\circ}{1 + \tan 87^\circ \tan 21^\circ} \quad \text{Resp.} \quad \tan 66^\circ$$

$$(d) \quad \text{sen } 87^\circ \cos 87^\circ \quad \text{Resp.} \quad 1/2 \text{sen } 174^\circ$$

$$(e) \quad 2 \cos^2 151^\circ - 1 \quad \text{Resp.} \quad \cos 302^\circ$$

$$(f) \quad 1 - 2\text{sen}^2 100^\circ \quad \text{Resp.} \quad \cos 200^\circ$$

$$(g) \quad \frac{\tan 42^\circ}{1 - \tan^2 42^\circ} \quad \text{Resp.} \quad \frac{1}{2} \tan 84^\circ$$

$$(h) \quad \cos^2 81^\circ - \text{sen}^2 81^\circ \quad \text{Resp.} \quad \cos 162^\circ$$

$$(i) \quad \frac{\text{sen } 56^\circ}{1 + \cos 56^\circ} \quad \text{Resp.} \quad \tan 28^\circ$$

$$(j) \quad \sqrt{\frac{1 + \cos 76^\circ}{2}} \quad \text{Resp.} \quad \cos 38^\circ$$

10.32 Encuentre los valores de  $\text{sen}(\alpha + \beta)$ ,  $\cos(\alpha + \beta)$  y de  $\tan(\alpha + \beta)$ , dado que:

$$(a) \quad \text{sen } \alpha = 3/5, \cos \beta = 5/13, \alpha \text{ y } \beta \text{ en el cuadrante I} \quad \text{Resp.} \quad 63/65, -16/65, -63/16$$

$$(b) \quad \text{sen } \alpha = 8/17, \tan \alpha = 5/12, \alpha \text{ y } \beta \text{ en el cuadrante I} \quad \text{Resp.} \quad 171/221, 140/221, 171/140$$

$$(c) \quad \cos \alpha = -12/13, \cot \beta = 24/7, \alpha \text{ en el cuadrante II y } \beta \text{ en el cuadrante III} \quad \text{Resp.} \quad -36/325, 323/325, -36/323$$

$$(d) \quad \text{sen } \alpha = 1/3, \text{sen } \beta = 2/5, \alpha \text{ en el cuadrante I, } \beta \text{ en el cuadrante II}$$

$$\text{Resp.} \quad \frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{15}, -\frac{2 + 2\sqrt{42}}{15}, -\frac{4\sqrt{2} - \sqrt{21}}{2 + 2\sqrt{42}} = \frac{-25\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{82}$$

10.33 Halle los valores de  $\text{sen}(\alpha - \beta)$ ,  $\cos(\alpha - \beta)$  y de  $\tan(\alpha - \beta)$ , dado que:

$$(a) \quad \text{sen } \alpha = 3/5, \text{sen } \beta = 5/13, \alpha \text{ y } \beta \text{ en el cuadrante I} \quad \text{Resp.} \quad 16/65, 63/65, 16/63$$

$$(b) \quad \text{sen } \alpha = 8/17, \tan \beta = 5/12, \alpha \text{ y } \beta \text{ en el cuadrante I} \quad \text{Resp.} \quad 21/221, 220/221, 21/220$$

$$(c) \quad \cos \alpha = -12/13, \cot \beta = 24/7, \alpha \text{ en el cuadrante II y } \beta \text{ en el cuadrante I} \quad \text{Resp.} \quad 204/325, -253/325, -204/253$$

(d)  $\text{sen } \alpha = 1/3$ ,  $\text{sen } \beta = 2/5$ ,  $\alpha$  en el cuadrante II,  $\beta$  en el cuadrante I

$$\text{Resp. } \frac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{15}, -\frac{2\sqrt{42} - 2}{15}, -\frac{4\sqrt{2} + \sqrt{21}}{2\sqrt{42} - 2} = -\frac{25\sqrt{2} + 9\sqrt{2}}{82}$$

10.34 Demuestre:

(a)  $\text{sen}(\alpha + \beta) - \text{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \text{sen } \beta$

(f)  $\frac{\text{sen}(x + y)}{\cos(x - y)} = \frac{\tan x + \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

(b)  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$

(g)  $\tan(45^\circ + \theta) = \frac{\cos \theta + \text{sen } \theta}{\cos \theta - \text{sen } \theta}$

(c)  $\tan(45^\circ - \theta) = \frac{1 - \tan \theta}{1 + \tan \theta}$

(h)  $\text{sen}(\alpha + \beta) \text{sen}(\alpha - \beta) = \text{sen}^2 \alpha - \text{sen}^2 \beta$

(d)  $\frac{\tan(\alpha + \beta)}{\cot(\alpha - \beta)} = \frac{\tan^2 \alpha - \tan^2 \beta}{1 - \tan^2 \alpha \tan^2 \beta}$

(e)  $\tan(\alpha + \beta + \gamma) = \tan[(\alpha + \beta) + \gamma] = \frac{\tan \alpha + \tan \beta + \tan \gamma - \tan \alpha \tan \beta \tan \gamma}{1 - \tan \alpha \tan \beta - \tan \beta \tan \gamma - \tan \gamma \tan \alpha}$

10.35 Si  $A$  y  $B$  son ángulos agudos, descubra el valor de  $A + B$  dado que:

(a)  $\tan A = 1/4$ ,  $\tan B = 3/5$  Indirecta:  $\tan(A + B) = 1$  Resp.  $45^\circ$

(b)  $\tan A = 5/3$ ,  $\tan B = 4$  Resp.  $135^\circ$

10.36 Si  $\tan(x + y) = 33$  y  $\tan x = 3$ , demuestre que  $\tan y = 0.3$ .

10.37 Encuentre los valores de  $\text{sen } 2\theta$ ,  $\cos 2\theta$ , y  $\tan 2\theta$ , dado que:

(a)  $\text{sen } \theta = 3/5$ ,  $\theta$  en el cuadrante I Resp.  $24/25, 7/25, 24/7$

(b)  $\text{sen } \theta = 3/5$ ,  $\theta$  en el cuadrante II Resp.  $-24/25, 7/25, -24/7$

(c)  $\text{sen } \theta = -1/2$ ,  $\theta$  en el cuadrante IV Resp.  $-\sqrt{3}/2, 1/2, -\sqrt{3}$

(d)  $\tan \theta = -1/5$ ,  $\theta$  en el cuadrante II Resp.  $-5/13, 12/13, -5/12$

(e)  $\tan \theta = u$ ,  $\theta$  en el cuadrante I Resp.  $\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}, \frac{2u}{1-u^2}$

10.38 Compruebe:

(a)  $\tan \theta \text{sen } 2\theta = 2 \text{sen}^2 \theta$

(e)  $\cos 2\theta = \frac{1 - \tan^2 \theta}{1 + \tan^2 \theta}$

(b)  $\cot \theta \text{sen } 2\theta = 1 + \cos 2\theta$

(f)  $\frac{1 + \cos 2\theta}{\text{sen } 2\theta} = \cot \theta$

(c)  $\frac{\text{sen}^3 x - \cos^3 x}{\text{sen } x - \cos x} = 1 + \frac{1}{2} \text{sen } 2x$

(g)  $\cos 3\theta = 4 \text{eos}^3 \theta - 3 \cos \theta$

(d)  $\frac{1 - \text{sen } 2A}{\cos 2A} = \frac{1 - \tan A}{1 + \tan A}$

(h)  $\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x$

10.39 Halle los valores del seno, coseno y tangente de

10

- (a)  $30^\circ$ , dado que  $\cos 60^\circ = 1/2$  *Resp.*  $1/2, \sqrt{3}/2, 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$   
 (b)  $105^\circ$ , dado que  $\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2$  *Resp.*  $1/2 \sqrt{2} + \sqrt{3}, -1/2 \sqrt{2} - \sqrt{3}, -2 + \sqrt{3}$   
 (c)  $1/2 \theta$ , dado que  $\sin \theta = 3/5$ , con  $\theta$  en el cuadrante I *Resp.*  $1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10, 3\sqrt{10} = 3\sqrt{10}/10, 1/3$   
 (d)  $\theta$ , dado que  $\cot 2\theta = 7/24$ ,  $2\theta$  en el cuadrante I *Resp.*  $3/5, 4/5, 3/4$   
 (e)  $\theta$ , dado que  $\cot 2\theta = -5/12$ ,  $2\theta$  en el cuadrante II *Resp.*  $3/\sqrt{13} = 3\sqrt{13}/13, 2/\sqrt{13} = 2\sqrt{13}/13, 3/2$

10.40 Descubra los valores del seno, coseno y tangente de

- (a)  $7\pi/8$ , dado que  $\cos 7\pi/4 = \sqrt{2}/2$  *Resp.*  $1/2 \sqrt{2} - \sqrt{2}, -1/2 \sqrt{2} + \sqrt{2}, -\sqrt{3} - 2\sqrt{2}$   
 (b)  $5\pi/8$ , dado que  $\sin 5\pi/4 = -\sqrt{2}/2$  *Resp.*  $1/2 \sqrt{2} + \sqrt{2}, -1/2 \sqrt{2} - \sqrt{2}, -\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

10.41 Confirme:

- (a)  $\cos x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 1/2 x$  (e)  $\frac{1 - \tan \frac{1}{2} \theta}{1 + \tan \frac{1}{2} \theta} = \frac{1 - \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{\cos \theta}{1 + \sin \theta}$   
 (b)  $\sin x = 2 \sin 1/2 x \cos 1/2 x$   
 (c)  $(\sin 1/2 \theta - \cos 1/2 \theta)^2 = 1 - \sin \theta$  (f)  $\frac{2 \tan \frac{1}{2} x}{1 + \tan^2 \frac{1}{2} x} = \sin x$   
 (d)  $\tan 1/2 \theta = \csc \theta - \cot \theta$

10.42 En el triángulo rectángulo ABC, en donde C es el ángulo recto, demuestre:

$$\sin 2A = \frac{2ab}{c^2} \quad \cos 2A = \frac{b^2 - a^2}{c^2} \quad \sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c-b}{2c}} \quad \cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{c+b}{2c}}$$

10.43 Compruebe (a)  $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$  y (b)  $\tan 50^\circ - \tan 40^\circ = 2 \tan 10^\circ$ .

10.44 Si  $A + B + C = 180^\circ$ , demuestre que:

- (a)  $\sin A + \sin B + \sin C = 4 \cos 1/2 A \cos 1/2 B \cos 1/2 C$   
 (b)  $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin 1/2 A \sin 1/2 B \sin 1/2 C$   
 (c)  $\sin^2 A + \sin^2 B - \sin^2 C = 2 \sin A \sin B \cos C$   
 (d)  $\tan 1/2 A \tan 1/2 B + \tan 1/2 B \tan 1/2 C + \tan 1/2 C \tan 1/2 A = 1$

# Fórmulas para la suma, la diferencia y el producto



## 11.1 PRODUCTOS DE SENOS Y COSENOS

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = 1/2[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta = 1/2[\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -1/2[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

Para la comprobación de estas fórmulas, véase Prob. 11.1.

## 11.2 SUMA Y DIFERENCIA DE SENOS Y COSENOS

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} 1/2(A + B) \cos 1/2(A - B)$$

$$\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos 1/2(A + B) \operatorname{sen} 1/2(A - B)$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos 1/2(A + B) \cos 1/2(A - B)$$

$$\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} 1/2(A + B) \operatorname{sen} 1/2(A - B)$$

Para la verificación de estas fórmulas, véase Prob. 11.2.

## Problemas resueltos

### 11.1 Deduzca las fórmulas de los productos.

$$\begin{aligned} \text{Para } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta + \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) + (\operatorname{sen} \alpha \cos \beta - \cos \alpha \operatorname{sen} \beta) \\ &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} \alpha \cos \beta = [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta)] / 2$$

$$\text{Para } \operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta,$$

$$\cos \alpha \operatorname{sen} \beta = 1/2 [\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta)]$$

11

Para  $\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = (\cos \alpha \cos \beta - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta) + (\cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta)$   
 $= 2 \cos \alpha \cos \beta$

$$\cos \alpha \cos \beta = 1/2[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

Para  $\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$

$$\operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = -1/2[\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)]$$

**11.2 Deduzca las fórmulas de la suma y la diferencia.**

Sea  $\alpha + \beta = A$  y  $\beta - \alpha = B$  de tal forma que  $\alpha = 1/2(A + B)$  y  $\beta = 1/2(A - B)$ . Entonces, (véase Problema 11.1)

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) + \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \beta$  entonces  $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2 \operatorname{sen} 1/2(A + B) \cos 1/2(A - B)$

$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) - \operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \operatorname{sen} \beta$  entonces  $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2 \cos 1/2(A + B) \operatorname{sen} 1/2(A - B)$

$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta$  entonces  $\cos A + \cos B = 2 \cos 1/2(A + B) \cos 1/2(A - B)$

$\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) = -2 \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$  entonces  $\cos A - \cos B = -2 \operatorname{sen} 1/2(A + B) \operatorname{sen} 1/2(A - B)$

**11.3 Exprese cada uno de los siguientes incisos como la suma o la diferencia:**

(a)  $\operatorname{sen} 40^\circ \cos 30^\circ$ , (b)  $\cos 110^\circ \operatorname{sen} 55^\circ$ , (c)  $\cos 50^\circ \cos 35^\circ$ , (d)  $\operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} 40^\circ$

(a)  $\operatorname{sen} 40^\circ \cos 30^\circ = 1/2[\operatorname{sen}(40^\circ + 30^\circ) + \operatorname{sen}(40^\circ - 30^\circ)] = 1/2(\operatorname{sen} 70^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ)$

(b)  $\cos 110^\circ \operatorname{sen} 55^\circ = 1/2[\operatorname{sen}(110^\circ + 55^\circ) - \operatorname{sen}(110^\circ - 55^\circ)] = 1/2(\operatorname{sen} 165^\circ - \operatorname{sen} 55^\circ)$

(c)  $\cos 50^\circ \cos 35^\circ = 1/2[\cos(50^\circ + 35^\circ) + \cos(50^\circ - 35^\circ)] = 1/2(\cos 85^\circ + \cos 15^\circ)$

(d)  $\operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} 40^\circ = -1/2[\cos(55^\circ + 40^\circ) - \cos(55^\circ - 40^\circ)] = -1/2(\cos 95^\circ - \cos 15^\circ)$

**11.4 Exprese cada uno de los siguientes incisos como un-producto:**

(a)  $\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ$ , (b)  $\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ$ , (c)  $\cos 55^\circ + \cos 25^\circ$ , (d)  $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ$

(a)  $\operatorname{sen} 50^\circ + \operatorname{sen} 40^\circ = 2 \operatorname{sen} 1/2(50^\circ + 40^\circ) \cos 1/2(50^\circ - 40^\circ) = 2 \operatorname{sen} 45^\circ \cos 5^\circ$

(b)  $\operatorname{sen} 70^\circ - \operatorname{sen} 20^\circ = 2 \cos 1/2(70^\circ + 20^\circ) \operatorname{sen} 1/2(70^\circ - 20^\circ) = 2 \cos 45^\circ \operatorname{sen} 25^\circ$

(c)  $\cos 55^\circ + \cos 25^\circ = 2 \cos 1/2(55^\circ + 25^\circ) \cos 1/2(55^\circ - 25^\circ) = 2 \cos 40^\circ \cos 15^\circ$

(d)  $\cos 35^\circ - \cos 75^\circ = -2 \operatorname{sen} 1/2(35^\circ + 75^\circ) \operatorname{sen} 1/2(35^\circ - 75^\circ) = -2 \operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} (-20^\circ)$   
 $= 2 \operatorname{sen} 55^\circ \operatorname{sen} 20^\circ$

11.5 Demuestre que  $\frac{\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \tan 3A$ .

$$\frac{\operatorname{sen} 4A + \operatorname{sen} 2A}{\cos 4A + \cos 2A} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(4A + 2A) \cos \frac{1}{2}(4A - 2A)}{2 \cos \frac{1}{2}(4A + 2A) \cos \frac{1}{2}(4A - 2A)} = \frac{\operatorname{sen} 3A}{\cos 3A} = \tan 3A$$

11.6 Pruebe que  $\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)}$ .

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A + B) \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A - B)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)} = \cot \frac{1}{2}(A + B) \tan \frac{1}{2}(A - B) = \frac{\tan \frac{1}{2}(A - B)}{\tan \frac{1}{2}(A + B)}$$

11.7 Compruebe que  $\cos^3 x \operatorname{sen}^2 x = 1/16 (2 \cos x - \cos 3x - \cos 5x)$ .

$$\begin{aligned} \cos^3 x \operatorname{sen}^2 x &= (\operatorname{sen} x \cos x)^2 \cos x = 1/4 \operatorname{sen}^2 2x \cos x = 1/4 (\operatorname{sen} 2x) (\operatorname{sen} 2x \cos x) \\ &= 1/4 (\operatorname{sen} 2x) [1/2(\operatorname{sen} 3x + \operatorname{sen} x)] = 1/8 (\operatorname{sen} 3x \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} x) \\ &= 1/8 \{-1/2(\cos 5x - \cos x) + [-1/2(\cos 3x - \cos x)]\} \\ &= 1/16 (2 \cos x - \cos 3x - \cos 5x) \end{aligned}$$

11.8 Corrobore que  $1 + \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x = 4 \cos x \cos 2x \cos 3x$ .

$$\begin{aligned} 1 + (\cos 2x + \cos 4x) + \cos 6x &= 1 + 2 \cos 3x \cos x + \cos 6x = (1 + \cos 6x) + 2 \cos 3x \cos x \\ &= 2 \cos^2 3x + 2 \cos 3x \cos x = 2 \cos 3x (\cos 3x + \cos x) \\ &= 2 \cos 3x (2 \cos 2x \cos x) = 4 \cos x \cos 2x \cos 3x \end{aligned}$$

11.9 Transforme  $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$  a la forma  $c \cos(x - \alpha)$ .

Puesto que  $c \cos(x - \alpha) = c(\cos x \cos \alpha + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} \alpha)$ , se considera  $c \cos \alpha = 4$  y  $c \operatorname{sen} \alpha = 3$ .  
Entonces,  $\cos \alpha = 4/c$  y  $\operatorname{sen} \alpha = 3/c$ . Dado que  $\operatorname{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ ,  $c = 5$  y  $\alpha = 0.6435$  rad. Así:  
Utilizando  $c = 5$ ,  $\cos \alpha = 4/5$ ,  $\operatorname{sen} \alpha = 3/5$  y  $\alpha = 0.6435$  rad. Así:

$$4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = 5 \cos(x - 0.6435).$$

Empleando  $c = -5$ ,  $\alpha = 3.7851$  rad y

$$4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = -5 \cos(x - 3.7851)$$

11.10 Encuentre los valores máximo y mínimo de  $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$  en el intervalo  $0 \leq x \leq 2\pi$ .

Del Prob. 11.9,  $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x = 5 \cos(x - 0.6435)$ .

Ahora, en el intervalo establecido,  $\cos \theta$  (alcanza un valor máximo de 1 cuando  $\theta = 0$  y su valor mínimo de -1, cuando  $\theta = \pi$ ). Así, el valor máximo de  $4 \cos x + 3 \operatorname{sen} x$  es 5 y ocurre cuando  $x - 0.6435 = 0$ , o cuando  $x = 0.6435$ , mientras que el valor mínimo es -5 y sucede cuando  $x - 0.6435 = \pi$ , o cuando  $x = 3.7851$ .

## Problemas propuestos

11.11 Exprese cada uno de los siguientes productos como la suma o la diferencia de senos y cosenos.

(a)  $\operatorname{sen} 35^\circ \cos 25^\circ = 1/2(\operatorname{sen} 60^\circ + \operatorname{sen} 10^\circ)$

(b)  $\operatorname{sen} 25^\circ \cos 75^\circ = 4(\operatorname{sen} 100^\circ - \operatorname{sen} 50^\circ)$

- (c)  $\cos 50^\circ \cos 70^\circ = 1/2(\cos 120^\circ + \cos 20^\circ)$   
 (d)  $\sin 130^\circ \sin 55^\circ = -1/2(\cos 185^\circ - \cos 75^\circ)$   
 (e)  $\sin 4x \cos 2x = 1/2(\sin 6x + \sin 2x)$   
 (f)  $\sin x/2 \cos 3x/2 = 1/2(\sin 2x - \sin x)$   
 (g)  $\cos 7x \cos 4x = 1/2(\cos 11x + \cos 3x)$   
 (h)  $\sin 5x \sin 4x = -1/2(\cos 9x - \cos x)$

11.12 Demuestre que

(a)  $2 \sin 45^\circ \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$  y  $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$   
 (b)  $2 \sin 82\frac{1}{2}^\circ \cos 37\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$  (c)  $2 \sin 127\frac{1}{2}^\circ \sin 97\frac{1}{2}^\circ = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

11.13 Exprese cada uno de los siguientes incisos como un producto,

- (a)  $\sin 50^\circ + \sin 20^\circ = 2 \sin 35^\circ \cos 15^\circ$  (e)  $\sin 4x + \sin 2x = 2 \sin 3x \cos x$   
 (b)  $\sin 75^\circ - \sin 35^\circ = 2 \cos 55^\circ \sin 20^\circ$  (f)  $\sin 7\theta - \sin 3\theta = 2 \cos 5\theta \sin 2\theta$   
 (c)  $\cos 65^\circ + \cos 15^\circ = 2 \cos 40^\circ \cos 25^\circ$  (g)  $\cos 6\theta + \cos 2\theta = 2 \cos 4\theta \cos 2\theta$   
 (d)  $\cos 80^\circ - \cos 70^\circ = -2 \sin 75^\circ \sin 5^\circ$  (h)  $\cos 3x/2 - \cos 9x/2 = 2 \sin 3x \sin 3x/2$

11.14 Demuestre que

(a)  $\sin 40^\circ + \sin 20^\circ = \cos 10^\circ$  (c)  $\cos 465^\circ + \cos 165^\circ = \sqrt{6}/2$   
 (b)  $\sin 105^\circ + \sin 15^\circ = \sqrt{6}/2$  (d)  $\frac{\sin 75^\circ - \sin 15^\circ}{\cos 75^\circ + \cos 15^\circ} = \sqrt{3}/3$   
 (e)

11.15 Compruebe:

(a)  $\frac{\sin A + \sin 3A}{\cos A + \cos 3A} = \tan 2A$  (c)  $\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$   
 (b)  $\frac{\sin 2A + \sin 4A}{\cos 2A + \cos 4A} = \tan 3A$  (d)  $\frac{\cos A + \cos B}{\cos A - \cos B} = -\cot \frac{1}{2}(A-B) \cot \frac{1}{2}(A+B)$   
 (e)  $\sin \theta + \sin 2\theta + \sin 3\theta = \sin 2\theta + (\sin \theta + \sin 3\theta) = \sin 2\theta (1 + 2 \cos \theta)$   
 (f)  $\cos \theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta = \cos 2\theta (1 + 2 \cos \theta)$   
 (g)  $\sin 2\theta + \sin 4\theta + \sin 6\theta = (\sin 2\theta + \sin 4\theta) + 2 \sin 3\theta \cos 3\theta$   
 $= 4 \cos \theta \cos 2\theta \sin 3\theta$   
 (h)  $\frac{\sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x}{\cos 3x + \cos 5x + \cos 7x + \cos 9x} = \frac{(\sin 3x + \sin 9x) + (\sin 5x + \sin 7x)}{(\cos 3x + \cos 9x) + (\cos 5x + \cos 7x)} = \tan 6x$

11.16 Pruebe que:

$$(a) \cos 130^\circ + \cos 110^\circ + \cos 10^\circ = 0 \quad (b) \cos 220^\circ + \cos 100^\circ + \cos 20^\circ = 0$$

11.17 Confirme que:

$$(a) \cos^2 \theta \sin^3 \theta = 1/16(2 \sin \theta + \sin 3\theta - \sin 5\theta)$$

$$(b) \cos^2 \theta \sin^4 \theta = 1/32(2 - \cos 2\theta - 2 \cos 4\theta + \cos 6\theta)$$

$$(c) \cos^5 \theta = 1/16(10 \cos \theta + 5 \cos 3\theta + \cos 5\theta)$$

$$(d) \sin^5 \theta = 1/16(10 \sin \theta - 5 \sin 3\theta + \sin 5\theta)$$

11.18 Transforme (utilizando radianes):

$$(a) 4 \cos x + 3 \sin x \text{ a la forma } c \sin(x + \alpha) \quad \text{Resp. } 5 \sin(x + 0.9273)$$

$$(b) 4 \cos x + 3 \sin x \text{ a la forma } c \sin(x - \alpha) \quad \text{Resp. } 5 \sin(x - 5.3559)$$

$$(c) \sin x - \cos x \text{ a la forma } c \sin(x - \alpha) \quad \text{Resp. } \sqrt{2} \sin(x - \pi/4)$$

$$(d) 5 \cos 3t + 12 \sin 3t \text{ a la forma } c \cos(3t - \alpha) \quad \text{Resp. } 13 \cos(3t - 1.1760)$$

11.19 Encuentre los valores máximo y mínimo de cada una de las sumas del Prob. 11.18 y los valores de  $x$  o  $t$ , entre 0 y  $2\pi$ , en donde aquéllos se obtienen.

$$\text{Resp. (a) Máximo} = 5, \text{ cuando } x = 0.6435 \text{ (esto es, cuando } \sin x + 0.9273 = \sin x/2); \text{ mínimo} = -5 \text{ cuando } x = 3.7851.$$

$$(b) \text{ Igual que (a).}$$

$$(c) \text{ Máximo} = \sqrt{2}, \text{ cuando } x = 3\pi/4; \text{ mínimo} = -\sqrt{2}, \text{ cuando } x = 7\pi/4.$$

$$(d) \text{ Máximo} = 13 \text{ cuando } t = 0.3920; \text{ mínimo} = -13, \text{ cuando } t = 1.4392.$$

# Triángulos oblicuángulos

## 12.1 TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Un *triángulo oblicuángulo* es aquel que no contiene ángulo recto. En este tipo de triángulos, los tres ángulos son agudos, o bien, dos de sus ángulos son agudos y uno obtuso.

La convención para denotar los ángulos es  $A$ ,  $B$  y  $C$ , y las longitudes de sus correspondientes lados opuestos se llamarán  $a$ ,  $b$  y  $c$ . Véase Figura 12-1.

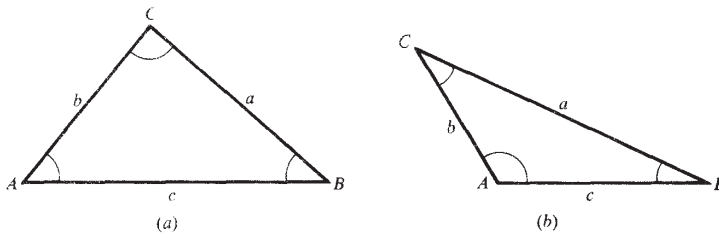


Fig. 12-1

## 12.2 LEY DE LOS SENOS

En cualquier triángulo  $ABC$ , la relación entre un lado y el seno del ángulo opuesto es constante; esto es,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C} \quad \text{o} \quad \frac{\text{sen } A}{a} = \frac{\text{sen } B}{b} = \frac{\text{sen } C}{c}$$

Para la demostración de la ley de los senos, véase el Prob.12.1.

## 12.3 LEY DE LOS COSENOS

En cualquier triángulo  $ABC$ , el cuadrado de cualquiera de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de estos lados por el coseno del ángulo comprendido entre ellos; esto es,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

Para la demostración de la ley de los cosenos, véase el Prob. 12.3.

## 12.4 SOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Cuando se conocen tres elementos de un triángulo, no todos los ángulos, se dice que el triángulo está determinado en forma única, excepto en un caso que se menciona más adelante. Los cinco casos de triángulos oblicuángulos son:

- ▲ Caso I: Dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos
- ▲ Caso II: Dados dos ángulos y el lado entre ellos
- ▲ Caso III: Dados dos lados y el lado opuesto a uno de ellos
- ▲ Caso IV: Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos
- ▲ Caso V: Dados los tres lados

Caso	Uso de la ley	Primer elemento que debe encontrarse
I	Senos	Lado opuesto del segundo ángulo dado
II	Senos	Tercer ángulo, después cualquiera de los lados restantes
III	Senos	Ángulo opuesto al segundo lado dado
IV	Cosenos	Tercer lado
V	Cosenos	Puede encontrarse cualquiera de los ángulos

En el caso III, no siempre se encuentra una solución única. Es posible que no exista solución para el ángulo, o bien que exista una solución para el ángulo, o dos soluciones —un ángulo y su complemento. Véase Ejemplo 12.3 y Prob. 12.2 para completar la explicación de este caso.

## 12.5 VERIFICACIÓN DE LAS SOLUCIONES DE TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS

Existen dos procedimientos disponibles para verificar la solución de un triángulo oblicuángulo. Se utilizan tanto las fórmulas de Mollweide, como las fórmulas de proyección, para verificar los resultados que se obtengan, independientemente del procedimiento que se utilice para la solución del triángulo.

En cualquier triángulo  $ABC$ , las fórmulas de Mollweide son:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C} \quad \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C}$$

conjuntamente con las que se obtienen con el cambio periódico de las letras; esto es,

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2}A} \quad \frac{b-c}{a} = \frac{\sin \frac{1}{2}(B-C)}{\cos \frac{1}{2}A}$$

$$\frac{c+a}{b} = \frac{\cos \frac{1}{2}(C-A)}{\sin \frac{1}{2}B} \quad \frac{c-a}{b} = \frac{\sin \frac{1}{2}(C-A)}{\cos \frac{1}{2}B}$$

y aquellas que se obtienen intercambiando dos letras (minúsculas y mayúsculas) en los numeradores de cada relación.

Para la deducción de estas fórmulas, véase el Prob. 12.4.

En cualquier triángulo  $ABC$ , las fórmulas de proyección son:

$$a = b \cos C + c \cos B$$

$$b = c \cos A + a \cos C$$

$$c = a \cos B + b \cos A$$

Para la demostración de estas fórmulas, véase el Prob. 12.5.

**CASO I.** Dados dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos

**EJEMPLO 12.1** Suponga que se tienen los valores de  $b$ ,  $B$  y  $C$ .

Para encontrar  $c$ , utilice  $\frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B}$ ; entonces  $c = \frac{b \sin C}{\sin B}$ .

Para encontrar  $A$ , utilice  $A = 180^\circ - (B + C)$ .

Para encontrar  $a$ , utilice  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ ; entonces  $a = \frac{b \sin A}{\sin B}$ .

Para comprobar, utilice una de las fórmulas de Mollweide o una de las fórmulas de proyección.

(Véase Prob. 12.6)

**CASO II.** Dados dos ángulos y el lado entre ellos

**EJEMPLO 12.2** Suponga que se tienen los valores de  $a$ ,  $S$  y  $C$ .

Para encontrar  $A$ , utilice  $A = 180^\circ - (B + C)$ .

Para encontrar  $b$ , utilice  $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ ; entonces  $b = \frac{a \sin B}{\sin A}$ .

Para encontrar  $c$ , utilice  $\frac{c}{\sin C} = \frac{a}{\sin A}$ ; entonces  $c = \frac{a \sin C}{\sin A}$ .

Para comprobar, utilice una de las fórmulas de Mollweide o una de las fórmulas de proyección.

(Véase Prob. 12.7.)

**CASO III.** Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

**EJEMPLO 12.3** Suponga que se tienen los valores de  $b$ ,  $c$  y  $S$ .

Si  $\sin C > 1$ , el ángulo  $C$  no está determinado.

Si  $\sin C = 1$ ,  $C = 90^\circ$  y se determina un triángulo rectángulo.

Si  $\sin C < 1$ , se pueden determinar dos ángulos, un ángulo agudo  $C$  y un ángulo obtuso  $C = 180^\circ - C$ . De esta forma, pueden determinarse de uno a dos triángulos.

Este caso se presenta geoméricamente en el Problema 12.2. Los resultados se pueden resumir de la siguiente forma:

Cuando el ángulo dado es *agudo*, podrá existir

- (a) Una solución si el lado opuesto al ángulo conocido es igual o mayor que el otro lado.  
 (b) No habrá solución, habrá una solución (triángulo rectángulo), o habrá dos soluciones si el lado opuesto al ángulo dado es menor al otro lado dado.

Cuando el ángulo dado es *obtuso*, existirá

- (c) Ninguna solución cuando el lado opuesto del ángulo dado sea menor o igual que el otro lado dado.  
 (d) Una solución, si el lado opuesto del ángulo dado es mayor que el otro lado dado.

#### EJEMPLO 12.4

- (1) Cuando  $b = 30$ ,  $c = 20$  y  $\alpha = 40^\circ$ , existe una solución dado que  $b > c$ .  
 (2) Cuando  $b = 20$ ,  $c = 30$  y  $\alpha = 40^\circ$ , no existe solución alguna, existe una solución o dos soluciones. El resultado particular se obtiene al calcular  $\sin C = \frac{c \sin \alpha}{b}$ .  
 (3) Cuando  $b = 30$ ,  $c = 20$  y  $\alpha = 140^\circ$ , existe una solución.  
 (4) Cuando  $b = 20$ ,  $c = 30$  y  $\alpha = 140^\circ$ , no existe solución alguna.

A éste se le conoce como caso ambiguo, se resuelve por la ley de los senos y puede comprobarse tanto con las fórmulas de Mollweide como por las de proyección.

(Véanse Probs. 12.11 a 12.13)

CASO IV. Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos

**EJEMPLO 12.5** Suponga que se tienen los valores de  $a$ ,  $b$  y  $C$ .

Para encontrar  $c$  utilice  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$ .

Para encontrar  $A$  utilice  $\sin A = \frac{a \sin C}{c}$ . Para encontrar  $B$  utilice  $\sin B = \frac{b \sin C}{c}$ .

Para comprobar, utilice  $A + B + C = 180^\circ$ .

(Véanse Probs. 12.15 y 12.16.)

CASO V. Dados los tres lados

**EJEMPLO 12.6** Dados  $a$ ,  $b$  y  $c$ , encuentre cada uno de los ángulos por la ley de los cosenos.

Para encontrar los ángulos, utilice  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ ,  $\cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca}$ , y  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ .

Para comprobar, utilice  $A + B + C = 180^\circ$ .

(Véanse Probs. 12.19 y 12.20.)

## 12.6 LEY DE LAS TANGENTES

La ley de los cosenos de la Sección 12.3, no se adapta bien a la utilización de logaritmos por computadora. En la SOLUCIÓN del Caso IV, puede utilizarse la ley de las tangentes.

$$\frac{a-b}{a+b} = \frac{\tan \frac{1}{2}(A-B)}{\tan \frac{1}{2}(A+B)} \quad \frac{b-c}{b+c} = \frac{\tan \frac{1}{2}(B-C)}{\tan \frac{1}{2}(B+C)} \quad \frac{c-a}{c+a} = \frac{\tan \frac{1}{2}(C-A)}{\tan \frac{1}{2}(C+A)}$$

para la demostración de esta ley, véase el Problema 12.26.

NOTA: Si, por ejemplo,  $b < a$  será más conveniente escribir la primera fórmula intercambiando las letras  $a$  y  $b$  (también  $A$  y  $B$ )

NOTA: Véase el Apéndice 3 para repasar las reglas de los logaritmos y los procedimientos de solución de problemas.)

**CASO VI.** Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos

El triángulo se resuelve utilizando la ley de las tangentes para encontrar los ángulos que se desconocen, y para el lado que falta se utiliza la ley de los senos. La solución se verifica utilizando las fórmulas de Mollweide.

**EJEMPLO 12.7** Dados  $c$ ,  $b$  y  $A$ , sea  $c > b$  Entonces, en la Figura 12-2

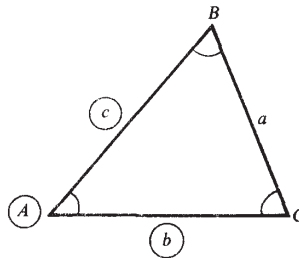


Fig. 12-2

## 12.7 FORMULAS DE LA FRACCIÓN MEDIA DE UN ÁNGULO

En cualquier triángulo  $ABC$ , véase Figura 12-2,

$$\tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} \quad \tan \frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b} \quad \tan \frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c}$$

donde  $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$  es el semiperímetro del triángulo y  $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Para la verificación de las fórmulas, véase Prob. 12.30.

**CASO V.** Dados los tres lados

El triángulo se resuelve utilizando las fórmulas para un semiángulo y se verifica utilizando las relaciones entre los ángulos.

(Véase Prob. 12.31.;

## Problemas resueltos

12.1 Deducir la ley de los senos.

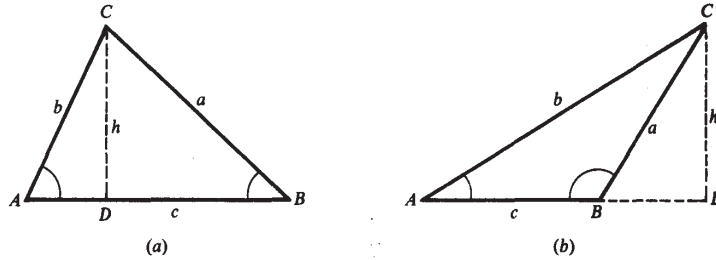


Fig. 12-3

Sea  $ABC$  cualquier triángulo oblicuángulo. En la Figura 12-3(a), los ángulos  $A$  y  $B$  son agudos, mientras que en la Figura 12-3(b), el ángulo  $B$  es obtuso. Dibuje a  $CD$  perpendicular a  $AB$  o a  $AB$  extendida y denote su longitud con la letra  $h$ .

En el triángulo rectángulo  $ACD$  de ambas figuras,  $h = b \operatorname{sen} A$ , mientras que en el triángulo rectángulo  $BCD$ ,  $h = a \operatorname{sen} B$  ya que en la Figura 12-3(b),  $h = a \operatorname{sen} \angle DBC = a \operatorname{sen} (180^\circ - B) = a \operatorname{sen} B$ . Así,

$$a \operatorname{sen} B = b \operatorname{sen} A \quad \text{o} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \quad \text{o} \quad \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Así, finalmente,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

12.2 Discútanse los distintos casos especiales que pueden presentarse cuando se dan dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.

Sean  $b$ ,  $c$  y  $B$  los elementos conocidos. Construya el ángulo dado  $B$  y trace el lado  $BA = c$ . Describa un arco con centro en  $A$  y radio  $b$  (el lado opuesto al ángulo conocido). En las Figuras 12-4(a) a la (e), se ilustran los casos especiales que pueden ocurrir cuando  $B$  es un ángulo agudo, en tanto que las Figuras 12-4(f) a la (g), ilustran los casos especiales cuando  $B$  es obtuso.

*El ángulo conocido  $B$  es agudo.*

Figura 12-4(a). Cuando  $b < AD = c \operatorname{sen} B$ , el arco no corta a  $BX$ , por lo que no se determina ningún triángulo.

Figura 12-4(b). Cuando  $b = AD$ , el arco es tangente a  $BX$  y se determina un triángulo rectángulo, con ángulo recto en  $C$ .

Figura 12-4(c). Cuando  $b > AD$  y  $b < c$ , el arco corta a  $BX$  en dos puntos  $C_1$  y  $C_2$  en el mismo lado de  $B$ . De esta forma, se determinan dos triángulos  $ABC_1$ , en donde  $C_1$  es un ángulo agudo; y  $ABC_2$ , donde  $C_2 = 180^\circ - C_1$ , es obtuso.

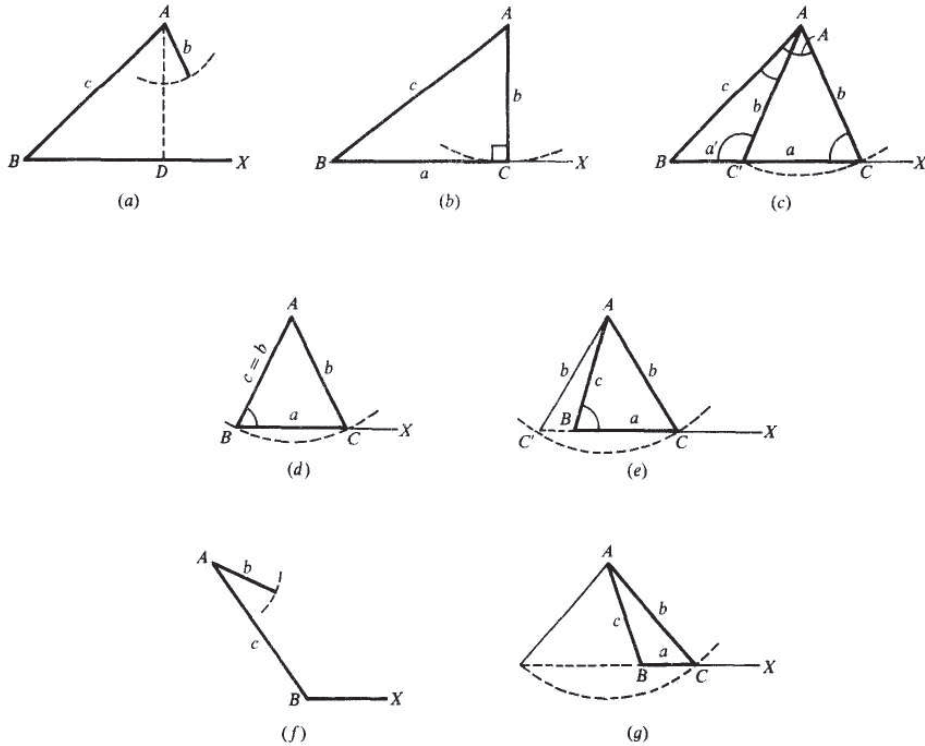


Fig. 12-4

Figura 12-4 (d). Cuando  $b > AD$  y  $b = c$ , el arco corta a  $BX$  en  $C$  y  $B$ . Se determina un triángulo isósceles. Figura 12-4 (e). Cuando  $b > c$ , el arco corta a  $BX$  en  $C$  y corta a la extensión de  $BX$  en  $C'$ . Como el triángulo  $ABC$  no contiene al ángulo dado  $B$ , sólo se determina el triángulo  $ABC$ .

El ángulo conocido  $B$  es obtuso.

Figura 12-4 (f). Cuando  $b < c$  o  $b = c$ , no se forma triángulo alguno.

Figura 12-4 (g). Cuando  $b > c$ , se puede formar únicamente un triángulo como en la Figura 12-4 (e).

12.3 Deducir la ley de los cosenos.

En cada triángulo rectángulo  $ACD$  de la Figura 12-5,  $b^2 = h^2 + (AD)^2$ .

En el triángulo rectángulo  $BCD$  de la Figura 12-5 (a),  $h = a \text{ sen } B$  y  $DB = a \text{ cos } B$

Entonces

$$AD = AB - DB = c - a \text{ cos } B$$

y

$$\begin{aligned} b^2 &= h^2 + (AD)^2 = a^2 \text{ sen}^2 B + c^2 - 2ca \text{ cos } B + a^2 \text{ cos}^2 B \\ &= a^2(\text{sen}^2 B + \text{cos}^2 B) - 2ca \text{ cos } B + c^2 + a^2 - 2ca \text{ cos } B \\ &= c^2 + a^2 - 2ca \text{ cos } B \end{aligned}$$

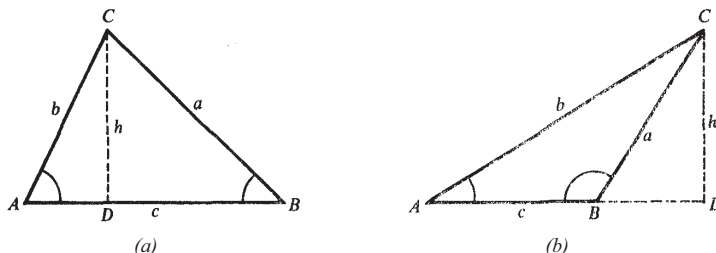


Fig. 12-5

$$h = a \sin \angle CBD = a \sin(180^\circ - B) = a \sin B$$

y

$$BD = a \cos \angle CBD = a \cos(180^\circ - B) = -a \cos B$$

$$\text{Entonces } AD = AB + BD = c - a \cos B \quad \text{y} \quad b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B$$

Las ecuaciones restantes se obtienen cambiando cíclicamente las letras.

12.4 Deduzca una parte de las fórmulas de Mollweide. Véase Figura 12-3.

$$\text{Por la ley de los senos, } \frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C} \quad \text{y} \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C}.$$

$$\text{Entonces } \frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(A+B) \cos \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\cos \frac{1}{2}(A-B)}{\sin \frac{1}{2}C},$$

donde  $\sin \frac{1}{2}(A+B) = \sin((180^\circ - C)) = \sin(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \cos \frac{1}{2}C$ .

$$\text{En forma similar, } \frac{a-b}{c} = \frac{\sin A - \sin B}{\sin C} = \frac{2 \cos \frac{1}{2}(A+B) \sin \frac{1}{2}(A-B)}{2 \sin \frac{1}{2}C \cos \frac{1}{2}C} = \frac{\sin \frac{1}{2}(A-B)}{\cos \frac{1}{2}C},$$

donde  $\cos \frac{1}{2}(A+B) = \cos(90^\circ - \frac{1}{2}C) = \sin \frac{1}{2}C$ .

12.5 Deduzca una de las fórmulas de proyección.

Refiérase a la Figura 12-3. En el triángulo rectángulo ACD de dicha Figura,  $AD = b \cos A$ .

En el triángulo rectángulo BCD de la Figura 12-3(a),  $DB = a \cos B$ . Así, en la Figura 12-3(a),

$$c = AB = AD + DB = b \cos A + a \cos B = a \cos B + b \cos A$$

En el triángulo rectángulo BCD de la Figura 12-3(b),  $BD = a \cos \angle DBC = a \cos(180^\circ - B) = -a \cos B$ . Así en la Figura 12-3(b),

$$c = AB = AD - BD = b \cos A - (-a \cos B) = a \cos B + b \cos A$$

(NOTA: Véase la Tabla de la Sección 4.7 para las reglas que se deben seguir sobre el número de cifras significativas de los lados y la precisión que debe tener el ángulo.)

## CASO I

12.6 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 62.5$ ,  $A = 112^\circ 20'$  y  $C = 42^\circ 10'$ . Véase Figura 12-6.

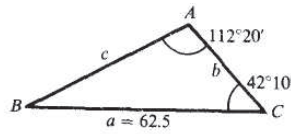


Fig. 12-6

$$\text{Para } B: B = 180^\circ - (C + A) = 180^\circ - 154^\circ 30' = 25^\circ 30'.$$

$$\text{Para } b: \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{62.5 \operatorname{sen} 25^\circ 30'}{\operatorname{sen} 112^\circ 20'} = \frac{62.5(0.4305)}{0.9250} = 29.1$$

( $\operatorname{sen} 112^\circ 20' = \operatorname{sen} (180^\circ - 112^\circ 20') = \operatorname{sen} 67^\circ 40'$ )

$$\text{Para } c: c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{62.5 \operatorname{sen} 42^\circ 10'}{\operatorname{sen} 112^\circ 20'} = \frac{62.5(0.6713)}{0.9250} = 45.4.$$

$$\text{Comprobación: } (c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(C - B)$$

$$(c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = 74.5 \operatorname{sen} 56^\circ 10' = 74.5(0.8307) = 61.89$$

$$\cos \frac{1}{2}(C - B) = 62.5 \cos 8^\circ 20' = 62.5(0.9894) = 61.84$$

$$\text{o } a = b \cos C + c \cos B = 29.1(0.7412) + 45.4(0.9026) = 62.55$$

Las partes que se buscan son  $b = 29.1$ ,  $c = 45.4$  y  $B = 25^\circ 30'$ .

## CASO II

12.7 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $c = 25$ ,  $A = 35^\circ$  y  $B = 68^\circ$ . Véase Figura 12-7.

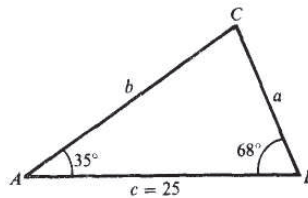


Fig. 12-7

$$\text{Para } C: C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 103^\circ = 77^\circ.$$

$$\text{Para } a: a = \frac{c \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} C} = \frac{25 \operatorname{sen} 35^\circ}{\operatorname{sen} 77^\circ} = \frac{25(0.5736)}{0.9744} = 15.$$

$$\text{Para } b: b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} = \frac{25 \operatorname{sen} 68^\circ}{\operatorname{sen} 77^\circ} = \frac{25(0.9272)}{0.9744} = 24.$$

Comprobando con la fórmula de Mollweide:

$$\frac{b+a}{c} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-A)}{\sin \frac{1}{2}C} \quad \text{o} \quad (b+a) \sin \frac{1}{2}C = c \cos \frac{1}{2}(B-A)$$

$$(b+a) \sin \frac{1}{2}C = 39 \sin 38^\circ 30' = 39(0.6225) = 24.3$$

$$c \cos \frac{1}{2}(B-A) = 25 \cos 16^\circ 30' = 25(0.9588) = 24.0$$

Comprobando con la fórmula de proyección:  $c = a \cos B + b \cos A = 15 \cos 68^\circ + 24 \cos 35^\circ$   
 $= 15(0.3746) + 24(0.8192) = 25.3$

Las partes que se buscan son  $a = 15$ ,  $b = 24$  y  $C = 77^\circ$ .

- 12.8 A y B son dos puntos localizados en las márgenes opuestas de un río. Desde A se traza una línea  $AC = 275$  m y se miden los ángulos  $CAB = 125^\circ 40'$  y  $ACB = 48^\circ 50'$ . Encuentre la longitud AB. En el triángulo ABC de la Figura 12-8 (a),  $B = 180^\circ - (C + A) = 5^\circ 30'$  y

$$AB = c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{275 \sin 48^\circ 50'}{\sin 5^\circ 30'} = \frac{275(0.7528)}{0.0958} = 2160\text{m}$$

- 12.9 Un barco navega hacia el este, cuando se observa una luz con una orientación  $N62^\circ 10' E$ . Después de que el barco ha navegado 2250 m, la luz se encuentra a  $N48^\circ 25' E$ . Si el curso se mantiene igual, ¿cuál será la menor distancia entre el barco y la luz? (Véase Prob. 5.5, Capítulo 5.)

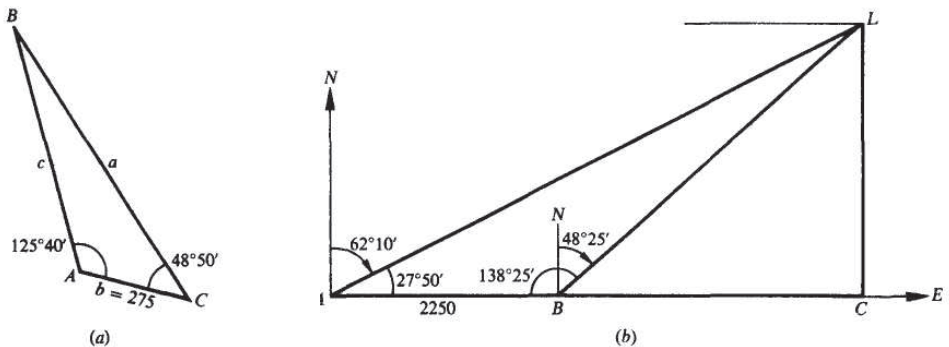


Fig. 12-8

Refiérase a la Figura 12-8 (b).

En el triángulo oblicuángulo ABL:  $AB = 2250$ ,  $LBAL = 27^\circ 50'$ , y  $LABL = 138^\circ 25'$ .

$$LALB = 180^\circ - (LBAL + LABL) = 13^\circ 45'$$

$$BL = \frac{AB \sin \angle BAL}{\sin \angle ALB} = \frac{2250 \sin 27^\circ 50'}{\sin 13^\circ 45'} = \frac{2250(0.4669)}{0.2377} = 4420.$$

En el triángulo rectángulo  $BLC$ :  $BL = 4420$  y  $LCBL = 90^\circ - 48^\circ 25' = 41^\circ 35'$ .

$$CL = BL \operatorname{sen} LCBL = 4420 \operatorname{sen} 41^\circ 35' = 4420(0.6637) = 2934 \text{ m.}$$

Como una solución alternativa del problema, encuentrese  $AL$  en el triángulo oblicuángulo  $ABL$  y después,  $CL$  en el triángulo rectángulo  $ACL$ .

- 12.10** Sobre un peñasco situado en la ribera de un río se encuentra una torre de 125 pies de altura. Desde lo alto de la torre, el ángulo de depresión de un punto situado en la orilla opuesta es  $28^\circ 40'$  y desde la base de la torre, el ángulo de depresión del mismo punto es  $18^\circ 20'$ . Calcule cuánto mide el ancho del río y la altura del peñasco.

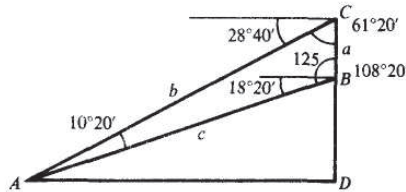


Fig. 12-9

En la Figura 12-9  $BC$  representa a la torre,  $DB$  representa al peñasco y  $A$  es el punto situado en la orilla opuesta del río.

En el triángulo  $ABC$ :  $LACB = 90^\circ - 28^\circ 40' = 61^\circ 20'$ .

$$LCBA = 90^\circ + 18^\circ 20' = 108^\circ 20'.$$

$$LBAC = 180^\circ - (LCBA + LACB) = 10^\circ 20'.$$

$$\frac{a \operatorname{sen} \angle ACB}{\operatorname{sen} \angle BAC} = \frac{125 \operatorname{sen} 61^\circ 20'}{\operatorname{sen} 10^\circ 20'} = \frac{125(0.8774)}{0.1794} = 611$$

**c =**

En el triángulo rectángulo  $ABD$ :

$$DB = c \operatorname{sen} 18^\circ 20' = 611(0.3145) = 192$$

$$AD = c \operatorname{cos} 18^\circ 20' = 611(0.9492) = 580$$

El río mide 580 pies de ancho y el peñasco mide 192 pies de altura.

### CASO III

- 12.11** Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $c = 628$ ,  $b = 480$  y  $C = 55^\circ 10'$ . Refiérase a la Figura 12-10 (a).

Dado que  $C$  es un ángulo agudo y  $c > b$ , se sabe que sólo existe una solución.

$$\text{Para } B: \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} C}{c} = \frac{480 \operatorname{sen} 55^\circ 10'}{628} = \frac{480(0.8208)}{628} = 0.6274 \text{ y } B = 38^\circ 50'.$$

(NOTA: Si  $\operatorname{sen} B = 0.6274$ , entonces  $B = 38^\circ 50'$  o  $B = 180^\circ - 38^\circ 50' = 141^\circ 10'$ , cualquiera podría ser el ángulo de un triángulo. Como  $A + B + C = 180^\circ$ , es claro que  $C + B < 180^\circ$ ; entonces,  $B = 141^\circ 10'$  no puede ser la solución del problema, ya que  $C + B = 55^\circ 10' + 141^\circ 10' = 196^\circ 20' > 180^\circ$ .

Cuando  $0 < \operatorname{sen} x < 1$ , es posible encontrar valores de ángulos  $x$  en los cuadrantes I y II que satisfagan el valor del  $\operatorname{sen} x$  y que puedan ser posibles valores para los ángulos de un triángulo. El ángulo del primer cuadrante siempre será una solución, pero el ángulo del segundo cuadrante sólo será una solución cuando al sumarlo con el ángulo dado, el resultado sea menor a  $180^\circ$ .)

Para  $A$ :  $A = 180^\circ - (B + C) = 86^\circ 0'$ .

$$\text{Para } a: a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{480 \operatorname{sen} 86^\circ 0'}{\operatorname{sen} 38^\circ 50'} = \frac{480(0.9976)}{0.6271} = 764.$$

Comprobación:  $(a + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = c \cos \frac{1}{2} (A - B)$

$$(a + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} C = 1244 \operatorname{sen} 27^\circ 35' = 1244(0.4630) = 576.0 \quad c \cos$$

$$\frac{1}{2} (A - B) = 628 \cos 23^\circ 35' = 628(0.9165) = 575.6$$

Si se prefiere, puede utilizarse una fórmula de proyección para hacer la comprobación.

Los resultados son  $B = 38^\circ 50'$ ,  $A = 86^\circ 0'$  y  $a = 764$

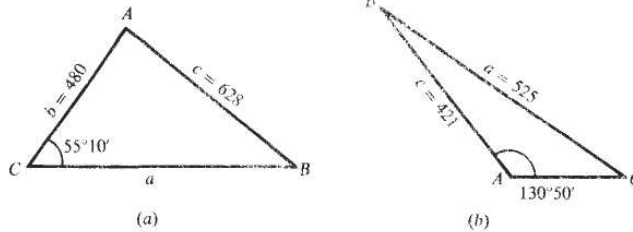


Fig. 12-10

- 12.12 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 525$ ,  $c = 421$  y  $A = 130^\circ 50'$ . Refiérase a la Figura 12-10(b). Dado que  $A$  es obtuso y  $a > c$ , existe una solución.

$$\text{Para } C: \operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a} = \frac{421 \operatorname{sen} 130^\circ 50'}{525} = \frac{421(0.7566)}{525} = 0.6067 \quad \text{y } C = 37^\circ 20'.$$

$$\text{Para } B: B = 180 - (C + A) = 11^\circ 50'.$$

$$\text{Para } b: b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} = \frac{525 \operatorname{sen} 11^\circ 50'}{\operatorname{sen} 130^\circ 50'} = \frac{525(0.2051)}{0.7566} = 142.$$

Comprobación:  $(c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = a \cos \frac{1}{2} (C - B)$

$$(c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2} A = 563 \operatorname{sen} 65^\circ 25' = 563(0.9094) = 512.0 \quad a \cos \frac{1}{2} (C -$$

$$B) = 525 \cos 12^\circ 45' = 525(0.9754) = 512.1$$

Los resultados

$$\text{son } C = 37^\circ 20' \quad B = 11^\circ 50' \quad \text{y } b = 142$$

- 12.13 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 31.5$ ,  $b = 51.8$  y  $A = 33^\circ 40'$ . Refiérase a la Figura 12-11(a). Dado que  $A$  es un ángulo agudo y  $a < b$ , existe la posibilidad de encontrar dos soluciones.

$$\text{Para } B: \operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{51.8 \operatorname{sen} 33^\circ 40'}{31.5} = \frac{51.8(0.5544)}{31.5} = 0.9117$$

Existen dos soluciones,  $B = 65^{\circ}40'$  y  $B' = 180^{\circ} - 65^{\circ}40' = 114^{\circ}20'$ .

$$\text{Para } C: C = 180^{\circ} - (A + B) = 80^{\circ}40'. \quad \text{Para } C': C' = 180^{\circ} - (A + B') = 32^{\circ}0'.$$

$$\begin{aligned} \text{Para } c: c &= \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{31.5 \operatorname{sen} 80^{\circ}40'}{\operatorname{sen} 33^{\circ}40'} \\ &= \frac{31.5(0.9868)}{0.5544} = 56.1. \end{aligned} \quad \begin{aligned} \text{Para } c': c' &= \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A} = \frac{31.5 \operatorname{sen} 32^{\circ}0'}{\operatorname{sen} 33^{\circ}40'} \\ &= \frac{31.5(0.5299)}{0.5544} = 30.1 \end{aligned}$$

$$\text{Comprobación: } (c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(C - B) \quad \text{Comprobación: } (b + c') \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(B' - C')$$

$$\begin{aligned} (c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A &= 107.9 \operatorname{sen} 16^{\circ}50' \\ &= 107.9(0.2896) \\ &= 31.25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cos \frac{1}{2}(C - B) &= 31.5 \cos 7^{\circ}30' \\ &= 31.5(0.9914) \\ &= 31.23 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (b + c') \operatorname{sen} \frac{1}{2}A &= 81.9 \operatorname{sen} 16^{\circ}50' \\ &= 81.9(0.2896) \\ &= 23.72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a \cos \frac{1}{2}(B' - C') &= 31.5 \cos 41^{\circ}10' \\ &= 31.5(0.7528) \\ &= 23.71 \end{aligned}$$

Los resultados son:

para el triángulo  $ABC$ :  $B = 65^{\circ}40'$ ,  $C = 80^{\circ}40'$  y  $c = 56.1$ .

para el triángulo  $ABC'$ :  $B' = 114^{\circ}20'$ ,  $C' = 32^{\circ}0'$  y  $c = 30.1$ .

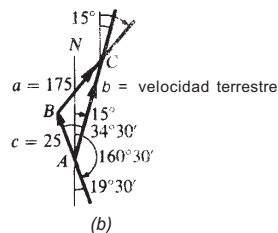
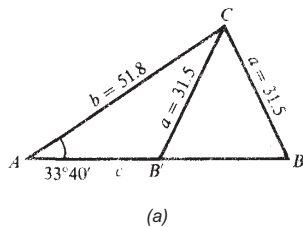


Fig. 12-11

- 12.14** Un piloto desea mantener el curso de su avión con una orientación de  $15^{\circ}0'$ , volando en contra del viento que sopla 25 mi/h con un ángulo de  $160^{\circ}30'$ . Encuentre la orientación y velocidad terrestre necesarias cuando la velocidad aérea es de 175 mi/h. Refiérase a la Figura 12-11(b).

Dado que  $\angle BAC$  es un ángulo agudo y  $a > c$ , existe una sola solución.

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} \angle BAC}{a} = \frac{25 \operatorname{sen} 34^{\circ}30'}{175} = \frac{25(0.5664)}{175} = 0.0809 \text{ y } \angle ACB = 4^{\circ}40'.$$

$$B = 180^{\circ} - (\angle BAC + \angle ACB) = 140^{\circ}50'. \quad b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \angle BAC} = \frac{175 \operatorname{sen} 140^{\circ}50'}{\operatorname{sen} 34^{\circ}30'} = \frac{175(0.6316)}{0.5664} = 195.$$

## CASO IV

12.15 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 132$ ,  $b = 224$  y  $C = 28^\circ 40'$ . Refiérase a la Figura 12-12(a).

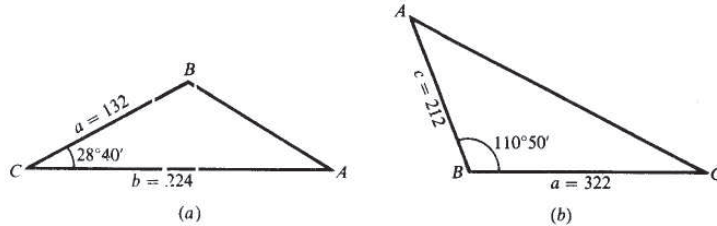


Fig. 12-12

$$\begin{aligned} \text{Para } r: \quad c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224) \cos 28^\circ 40' \\ &= (132)^2 + (224)^2 - 2(132)(224)(0.8774) = 15,714 \quad \text{y} \quad c = 125. \end{aligned}$$

$$\text{Para } A: \quad \sin A = \frac{a \sin C}{c} = \frac{132 \sin 28^\circ 40'}{125} = \frac{132(0.4797)}{125} = 0.5066 \quad \text{y} \quad A = 30^\circ 30'.$$

$$\text{Para } B: \quad \sin B = \frac{b \sin C}{c} = \frac{224 \sin 28^\circ 40'}{125} = \frac{224(0.4797)}{125} = 0.8596 \quad \text{y} \quad B = 120^\circ 40'.$$

(Dado que  $b > a$ ,  $A$  es agudo; entonces  $A + C < 90^\circ$ ,  $B > 90^\circ$ .)

Comprobación:  $A + B + C = 179^\circ 50'$ . Los resultados son  $A = 30^\circ 30'$ ,  $B = 120^\circ 40'$  y  $c = 125$ .

12.16 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 322$ ,  $c = 212$  y  $B = 110^\circ 50'$ . Refiérase a la Figura 12-12(b).

$$\begin{aligned} \text{Para } b: \quad b^2 &= c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad [\cos 110^\circ 50' = -\cos (180^\circ - 110^\circ 50') = -\cos 69^\circ 10'.] \\ &= (212)^2 + (322)^2 - 2(212)(322)(-0.3557) = 197,191 \quad \text{y} \quad b = 444. \end{aligned}$$

$$\text{Para } A: \quad \sin A = \frac{a \sin B}{b} = \frac{322 \sin 110^\circ 50'}{444} = \frac{322(0.9346)}{444} = 0.6778 \quad \text{y} \quad A = 42^\circ 40'.$$

$$\text{Para } C: \quad \sin C = \frac{c \sin B}{b} = \frac{212 \sin 110^\circ 50'}{444} = \frac{212(0.9346)}{444} = 0.4463 \quad \text{y} \quad C = 26^\circ 30'.$$

Comprobación:  $A + B + C = 180^\circ$ .

Los resultados son  $A = 42^\circ 40'$ ,  $C = 26^\circ 30'$  y  $b = 444$ .

12.17 Sobre un cuerpo actúan dos fuerzas de 17.5 y 22.5 lb. Si las direcciones de las fuerzas forman un ángulo de  $50^\circ 10'$  entre sí, encuentre la magnitud de su resultante y el ángulo que forma con la fuerza más grande.

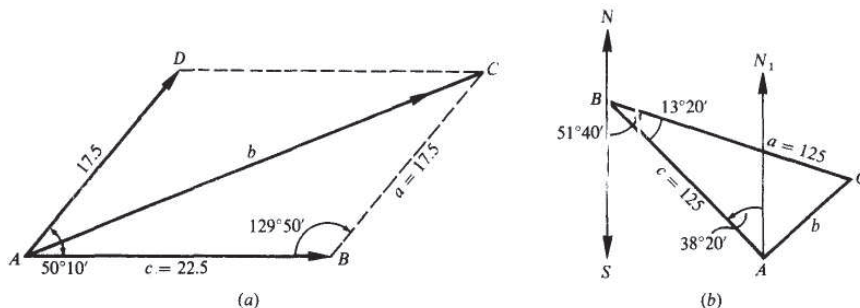


Fig. 12-13

Refiérase a la Figura 12-13(a).

En el paralelogramo  $ABCD$ ,  $\square DAC + \square B = \square BCD + \square D = 180^\circ$  y  $B = 180^\circ - 50^\circ 10' = 129^\circ 50'$ .  
 En el triángulo  $ABC$ ,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos B \quad [\cos 129^\circ 50' = -\cos (180^\circ - 129^\circ 50') = -\cos 50^\circ 10']$$

$$= (22.5)^2 + (17.5)^2 - 2(22.5)(17.5)(-0.6406) = 1317 \quad \text{y} \quad b = 36.3.$$

$$\text{sen } \square BAC = \frac{a \text{ sen } B}{b} = \frac{17.5 \text{ sen } 129^\circ 50'}{36.3} = \frac{17.5(0.7679)}{36.3} = 0.3702 \quad \text{y} \quad \square BAC = 21^\circ 40'.$$

La resultante es una fuerza de 36.3 lb y el ángulo con respecto a la fuerza mayor es de  $21^\circ 40'$ .

- 12.18** Un piloto vuela desde  $N 38^\circ 20' O$  y regresa. Por un error, el piloto vuela 125 Km en la dirección  $S 51^\circ 40' E$ , ¿a qué distancia quedó de  $A$  y en qué dirección debe volar para regresar al punto de partida?

Refiérase a la Figura 12-13(b).

Considere al punto de regreso como  $B$  y la posición final como  $C$ . En el triángulo  $ABC$ ,

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca \cos \square ABC$$

$$= (125)^2 + (125)^2 - 2(125)(125) \cos 13^\circ 20' =$$

$$2(125)^2(1 - 0.9730) = 843.7 \quad \text{y} \quad b = 29.0$$

$$\text{sen } \square BAC = \frac{a \text{ sen } \square ABC}{b} = \frac{125 \text{ sen } 13^\circ 20'}{29.0} = \frac{125(0.2306)}{29.0} = 0.9940 \quad \text{y} \quad \square BAC = 83^\circ 40'.$$

Dado que  $\square CAN = \square BAC - \square NAS = 45^\circ 20'$ , el piloto debe volar en dirección  $S 45^\circ 20' O$  una distancia de 29 km para llegar de  $C$  a  $A$ .

**CASO V**

- 12.19** Resuelva el triángulo  $ABC$ , dado que  $a = 25.2$ ,  $b = 37.8$  y  $c = 43.4$ . Refiérase a la Figura 12-14(a).

$$\text{Para } A: \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(37.8)^2 + (43.4)^2 - (25.2)^2}{2(37.8)(43.4)} = 0.8160 \quad \text{y} \quad A = 45^\circ 20'.$$

$$\text{Para B: } \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ca} = \frac{(43.4)^2 + (25.2)^2 - (37.8)^2}{2(43.4)(25.2)} = 0.4082. \text{ y } B = 60^\circ 10'.$$

$$\text{Para C: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(25.2)^2 + (37.8)^2 - (43.4)^2}{2(25.2)(37.8)} = 0.0947 \text{ y } C = 84^\circ 30'.$$

$$\text{Comprobación: } A + B + C = 180^\circ.$$

12.20 Resuelva el triángulo  $AEC$ , dado que  $a = 30.3$ ,  $b = 40.4$  y  $c = 62.6$ . Refiérase a la Figura -12-14(b)

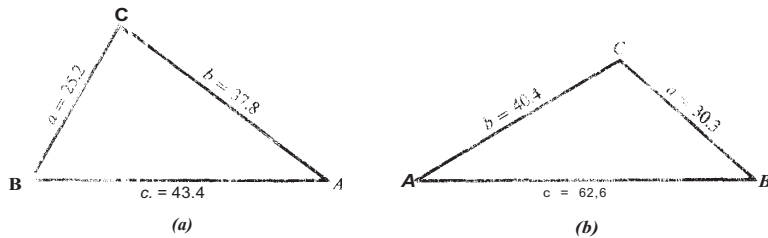


Fig. 12-14

$$\text{Para A: } \cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(40.4)^2 + (62.6)^2 - (30.3)^2}{2(40.4)(62.6)} = 0.9159 \text{ y } A = 23^\circ 40'.$$

$$\text{Para B: } \cos B = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{(62.6)^2 + (30.3)^2 - (40.4)^2}{2(62.6)(30.3)} = 0.8448 \text{ y } B = 32^\circ 20'.$$

$$\text{Para C: } \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{(30.3)^2 + (40.4)^2 - (62.6)^2}{2(30.3)(40.4)} = -0.5590 \text{ y } C = 124^\circ 0'.$$

$$\text{Comprobación: } A + B + C = 180^\circ.$$

12.21 Se requiere calcular las distancias de un punto C a los puntos A y B, pero no se pueden medir directamente. La línea CA se prolonga de A hasta el punto D una distancia de 175 m. La prolongación de la línea CB llega hasta un punto E a una distancia de 225 m con respecto a B, y se miden las distancias  $AB = 300$  m,  $DB = 326$  m y  $488$  m. Encuentre AC y BC. Véase Figura 12-15.

LAS PARTES partes de un triángulo ABC pueden encontrarse después de que se hayan calculado los valores de los ángulos  $\angle BAC$  y  $\angle ABC$ . El primer ángulo es el ángulo suplementario de  $\angle BAD$  y el segundo es el ángulo suplementario de la suma de  $\angle ABD$  y  $\angle DBE$ . En el triángulo ABC cuyos lados se conocen

$$\cos \angle BAD = \frac{(175)^2 + (300)^2 - (326)^2}{2(175)(300)} = 0.1367$$

$$\angle BAD = 82^\circ 10'$$

$$\cos \angle ABD = \frac{(300)^2 + (326)^2 - (488)^2}{2(300)(326)} = 0.8469$$

$$\angle ABD = 32^\circ 10'.$$

En el triángulo  $BDE$  cuyos lados se conocen,

$$\cos \angle DBE = \frac{(225)^2 + (326)^2 - (488)^2}{2(225)(326)} = -0.5538 \quad \text{y} \quad \angle DBE = 123^\circ 40'.$$

En el triángulo  $ABC$ :  $AB = 300$ ,  $\angle BAC = 180^\circ - \angle BAD = 97^\circ 50'$ ,  
 $\angle ABC = 180^\circ - (\angle ABD + \angle DBE) = 24^\circ 10'$ ,  
 $\angle ACB = 180^\circ - (\angle BAC + \angle ABC) = 58^\circ 0'$ .

y

entonces 
$$AC = \frac{AB \operatorname{sen} \angle ABC}{\operatorname{sen} \angle ACB} = \frac{300 \operatorname{sen} 24^\circ 10'}{\operatorname{sen} 58^\circ 10'} = \frac{300(0.4094)}{0.8480} = 145$$

y

$$BC = \frac{AB \operatorname{sen} \angle BAC}{\operatorname{sen} \angle ACB} = \frac{300 \operatorname{sen} 97^\circ 50'}{\operatorname{sen} 58^\circ 0'} = \frac{300(0.9907)}{0.8480} = 350.$$

Las distancias que se buscan son  $AC = 145$  m y  $BC = 350$  m.

(NOTA: El propósito de los Problemas 12.22 al 12.31 es la solución logarítmica de los triángulos oblicuángulos. Si no está utilizando logaritmos puede pasar directamente a los problemas propuestos.)

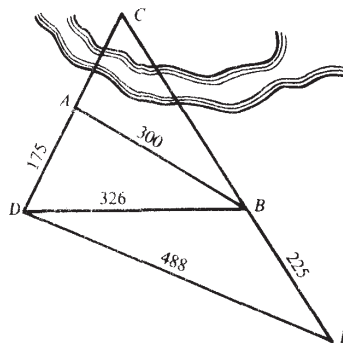


Fig. 12-15

CASO II

12.22 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dados  $a = 38.12, A = 46^\circ 32'$  y  $C = 79^\circ 17'$ . Véase Figura 12-16.  
 $B = 180^\circ - (A + C) = 54^\circ 11'$ .

$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$	$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$
$\log a = 1.5812$	$\log a = 1.5812$
$\log \operatorname{sen} C = 9.9924 - 10$	$\log \operatorname{sen} B = 9.9090 - 10$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0.1392$	$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = 0.1392$
$\log c = 1.7128$	$\log b = 1.6294$
$c = 51.62$	$b = 42.60$

Comprobación:

$$(c + b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \operatorname{cos} \frac{1}{2}(C - B)$$

$$c + b = 94.22, \frac{1}{2}A = 23^{\circ}16' \quad a = 38.12, \frac{1}{2}(C - B) = 12^{\circ}33'$$

$$\log(c + b) = 1.9741 \quad \log a = 1.5812$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = \frac{9.5966 - 10}{1.5707} \quad \log \operatorname{cos} \frac{1}{2}(C - B) = \frac{9.9895 - 10}{1.5707}$$

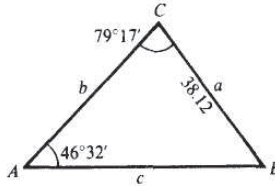
[NOTA:  $\operatorname{colog} \operatorname{sen} A = \log(1/\operatorname{sen} A) = -\log \operatorname{sen} A$ .]

Fig. 12-16

- 12.23 Resuelva el triángulo ABC, dados  $b = 282.7$ ,  $A = 111^{\circ}43'$ ,  $C = 24^{\circ}26'$ . Véase Figura 12-17.  
 $B = 180^{\circ} - (C + A) = 43^{\circ}51'$ .

$$a = \frac{b \operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} \quad c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B}$$

$$\log b = 2.4513 \quad \log b = 2.4513$$

$$\log \operatorname{sen} A = 9.9680 - 10 \quad \log \operatorname{sen} C = 9.6166 - 10$$

$$\operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0.1594 \quad \operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0.1594$$

$$\log a = 2.5787 \quad \log c = 2.2273$$

$$a = 379.1 \quad c = 168.8$$

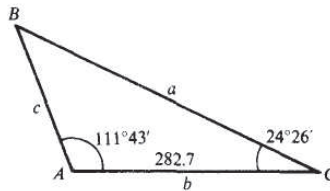


Fig. 12-17

Comprobación:

$$(a + c) \operatorname{sen} B = b \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - C) \quad a + c =$$

$$547.9, \frac{1}{2}B = 21^{\circ}56' \quad b = 282.7, \frac{1}{2}(A - C) = 43^{\circ}38'$$

$$\log(a + c) = 2.7387 \quad \log b = 2.4513$$

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2}B = \frac{9.5723 - 10}{2.3111} \quad \log \operatorname{cos} \frac{1}{2}(A - C) = \frac{9.8596 - 10}{2.3109}$$

12

CASO III

12.24 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dados  $b = 67.25$ ,  $c = 56.92$ , y  $B = 65^\circ 16'$ . Véase Figura 12-18.  
Dado que  $B$  es un ángulo agudo y  $b > c$ , existe una solución.

$$\text{sen } C = \frac{c \text{ sen } B}{b} \qquad \frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 1.7553 \quad \log \text{sen } B = 9.9582 - 10 \\ &= 8.1723 - 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \text{sen } C &= 9.8858 - 10 \quad C = 50^\circ 15' \\ A &= 180^\circ - (B + C) = 64^\circ 29' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a &= \log b = 1.8277 \quad \log \text{sen } A = 9.9554 - 10 \\ \text{sen } B &= 0.0418 \quad \log a = 1.8249 \\ a &= 66.82 \end{aligned}$$

Comprobación:

$$\begin{aligned} (b + c) \text{sen } \frac{1}{2}A &= a \cos \frac{1}{2}(B - C) \\ b + c &= 124.17, \frac{1}{2}A = 32^\circ 15' \quad a = 66.82, \frac{1}{2}(B - C) = 7^\circ 31' \\ \log(b + c) &= 2.0940 \quad \log a = 1.8249 \\ \log \text{sen } \frac{1}{2}A &= 9.7272 - 10 \quad \log \cos \frac{1}{2}(B - C) = 9.9963 - 10 \\ &L8212 \qquad \qquad \qquad 18212 \end{aligned}$$

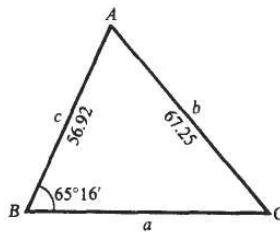


Fig. 12-18

12.25 Resolver el triángulo  $ABC$ , dados  $a = 123.2$ ,  $b = 155.4$ ,  $A = 16^\circ 34'$ . Véase Figura 12-19.

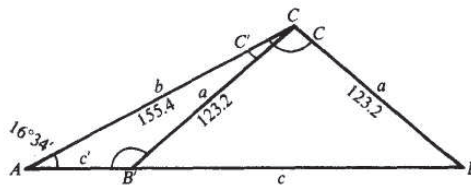


Fig. 12-19

Dado que  $A$  es agudo y  $a < b$ , pueden existir dos soluciones.

$$\begin{aligned} \log b &= 2.1914 \quad \log \operatorname{sen} A \\ &= 9.4550 - 10 \quad \operatorname{colog} a = \\ &\underline{7.9094 - 10} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} B &= 9.5558 - 10 \quad B = 21^\circ 4' \\ C &= 180^\circ - (A + B) = 142^\circ 22' \end{aligned}$$

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2.0906 \quad \log \\ \operatorname{sen} C &= 9.7858 - 10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= \underline{0.5450} \\ \log c &= 2.4214 \\ c &= 263.9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B' &= 180^\circ - B \approx 158^\circ 56' \\ C' &= 180^\circ - (A + B') = 4^\circ 30' \end{aligned}$$

$$c' = \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A}$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2.0906 \quad \log \\ \operatorname{sen} C' &= 8.8946 - 10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} A &= \underline{0.5450} \\ \log c' &= 1.5302 \\ c' &= 33.90 \end{aligned}$$

Comprobación:  $(b + a)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C = c\operatorname{cos}\frac{1}{2}(B - A)$  Comprobación:  $(b + c)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C = c'\operatorname{cos}\frac{1}{2}(B - A)$

$$\begin{aligned} b + a &= 278.6, \quad \frac{1}{2}C = 71^\circ 11' \\ c &= 263.9, \quad \frac{1}{2}(B - A) = 2^\circ 15' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(b + a) &= 2.4449 \\ \log \operatorname{sen}\frac{1}{2}C &= \underline{9.9761 - 10} \\ &2.4210 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 2.4214 \\ \log \operatorname{cos}\frac{1}{2}(B - A) &= \underline{9.9997 - 10} \\ &2.4211 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b + a &= 278.6, \quad \frac{1}{2}C' = 2^\circ 15' \\ d &= 33.9, \quad \frac{1}{2}(B' - A) = 71^\circ 11' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log(b + a) &= 2.4449 \\ \log \operatorname{sen}\frac{1}{2}C &= \underline{8.5939 - 10} \\ &1.0388 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log d &= 1.5302 \\ \log \operatorname{cos}\frac{1}{2}(B' - A) &= \underline{9.5086 - 10} \\ &1.0388 \end{aligned}$$

12.26 Deduzca la ley de las tangentes.

En cualquier triángulo  $ABC$ , se obtienen las fórmulas de Mollweide

$$\frac{a - b}{c} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{cos}\frac{1}{2}C} \quad \frac{a + b}{c} = \frac{\operatorname{cos}\frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}$$

y

Dividiendo el primero entre el segundo,

$$\frac{a - b}{c} \cdot \frac{c}{a + b} = \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{cos}\frac{1}{2}C} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}{\operatorname{cos}\frac{1}{2}(A - B)} \approx \frac{\tan\frac{1}{2}(A - B)}{\tan\frac{1}{2}C}$$

$$\text{Como } C = 180^\circ - (A + B), \frac{1}{2}C = 90^\circ - \frac{1}{2}(A + B) \text{ y } \tan\frac{1}{2}C = \cot\frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{\tan\frac{1}{2}(A + B)}$$

$$\text{Así, } \frac{a - b}{a + b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A - B)}{\tan\frac{1}{2}(A + B)}$$

Las otras dos formas pueden obtenerse en forma similar o con los cambios cíclicos de las letras en la ecuación anterior.

12

CASO IV

12.27 Resuelva el triángulo ABC, dados  $a = 2526$ ,  $c = 1388$ ,  $B = 54^{\circ}24'00$  Véase Figura 12-20.

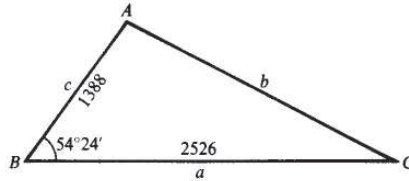


Fig. 12-20

$$A + C = 180^{\circ} - B = 125^{\circ}36'$$

$$\frac{1}{2}(A + C) = 62^{\circ}48'$$

$$a = \frac{2526 \cdot c}{1388} = 1388$$

$$a - c = \frac{1138}{a + c} = 3914$$

$$\tan \frac{1}{2}(A - C) = \frac{a - c}{a + c} \tan \frac{1}{2}(A + C)$$

$$\log(a - c) = 3.0561 \quad \text{colog}(a + c) = 6.4074 - 10$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(A - C) = 0.2891$$

$$\log \tan \frac{1}{2}(A - C) = 9.7526 - 10$$

$$\frac{1}{2}(A - C) = 29^{\circ}30'$$

$$\frac{1}{2}(A + C) = 62^{\circ}48'$$

$$A = 92^{\circ}18'$$

$$C = 33^{\circ}18'$$

$$b = \frac{c \sin B}{\sin C}$$

$$\log c = 3.1424 \quad \log \sin B = 9.9101 - 10$$

$$\text{colog} \sin C = 0.2604$$

$$\log b = 3.3129$$

$$b = 2055$$

Comprobación: se deja al estudiante la comprobación de la solución utilizando las fórmulas de Mollweide.

$$(a + c) \sin \frac{1}{2} B = b \cos \frac{1}{2} (A - C)$$

12.28 Resuelva el triángulo ABC, dados  $b = 472.1$ ,  $c = 607.4$ ,  $\angle A = 125^{\circ}14'$ . Véase Figura 12-21.

$$C + B = 180^{\circ} - A = 54^{\circ}46'$$

$$\frac{1}{2}(C + B) = 27^{\circ}23'$$

$$c = 607.4$$

$$b = 472.1$$

$$c - b = 135.3$$

$$c + b = 1079.5 = 1080$$

$$\tan \frac{1}{2}(C - B) = \frac{c - b}{c + b} \tan \frac{1}{2}(C + B)$$

$$a = \frac{b \sin A}{\sin B}$$

$$\begin{array}{ll}
 \log(c-b) = 2.1313 & \log b = 2.6740 \\
 \operatorname{colog}(c+b) = 6.9666 - 10 & \log \operatorname{sen} A = 9.9121 - 10 \\
 \log \tan \frac{1}{2}(C+B) = 9.7143 - 10 & \operatorname{colog} \operatorname{sen} B = 0.3964 \\
 \log \tan \frac{1}{2}(C-B) = 8.8122 - 10 & \hline \\
 \frac{1}{2}(C-B) = 3^{\circ}43' & \log a = 2.9825 \\
 \frac{1}{2}(C+B) = 27^{\circ}23' & s = 960.5 \\
 C = 31^{\circ}6' & \\
 B = 23^{\circ}40' & 
 \end{array}$$

Comprobación: Para comprobar la solución utilice la fórmula de Mollweide  $(c+b) \operatorname{sen} \frac{1}{2}A = a \cos \frac{1}{2}(C-S)$ .

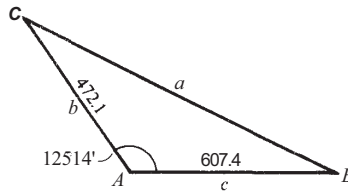


Fig. 12-21

- 12.29 Dos lados adyacentes de un paralelogramo miden 3473 y 4822 pies, respectivamente, y el ángulo entre ellos es de  $72^{\circ}14'$ . Encuentre la longitud de la diagonal más larga. Véase Figura 12-22.

En el triángulo  $ABC$ :  $B = 180^{\circ} - 72^{\circ}14' = 107^{\circ}46'$   
 $\angle ACB + \angle CAB = 72^{\circ}14'$  y  $\frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB) = 36^{\circ}7'$

$$\begin{array}{l}
 c = 4822 \\
 a = 3473 \\
 c-a = 1349 \\
 c+a = 8295
 \end{array}$$

$$\tan \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle CAB) = \frac{c-a}{c+a} \tan \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB)$$

$$b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} \angle ACB}$$

$$\begin{array}{l}
 \log(c-a) = 3.1300 \\
 \operatorname{colog}(c+a) = 6.0812 - 10 \\
 \log \tan \frac{1}{2}(\angle ACB + \angle CAB) = 9.8631 - 10 \\
 \log \tan \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle CAB) = 9.07460 - 10 \\
 \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle CAB) = 6^{\circ}46' \\
 \frac{1}{2}(\angle ACB - \angle CAB) = 36^{\circ}7' \\
 \angle ACB = 42^{\circ}53' \\
 \angle CAB = 29^{\circ}21'
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 \log c = 3.6832 \\
 \log \operatorname{sen} B = 9.9788 - 10 \\
 \operatorname{colog} \operatorname{sen} \angle ACB = 0.1671 \\
 \log b = 3.8291 \\
 b = 6747 \text{ ft}
 \end{array}$$

Comprobación:  $(c + a) \operatorname{sen} \frac{1}{2}B = b \cos \frac{1}{2}(\square ACB - \square CAB)$

$$\begin{array}{ll} \log(c + a) = 3.9188 & \log b = 3.8291 \\ \log \operatorname{sen} \frac{1}{2}B = \underline{9.9073 - 10} & \log \cos \frac{1}{2}(\square ACB - \square CAB) = \underline{9.9970 - 10} \\ \frac{10}{3.8261} & 3.8261 \end{array}$$

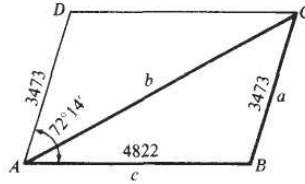


Fig. 12-22

12.30 Deduzca las fórmulas de un semiángulo.

Sea  $ABC$  un triángulo cualquiera. Entonces  $\tan \frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}}$  como  $\frac{1}{2}A$  es siempre agudo,

Por la ley de los cosenos,  $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$  por lo que

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b - c)^2}{2bc} = \frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc}$$

$$1 - \cos A = 1 - \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{y } 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c + a)(b + c - a)}{2bc}$$

Sea  $a + b + c = 2s$ ;  
entonces  $a - b + c = (a + b + c) - 2b = 2s - 2b = 2(s - b)$ ,  $a + b - c = 2(s - c)$ ,  $b + c - a = 2(s - a)$ , y

$$\begin{aligned} \tan \frac{1}{2}A &= \sqrt{\frac{1 - \cos A}{1 + \cos A}} = \sqrt{\frac{(a - b + c)(a + b - c)}{2bc} \cdot \frac{2bc}{(b + c + a)(b + c - a)}} = \sqrt{\frac{2(s - b) \cdot 2(s - c)}{2s \cdot 2(s - a)}} \\ &= \sqrt{\frac{(s - b)(s - c)}{s(s - a)}} = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s(s - a)^2}} = \frac{1}{s - a} \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}} \end{aligned}$$

Al final, sea:  $r = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}}$ ,  $\tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{s - a}$ . Las fórmulas restantes se pueden obtener al cambiar cíclicamente las letras.

### CASO V

12.31 Resuelva el triángulo  $ABC$ , dados  $a = 643.8$ ,  $b = 778.7$  y  $c = 912.3$ . Véase Figura 12-23.

$$\begin{array}{lll} s = \frac{1}{2}(a + b + c) & & r = \sqrt{\frac{(s - a)(s - b)(s - c)}{s}} \\ a = 643.8 & s - a = 523.6 & \log(s - a) = 2.7190 \\ b = 778.7 & s - b = 388.7 & \log(s - b) = 2.5896 \end{array}$$

TRIÁNGULOS OBUCUANGULOS

$$\begin{array}{lll}
 c = & s - c = & \log (s - c) = 2.4067 \\
 912.3 & & \\
 2s = & 255.1 s = & \operatorname{colog} s = 6.9328 - 10 \\
 23348 s & 1167.4 & 2 \log r = 4.6485 \\
 = 1167.4 & & \log r = 2.32425 = 2.3242
 \end{array}$$

$$\tan \frac{1}{2} A = \frac{r}{s-a} \qquad \frac{r}{s-b} \qquad \tan \frac{1}{2} C = \frac{r}{s-c}$$

$$\begin{array}{lll}
 \log r = 2.3242 & \log r = 2.3242 & \log r = 2.3242 \\
 \log (s-a) = 2.7190 & \log (s-b) = 2.5896 & \log (s-c) = 2.4067 \\
 \log \tan \frac{1}{2} A = 9.6052 - 10 & \log \tan \frac{1}{2} B = 9.7346 - 10 & \log \tan \frac{1}{2} C = 9.9175 - 10 \\
 \frac{1}{2} A = & \frac{1}{2} B = & \frac{1}{2} C = 39' \\
 21^{\circ} 57' \quad A = & 28^{\circ} 29' \quad B = & 35' \quad C = 79^{\circ} 10' \\
 43^{\circ} 54' & 56^{\circ} 58' &
 \end{array}$$

Comprobación:  $A + B + C \approx 180^{\circ} 2'$

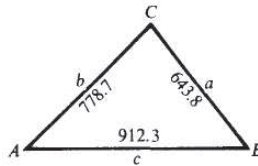


Fig. 12-23

Problemas propuestos

Considerando las partes conocidas de un triángulo ABC, establezca qué ley debe utilizar para resolverlos, la ley de los senos o la ley de los cosenos, y encuentre los valores deseados.

- |                                                                             |                                                 |
|-----------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (a) $a = 17, c = 14, y B = 30^{\circ}$ ; encontrar $b$ .                    | Resp. cosenos, 8.5                              |
| (b) $b = 17, a = 12, y A = 24^{\circ}$ ; encontrar $B$ .                    | Resp. senos, $35^{\circ}$ y $145^{\circ}$       |
| (c) $c = 189, a = 150, y C = 85.18''$ ; encontrar $A$ .                     | Resp. senos, $52^{\circ} 17'$                   |
| (d) $A = 24^{\circ} 18' - 8 = 56^{\circ} 48', y a = 32.3$ ; encontrar $b$ . | Resp. senos, 65.7                               |
| (e) $c = 0.5, b = 0.8, y A = 70^{\circ}$ ; encontrar $a$ .                  | Resp. log cosenos, 0.79                         |
| (f) $a = 315.2, b = 457.8, y A = 42.45^{\circ}$ ; encontrar $B$ .           | Resp. senos, $78.61^{\circ}$ y $101.39^{\circ}$ |
| (g) $a = 25.7, b = 38.7, y C = 10.8^{\circ}$ ; encontrar $c$ .              | Resp. cosenos, 14.3                             |
| (h) $a = 7.6, b = 4.8, y c = 7.1$ ; encontrar $B$ .                         | Resp. cosenos, $38^{\circ}$                     |

Resuelva cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos ABC, dados :

- |                                                   |                                                          |
|---------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $a = 125, A = 54^{\circ} 40', B = 65^{\circ} 10'$ | Resp. $b = 139, c = 133, C = 60^{\circ} 10'$             |
| $b = 321, A = 75^{\circ} 20', C = 38^{\circ} 30'$ | Resp. $a = 339, c = 218, B = 6610'$                      |
| $b = 215, c = 150, B = 42^{\circ} 40'$            | Resp. $a = 300, A = 109^{\circ} 10', C = 28^{\circ} 10'$ |
| $= 512, b = 426, A = 48^{\circ} 50'$              | Resp. $c = 680, B = 38^{\circ} 50', C = 92^{\circ} 20'$  |

- 12.37  $b = 50.4, c = 33.3, B = 118^{\circ}30'$   
*Resp.*  $a = 25.1, A = 26^{\circ}0', C = 35^{\circ}30'$
- 12.38  $b = 40.2, a = 31.5, B = 112^{\circ}20'$   
*Resp.*  $c = 15.7, A = 46^{\circ}30', C = 21^{\circ}10'$
- 12.39  $b = 51.5, a = 62.5, B = 40^{\circ}40'$   
*Resp.*  $c = 78.9, A = 52^{\circ}20', C = 87^{\circ}0'$   
 $c' = 16.0, A' = 127^{\circ}40', C = 11^{\circ}40'$
- 12.40  $a = 320, c = 475, A = 35^{\circ}20'$   
*Resp.*  $b = 552, B = 85^{\circ}30', C = 59^{\circ}10'$   
 $= 224, E = 23^{\circ}50', C = 120^{\circ}50'$
- 12.41  $b = 120, c = 270, A = 118^{\circ}40'$   
*Resp.*  $a = 344, B = 17^{\circ}50', C = 43^{\circ}30'$
- 12.42  $a = 24.5, b = 18.6, c = 26.4$   
*Resp.*  $A = 63^{\circ}10', B = 42^{\circ}40', C = 74^{\circ}10'$
- 12.43  $a = 6.34, b = 7.30, c = 9.98$   
*Resp.*  $A = 39^{\circ}20', B = 46^{\circ}50', C = 93^{\circ}50'$
- 12.44 Dos barcos tienen equipos de radio cuyo alcance es de 200 km. Uno de los barcos se encuentra a 155 km en  $N42^{\circ}40' E$  y el otro está a 165 km en dirección  $N45^{\circ}10' O$  de una estación costera. ¿Pueden los dos barcos comunicarse entre sí directamente?  
*Resp.* No; se encuentran separados **222** km.
- 12.45 Un barco navega 15.0 mi en dirección  $S40^{\circ}10' O$  y después 21.0 mi en dirección  $N28^{\circ}20' O$ . Encuentre la distancia y la dirección de la última posición con respecto a la primera.  
*Resp.* 20.9 mi,  $N70^{\circ}30' O$
- 12.46 Un faro se encuentra situado a 10 Km al noroeste de un muelle. Un barco sale del muelle a las 9 A.M. y navega hacia el oeste a 12 km/h. ¿A qué hora se encontrará a 8 mi del faro?  
*Resp.* 9:17 A.M. y 9:54 A.M.
- 12.47 Dos fuerzas, de 115 y 215 lb, que actúan sobre un objeto tienen una resultante de 275 lb de magnitud. Encuentre el ángulo formado por las direcciones de las fuerzas componentes.  
*Resp.*  $70^{\circ}50'$
- 12.48 Una torre de 150 m de altura está situada en la cima de una colina. En un punto situado a 650 m abajo de la colina, el ángulo que se forma con la superficie y la parte más alta de la torre es de  $12^{\circ}30'$ . Encuentre la inclinación de la colina con respecto al plano horizontal.  
*Resp.*  $7^{\circ}50'$
- 12.49 Tres circunferencias de radios 115, 150 y 225 m respectivamente, son tangentes entre sí por la parte externa. Encuentre los ángulos del triángulo formado al unir los centros de las circunferencias.  
*Resp.*  $43^{\circ}10', 61^{\circ}20', 75^{\circ}30'$
- Utilice logaritmos para resolver cada uno de los siguientes triángulos oblicuángulos ABC:
- 12.50  $c = 78.75, A = 33^{\circ}10', C = 81^{\circ}25'$  *Resp.*  $a = 43.57, b = 72.43, B = 65^{\circ}25'$
- 12.51  $b = 730.8, B = 42^{\circ}13', C = 109^{\circ}33'$  *Resp.*  $a = 514.5, c = 1025, A = 28^{\circ}14'$
- 12.52  $a = 31.26, A = 58^{\circ}, C = 23^{\circ}37'$  *Resp.*  $b = 36.47, c = 14.77, B = 98^{\circ}23'$

- 12.53**  $b = 13.22, c = 10.00, B = 25^\circ 57'$       *Resp.*  $a = 21.47, A = 134^\circ 43', C = 19^\circ 20'$
- 12.54**  $b = 10.88, c = 35.73, C = 115^\circ 34'$       *Resp.*  $a = 29.66, A = 48^\circ 29', B = 15^\circ 57'$
- 12.55**  $b = 86.43, c = 73.46, C = 49^\circ 19'$       *Resp.*  $a = 89.52, B = 63^\circ 10', A = 67^\circ 31'$   
 $a' = 23.19, B' = 116^\circ 50', A' = 13^\circ 51'$
- 12.56**  $a = 12.70, c = 15.87, A = 24^\circ 7'$       *Resp.*  $b = 25.40, B = 125^\circ 11', C = 30^\circ 42'$   
 $b' = 3.56, B' = 6^\circ 35', C = 149^\circ 18'$
- 12.57**  $a = 482.3, c = 395.7, B = 137^\circ 32'$       *Resp.*  $b = 819.2, A = 23^\circ 26', C = 19^\circ 2'$
- 12.58**  $b = 561.2, c = 387.2, A = 56^\circ 44'$       *Resp.*  $a = 475.9, B = 80^\circ 24', C = 42^\circ 52'$
- 12.59**  $a = 123.8, b = 264.2, c = 256.0$       *Resp.*  $A = 27^\circ 28', B = 79^\circ 56', C = 72^\circ 34'$
- 12.60**  $a = 1894, b = 2246, c = 3549$       *Resp.*  $A = 28^\circ 10', B = 34^\circ 2', C = 117^\circ 48'$

# Área de un triángulo

## 13.1 ÁREA DE UN TRIANGULO

El área  $K$  de un triángulo cualquiera es igual al producto de su base por su altura dividido entre dos. En general, si se tiene la información suficiente acerca de un triángulo, puede calcularse su área.

## 13.2 FORMULAS DEL ÁREA

CASOS I y II. Dados dos ángulos y un lado del triángulo  $ABC$

El tercer ángulo se encuentra utilizando el hecho de que  $A + B + C = 180^\circ$ . El área de un triángulo será igual al producto del cuadrado de uno de los lados, por el seno de cada uno de los ángulos adyacentes a dicho lado, entre el doble producto del seno del ángulo opuesto a dicho lado; esto es,

$$K = \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} = \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$$

Para la demostración de estas fórmulas véase el Problema 13.2. (Véanse también Probs. 13.4 y 13.5.)

CASO III. Dados dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos en un triángulo  $ABC$

El segundo ángulo puede encontrarse utilizando la ley de los senos y la fórmula apropiada del Caso I. Ya que en algunas ocasiones pueden encontrarse dos soluciones para el segundo ángulo, entonces será necesario a veces calcular el área de dos triángulos.

(Véanse Probs. 13.6 y 13.7.)

CASO IV. Dados dos lados y el ángulo que forman entre ellos en un triángulo  $ABC$

El área del triángulo será igual a la mitad del producto de los dos lados por el seno del ángulo que forman entre ellos; esto es,

$$K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C = \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A$$

Para la demostración de estas fórmulas véase el Problema 13.1.

(Véanse también los Probs. 13.8 y 13.9.)

CASO V. Dados los tres lados del triángulo  $ABC$

El área del triángulo es igual a la raíz cuadrada del producto del semiperímetro por el semiperímetro menos el primer lado; por el semiperímetro menos el segundo lado; por el semiperímetro menos el tercer lado; esto es,

$$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \quad \text{donde } s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

[NOTA: La fórmula se conoce como la fórmula de Heron (o de Hero) Para la demostración de esta fórmula. véase ProD. 13.3.]

(Véanse también los Probs. 13.10 y 13.11.)

### Problemas resueltos

13.1 Demuestre la fórmula  $K = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ . Véase Figura 13-1.

Se denomina  $h$  a la altura trazada desde el lado  $b$  del triángulo  $ABC$ , para cada figura se tiene que  $h = c \operatorname{sen} A$ . Así,  $K = \frac{1}{2} bh = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ .

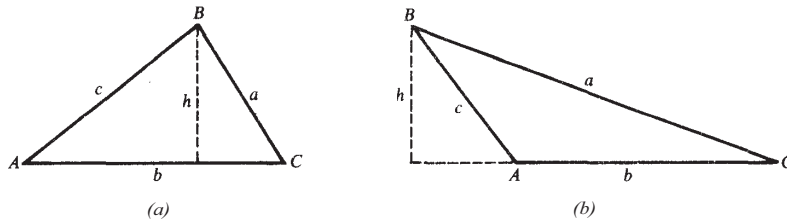


Fig. 13-1

13.2 Deducir la fórmula  $K = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$ .

Del Problema 13.1,  $K = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A$ ; y por la ley de los senos  $b = \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}$ .

Entonces  $K = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = \frac{1}{2} \frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C} c \operatorname{sen} A = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}$ .

13.3 Demuestre la fórmula  $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

De los resultados del Problema 12.30, Capítulo 12,

$$\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 - \cos A) = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{4bc} = \frac{2(s-b) \cdot 2(s-c)}{4bc} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$$

$$\text{y} \quad \cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1}{2}(1 + \cos A) = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} = \frac{2s \cdot 2(s-a)}{4bc} = \frac{s(s-a)}{bc}$$

Como  $\frac{1}{2} A < 90^\circ$ ,  $\operatorname{sen} \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$  y  $\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ . Entonces

$$K = \frac{1}{2} bc \operatorname{sen} A = bc \operatorname{sen} \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A = bc \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$B = 180^\circ - (A + C) = 145^\circ$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C} \\ &= \frac{23^2 \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 145^\circ}{2 \operatorname{sen} 15^\circ} \\ &= 200 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C} \\ &= \frac{23^2 \operatorname{sen} 20^\circ \operatorname{sen} 15^\circ}{2 \operatorname{sen} 145^\circ} \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{219 \operatorname{sen} 20^\circ}{112} = 0.6688; B = 42^\circ \text{ y } B' = 138^\circ.$$

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) = 118^\circ & C' &= 180^\circ - (A + B') = 22^\circ \\ K &= \frac{a^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} A} & K' &= \frac{a^2 \operatorname{sen} B' \operatorname{sen} C'}{2 \operatorname{sen} A} \\ &= \frac{112^2 \operatorname{sen} 42^\circ \operatorname{sen} 118^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} & &= \frac{112^2 \operatorname{sen} 138^\circ \operatorname{sen} 22^\circ}{2 \operatorname{sen} 20^\circ} \\ &= 10,800 \text{ m}^2 & &= 4600 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{96.2 \operatorname{sen} 41^\circ 50'}{123} = 0.5216; B = 31^\circ 30'.$$

$$\begin{aligned} C &= 180^\circ - (A + B) = 106^\circ 40' \\ K &= \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} \\ &= \frac{96.2^2 \operatorname{sen} 41^\circ 50' \operatorname{sen} 106^\circ 40'}{2 \operatorname{sen} 31^\circ 30'} \end{aligned}$$

- 13.8 Caso IV. Determine el área del triángulo  $ABC$ , dados  $b = 27$  yardas  $c = 14$  yardas y  $A = 43^\circ$ .

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}bc \operatorname{sen} A \\ &= \frac{1}{2}(27)(14) \operatorname{sen} 43^\circ \\ &= 130 \text{ yd}^2 \end{aligned}$$

- 13.9 Caso IV. Calcule el área del triángulo  $ABC$ , dados  $a = 14.27$  cm,  $c = 17.23$  cm y  $B = 86^\circ 14'$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}ac \operatorname{sen} B \\ &= \frac{1}{2}(14.27)(17.23) \operatorname{sen} 86^\circ 14' \\ &= 122.7 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- 13.10 Caso V. Encuentre el área del triángulo  $ABC$ , dados  $a = 5.00$  m,  $b = 7.00$  m y  $c = 10.0$  m.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(5 + 7 + 10) = 11 \text{ m.} \\ K &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{11(11-5)(11-7)(11-10)} \\ &= \sqrt{264} \\ &= 16.2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- 13.11 Caso V. Calcule el área del triángulo  $ABC$ , dados  $a = 1.017$  cm,  $b = 2.032$  cm y  $c = 2.055$  cm.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(1.017 + 2.032 + 2.055) = 2.552 \text{ cm} \\ K &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{2.552(2.552 - 1.017)(2.552 - 2.032)(2.552 - 2.055)} \\ &= \sqrt{1.012392} \\ &= 1.006 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

- 13.12 Determine el área de un triángulo isósceles cuya base mide 19.2 pulgadas y ángulo de la base  $23^\circ 10'$ . En la Figura 13-2,  $b = 19.2$  pulgadas,  $A = 23^\circ 10'$  y  $C = 23^\circ 10'$ . Entonces,

$$\begin{aligned} B &= 180^\circ - 2(23^\circ 10') = 133^\circ 40' \\ K &= \frac{b^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C}{2 \operatorname{sen} B} \\ &= \frac{19.2^2 \operatorname{sen} 23^\circ 10' \operatorname{sen} 23^\circ 10'}{2 \operatorname{sen} 133^\circ 40'} \\ &= 39.4 \text{ pulgadas}^2 \end{aligned}$$

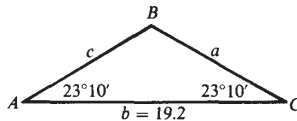


Fig. 13-2

- 13.13 Un pintor necesita saber el área que ocupa el tejado de dos aguas de una casa. ¿Cuál será el área del tejado, si éste es un triángulo con dos lados iguales de 42.0 pies que forman un ángulo de  $105^\circ$ ?  
En la Figura 13-3,  $a = 42.0$  pies,  $b = 42.0$  pies y  $C = 105^\circ$ .

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C \\ &= \frac{1}{2}(42)(42) \operatorname{sen} 105^\circ \\ &= 852 \text{ ft}^2 \end{aligned}$$

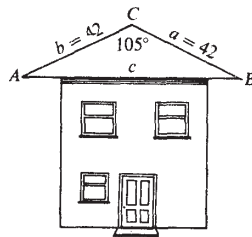


Fig. 13-3

- 13.14 Tres circunferencias de radios 3.0, 5.0 y 9.0 cm, son tangentes entre si externamente. ¿Cuánto mide el área del triángulo que se forma al unir sus centros?  
En la Figura 13-4,  $a = 8$  cm,  $b = 12$  cm y  $c = 14$  cm.

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2}(a + b + c) = 17 \text{ cm} \\ K &= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ &= \sqrt{17(17-8)(17-12)(17-14)} \\ &= \sqrt{2295} \\ &= 48 \text{ cm}^2 \end{aligned}$$

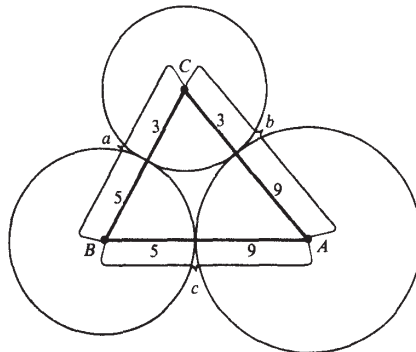


Fig. 13-4

- 13.15 En un campo cuadrangular ASCO, el lado  $AB$  mide 11.4 m con dirección  $N62^{\circ}10' E$ , el lado  $BC$  mide 19.8 m con dirección  $N22^{\circ}20' O$ ; y el lado  $CD$  mide 15.3 m con dirección  $S40^{\circ}40' O$ .  $DA$  se encuentra en la dirección  $S32^{\circ}10' E$  pero no puede ser medido. Encuentre (a) la longitud de  $DA$  y (b) el área del campo.

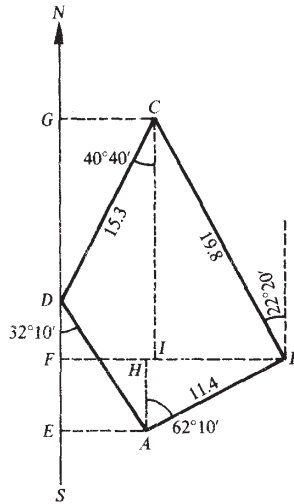


Fig. 13-5

En la Figura 13-5, el eje norte-sures la línea  $SN$  que pasa por  $D$ , los puntos  $E$ ,  $F$  y  $G$  son los puntos donde cruzan las perpendiculares con la recta  $SN$  pasando por los puntos  $A$ ,  $B$  y  $C$ , respectivamente, y las líneas  $AH$  y  $CI$  son perpendiculares a  $BF$ .

(a)

$$\begin{aligned} FB &= FI + IB = GC + IB \\ &= 15.3 \operatorname{sen} 40^{\circ}40' + 19.8 \operatorname{sen} 22^{\circ}20' \\ &= 9.97 + 7.52 = 17.49 \end{aligned}$$

$$FB = FH + HB = EA + HB; \text{ por lo que}$$

$$EA = FB - HB$$

$$= 17.49 - 11.4 \operatorname{sen} 62^{\circ}10' = 17.49 - 10.08 = 7.41$$

$$\text{Como } EA = DA \operatorname{sen} 32^{\circ}10', DA = \frac{7.41}{\operatorname{sen} 32^{\circ}10'} = 13.9 \text{ m.}$$

(b)

$$\text{Área } ABCD = \text{área } ACD + \text{área } ACB$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2}(AD)(DC) \operatorname{sen} \angle CDA + \frac{1}{2}(AB)(BC) \operatorname{sen} \angle ABC \\ &= \frac{1}{2}(13.9)(15.3) \operatorname{sen} 107^{\circ}10' + \frac{1}{2}(11.4)(19.8) \operatorname{sen} 95^{\circ}30' \\ &= 101.6 + 112.3 \\ &= 213.9 \\ &= 214 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

- 13.16 Demuestre que el área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo incluido entre ellas. Véase Figura 13-6(a).

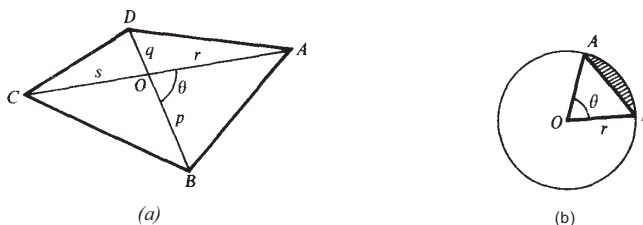


Fig. 13-6

Sea O el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero ABCD, sea  $\theta$  el ángulo que forman las diagonales entre sí. Llámense a los segmentos de las diagonales separados por O,  $p$  y  $q$ , y  $r$  y  $s$ , como se ve en la Figura.

$$\begin{aligned} \text{Área } ABCD &= \text{área } AOB + \text{área } AOD + \text{área } BOC + \text{área } DOC \\ &= \frac{1}{2}rp \sin \theta + \frac{1}{2}qr \sin (180^\circ - \theta) + \frac{1}{2}ps \sin (180^\circ - \theta) + \frac{1}{2}qs \sin \theta \\ &= \frac{1}{2}(pr + qr + ps + qs) \sin \theta = \frac{1}{2}(p + q)(r + s) \sin \theta = \frac{1}{2}(BD)(AC) \sin \theta. \end{aligned}$$

- 13.17 Demuestre que el área  $K$  del segmento más pequeño (sombreado) de un círculo de radio  $r$ , y centro  $O$ , cortado por la cuerda  $AB$  de la Figura 13-6(b), está dada por  $K = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$ , donde  $\theta$  radianes es el ángulo central interceptado por la cuerda.

El área que se busca es la diferencia entre el área del sector  $AOB$  y el triángulo  $AOB$ .

El área  $S$  del sector  $AOB$  es al área del círculo, como la longitud del arco  $AB$  es a la circunferencia:

$$\text{esto es, } \frac{S}{\pi r^2} = \frac{r\theta}{2\pi r} \quad \text{y} \quad S = \frac{1}{2}r^2\theta.$$

El área del triángulo  $AOB = \frac{1}{2}r \cdot r \sin \theta = \frac{1}{2}r^2 \sin \theta$ .

$$\text{Así,} \quad K = \frac{1}{2}r^2\theta - \frac{1}{2}r^2 \sin \theta = \frac{1}{2}r^2(\theta - \sin \theta)$$

- 13.18 Tres círculos tangentes entre sí por la parte externa, con centros  $A$ ,  $B$  y  $C$ , tienen radios de 50, 30 y 20 pulgadas, respectivamente. Encuentre el área del triángulo *curvilíneo* formado por los tres círculos.

Considere a los puntos tangentes a los círculos como  $R$ ,  $S$  y  $T$  como se muestra en la Figura 13-7. El área que se busca es la diferencia entre el área del triángulo  $ABC$  y la suma de las áreas de los sectores  $ART$ ,  $BRS$  y  $SCT$ .

Dado que las líneas que unen a los centros de cualquiera de dos de los círculos pasan a través de sus puntos tangentes,  $a = BC = 50$ ,  $b = CA = 70$  y  $c = AB = 80$  pulgadas. Entonces,

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = 100 \quad s - a = 50 \quad s - b = 30 \quad s - c = 20$$

$$\text{y} \quad K = \text{área } ABC = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{100(50)(30)(20)} = 1000\sqrt{3} = 1732$$

por lo que  $r = K/s = 17.32$ ,

$$\tan \frac{1}{2}A = \frac{r}{s-a} = \frac{17.32}{50} = 0.3464 \quad \frac{1}{2}A = 19^\circ 6' \quad A = 38^\circ 12' = 0.667 \text{ rad}$$

$$\tan \frac{1}{2}B = \frac{r}{s-b} = \frac{17.32}{30} = 0.5773 \quad \frac{1}{2}B = 30^{\circ}0' \quad B = 60^{\circ}0' = 1.047 \text{ rad}$$

$$\tan \frac{1}{2}C = \frac{r}{s-c} = \frac{17.32}{20} = 0.8660 \quad \frac{1}{2}C = 40^{\circ}54' \quad C = 81^{\circ}48' = 1.428 \text{ rad}$$

Área  $ART = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(50)^2(0.667) = 833.75$ , área  $BRS = \frac{1}{2}(30)^2(1.047) = 471.15$ , área  $CST = \frac{1}{2}(20)^2(1.428) = 285.60$ , y la suma del área es 1590.50.

El área que se busca es  $1732 - 1590.50 = 141.50$  o 142 pulgadas<sup>2</sup>.

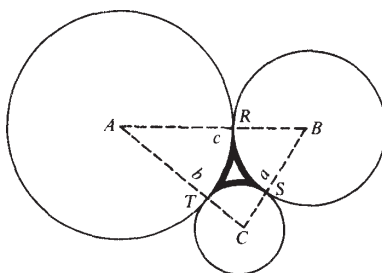
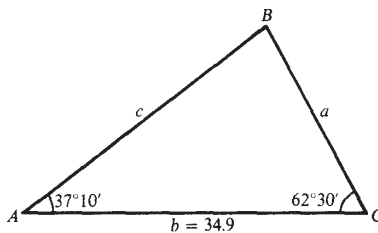


Fig. 13-7

En los problemas 13.19 al 13.22 se demuestra el uso de logaritmos para encontrar el área de un triángulo. Si no están utilizándose logaritmos, dirijase directamente a los Problemas Propuestos.

**13.19** Encuentre el área del triángulo ABC, dados  $A = 37^{\circ}10'$ ,  $C = 62^{\circ}30'$  y  $b = 34.9$ . Véase Figura 13-8.



$$B = 180^{\circ} - (A + C) = 80^{\circ}20'.$$

lisis es un triángulo del Caso 11 y  $K = \frac{b^2 \operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{2 \operatorname{sen} B}$ .

$$2 \log b = 3.0856$$

$$\log \operatorname{sen} C = 9.9479 - 10$$

$$\begin{aligned}\log \operatorname{sen} A &= 9.7811 - 10 \\ \operatorname{colog} 2 &= 9.6990 - 10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} B &= 0.0062 \\ \log K &= 2.5198 \\ K &= 331 \text{ unidades cuadradas}\end{aligned}$$

- 13.20** Calcule el área del triángulo  $ABC$ , dados  $b = 28.6$ ,  $c = 44.3$  y  $B = 23^\circ 20'$ . Este es un triángulo del Caso III con el cual pueden haber 2 soluciones. Véase Figura 13-9.

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} B}{b}$$

$$\begin{aligned}\log c &= 1.6464 \\ \log \operatorname{sen} B &= 9.5978 - 10 \\ \operatorname{colog} b &= 8.5436 - 10 \\ \log \operatorname{sen} C &= 9.7878 - 10\end{aligned}$$

$$C = 37^\circ 50' \text{ y } C = 180^\circ - C = 142^\circ 10'$$

$$A = 180^\circ - (B + C) = 118^\circ 50' \text{ y } A' = 180^\circ - (B + C') = 14^\circ 30'$$

$$\text{El área de } ABC \text{ es } K = \frac{c^2 \operatorname{sen} A' \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C}, \quad \text{El área de } ABC' \text{ es } K = \frac{c^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{2 \operatorname{sen} C'}$$

$\begin{aligned}2 \log c &= 3.2928 \\ \log \operatorname{sen} A &= 9.9425 - 10 \\ \log \operatorname{sen} B &= 9.5978 - 10 \\ \operatorname{colog} 2 &= 9.6990 - 10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C &= 0.2122 \\ \log K &= 2.7443 \\ K &= 555\end{aligned}$	$\begin{aligned}2 \log c &= 3.2928 \\ \log \operatorname{sen} A' &= 9.3986 - 10 \\ \log \operatorname{sen} B &= 9.5978 - 10 \\ \operatorname{colog} 2 &= 9.6990 - 10 \\ \operatorname{colog} \operatorname{sen} C' &= 0.2122 \\ \log K &= 2.2004 \\ K &= 159\end{aligned}$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

La solución son dos triángulos con áreas de 555 y 159 unidades cuadradas, respectivamente.

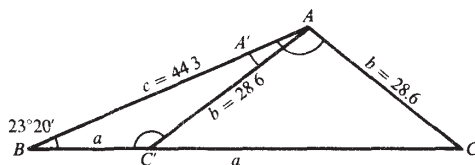


Fig. 13-9

- 13.21** Determine el área del triángulo  $ABC$ , dados  $a = 16.4$ ,  $b = 55.7$  y  $C = 27^\circ 20'$ . Este es un triángulo del Caso IV y la solución  $K = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$ . Véase Figura 13-10.

$$\begin{aligned}\log a &= 1.2148 \\ \log b &= 1.7458 \\ \log \operatorname{sen} C &= 9.6620 - 10 \\ \operatorname{colog} 2 &= 9.6990 - 10 \\ \log K &= 2.3216 \\ K &= 210\end{aligned}$$

El área mide 210 unidades cuadradas.

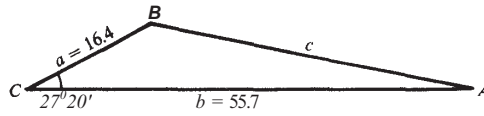


Fig. 13-10

13.22 Encuentre el área del triángulo ABC, dados  $a = 255$ ,  $b = 290$  y  $c = 419$ . Véase Figura 13-11.

Este es un triángulo del Caso V y  $K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ .

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) \qquad K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$a = 255$	$s - a = 227$	$\log(s - a) = 2.3560$
$b = 290$	$s - b = 192$	$\log(s - b) = 2.2833$
$c = 419$	$s - c = 63$	$\log(s - c) = 1.7993$
$2s = 964$	$s = 482$	$\log s = 2.6830$
$s = 482$		$2 \log K = 9.1216$
		$\log K = 4.5608$
		$K = 36,400$

El área mide 36,400 unidades cuadradas.

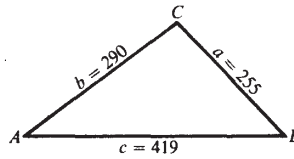


Fig. 13-11

### Problemas propuestos

Encuentre el área del triángulo ABC, dados:

- 13.23  $b = 13$  pies  $a = 27$  pies  $C = 85^\circ$  *Resp.* 175 pies<sup>2</sup>
- 13.24  $a = 23.3$  cm,  $c = 21.5$  cm,  $B = 121.0^\circ$  *Resp.* 215 cm<sup>2</sup>
- 13.25  $a = 4.1$  m,  $b = 5.2$  m,  $c = 6.7$  m *Resp.* 11 m<sup>2</sup>
- 13.26  $A = 65''$ ,  $B = 35^\circ$ ,  $c = 12$  yd *Resp.* 38 yd<sup>2</sup>
- 13.27  $b = 23.84$ ,  $c = 35.26$ ,  $A = 50^\circ 32'$  *Resp.* 324.5 unidades cuadradas

- 13.28  $a = 456.3$ ,  $b = 586.8$ ,  $C = 28^\circ 17'$       *Resp.* **63,440** unidades cuadradas
- 13.29  $a = 512.3$ ,  $B = 52^\circ 15'$ ,  $C = 63^\circ 46'$       *Resp.* 103,600 unidades cuadradas
- 13.30  $b = 444.8$ ,  $A = 110^\circ 16'$ ,  $B = 30^\circ 10'$       *Resp.* **117,600** unidades cuadradas
- 13.31  $a = 384.2$ ,  $b = 492.8$ ,  $c = 677.8$       *Resp.* **93,080** unidades cuadradas
- 13.32  $a = 28.16$ ,  $b = 60.15$ ,  $c = 51.17$       *Resp.* **718.6** unidades cuadradas
- 13.33 Para encontrar el área de un terreno triangular, el propietario caminó 215 m hacia el este de una esquina hasta la otra. Después de girar un ángulo de  $78.4^\circ$ , el propietario caminó 314 m hasta la tercera esquina. ¿Cuál es el área del terreno?  
*Resp.* **33,100 m<sup>2</sup>**
- 13.34 Un artista desea hacer un letrero en forma de triángulo isósceles, cuyo ángulo en el vértice es de  $42^\circ$  y que tiene 18 m de base. ¿Cuál será el área del letrero?  
*Resp.* **211 m<sup>2</sup>**
- 13.35 Un punto C está situado a  $N28^\circ E$  de un punto A y está situado a  $N12^\circ 0'$  de un punto B. ¿Cuál será el área del triángulo ABC si B se encuentra a 23 km al este de A?  
*Resp.* **355 km<sup>2</sup>**
- 13.36 Tres círculos son tangentes entre sí en la parte externa, con radios de 7.72, 4.84 y 11.4 cm, respectivamente. Encuentre el área del triángulo formado al unir los centros de los círculos.  
*Resp.* **101 cm<sup>2</sup>**
- 13.37 Una mujer camina 503 m, gira y trotta 415 m, gira nuevamente y corre 365 m, para regresar al lugar donde empezó. ¿Cuál es el área del triángulo formado por la trayectoria?  
*Resp.* **74,600 m<sup>2</sup>**

# Funciones trigonométricas inversas

14

## 14.1 RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

La ecuación

$$x = \operatorname{sen} y \quad (1)$$

define un valor único de  $x$  para cada ángulo  $y$  dado, pero cuando  $x$  es conocido, la ecuación puede no tener solución o tener varias. Por ejemplo: Si  $x = 2$ . no hay solución, dado que el seno de un ángulo nunca excede de 1; si  $x = \frac{1}{2}$ , existen varias soluciones, para  $y = 30^\circ, 150^\circ, 390^\circ, 510^\circ, -210^\circ, -330^\circ, \dots$  Para expresar  $y$  como una función de  $x$ , se escribe

$$y = \operatorname{arcsen} x \quad (2)$$

Sin hacer caso de la palabra *arc*, la ecuación (2) debe interpretarse como "y es un ángulo cuyo seno es x". De manera similar, puede escribirse  $y = \operatorname{arc} \cos x$ , si  $x = \cos y$ ,  $y = \operatorname{arc} \tan x$  si  $x = \tan y$ , etc.

La notación  $y = \operatorname{sen}^{-1} x$ ,  $y = \operatorname{cos}^{-1} x$ , etc., (que debe leerse como "inversa del seno de  $x$ , inversa del coseno de  $x$ , etc.") son usadas también, pero  $\operatorname{sen}^{-1} x$  puede ser confundido con  $1/\operatorname{sen} x = (\operatorname{sen} x)^{-1}$  por lo que hay que tener cuidado al escribir exponentes negativos en las funciones trigonométricas.

## 14.2 GRÁFICAS DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

La gráfica de  $y = \operatorname{arcsen} x$  es la gráfica de  $x = \operatorname{sen} y$  y difiere de la gráfica de  $y = \operatorname{sen} x$  del Capítulo 8, en que los papeles de  $x$  y de  $y$  están intercambiados. Así, la gráfica de  $y = \operatorname{arcsen} x$  es una curva senoidal dibujada en el eje  $y$  en lugar del eje  $x$ .

De igual modo, las gráficas de las demás funciones trigonométricas inversas, son aquellas que corresponden a las funciones trigonométricas, excepto cuando se intercambian los papeles de  $x$  y  $y$ .

## 14.3 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

A veces es necesario considerar las relaciones trigonométricas inversas como funciones (es decir, a cada valor de  $y$  le corresponde un sólo valor admisible de  $x$ ). Para lograr esto, se acuerda seleccionar uno de los múltiples ángulos que le corresponden a determinado valor de  $x$ . Por ejemplo, cuando  $x = \frac{1}{2}$  puede acordarse seleccionar el valor  $y = \pi/6$ . y cuando  $x = -\frac{1}{2}$  puede seleccionarse el valor  $y = -\pi/6$ . Este valor escogido se llama *valor principal* del  $\operatorname{arcsen} x$ . Cuando solamente se requiere el valor principal, puede escribirse  $\operatorname{arcsen} x$ ,  $\operatorname{arceos} x$ , etc. Una notación alternativa para el valor principal de las funciones trigonométricas inversas es  $\operatorname{sen}^{-1} x$ ,  $\operatorname{cos}^{-1} x$ ,  $\operatorname{tan}^{-1} x$ , etc. Las partes de la gráfica en

la cual se encuentran los valores principales de las funciones trigonométricas inversas se muestran en las Figuras 14-1(a) a (f) por medio de una línea más gruesa.

Cuando  $x$  es positiva o cero y existe la función inversa, el valor principal está definido como aquel valor de  $y$  que se encuentra Inclusive entre  $0$  y  $\frac{1}{2}\pi$ .

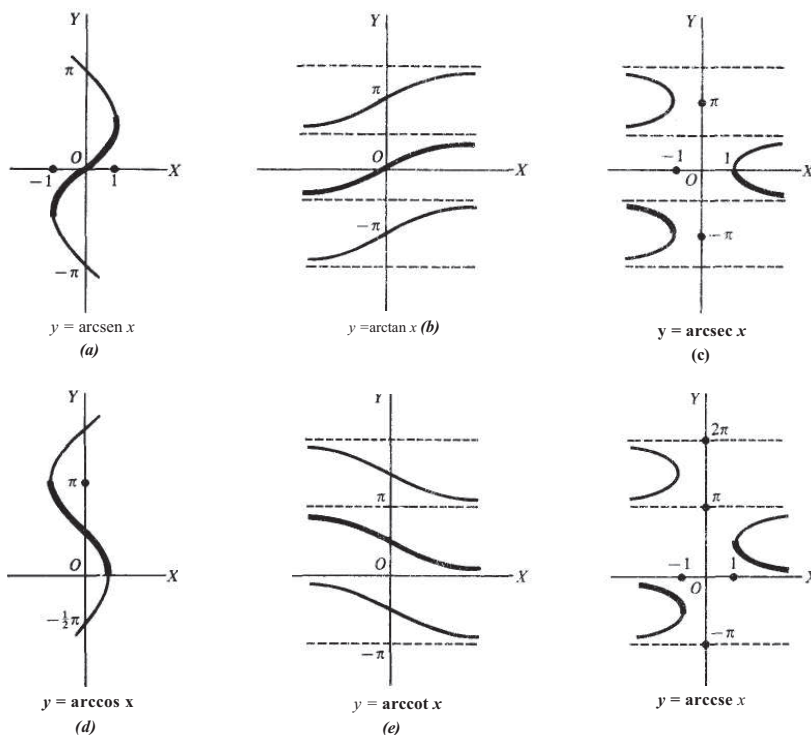


Fig. 14-1

**EJEMPLO 14.1** (a)  $\text{Arcsen } \sqrt{3}/2 = \pi/3$  dado que  $\text{sen } \pi/3 = \sqrt{3}/2$  y  $0 < \pi/3 < \pi/2$ .

(b)  $\text{Arccos } \sqrt{3}/2 = \pi/6$  dado que  $\text{cos } \pi/6 = \sqrt{3}/2$  y  $0 < \pi/6 < \pi/2$ .

(c)  $\text{Arctan } 1 = \pi/4$  dado que  $\text{tan } \pi/4 = 1$  y  $0 < \pi/4 < \pi/2$ .

Cuando  $x$  es negativo y la función inversa existe, el valor principal se define como sigue.

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arcsen } x < 0 & & \frac{1}{2}\pi < \text{Arccot } x < \pi \\
 \frac{1}{2}\pi < \text{Arccos } x \leq \pi & & \frac{1}{2}\pi < \text{Arcsec } x \leq \pi \\
 -\frac{1}{2}\pi < \text{Arctan } x < 0 & & -\frac{1}{2}\pi \leq \text{Arcsc } x < 0
 \end{aligned}$$

**EJEMPLO 14.2**

<p>(a) <math>\text{Arcsen}(-\sqrt{3}/2) = -\pi/3</math></p> <p>(b) <math>\text{Arccos}(-1/2) = 2\pi/3</math></p> <p>(c) <math>\text{Arctan}(-1/\sqrt{3}) = -\pi/6</math></p>	<p><math>\text{Arccot}(-1) = 3\pi/4</math></p> <p><math>\text{Arcsec}(-2/\sqrt{3}) = +5\pi/6</math></p> <p><math>\text{Arccsc}(-\sqrt{2}) = -\pi/4</math></p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

#### 14.4 INTERVALO DE LOS VALORES PRINCIPALES

Cuando  $x$  es negativa, existen diferencias entre los autores al definir los valores principales de las funciones inversas. Las definiciones dadas aquí son las más convenientes para el estudio del cálculo. En diversos libros de cálculo, la función inversa de una función trigonométrica se define como el valor principal inverso y no se acostumbra utilizar letras mayúsculas en su notación. Como sólo se considera la función inversa, por lo general no causa problemas en las lecciones de cálculo.

Función Inversa	Intervalo de los Valores Principales
$y = \text{Arcsen } x$	$-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{Arccos } x$	$0 \leq y \leq \pi$
$y = \text{Arctan } x$	$-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{Arccot } x$	$0 < y < \pi$
$y = \text{Arcsec } x$	$0 \leq y \leq \pi, y \neq \frac{1}{2}\pi$
$y = \text{Arccsc } x$	$-\frac{1}{2}\pi \leq y \leq \frac{1}{2}\pi, y \neq 0$

#### 14.5 VALORES GENERALES DE LAS RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

Sea  $y$  una relación trigonométrica inversa de  $x$ . Dado que el valor de una relación trigonométrica de  $y$  es conocido, dos posiciones se determinan en general, para el lado terminal del ángulo  $y$  (véase Capítulo 2). Sean  $y_1$  y  $y_2$ , respectivamente, los ángulos determinados por las dos posiciones del lado terminal. Entonces, la totalidad de los valores de  $y$  consiste en los ángulos  $y_1$  y  $y_2$ , junto con todos los ángulos coterminales; esto es,

$$y_1 + 2n\pi \quad \text{y} \quad y_2 + 2n\pi$$

donde  $n$  es cualquier entero positivo, negativo o cero.

Uno de los valores  $y_1$  o  $y_2$ , puede tomarse siempre como el valor principal de la función trigonométrica inversa.

**EJEMPLO 14.3** Escriba las expresiones para el valor general de (a)  $\text{arcsen } 1/2$ , (b)  $\text{arccos}(-1)$  y (c)  $\text{arctan}(1)$ .

- (a) El valor principal de  $\text{arcsen } 1/2$  es  $\pi/6$ , y un segundo valor (no coterminales con el valor principal) es  $5\pi/6$ .  
El valor general de  $\text{arcsen } 1/2$  está dado por

$$\pi/6 + 2n\pi \quad 5\pi/6 + 2n\pi$$

donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

- (b) El valor principal es  $\pi$  y no existe ningún otro valor no coterminales con éste. Así, el valor general está dado por  $\pi + 2n\pi$ , donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

14

(c) El valor principal es  $-\pi/4$ , y un segundo valor (no coterminal con el valor principal) es  $3\pi/4$ . Así, el. valor general está dado por

$$-\pi/4 + 2n\pi \quad 3\pi/4 + 2m\pi$$

donde  $n$  es un entero positivo o negativo, o cero.

### Problemas resueltos

14.1 Encuentre el valor principal de cada una de las siguientes expresiones.

- |                                       |                                            |                                            |
|---------------------------------------|--------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (a) $\text{Arcsen } 0 = 0$            | (e) $\text{Arcsec } 2 = \pi/3$             | (i) $\text{Arctan } (-1) = -\pi/4$         |
| (b) $\text{Arccos } (-1) = \pi$       | (f) $\text{Arcscse } (-\sqrt{2}) = -\pi/4$ | (j) $\text{Arccot } 0 = \pi/2$             |
| (c) $\text{Arctan } \sqrt{3} = \pi/3$ | (g) $\text{Arccos } 0 = \pi/2$             | (k) $\text{Arcsec } (-\sqrt{2}) = -3\pi/4$ |
| (d) $\text{Arccot } \sqrt{3} = \pi/6$ | (h) $\text{Arcsen } (-1) = -\pi/2$         | (l) $\text{Arcscsc } (-2) = -5\pi/6$       |

14.2 Exprese el valor principal de cada uno de los siguientes ejercicios aproximando a minutos o a centésimas de grado.

- |                                                                    |                                                                         |
|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\text{Arcsen } 0.3333 = 19^\circ 28' \text{ o } 19.47^\circ$  | (g) $\text{Arcsen } (-0.6439) = -40^\circ 5' \text{ o } -40.08^\circ$   |
| (b) $\text{Arccos } 0.4000 = 66^\circ 25' \text{ o } 66.42^\circ$  | (h) $\text{Arccos } (-0.4519) = 116^\circ 52' \text{ o } 116.87^\circ$  |
| (c) $\text{Arctan } 1.5000 = 56^\circ 19' \text{ o } 56.31^\circ$  | (i) $\text{Arctan } (-1.4400) = -55^\circ 13' \text{ o } -55.22^\circ$  |
| (d) $\text{Arccot } 1.1875 = 40^\circ 6' \text{ o } 40.10^\circ$   | (j) $\text{Arccot } (-0.7340) = 126^\circ 17' \text{ o } 126.28^\circ$  |
| (e) $\text{Arcsec } 1.0324 = 14^\circ 24' \text{ o } 14.39^\circ$  | (k) $\text{Arcsec } (-1.2067) = 145^\circ 58' \text{ o } 145.97^\circ$  |
| (f) $\text{Arcscse } 1.5082 = 41^\circ 32' \text{ o } 41.53^\circ$ | (l) $\text{Arcscsc } (-4.1923) = -13^\circ 48' \text{ o } -13.80^\circ$ |

14.3 Compruebe cada una de las igualdades siguientes.

- |                                                                                      |                                                                          |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------|
| (a) $\text{sen } (\text{Arcsen } 1/2) = \text{sen } \pi/6 = 1/2$                     | (e) $\text{Arccos } [\cos (-\pi/4)] = \text{Arccos } \sqrt{2}/2 = \pi/4$ |
| (b) $\text{cos } [\text{Arccos } (-1/2)] = \text{cos } 2\pi/3 = -1/2$                | (f) $\text{Arcsen } (\tan 3\pi/4) = \text{Arcsen } (-1) = -\pi/2$        |
| (c) $\text{cos } [\text{Arcsen } (-\sqrt{2}/2)] = \text{cos } (-\pi/4) = \sqrt{2}/2$ | (g) $\text{Arccos } [\tan (-5\pi/4)] = \text{Arccos } (-1) = \pi$        |
| (d) $\text{Arcsen } (\text{sen } \pi/3) = \text{Arcsen } \sqrt{3}/2 = \pi/3$         |                                                                          |

14.4 Verifique cada una de las igualdades siguientes.

- (a)  $\text{Arcsen } \sqrt{2}/2 - \text{Arcsen } 1/2 = \pi/4 - \pi/6 = \pi/12$   
 (b)  $\text{Arccos } 0 + \text{Arctan } (-1) = \pi/2 + (-\pi/4) = \pi/4 = \text{Arctan } 1$

14.5 Evalúe cada una de las siguientes funciones:

(a)  $\cos(\text{Arcsen } 3/5)$ , (b)  $\text{sen}[\text{Arccos}(-2/3)]$ , (c)  $\tan[\text{Arcsen}(-3/4)]$

(a) Sea  $\theta = \text{Arcsen } 3/5$ ; entonces  $\text{sen } \theta = 3/5$ , siendo  $\theta$  un ángulo del primer cuadrante. De la figura 14-2(a),  
 $\cos(\text{Arcsen } 3/5) = \cos \theta = 4/5$  (b) Sea  $\theta = \text{Arccos}(-2/3)$ ;  
entonces  $\cos \theta = -2/3$ , siendo  $\theta$  un ángulo del segundo cuadrante. De la Figura 14-2(b),

$$\text{sen}[\text{Arccos}(-2/3)] = \text{sen } \theta = \sqrt{5}/3$$

(c) Sea  $\theta = \text{Arcsen}(-3/4)$ ; entonces,  $\text{sen } \theta = -3/4$ , siendo  $\theta$  un ángulo del cuarto cuadrante. De la Figura 14-2(c),

$$\tan[\text{Arcsen}(-3/4)] = \tan \theta = -3/\sqrt{7} = -3\sqrt{7}/7$$

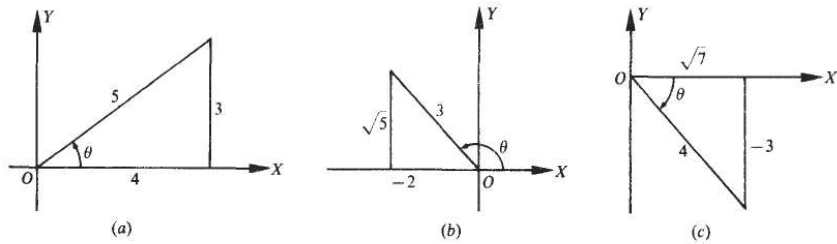


Fig. 14-2

14.6 Evalúe  $\text{sen}(\text{Arcsen } 12/13 + \text{Arcsen } 4/5)$ .

Sea

$$\theta = \text{Arcsen } 12/13$$

y

$$\phi = \text{Arcsen } 4/5$$

$$\text{sen}(\text{Arcsen } 12/13 + \text{Arcsen } 4/5) = \text{sen}(\theta + \phi)$$

$$= \text{sen } \theta \cos \phi + \cos \theta \text{sen } \phi$$

$$= \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{5} + \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{5} = \frac{56}{65}$$

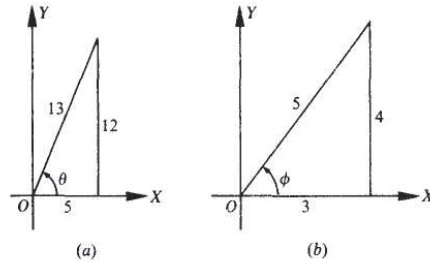


Fig. 14-3

Entonces,  $\text{sen } \theta = 12/13$  y  $\text{sen } \phi = 4/5$ , siendo  $\theta$  y  $\phi$  ángulos del primer cuadrante. De la figura 14-3(a) y (b),

14

14.7 Evalúe  $\cos (\operatorname{Arctan} 15/8 - \operatorname{Arcsen} 7/25)$ .

Sea  $\theta = \operatorname{Arctan} 15/8$   
 y  $\phi = \operatorname{Arcsen} 7/25$

Entonces,  $\tan \theta = 15/8$  y  $\operatorname{sen} \theta = 7/25$ , siendo  $\theta$  y  $\phi$  ángulos del primer cuadrante. De la Figura 14-4(a) y (b),

$$\begin{aligned} \cos (\operatorname{Arctan} 15/8 - \operatorname{Arcsen} 7/25) &= \cos (\theta - \phi) \\ &= \cos \theta \cos \phi + \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi \\ &= \frac{8}{17} \cdot \frac{24}{25} + \frac{15}{17} \cdot \frac{7}{25} = \frac{297}{425} \end{aligned}$$

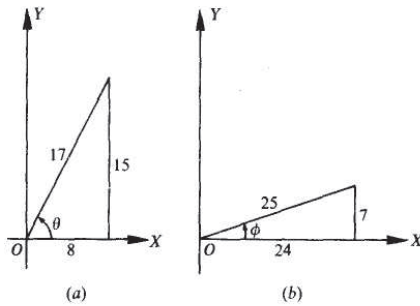


Fig. 14-4

14.8 Evalúe  $\operatorname{sen} (2 \operatorname{Arctan} 3)$ .

Sea  $\theta = \operatorname{Arctan} 3$ ; entonces,  $\tan \theta = 3$ , siendo  $\theta$  un ángulo del primer cuadrante. De la Figura 14-5,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} (2 \operatorname{Arctan} 3) &= \operatorname{sen} 2\theta \\ &= 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta \\ &= 2(3/\sqrt{10})(1/\sqrt{10}) \\ &= 3/5 \end{aligned}$$

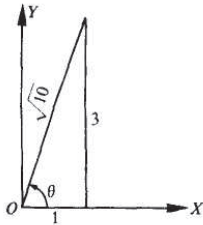


Fig. 14-5

14.9 Demuestre que  $\text{Arcsen } 1/\sqrt{5} + \text{Arcsen } 2/\sqrt{5} = \pi/2$ .

Sea  $\theta = \text{Arcsen } 1/\sqrt{5}$  y  $\phi = \text{Arcsen } 2/\sqrt{5}$ ; entonces,  $\text{sen } \theta = 1/\sqrt{5}$  y  $\text{sen } \phi = 2/\sqrt{5}$ , cada ángulo terminado en el primer cuadrante. Se quiere demostrar que  $\theta + \phi = \pi/2$  o, se toma la función seno en ambos lados, que  $\text{sen}(\theta + \phi) = \text{sen } \pi/2$ .

De las Figs. 14-6(a) y (b).

$$\begin{aligned}\text{sen}(\theta + \phi) &= \text{sen } \theta \cos \phi + \cos \theta \text{sen } \phi \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = 1 = \text{sen } \pi/2\end{aligned}$$

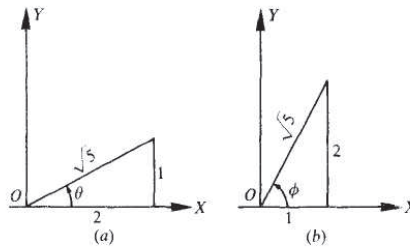


Fig. 14-6

14.10 Demuestre que  $2 \text{Arctan } 1/2 = \text{Arctan } 4/3$ .

Sea  $\theta = \text{Arctan } 1/2$  y  $\phi = \text{Arctan } 4/3$ ; entonces  $\tan \theta = 1/2$  y  $\tan \phi = 4/3$ .

Debe demostrar que  $2\theta = \phi$  o, tomando la función tangente en ambos miembros, que  $\tan 2\theta = \tan \phi$

$$\text{Ahora bien } \tan 2\theta = \frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(1/2)}{1 - (1/2)^2} = 4/3 = \tan \phi.$$

14.11 Demuestre  $\text{Arcsen } 77/85 - \text{Arcsen } 3/5 = \text{Arccos } 15/17$ .

Sea  $\theta = \text{Arcsen } 77/85$ ,  $\phi = \text{Arcsen } 3/5$ , y  $\psi = \text{Arccos } 15/17$ ; entonces  $\text{sen } \theta = 77/85$ ,  $\text{sen } \phi = 3/5$  y  $\cos \psi = 15/17$ , y los tres ángulos terminan en el primer cuadrante. Si se toma la función seno en ambos miembros de la relación, se tiene que demostrar que  $\text{sen}(\theta - \phi) = \text{sen } \psi$ . De las Figuras. 14-7(a), (b), y (c).

$$\text{sen}(\theta - \phi) = \text{sen } \theta \cos \phi - \cos \theta \text{sen } \phi = \frac{77}{85} \cdot \frac{4}{5} - \frac{36}{85} \cdot \frac{3}{5} = \frac{8}{17} = \text{sen } \psi.$$

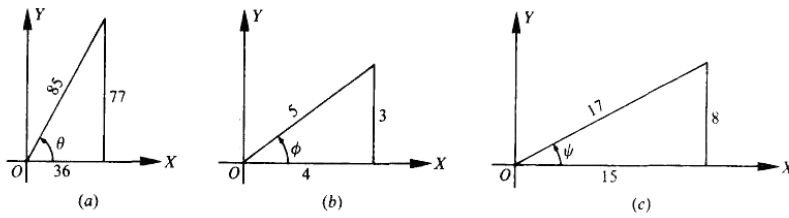


Fig. 14-7

14.12 Demuestre que  $\text{Arccot } 43/32 - \text{Arctan } 1/4 = \text{Arc } 12/13$ .

Sea  $\theta = \text{Arccot } 43/32$ ,  $\phi = \text{Arctan } 1/4$ , y  $\psi = \text{Arcos } 12/13$ ; entonces  $\cot \theta = 43/32$ ,  $\tan \phi = 1/4$ , y  $\cos \psi = 12/13$ , y los tres ángulos terminan en el primer cuadrante. Si se toma la función tangente en ambos miembros de la relación, se tiene que demostrar que  $\tan(\theta - \phi) = \tan \psi$ . De la Figura 14-8,  $\tan \psi = 5/12$ .

$$\tan(\theta - \phi) = \frac{\tan \theta - \tan \phi}{1 + \tan \theta \tan \phi} = \frac{32/43 - 1/4}{1 + (32/43)(1/4)} = \frac{5}{12} = \tan \psi$$

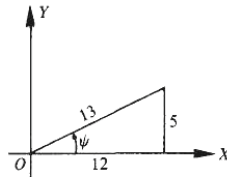


Fig. 14-8

14.13 Demuestre que  $\text{Arctan } 1/2 + \text{Arctan } 1/5 + \text{Arctan } 1/8 = \pi/4$ .

Tiene que demostrarse que  $\text{Arctan } 1/2 + \text{Arctan } 1/5 = \pi/4 - \text{Arctan } 1/8$ .

$$\tan(\text{Arctan } 1/2 + \text{Arctan } 1/5) = \frac{1/2 + 1/5}{1 - (1/2)(1/5)} = \frac{7}{9}$$

$$\tan(\pi/4 - \text{Arctan } 1/8) = \frac{1 - 1/8}{1 + 1/8} = \frac{7}{9}$$

14.14 Demuestre que  $2 \text{Arctan } 1/3 + \text{Arctan } 1/7 = \text{Arcsec } \sqrt{34/5} + \text{Arccsc } \sqrt{17}$ .

Sea  $\theta = \text{Arctan } 1/3$ ,  $\phi = \text{Arctan } 1/7$ ,  $X = \text{Arcsec } \sqrt{34/5}$ , y  $\psi = \text{Arccsc } \sqrt{17}$ ; entonces  $\tan \theta = 1/3$ ,  $\tan \phi = 1/7$ ,  $\sec X = \sqrt{34/5}$ , y  $\csc \psi = \sqrt{17}$ , en cada ángulo terminado en el quinto cuadrante.

Se toma la función tangente en ambos lados, se quiere demostrar que

$$\tan(2\theta + \phi) = \tan(x + \psi)$$

$$\frac{2 \tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2(1/3)}{1 - (1/3)^2}$$

Ahora

$$\tan(2\theta + \phi) = \frac{2 \cdot 3/5 + 1/4}{1 - (3/5)(1/4)} = 1, \frac{3/4 + 1/7}{1 - (3/4)(1/7)} = 1$$

y, utilizando la Figura 14-9 (a) y (b),  $\tan(x + \psi) =$

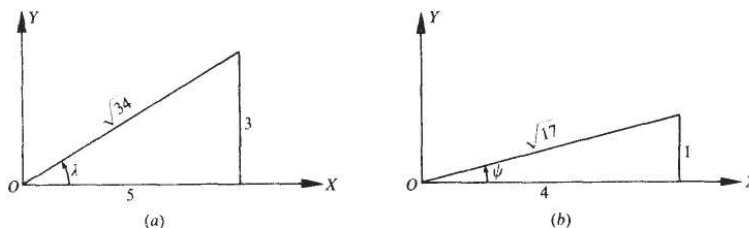


Fig. 14-9

14.15 Encuentre el valor general de cada una de las siguientes relaciones.

(a)  $\arcsen \sqrt{2}/2 = n/4 + 2n\pi, 3\pi/4 + 2n\pi$

(d)  $\arcsen(-1) = -\pi/2 + 2n\pi$

(b)  $\arccos 1/2 = \pi/3 + 2n\pi, 5\pi/3 + 2n\pi$

(e)  $\arccos 0 = \pi/2 + 2n\pi, 3\pi/2 + 2n\pi$

(c)  $\arctan 0 = 2n\pi, (2n + 1)\pi$

(f)  $\arctan(-\sqrt{3}) = -\pi/3 + 2n\pi, 2\pi/3 + 2n\pi$

14.16 Demuestre que el valor general de (a)  $\arcsen x = n\pi + (-1)^n \text{Arccsen } x$

(b)  $\arccos x = 2n\pi \pm \text{Arccos } x$

(c)  $\arctan x = n\pi + \text{Arctan } x$

donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

(a) Sea  $\theta = \text{Arccsen } x$ . Entonces, dado que  $\text{sen}(\pi - \theta) = \text{sen } \theta$  todos los valores de  $\arcsen x$  están dados por:

$$(1) \theta + 2m\pi \quad \text{y} \quad (2) \pi - \theta + 2m\pi = (2m + 1)\pi - \theta$$

Ahora bien, cuando  $n = 2m$ , esto es,  $n$  es un entero par, (1) puede ser escrito como  $n\pi + \theta = n\pi + (-1)^n \theta$  y cuando  $n = 2m + 1$ , esto es,  $n$  es un entero impar, (2) puede escribirse como  $n\pi - \theta = n\pi + (-1)^n \theta$ . Así,  $\arcsen x = n\pi + (-1)^n \text{Arccsen } x$ , donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

(b) Sea  $\theta = \text{Arccos } x$ . Entonces, dado que  $\text{cos}(-\theta) = \text{cos } \theta$ , todos los valores de  $\arccos x$  están dados por  $\theta + 2n\pi$  o  $-\theta + 2n\pi$  o  $2n\pi \pm \theta = 2n\pi \pm \text{Arccos } x$ , donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

(c) Sea  $\theta = \text{Arctan } x$ . Entonces, dado que  $\text{tan}(\pi + \theta) = \text{tan } \theta$ , todos los valores de  $\arctan x$  están dados por  $\theta + 2m\pi$  o  $\pi + \theta + 2m\pi = \theta + (2m + 1)\pi$  o como en (a), por  $n\pi + \text{Arctan } x$ , donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

14

14.17 Expresar el valor general de cada una de las funciones del Prob. 14.15, usando la forma del Prob. 14.16.

- (a)  $\arcsen \sqrt{2}/2 = n\pi + (-1)^n (\pi/4)$       (d)  $\arcsen (-1) = n\pi + (-1)^n (-\pi/2)$   
 (b)  $\arccos 1/2 = 2n\pi \pm \pi/3$       (e)  $\arccos 0 = 2n\pi \pm \pi/2$   
 (c)  $\arctan 0 = n\pi$       (f)  $\arctan (-\sqrt{3}) = n\pi - \pi/3$

donde  $n$  es cualquier entero positivo o negativo, o cero.

### Problemas propuestos

14.18 Escriba la relación inversa de las siguientes relaciones.

- (a)  $\sen \theta = \sqrt{3}/4$ ,    (b)  $\cos a = -1$ ,    (c)  $\tan x = -2$ ,    (d)  $\cot \beta = 1/2$   
 Resp. (a)  $\theta = \arcsen 3/4$ ,    (b)  $a = \arccos (-1)$ ,    (c)  $x = \arctan (-2)$ ,    (d)  $\beta = \operatorname{arccot} 1/2$

14.19 Encuentre el valor principal de cada una de las siguientes expresiones.

- (a)  $\operatorname{Arcsen} \sqrt{3}/2$       (d)  $\operatorname{Arccot} 1$       (g)  $\operatorname{Arctan} (-\sqrt{3})$       (j)  $\operatorname{Arcsec} (-1)$   
 (b)  $\operatorname{Arceos} (-\sqrt{2}/2)$       (e)  $\operatorname{Arcsen} (-1/2)$       (h)  $\operatorname{Arecot} 0$   
 (c)  $\operatorname{Arctan} 1/\sqrt{3}$       (f)  $\operatorname{Arccos} (-1/2)$       (i)  $\operatorname{Arcsec} (-\sqrt{2})$

Resp. (a)  $\pi/3$ , (b)  $3\pi/4$ , (c)  $\pi/6$ , (d)  $\pi/4$ , (e)  $-\pi/6$ , (f)  $2\pi/3$ , (g)  $-\pi/3$ , (h)  $\pi/2$ , (i)  $-3\pi/4$ , (j)  $-\pi/2$

14.20 Evalúe cada una de las siguientes expresiones.

- (a)  $\sen [\operatorname{Arcsen} (-1/2)]$       (f)  $\sen (\operatorname{Arccos} 4/5)$       (k)  $\operatorname{Arctan} (\cot 230^\circ)$   
 (b)  $\cos (\operatorname{Arccos} \sqrt{3}/2)$       (g)  $\cos [\operatorname{Arcsen} -12/13]$       (l)  $\operatorname{Arccot} (\tan 100^\circ)$   
 (c)  $\tan [\operatorname{Arctan} (-1)]$       (h)  $\sen (\operatorname{Arctan} 2)$       (m)  $\sen (2 \operatorname{Arcsen} 2/3)$   
 (d)  $\sen [\operatorname{Arccos} (-\sqrt{3}/2)]$       (i)  $\operatorname{Arccos} (\sen 220^\circ)$       (n)  $\cos 2 \operatorname{Arcsen} 3/5$   
 (e)  $\tan (\operatorname{Arcsen} 0)$       (j)  $\operatorname{Arcsen} [\cos (-105^\circ)]$       (o)  $\sen (1/2 \operatorname{Arccos} 4/5)$

Resp. (a)  $-1/2$ , (b)  $\sqrt{3}/2$ , (c)  $-1$ , (d)  $1/2$ , (e)  $0$ , (f)  $3/5$ , (g)  $5/13$ , (h)  $2/\sqrt{5}$ , (i)  $13\pi/18$ , (j)  $-\pi/12$ , (k)  $2\pi/9$ ,

(l)  $\frac{17\pi}{18}$ , (m)  $4\sqrt{5}/9$ , (n)  $7/25$ , (o)  $1/\sqrt{10} = \sqrt{10}/10$

$\sqrt{5} = 2\sqrt{5}/2$

14.21 Demuestre que

- (a)  $\sen \left( \operatorname{Arcsen} \frac{5}{13} + \operatorname{Arcsen} \frac{4}{5} \right) = \frac{63}{65}$       (e)  $\cos \left( \operatorname{Arctan} \frac{-4}{3} + \operatorname{Arcsen} \frac{12}{13} \right) = \frac{63}{65}$   
 (b)  $\cos \left( \operatorname{Arccos} \frac{15}{17} - \operatorname{Arccos} \frac{7}{25} \right) = \frac{297}{425}$       (f)  $\tan \left( \operatorname{Arcsen} \frac{-3}{5} - \operatorname{Arccos} \frac{5}{13} \right) = \frac{63}{16}$

$$(c) \quad \sin\left(\operatorname{Arcsen} \frac{1}{2} - \operatorname{Arccos} \frac{1}{3}\right) = \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6} \quad (g) \quad \tan\left(2 \operatorname{Arcsen} \frac{4}{5} + \operatorname{Arccos} \frac{12}{13}\right) = -\frac{253}{204}$$

$$(d) \quad \tan\left(\operatorname{Arctan} \frac{3}{4} + \operatorname{Arccot} \frac{15}{8}\right) = \frac{77}{36} \quad (h) \quad \sin\left(2 \operatorname{Arcsen} \frac{4}{5} - \operatorname{Arccos} \frac{12}{13}\right) = \frac{323}{325}$$

14.22 Demuestre que

$$(a) \quad \operatorname{Arctan} \frac{1}{2} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \quad (e) \quad \operatorname{Arccos} \frac{12}{13} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{4} = \operatorname{Arccot} \frac{43}{32}$$

$$(b) \quad \operatorname{Arcsen} \frac{4}{5} + \operatorname{Arctan} \frac{3}{4} = \frac{\pi}{2} \quad (f) \quad \operatorname{Arcsen} \frac{3}{5} + \operatorname{Arcsen} \frac{15}{17} = \operatorname{Arccos} \frac{-13}{85}$$

$$(c) \quad \operatorname{Arctan} \frac{4}{3} - \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4} \quad (g) \quad \operatorname{Arctan} a + \operatorname{Arctan} \frac{1}{a} = \frac{\pi}{2} \quad (a > 0)$$

$$(d) \quad 2 \operatorname{Arctan} \frac{1}{3} + \operatorname{Arctan} \frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}$$

14.23 Pruebe que: El área del segmento cortado de un círculo de radio  $r$  por una cuerda a una distancia  $d$  del centro está dado por  $K = r^2 \operatorname{Arccos} \frac{d}{r} - d\sqrt{r^2 - d^2}$ .

# Ecuaciones trigonométricas

## 15.1 ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Las ecuaciones trigonométricas, es decir, las ecuaciones que involucran funciones trigonométricas de ángulos desconocidos, se llaman:

- (a) Ecuaciones idénticas o *identidades*, si se satisfacen para todos los valores de los ángulos desconocidos, cuyas funciones están definidas.
- (b) Ecuaciones condicionales, o ecuaciones, si se satisfacen solamente con valores particulares de los ángulos desconocidos.

**EJEMPLO 15.1** (a)  $\sin x \csc x = 1$  es una identidad que se satisface para cualquier valor de  $x$ , para el cual  $\csc x$  está definido.  
 (b)  $\sin x = 0$  es una ecuación condicional, ya que no es satisfecha por  $x = \frac{1}{4}\pi$  o  $\frac{1}{2}\pi$ .

De aquí en adelante, en este capítulo se usará el término *ecuación* en lugar de *ecuación condicional*.

La solución a una ecuación trigonométrica, como  $\sin x = 0$ , es el valor del ángulo  $x$  que satisface la ecuación. Dos soluciones de  $\sin x = 0$  son:  $x = 0$  y  $x = \pi$ .

Si una ecuación dada tiene una solución, por lo general posee un número ilimitado de soluciones. Así, la solución completa de  $\sin x = 0$  está dada por:

$$x = 0 + 2n\pi \quad x = \pi + 2n\pi$$

donde  $n$  es cualquier entero positivo, negativo o cero.

En este capítulo, solamente se escribirán las soluciones particulares, para las cuales  $0 \leq x < 2\pi$ .

## 15.2 RESOLUCIÓN DE ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS

No existe un método general para resolver ecuaciones trigonométricas. En los siguientes ejemplos se ilustran varios procedimientos comunes y en los problemas resueltos se muestran otros procedimientos. Todas las soluciones serán para el intervalo  $0 \leq x < 2\pi$ .

{A} La ecuación puede factorizarse.

**EJEMPLO 15.2** Resuelva  $\sin x - 2 \sin x \cos x = 0$ .

Factorizando,  $\sin x - 2 \sin x \cos x = \sin x (1 - 2 \cos x) = 0$  e igualando a cero cada factor tenemos:

$$\begin{array}{l} \sin x = 0 \quad \text{y} \quad x = 0, \pi \\ 1 - 2 \cos x = 0 \quad \text{o} \quad \cos x = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x = \pi/3, 5\pi/3 \end{array}$$

Comprobación Para  $x = 0$ ,  $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 - 2(0)(1) = 0$   
 Para  $x = \pi/3$ ,  $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0$   
 Para  $x = \pi$ ,  $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = 0 - 2(0)(-1) = 0$   
 Para  $x = 5\pi/3$ ,  $\operatorname{sen} x - 2 \operatorname{sen} x \cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3} - 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3})(\frac{1}{2}) = 0$

Así, las soluciones pedidas ( $0 \leq x < 2\pi$ ) son  $x = 0, \pi/3, \pi$  y  $5\pi/3$ .

(S) Las diferentes funciones que aparecen en la ecuación pueden expresarse en términos de una función sencilla.

**EJEMPLO 15.3** Resuelva  $2 \tan^2 x + \sec^2 x = 2$ .

Reemplazando  $\sec^2 x$  por  $1 + \tan^2 x$ , se tiene

$$2 \tan^2 x + (1 + \tan^2 x) = 2 \quad 3 \tan^2 x = 1 \quad \text{y} \quad \tan x = \pm 1/\sqrt{3}$$

De  $\tan x = 1/\sqrt{3}$ ,  $x = \pi/6$  y  $7\pi/6$ ; de  $\tan x = -1/\sqrt{3}$ ,  $x = 5\pi/6$  y  $11\pi/6$ .

Después de revisar cada uno de estos valores en la ecuación original, se encuentra que las soluciones pedidas ( $0 \leq x < 2\pi$ ) son  $x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ .

La necesidad de verificar los resultados se ilustra en los Ejemplos 15.4 y 15.5.

**EJEMPLO 15.4** Resuelva  $\sec x + \tan x = 0$ .

Si se multiplica la ecuación  $\sec x + \tan x = \frac{1}{\cos x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 0$  por  $\cos x$ , se tiene  $1 + \operatorname{sen} x = 0$  o  $\operatorname{sen} x = -1$ ; entonces,  $x =$

$3\pi/2$ . Sin embargo, ni  $\sec x$  ni  $\tan x$  están definidas cuando  $x = 3\pi/2$  y la ecuación no tiene solución.

(C) Ambos miembros de la ecuación se elevan al cuadrado.

**EJEMPLO 15.5** Resuelva  $\operatorname{sen} x + \cos x = 1$ .

Si se utilizara el procedimiento de (B), se podría reemplazar  $\operatorname{sen} x$  por  $\pm \sqrt{1 - \cos^2 x}$  o  $\cos x$  por  $\pm \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x}$  y entonces, introducir los radicales. Para evitar esto, se escribe la ecuación en la forma  $\operatorname{sen} x = 1 - \cos x$  y se elevan al cuadrado ambos miembros. Se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}^2 x &= 1 - 2 \cos x + \cos^2 x & (1) \\ 1 - \cos^2 x &= 1 - 2 \cos x + \cos^2 x \\ 2 \cos^2 x - 2 \cos x &= 2 \cos x (\cos x - 1) = 0 \end{aligned}$$

De  $\cos x = 0$ ,  $x = \pi/2, 3\pi/2$ ; de  $\cos x = 1$ ,  $x = 0$ .

Comprobación: Para  $x = 0$ ,  $\operatorname{sen} x + \cos x = 0 + 1 = 1$   
 Para  $x = \pi/2$ ,  $\operatorname{sen} x + \cos x = 1 + 0 = 1$   
 Para  $x = 3\pi/2$ ,  $\operatorname{sen} x + \cos x = -1 + 0 \neq 1$

Así, las soluciones pedidas son  $x = 0$  y  $\pi/2$ .

El valor  $x = 3\pi/2$ , llamado *solución extraña*, se introdujo al elevar al cuadrado ambos miembros. Nótese que (1) se obtiene también cuando ambos miembros de  $\operatorname{sen} x = \cos x - 1$  se elevan al cuadrado y que  $x = 3\pi/2$  satisface esta última relación.

(D) Las soluciones con valores aproximados.

(NOTA: Como se utilizarán las propiedades de los números reales en la resolución de la ecuación, los valores aproximados de los ángulos se darán en radianes, los cuales pueden encontrarse utilizando la Tabla 3 del Apéndice 2 o con la calculadora. Estos valores no son exactos y, posiblemente no tendrán una concordancia exacta cuando se substituyan en la ecuación dada.)

**EJEMPLO 15.6** Resuelva  $4 \operatorname{sen} x = 3$ .

$$4 \operatorname{sen} x = 3 \quad \operatorname{sen} x = 3/4 = 0.75$$

El ángulo de referencia es 0.85 y las soluciones para  $x$  son  $x = 0.85$  y  $x = \pi - 0.85 = 3.14 - 0.85 = 2.29$ . (Véase Capítulo 7 para pasar el uso de ángulos de referencia.)

Comprobación: Para  $x = 0.85$ ,  $4 \operatorname{sen} 0.85 = 4(0.7513) = 3.0052 \approx 3$

Para  $x = 2.29$ ,  $4 \operatorname{sen} 2.29 = 4[\operatorname{sen}(3.14 - 2.29)] = 4[\operatorname{sen} 0.85] = 4(0.7513) = 3.0052 = 3$

Si se utilizara una calculadora,  $\operatorname{sen} 2.29$  se calcula directamente. Así,  $4 \operatorname{sen} 2.29 = 4(0.7523) = 3.0092 = 3$ .

De este modo, las soluciones con centésimas de radián de aproximación son 0.85 y 2.29.

(NOTA: Como las comprobaciones utilizan números aproximados, el símbolo  $\approx$  se utilizó para indicar que el resultado es aproximadamente igual al valor necesitado.)

**EJEMPLO 15.7** Resuelva  $15 \cos^2 x + 7 \cos x - 2 = 0$ .

$15 \cos^2 x + 7 \cos x - 2 = 0$ ,  $(3 \cos x + 2)(5 \cos x - 1) = 0$ , y  $\cos x = -2/3 = -0.6667$  y  $\cos x = 1/5 = 0.2$ .

De  $\cos x = -0.6667$ , el ángulo de referencia es 0.84 y  $x = \pi - 0.84 = 3.14 - 0.84 = 2.3$  y  $x = \pi + 0.84 = 3.14 + 0.84 = 3.98$ .

De  $\cos x = 0.2$ , el ángulo de referencia es 1.37 y  $x = 1.37$  y  $x = 2\pi - 1.37 = 6.28 - 1.37 = 4.91$ .

Así, las soluciones con centésimas de radián de aproximación para el valor de  $x$  son 0.84, 1.37, 3.98 y 4.91.

(E) La ecuación contiene múltiplos del ángulo.

**EJEMPLO 15.8** Resuelva  $\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ .

$\cos 2x - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ ,  $(1 - 2 \operatorname{sen}^2 x) - 3 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ ,  $-2 \operatorname{sen}^2 x - 3 \operatorname{sen} x + 2 = 0$ ,  $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x - 2 = 0$ ,  $(2 \operatorname{sen} x - 1)(\operatorname{sen} x + 2) = 0$  y  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$  y  $\operatorname{sen} x = -2$ .

De  $\operatorname{sen} x = \frac{1}{2}$ ,  $x = \pi/6$  y  $5\pi/6$ .

De  $\operatorname{sen} x = -2$ , no hay soluciones ya que  $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$  para toda  $x$ .

Las soluciones para  $x$  son  $\pi/6$  y  $5\pi/6$ .

**EJEMPLO 15.9** Resuelva  $2 \cos^2 2x = \cos 2x$ .

$2 \cos^2 2x = \cos 2x$ ,  $2 \cos^2 2x - \cos 2x = 0$ ,  $\cos 2x (2 \cos 2x - 1) = 0$  y  $\cos 2x = 0$  y  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ .

Como se quiere  $0 \leq x < 2\pi$ , se encuentran todos los valores de  $2x$ , tal que  $0 \leq 2x < 4\pi$ .

De  $\cos 2x = 0$ ,  $2x = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2$  y  $7\pi/2$  y  $x = \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4$ , y  $7\pi/4$ .

De  $\cos 2x = \frac{1}{2}$ ,  $2x = \pi/3, 5\pi/3, 7\pi/3$  y  $11\pi/3$ , y  $x = \pi/6, 5\pi/6, 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ .

Así, los ángulos buscados de  $x$  son  $\pi/6, \pi/4, 3\pi/4, 5\pi/6, 7\pi/6, 5\pi/4, 7\pi/4$  y  $11\pi/6$ .

(F) Ecuación que contiene semiángulos.

**EJEMPLO 15.10** Resuelva  $4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = 1$ .

*Primera Solución.*  $4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = 1$ ,  $4(\pm\sqrt{(1 - \cos x)/2})^2 = 1$ ,  $2 - 2 \cos x = 1$ ,  $\cos x = \frac{1}{2}$ , y  $x = \pi/3$  y  $5\pi/3$ .

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/3$  y  $5\pi/3$ .

*Segunda solución.*  $4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = 1$ ,  $\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2}x = \frac{1}{4}$  y  $\operatorname{sen} \frac{1}{2}x = \pm \frac{1}{2}$ . Como se quiere que  $0 \leq x < 2\pi$ , entonces se buscan todas las soluciones de  $\frac{1}{2}x$ , tal que  $0 \leq \frac{1}{2}x < \pi$ .

De  $\operatorname{sen} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ ,  $\frac{1}{2}x = \pi/6$  y  $5\pi/6$ , y  $x = \pi/3$  y  $5\pi/3$ .

De  $\operatorname{sen} \frac{1}{2}x = -\frac{1}{2}$ , como  $\operatorname{sen} \frac{1}{2}x \geq 0$  para toda  $x$ , tal que  $0 \leq \frac{1}{2}x < \pi$ , no hay solución.

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/3$  y  $5\pi/3$ .

## Problemas resueltos

Resuelva cada una de las ecuaciones trigonométricas de los problemas 15.1 a 15.19, para todos los valores de  $x$  tal que  $0 \leq x < 2\pi$ . (Si se desean tener todas las soluciones posibles, es necesario añadir  $+ 2n\pi$  a cada resultado obtenido, donde  $n$  es cero o cualquier entero positivo o negativo). En algunas soluciones se han omitido los detalles de la comprobación.

15.1  $2 \operatorname{sen} x - 1 = 0$ .

Aquí  $\operatorname{sen} x = 1/2$  y  $x = \pi/6$  y  $5\pi/6$ .

15.2  $\operatorname{sen} x \cos x = 0$ .

De  $\operatorname{sen} x = 0$ ,  $x = 0$  y  $\pi$ ; de  $\cos x = 0$ ,  $x = \pi/2$  y  $3\pi/2$ .

Las soluciones buscadas son  $x = 0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$ .

15.3  $(\tan x - 1)(4 \operatorname{sen}^2 x - 3) = 0$ .

De  $\tan x - 1 = 0$ ,  $\tan x = 1$ ,  $x = \pi/4$  y  $5\pi/4$ ; de  $4 \operatorname{sen}^2 x - 3 = 0$ ,  $\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{3}/2$   $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3, 5\pi/3$ .

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/4, \pi/3, 2\pi/3, 5\pi/4, 4\pi/3$  y  $5\pi/3$ .

15.4  $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 2 = 0$ .

Factorizando,  $(\operatorname{sen} x + 2)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$ .

De  $\operatorname{sen} x + 2 = 0$ ,  $\operatorname{sen} x = -2$  por tanto, no hay solución; de  $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ ,  $\operatorname{sen} x = 1$  y  $x = \pi/2$ . La solución buscada es  $x = \pi/2$ .

15.5  $3 \cos^2 x = \operatorname{sen}^2 x$ .

*Primera solución.* Si se reemplaza  $\operatorname{sen}^2 x$  por  $1 - \cos^2 x$ , se tiene  $3 \cos^2 x = 1 - \cos^2 x$  o  $4 \cos^2 x = 1$ . Entonces,  $\cos x = \pm 1/2$  y las soluciones buscadas son  $x = \pi/3, 2\pi/3, 4\pi/3$  y  $5\pi/3$ .

*Segunda solución.* Al dividir la ecuación entre  $\cos^2 x$ , se tiene  $3 = \tan^2 x$ . Entonces, se obtiene  $\tan x = \pm \sqrt{3}$  y las soluciones anteriores.

15.6  $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{csc} x = 1$ .

Al multiplicar la ecuación por  $\operatorname{sen} x$ ,  $2 \operatorname{sen}^2 x - 1 = \operatorname{sen} x$  y al reacomodar, se tiene

$$2 \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 1 = (2 \operatorname{sen} x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$$

De  $2 \operatorname{sen} x + 1 = 0$ ,  $\operatorname{sen} x = -1/2$  y  $x = 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ ; de  $\operatorname{sen} x - 1 = 0$ ,  $x = \pi/2$ .

Comprobación: Para  $x = \pi/2$ ,  $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{csc} x = 2(1) - 1 = 1$

Para  $x = 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ ,  $2 \operatorname{sen} x - \operatorname{csc} x = 2(-1/2) - (-2) = 1$

Las soluciones son  $x = \pi/2, 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ .

15.7  $2 \sec x = \tan x + \cot x$ .

Al transformar a senos y cosenos, y simplificar las fracciones, se obtiene

$$\frac{2}{\cos x} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \quad \text{o} \quad 2 \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$$

Entonces,  $\operatorname{sen} x = 1/2$  y  $x = \pi/6$  y  $5\pi/6$ .

15.8  $\tan x + 3 \cot x = 4$ .

Al multiplicar por  $\tan x$  y reacomodar, se tiene  $\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = (\tan x - 1)(\tan x - 3) = 0$ .

De  $\tan x - 1 = 0$ ,  $\tan x = 1$  y  $x = \pi/4$  y  $5\pi/4$ ; de  $\tan x - 3 = 0$ ,  $\tan x = 3$  y  $x = 1.25$  y  $4.39$ .

Comprobación: Para  $x = \pi/4$  y  $5\pi/4$ ,  $\tan x + 3 \cot x = 1 + 3(1) = 4$

Para  $x = 1.25$  y  $4.39$ ,  $\tan x + 3 \cot x = 3.0096 + 3(0.3323) = 4.0065 \approx 4$

Las soluciones son  $\pi/4, 1.25, 5\pi/4$  y  $4.39$ .

15.9  $\operatorname{csc} x + \cot x = \sqrt{3}$ .

*Primera solución.* Si se escribe la ecuación en la forma  $\operatorname{csc} x + \sqrt{3} - \cot x = 0$  y se eleva al cuadrado, se tiene

$$\operatorname{csc}^2 x = 3 - 2\sqrt{3} \cot x + \cot^2 x$$

Al sustituir  $\operatorname{csc}^2 x$  por  $1 + \cot^2 x$  y combinar se obtiene  $2\sqrt{3} \cot x - 2 = 0$ . Entonces,  $\cot x = 1/\sqrt{3}$  y  $x = \pi/3$  y  $4\pi/3$ .

Comprobación: Para  $x = \pi/3$ ,  $\csc x + \cot x = 2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}$   
 Para  $x = 4\pi/3$ ,  $\csc x + \cot x = -2/\sqrt{3} + 1/\sqrt{3} \neq \sqrt{3}$

La solución es  $x = \pi/3$ .

Segunda solución. Al realizar la sustitución adecuada, la ecuación se transforma en:

$$\frac{1}{\sin x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \sqrt{3} \quad \text{y al simplificar las fracciones} \quad 1 + \cos x = \sqrt{3} \sin x$$

Si se elevan al cuadrado ambos miembros, se tiene  $1 + 2 \cos x + \cos^2 x = 3 \sin^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$  o

$$4 \cos^2 x + 2 \cos x - 2 = 2(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) = 0$$

De  $2 \cos x - 1 = 0$ ,  $\cos x = 1/2$  y  $x = \pi/3$  y  $5\pi/3$ ; y  $\cos x + 1 = 0$ ,  $\cos x = -1$  y  $x = \pi$ .

Ahora bien,  $x = \pi/3$  es la solución. Los valores  $x = \pi$  y  $5\pi/3$  deben excluirse ya que  $\csc \pi$  no está definida, mientras  $\csc 5\pi/3$  y  $\cot 5\pi/3$  son negativas.

### 15.10 $\cos X - \sqrt{3} \sin X = 1$ .

Al poner la ecuación en la forma  $\cos x - 1 = \sqrt{3} \sin x$  y elevar al cuadrado, se tiene

$$\cos^2 x - 2 \cos x + 1 = 3 \sin^2 x = 3(1 - \cos^2 x)$$

así, combinando y factorizando

$$4 \cos^2 x - 2 \cos x - 2 = 2(2 \cos x + 1)(\cos x - 1) = 0$$

De  $2 \cos x + 1 = 0$ ,  $\cos x = -1/2$  y  $x = 2\pi/3$  y  $4\pi/3$ ; de  $\cos x - 1 = 0$ ,  $\cos x = 1$  y  $x = 0$ .

Comprobación: Para  $x = 0$ ,  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 1 - \sqrt{3}(0) = 1$   
 Para  $x = 2\pi/3$ ,  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1/2 - \sqrt{3}(\sqrt{3}/2) \neq 1$   
 Para  $x = 4\pi/3$ ,  $\cos x - \sqrt{3} \sin x = -1/2 - \sqrt{3}(-\sqrt{3}/2) = 1$

Las soluciones buscadas son  $x = 0$  y  $4\pi/3$ .

### 15.11 $2 \cos x = 1 - \sin x$ .

Como en el Problema 15.10, se obtiene

$$\begin{aligned} 4 \cos^2 x &= 1 - 2 \sin x + \sin^2 x \\ 4(1 - \sin^2 x) &= 1 - 2 \sin x + \sin^2 x \\ 5 \sin^2 x - 2 \sin x - 3 &= (5 \sin x + 3)(\sin x - 1) = 0. \end{aligned}$$

De  $5 \sin x + 3 = 0$ ,  $\sin x = -3/5 = -0.6000$ , el ángulo de referencia es  $0.64$  y  $x = 3.78$  y  $5.64$ ; de  $\sin x - 1 = 0$ ,  $\sin x = 1$  y  $x = \pi/2$ .

Comprobación: Para  $x = \pi/2$ ,  $2(0) = 1 - 1$   
 Para  $x = 3.78$ ,  $2(-0.8021) \neq 1 - (-0.5972)$   
 Para  $x = 5.64$ ,  $2(0.8021) \approx 1 - (-0.5972)$

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/2$  y  $5.64$ .

## Ecuaciones que involucran múltiplos de ángulos y semiángulos

15.12  $\operatorname{sen} 3x = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ .

Como la Y buscada es tal que  $0 \leq x < 2\pi$ ,  $3x$  debe ser tal que  $0 \leq 3x < 6\pi$ .

Entonces,  $3x = 5\pi/4, 7\pi/4, 13\pi/4, 15\pi/4, 21\pi/4, 23\pi/4$

y  $x = 5\pi/12, 7\pi/12, 13\pi/12, 5\pi/4, 7\pi/4, 23\pi/12$

Cada uno de estos valores es una solución.

15.13  $\operatorname{cos} \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}$ .

Como se busca una  $y$ , tal que  $0 \leq x < 2\pi$ ,  $\frac{1}{2}x$  debe ser tal que  $0 \leq \frac{1}{2}x < \pi$ .

Entonces,  $\frac{1}{2}x = \pi/3$  y  $x = 2\pi/3$

15.14  $\operatorname{sen} 2x + \operatorname{cos} x = 0$ .

Al sustituir por  $\operatorname{sen} 2x$ , se obtiene  $2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x + \operatorname{cos} x = \operatorname{cos} x (2 \operatorname{sen} x + 1) = 0$ .

De  $\operatorname{cos} x = 0$ ,  $x = \pi/2$  y  $3\pi/2$ ; de  $\operatorname{sen} x = -1/2$ ,  $x = 7\pi/6$  y  $11\pi/6$ .

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/2, 7\pi/6, 3\pi/2$  y  $11\pi/6$ .

15.15  $2 \operatorname{cos}^2 \frac{1}{2}x = \operatorname{cos}^2 x$ .

*Primera solución.* Si se sustituye  $1 + \operatorname{cos} x$  por  $2 \operatorname{cos}^2 \frac{1}{2}x$ , la ecuación se convierte en  $\operatorname{cos}^2 x - \operatorname{cos} x - 1 = 0$ ; entonces,  $\operatorname{cos} x =$

$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = 1.6180, -0.6180$ . Como  $\operatorname{cos} x$  no puede ser mayor que 1, se considera  $\operatorname{cos} x = -0.6180$  y se obtienen las soluciones  $x = 2.24$  y  $4.04$ .  
soluciones  $x = 2.24$  y  $4.04$ ,

*Segunda solución.* Para resolver  $\sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{1}{2}x = \operatorname{cos} x$  y  $\sqrt{2} \operatorname{cos} \frac{1}{2}x = -\operatorname{cos} x$ , se elevan al cuadrado y se obtiene la ecuación de este problema. La solución de la primera de estas ecuaciones es  $4.04$  y la solución de la segunda es  $2.24$ ,

15.16  $\operatorname{cos} 2x + \operatorname{cos} x + 1 = 0$ .

Al sustituir  $2 \operatorname{cos}^2 x - 1$  por  $\operatorname{cos} 2x$ , se tiene  $2 \operatorname{cos}^2 x + \operatorname{cos} x (2 \operatorname{cos} x + 1) = 0$ .

De  $\operatorname{cos} x = 0$ ,  $x = \pi/2$  y  $3\pi/2$ ; de  $\operatorname{cos} x = -1/2$ ,  $x = 2\pi/3$  y  $4\pi/3$ .

Las soluciones buscadas son  $x = \pi/2, 2\pi/3, 3\pi/2$  y  $4\pi/3$ .

15.17  $\tan 2x + 2 \operatorname{sen} x = 0$ .

Usando  $\tan 2x = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\operatorname{cos} 2x} = \frac{2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} 2x}$ , entonces se tiene.

$$\frac{2 \operatorname{sen} x \operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} 2x} + 2 \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} x \left( \frac{\operatorname{cos} x}{\operatorname{cos} 2x} + 1 \right) = 2 \operatorname{sen} x \left( \frac{\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} 2x}{\operatorname{cos} 2x} \right) = 0$$

De  $\operatorname{sen} x = 0$ ,  $x = 0, \pi$ ; de  $\operatorname{cos} x + \operatorname{cos} 2x = \operatorname{cos} x + 2 \operatorname{cos}^2 x - 1 = (2 \operatorname{cos} x - 1)(\operatorname{cos} x + 1) = 0$ ,  $x = \pi/3, 5\pi/3$  y  $\pi$ . Las soluciones buscadas son  $x = 0, \pi/3, \pi$  y  $5\pi/3$ .

15.18  $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{cos} 2x$ .

*Primera solución.* Sea  $2x = \theta$ ; entonces se tiene que resolver  $\operatorname{sen} \theta = \operatorname{cos} \theta$  para  $0 \leq \theta < 4\pi$ . Entonces,  $\theta = \pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4$  y  $13\pi/4$ , y  $x = \theta/2 = \pi/8, 5\pi/8, 9\pi/8$  y  $13\pi/8$  son soluciones.

*Segunda solución.* Al dividir entre  $\operatorname{cos} 2x$ , la ecuación se convierte en  $\tan 2x = 1$  para la cual  $2x = \pi/4, 5\pi/4, 9\pi/4$  y  $13\pi/4$  como en la primera solución.

15.19  $\operatorname{sen} 2x = \cos 4x$ .

Dado que  $\cos 4x = \cos 2(2x) = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 2x$ , la ecuación se transforma en

$$2 \operatorname{sen}^2 2x + \operatorname{sen} 2x - 1 = (2 \operatorname{sen} 2x - 1)(\operatorname{sen} 2x + 1) = 0$$

De  $2 \operatorname{sen} 2x - 1 = 0$  o  $\operatorname{sen} 2x = 1/2$ ,  $2x = \pi/6, 5\pi/6, 13\pi/6$  y  $17\pi/6$ ,  $x = \pi/12, 5\pi/12, 13\pi/12$  y  $17\pi/12$ ; de  $\operatorname{sen} 2x + 1 = 0$  o  $\operatorname{sen} 2x = -1$ ,  $2x = 3\pi/2$  y  $7\pi/2$  y  $x = 3\pi/4$  y  $7\pi/4$ . Todos estos valores son soluciones.

15.20 Resuelva el sistema

$$r \operatorname{sen} \theta = 3 \quad (1)$$

$$r = 4(1 + \operatorname{sen} \theta) \quad (2)$$

para  $r > 0$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

Dividiendo (2) por (1),  $1/\operatorname{sen} \theta = 4(1 + \operatorname{sen} \theta)/3$  o  $4 \operatorname{sen}^2 \theta + 4 \operatorname{sen} \theta - 3 = 0$  y

$$(2 \operatorname{sen} \theta + 3)(2 \operatorname{sen} \theta - 1) = 0$$

De  $2 \operatorname{sen} \theta - 1 = 0$ ,  $\operatorname{sen} \theta = 1/2$  y  $\theta = \pi/6$  y  $5\pi/6$ ; utilizando (1),  $r(1/2) = 3$  y  $r = 6$ . Observe que  $2 \operatorname{sen} \theta + 3 = 0$  se excluye dado que  $r > 0$  y  $\operatorname{sen} \theta > 0$  por (1).

Las soluciones buscadas son  $\theta = \pi/6$  y  $r = 6$ , y  $\theta = 5\pi/6$  y  $r = 6$ .

15.21 Resuelva  $\operatorname{Arccos} 2x = \operatorname{Arccsen} x$ .

Si  $x$  es positiva,  $\alpha = \operatorname{Arccos} 2x$  y  $\beta = \operatorname{Arccsen} x$  terminan en el cuadrante I; si  $x$  es negativa,  $\alpha$  termina en el cuadrante II y  $\beta$  en el cuadrante IV. Así,  $x$  debe ser positiva.

Para  $x$  positiva,  $\operatorname{sen} \beta = x$  y  $\cos \beta = \sqrt{1-x^2}$ . Si se toma el coseno de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\cos (\operatorname{Arccos} 2x) = \cos (\operatorname{Arccsen} x) = \cos \beta$$

Si se eleva al cuadrado,  $4x^2 = 1 - x^2$ ,  $5x^2 = 1$ , y  $x = \sqrt{5}/5 = 0.4472$ .

Comprobación:  $\operatorname{Arccos} 2x = \operatorname{Arccos} 0.8944 = 0.46 = \operatorname{arcsen} 0.4472$ . aproximando el ángulo a centésimas de radián.

15.22 Resuelva  $\operatorname{Arccos} (2x^2 - 1) = 2 \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$ .

Sea  $\alpha = \operatorname{Arccos} (2x^2 - 1)$  y  $\beta = \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$ ; entonces,  $\cos \alpha = 2x^2 - 1$  y  $\cos \beta = \frac{1}{2}$ .

Tomando el coseno de ambos miembros de la ecuación dada,

$$\cos \alpha = 2x^2 - 1 = \cos 2\beta = 2 \cos^2 \beta - 1 = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{2}$$

Entonces,  $2x^2 = \frac{1}{2}$  y  $x = \pm \frac{1}{2}$ .

Comprobación: Para  $x = \pm \frac{1}{2}$ ,  $\operatorname{Arccos} \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \operatorname{Arccos} \frac{1}{2}$  o  $2\pi/3 = 2(\pi/3)$ .

15.23 Resuelva  $\operatorname{Arccos} 2x - \operatorname{Arccos} x = \pi/3$ .

Si  $x$  es positiva,  $0 < \operatorname{Arccos} 2x < \operatorname{Arccos} x$ ; si  $x$  es negativa,  $\operatorname{Arccos} 2x > \operatorname{Arccos} x > 0$ . Así,  $x$  debe ser negativa.

Sea  $\alpha = \operatorname{Arccos} 2x$  y  $\beta = \operatorname{Arccos} x$ ; entonces  $\cos \alpha = 2x$ .

Sea  $\alpha = \operatorname{Arccos} 2x$  y  $\beta = \operatorname{Arccos} x$ ; entonces  $\cos \alpha = 2x$ ,  $\operatorname{sen} \alpha = \sqrt{1-4x^2}$ ,  $\cos \beta = x$  y  $\operatorname{sen} \beta = \sqrt{1-x^2}$  dado que tanto  $\alpha$  como  $\beta$  terminan en el cuadrante II.

Si se toma el coseno de ambos miembros de la ecuación,

$$\cos (\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta = 2x^2 + \sqrt{1-4x^2} \sqrt{1-x^2} = \cos \pi/3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{o} \quad \sqrt{1-4x^2} \sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2} - 2x^2$$

Si se eleva al cuadrado,  $1 - 5x^2 + 4x^4 = \frac{1}{4} - 2x^2 + 4x^4$ ,  $3x^2 = \frac{3}{4}$ , y  $x = -\frac{1}{2}$ .

Comprobación:  $\operatorname{Arccos} (-1) - \operatorname{Arccos} (-\frac{1}{2}) = \pi - 2\pi/3 = \pi/3$ .

15.24 Resuelva  $\text{Arcsen } 2x = \frac{1}{4}\pi - \text{Arcsen } x$ .

Sea  $\alpha = \text{Arcsen } 2x$  y  $\beta = \text{Arcsen } x$ ; entonces,  $\text{sen } \alpha = 2x$  y  $\text{sen } \beta = x$ . Si  $x$  es negativa,  $\alpha$  y  $\beta$  terminan en el cuadrante IV; así,  $x$  debe ser positiva y  $\beta$  agudo.

$$\text{sen } \alpha = \text{sen } \left(\frac{1}{4}\pi - \beta\right) = \text{sen } \frac{1}{4}\pi \cos \beta - \cos \frac{1}{4}\pi \text{sen } \beta$$

$$\text{o} \quad 2x = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{1-x^2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}x \quad \text{y} \quad (2\sqrt{2} + 1)x = \sqrt{1-x^2}$$

Elevarlo al cuadrado,  $(8 + 4\sqrt{2} + 1)x^2 = 1 - x^2$ ,  $x^2 = 1/(10 + 4\sqrt{2})$ , y  $x = 0.2527$ .

Comprobación:  $\text{Arcsen } 0.5054 = 0.53$ ;  $\text{Arcsen } 0.2527 = 0.26$ ,  $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{4}(3.14) = 0.79$ ; y  $0.53 = 0.79 - 0.26$ .

15.25 Resuelva  $\text{Arctan } x + \text{Arctan } (1 - x) = \text{Arctan } \frac{4}{3}$ .

Sea  $\alpha = \text{Arctan } x$  y  $\beta = \text{Arctan } (1 - x)$ ; entonces,  $\tan \alpha = x$  y  $\tan \beta = 1 - x$ .

Tomando la tangente de ambos lados de la ecuación,

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{x + (1 - x)}{1 - x(1 - x)} = \frac{1}{1 - x + x^2} = \tan(\text{Arctan } \frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$$

Entonces,  $3 = 4 - 4x + 4x^2$ ,  $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2 = 0$ , y  $x = \frac{1}{2}$ .

Comprobación:  $\text{Arctan } \frac{1}{2} + \text{Arctan } (1 - \frac{1}{2}) = 2 \text{Arctan } 0.5000 = 2(0.46) = 0.92$  y  $\text{Arctan } \frac{4}{3} = \text{Arctan } 1.3333 = 0.93$ .

### Problemas propuestos

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones para toda  $x$ , tal que  $0 \leq x < 2\pi$ . Utilice la Tabla 3 del Apéndice 2 cuando encuentre valores aproximados de  $x$ .

- 15.26  $\text{sen } x = \sqrt{3}/2$ . Resp.  $\pi/3, 2\pi/3$
- 15.27  $\cos^2 x = 1/2$ . Resp.  $\pi/4, 3\pi/4, 5\pi/4, 7\pi/4$
- 15.28  $\text{sen } x \cos x = 0$ . Resp.  $0, \pi/2, \pi, 3\pi/2$
- 15.29  $(\tan x - 1)(2 \text{sen } x + 1) = 0$ . Resp.  $\pi/4, 7\pi/6, 5\pi/4, 11\pi/6$
- 15.30  $2 \text{sen}^2 x - \text{sen } x - 1 = 0$ . Resp.  $\pi/2, 7\pi/6, 11\pi/6$
- 15.31  $\text{sen } 2x + \text{sen } x = 0$ . Resp.  $0, 2\pi/3, \pi, 4\pi/3$
- 15.32  $\cos x + \cos 2x = 0$ . Resp.  $\pi/3, \pi, 5\pi/3$
- 15.33  $2 \tan x \text{sen } x - \tan x = 0$ . Resp.  $0, \pi/6, 5\pi/6, \pi$
- 15.34  $2 \cos x + \sec x = 3$ . Resp.  $0, \pi/3, 5\pi/3$
- 15.35  $2 \text{sen } x + \csc x = 3$ . Resp.  $\pi/6, \pi/2, 5\pi/6$
- 15.36  $\text{sen } x + 1 = \cos x$ . Resp.  $0, 3\pi/2$
- 15.37  $\sec x - 1 = \tan x$ . Resp.  $0$

- 15.38  $2 \cos x + 3 \sin x = 2$ . Resp. 0, 1.96
- 15.39  $3 \sin x + 5 \cos x + 5 = 0$ . Resp.  $7\pi$ , 4.22
- 15.40  $1 + \sin x = 2 \cos x$ . Resp.  $0.64, 3\pi/2$
- 15.41  $3 \sin x + 4 \cos x = 2$ . Resp. 1.80, 5.76
- 15.42  $\sin 2x = -\sqrt{3}/2$ . Resp.  $2\pi/3, 5\pi/6, 5\pi/3, 11\pi/6$
- 15.43  $\tan 3x = 1$ . Resp.  $\pi/12, 5\pi/12, 3\pi/4, 13\pi/12, 17\pi/12, 7\pi/4$
- 15.44  $\cos x/2 = \sqrt{3}/2$ . Resp.  $7\pi/3$
- 15.45  $\cot x/3 = -1/\sqrt{3}$ . Resp. No hay solución en el intervalo
- 15.46  $\sin x \cos x = 1/2$  Resp.  $7\pi/4, 5\pi/4$
- 15.47  $\sin x/2 + \cos x = 1$ . Resp. 0,  $\pi/3, 5\pi/3$

Resuelva cada uno de los sistemas siguientes para  $r > 0$  y  $0 \leq \theta < 2\pi$ .

- 15.48  $r = a \sin \theta$   
 $r = a \cos 2\theta$  Resp.  $\theta = 7\pi/6, r = a/2$   
 $\theta = 5\pi/6, r = a/2; 0 = 3\pi/2, r = -a$
- 15.49  $r = a \cos \theta$   
 $r = a \sin 2\theta$  Resp.  $\theta = \pi/2, r = 0; 0 = 3\pi/2, r = 0$   
 $\theta = \pi/6, r = \sqrt{3}a/2$   
 $\theta = 5\pi/6, r = -\sqrt{3}a/2$
- 15.50  $r = 4(1 + \cos \theta)$   
 $r = 3 \sec \theta$  Resp.  $\theta = \pi/3, r = 6$   
 $\theta = 5\pi/3, r = 6$

Resuelva cada una de las siguientes ecuaciones.

- 15.51  $\text{Arctan } 2x + \text{Arctan } x = 7\pi/4$ . Resp.  $x = 0.2808$
- 15.52  $\text{Arcsen } x - \text{Arctan } x = \pi/2$ . Resp.  $x = 0.7862$
- 15.53  $\text{Arceos } x + \text{Arctan } x = \pi/2$ . Resp.  $x = 0$

# Números complejos

## 16.1 NÚMEROS IMAGINARIOS

La raíz cuadrada de un número negativo (por ejemplo  $\sqrt{-1}$ ,  $\sqrt{-5}$ , y  $\sqrt{-9}$ ) recibe el nombre de *número imaginario*. Como por definición  $\sqrt{-5} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{-1}$  y  $\sqrt{-9} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{-1} = 3\sqrt{-1}$ , es conveniente utilizar el símbolo  $i = \sqrt{-1}$  y adoptar  $\sqrt{-5} = i\sqrt{5}$  y  $\sqrt{-9} = 3i$  como una forma estándar de representar estos números.

El símbolo  $i$  tiene la propiedad  $i^2 = -1$ ; y para potencias integrales mayores se tiene que  $i^3 = i^2 \cdot i = (-1)i = -i$ ,  $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$ ,  $i^5 = i^4 \cdot i = i$ , etc.

El uso de la forma estándar, simplifica las operaciones con los números imaginarios y elimina la posibilidad de cometer algunos errores comunes. Así,  $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = \sqrt{-36} = 6i$  debido a que  $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{4} = 3i(2) = 6i$  pero  $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} \neq \sqrt{36}$  debido a que  $\sqrt{-9} \cdot \sqrt{-4} = (3i)(2i) = 6i^2 = -6$ .

## 16.2 NÚMEROS COMPLEJOS

Un número de la forma  $a + bi$ , donde  $a$  y  $b$  son números reales, se conoce como *número complejo*. El primer término,  $a$ , es la *parte real* del número complejo y el segundo término  $bi$  es la *parte imaginaria*.

Puede razonarse que los números complejos incluyen a todos los números reales puros y a todos los números imaginarios puros. Por ejemplo,  $5 = 5 + 0i$  y  $3i = 0 + 3i$ .

Se dice que dos números complejos  $a + bi$  y  $c + di$  son *iguales*, si y sólo si  $a = c$  y  $b = d$ .

El *conjugado* de un número complejo  $a + bi$  es el número complejo  $a - bi$ . Así,  $2 + 3i$  y  $2 - 3i$ , y  $-3 + 4i$  y  $-3 - 4i$  son pares de números complejos conjugados.

## 16.3 OPERACIONES ALGEBRAICAS

**Suma.** Para sumar dos números complejos, se suman las partes reales por un lado, y las partes imaginarias por otro.

**EJEMPLO 16.1**  $(2 + 3i) + (4 - 5i) = (2 + 4) + (3 - 5)i = 6 - 2i$ .

**Resta.** Para restar dos números complejos, se restan las partes reales por un lado, y las partes imaginarias por otro.

**EJEMPLO 16.2**  $(2 + 3i) - (4 - 5i) = (2 - 4) + [3 - (-5)]i = -2 + 8i$ .

**Multiplicación.** Para multiplicar dos números complejos, realice la operación considerando a los números como si fueran binomios comunes y reemplace  $i^2$  por  $-1$ .

**EJEMPLO 16.3**  $(2 + 3i)(4 - 5i) = 8 + 2i - 15i^2 = 8 + 2i - 15(-1) = 23 + 2i.$

*División.* Para dividir dos números complejos, multiplique el numerador y el denominador por el complejo conjugado del denominador.

**EJEMPLO 16.4** 
$$\frac{2 + 3i}{4 - 5i} = \frac{(2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{(8 - 15) + (10 + 12)i}{16 + 25} = -\frac{7}{41} + \frac{22}{41}i.$$

[Nota la fórmula para el resultado; es la siguiente  $-\frac{-7 + 22i}{41}$  y tampoco  $-\frac{1}{41}(-7 + 22i).$ ]

(Véanse Probs. 16.1 a 16.9.)

## 16.4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE NÚMEROS COMPLEJOS

El número complejo  $x + yi$  puede representarse gráficamente por el punto  $P$  [véase Figura 16-1(a)] cuyas coordenadas rectangulares son  $(x, y)$ .

El punto  $O$ , cuyas coordenadas son  $(0, 0)$  representa al número complejo  $0 + 0i = 0$ . Todos los puntos localizados sobre el eje de las  $x$  tienen coordenadas de la forma  $(x, 0)$  y corresponden a los números reales  $x + 0i = x$ . Por esta razón, al eje de las  $x$  se le llama *eje de los reales*. Todos los puntos localizados sobre el eje  $y$  tienen coordenadas de la forma  $(0, y)$ , las cuales corresponden a los números imaginarios  $0 + yi = yi$ . Al eje  $y$  se le llama *eje de los imaginarios*. El plano en el que se representan los números complejos se llama *plano complejo*.

La representación de un número complejo en el plano complejo puede hacerse con un punto  $P$ , y también por medio de un segmento dirigido o vector  $OP$ . [Véase Figura 16-1(b).]

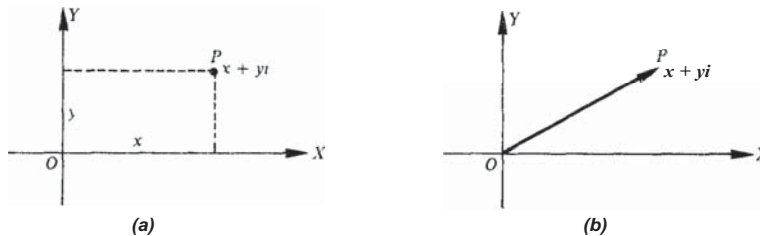


Fig. 16-1

## 16.5 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE LA SUMA Y LA RESTA

Sean  $z_1 = x_1 + iy_1$  y  $z_2 = x_2 + iy_2$  dos números complejos. La representación vectorial de dichos números [Figura 16-2(a)] sugiere la conocida ley del paralelogramo para determinar en forma gráfica, la suma  $z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2)$ .

Como  $z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$ , la diferencia  $z_1 - z_2$  de dos números complejos, puede representarse gráficamente aplicando la ley del paralelogramo a  $x_1 + iy_1$  y  $-x_2 - iy_2$ . [Véase Figura 16-2(b).]

En la Figura 16-2(c) se muestran tanto la suma  $OR = z_1 + z_2$  como la diferencia  $OS = z_1 - z_2$ . Observe que los segmentos  $OS$  y  $P_2P_1$  (la otra diagonal de  $OP_2RP_1$ ) son iguales.

(Véase Prob. 16.11.)

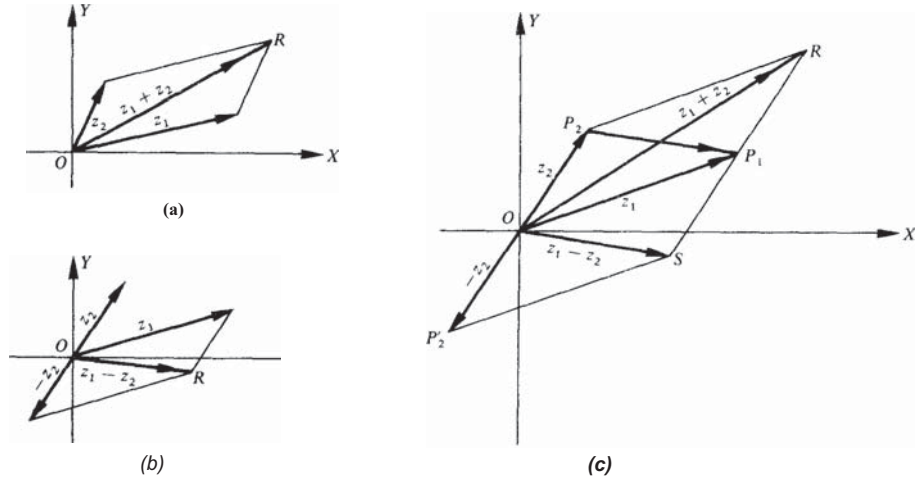


Fig. 16-2

16.6 FORMA POLAR O TRIGONOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Sea el número complejo  $x + yi$  representado por el vector  $OP$  (Figura 16-3(a)). Este vector (y por lo tanto, el número complejo) puede describirse en términos de la longitud  $r$  del vector y por cualquier ángulo positivo  $\theta$  que forme el vector con el eje positivo de las  $x$  (eje real positivo). Al número  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  se le llama *módulo* o *valor absoluto* del número complejo. El ángulo  $\theta$ , llamado *amplitud* del número complejo, se escoge, generalmente, como el ángulo positivo menor cuya  $\tan \theta = y/x$ , aunque algunas veces es conveniente elegir algún ángulo cotermino.

De la Figura 16-3(a),  $x = r \cos \theta$  y  $y = r \sin \theta$ ; entonces,  $z = x + yi = r \cos \theta + ir \sin \theta = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ . La expresión  $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$  se denomina *forma polar o trigonométrica* y  $z = x + yi$  se denomina *forma rectangular* del número complejo  $z$ . En algunas ocasiones se utiliza una notación abreviada  $z = r \text{ cis } \theta$ .

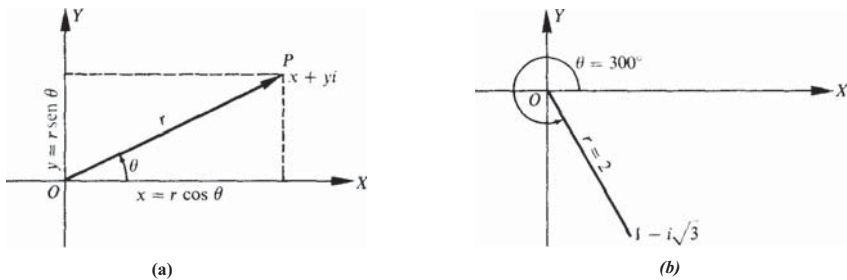


Fig. 16-3

**EJEMPLO 16.5** Exprese en forma polar  $z = 1 - i\sqrt{3}$  en forma polar. [Véase Fig. 16-3(6).]

El módulo es  $r = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = 2$ . Dado que  $\tan \theta = y/x = \sqrt{3}/1 = \sqrt{3}$  la amplitud  $\theta$  puede ser  $120^\circ$  o  $300^\circ$ . Ahora se sabe que  $P$  está en el cuadrante IV; por lo que,  $\theta = 300^\circ$  y la forma polar buscada es  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) = 2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$ . Me-  
te que  $z$  puede ser representado también en la forma  $z = 2[\cos(300^\circ + n360^\circ) + i \operatorname{sen}(300^\circ + n360^\circ)]$ , donde  $n$  es cualquier entero

**EJEMPLO 16.6** Exprese en forma rectangular el número complejo  $z = 8(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$ .

Dado que  $\cos 210^\circ = -\sqrt{3}/2$  y  $\operatorname{sen} 210^\circ = -1/2$ ,

$$z = 8(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) = 8[-\sqrt{3}/2 + i(-1/2)] = -4\sqrt{3} - 4i$$

es la forma rectangular buscada.

(Véanse Probs. 16.12 a 16.13.)

## 16.7 MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN EN FORMA POLAR

*Multiplicación.* El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y la amplitud del producto es la suma de sus argumentos.

*División.* El módulo del cociente de dos números complejos es igual al módulo del dividendo dividido entre el módulo del divisor, y la amplitud del cociente es igual a la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor. Para la demostración de estos teoremas véase Prob. 16.14.

**EJEMPLO 16.7** Encontrar (a) el producto  $z_1 z_2$ , (b) el cociente  $z_1/z_2$ , y (c) el cociente  $z_2/z_1$ , donde  $z_1 = 2(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ)$  y  $z_2 = 8(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$ .

(a) El módulo del producto es  $2(8) = 16$ . La amplitud es  $300^\circ + 210^\circ = 510^\circ$ , pero, por convención, debe tomarse el ángulo cotermino-  
nal menor  $510^\circ - 360^\circ = 150^\circ$ . Así,  $z_1 z_2 = 16(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$ .

(b) El módulo del cociente  $z_1/z_2$  es  $2/8 = 1/4$  la amplitud es  $300^\circ - 210^\circ = 90^\circ$ . Así,  $z_1/z_2 = 1/4(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ .

(c) El módulo del cociente  $z_2/z_1$  es  $8/2 = 4$ . La amplitud es  $210^\circ - 300^\circ = -90^\circ$ , pero utilizando el ángulo cotermino-  
nal positivo más pequeño  $-90^\circ + 360^\circ = 270^\circ$ . Así,

$$z_2/z_1 = 4(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$$

[NOTA: Para los ejemplos 16.5 y 16.6 los números son

$$z_1 = 1 - i\sqrt{3} \quad \text{y} \quad z_2 = -4\sqrt{3} - 4i$$

en forma rectangular. Entonces

$$z_1 z_2 = (1 - i\sqrt{3})(-4\sqrt{3} - 4i) = -8\sqrt{3} + 8i = 16(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$$

como en (a), y

$$\begin{aligned} \frac{z_2}{z_1} &= \frac{-4\sqrt{3} - 4i}{1 - i\sqrt{3}} = \frac{(-4\sqrt{3} - 4i)(1 + i\sqrt{3})}{(1 - i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})} = \frac{-16i}{4} = -4i \\ &= 4(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) \end{aligned}$$

como en (c).]

(Véanse Probs. 16.15 y 16.16.)

### 16.8 TEOREMA DE MOIVRE

Si  $n$  es cualquier número racional,

$$[r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]^n = r^n(\cos n\theta + i \operatorname{sen} n\theta)$$

La demostración de este teorema se encuentra fuera de los objetivos de este libro; en el Prob. 16.17 se da una comprobación para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

EJEMPLO 16.8

$$\begin{aligned} (\sqrt{3} - i)^{10} &= [2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)]^{10} \\ &= 2^{10}(\cos 10 \cdot 330^\circ + i \operatorname{sen} 10 \cdot 330^\circ) \\ &= 1024(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 1024(1/2 + i\sqrt{3}/2) \\ &= 512 + 512i\sqrt{3} \end{aligned}$$

(Véase Prob. 16.18.)

### 16.9 RAICES DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS

Se establece, sin demostración, el siguiente teorema: Un número complejo  $a + bi = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$  tiene exactamente  $n$  distintas raíces  $n$ -ésimas.

El procedimiento para encontrar estas raíces se da en el ejemplo 16.9.

EJEMPLO 16.9 Encuentre las raíces quintas de  $4 - 4i$ .

La forma polar más usual de  $4 - 4i$  es  $4\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$  pero debe utilizarse una forma más general

$$4\sqrt{2}[\cos(315^\circ + k360^\circ) + i \operatorname{sen}(315^\circ + k360^\circ)]$$

donde  $k$  es un entero incluyendo al cero.

Utilizando el teorema de De Moivre, las raíces quintas de  $4 - 4i$  están dadas por

$$\begin{aligned} &\{4\sqrt{2}[\cos(315^\circ + k360^\circ) + i \operatorname{sen}(315^\circ + k360^\circ)]\}^{1/5} \\ &= (4\sqrt{2})^{1/5} \left( \cos \frac{315^\circ + k360^\circ}{5} + i \operatorname{sen} \frac{315^\circ + k360^\circ}{5} \right) \\ &= \sqrt{2}[\cos(63^\circ + k72^\circ) + i \operatorname{sen}(63^\circ + k72^\circ)] \end{aligned}$$

Al asignar los valores de  $k = 0, 1, 2, \dots$ , se tiene

$$\begin{aligned} k = 0: & \sqrt{2}(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ) = R_1 \\ k = 1: & \sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ) = R_2 \\ k = 2: & \sqrt{2}(\cos 207^\circ + i \operatorname{sen} 207^\circ) = R_3 \\ k = 3: & \sqrt{2}(\cos 279^\circ + i \operatorname{sen} 279^\circ) = R_4 \\ k = 4: & \sqrt{2}(\cos 351^\circ + i \operatorname{sen} 351^\circ) = R_5 \\ k = 5: & \sqrt{2}(\cos 423^\circ + i \operatorname{sen} 423^\circ) \\ &= \sqrt{2}(\cos 63^\circ + i \operatorname{sen} 63^\circ) = R_1, \text{ etc.} \end{aligned}$$

Así, las cinco raíces se obtienen asignando los valores de 0, 1, 2, 3, 4 (esto es, de 0, 1, 2, 3, ...,  $n-1$ ) a  $k$ .

(Véase también el Prob. 16.19.)

El módulo de cada raíz es  $\sqrt{2}$ ; por esto, las raíces se encuentran sobre una circunferencia de radio  $\sqrt{2}$  con centro en el origen. La diferencia en la amplitud de dos raíces consecutivas es de  $72^\circ$ ; como se muestra en la Figura 16-4, las raíces están igualmente espaciadas sobre la circunferencia.

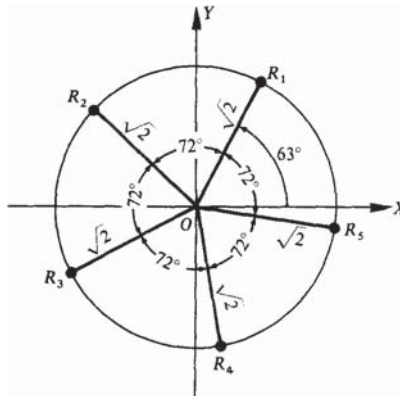


Fig. 16-4

### Problemas resueltos

En los Problemas 16.1 al 16.6, realice las operaciones indicadas, simplifique y escriba el resultado en la forma  $a + bi$ .

$$16.1 \quad (3 - 4i) + (-5 + 7i) = (3 - 5) + (-4 + 7)i = -2 + 3i$$

$$16.2 \quad (4 + 2i) - (-1 + 3i) = [4 - (-1)] + (2 - 3)i = 5 - i$$

$$16.3 \quad (2 + i)(3 - 2i) = (6 + 2) + (-4 + 3)i = 8 - i$$

$$16.4 \quad (3 + 40)(3 - 4i) = 9 + 16 = 25$$

$$16.5 \quad \frac{1 + 3i}{2 + i} = \frac{(1 + 3i)(2 - i)}{(2 + i)(2 - i)} = \frac{(2 + 3) + (-1 + 6)i}{4 + 1} = 1 + i$$

$$16.6 \quad \frac{3-2i}{2-3i} = \frac{(3-2i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{(6+6)+(9-4)i}{4+9} = \frac{12}{13} + \frac{5}{13}i$$

16.7 encuentre  $x$  y  $y$  dado que  $2x - yi = 4 + 3i$ .

Aque  $2x = 4$  y  $-y = 3$ ; entonces,  $x = 2$  y  $y = -3$ .

18.8 Demuestre que los números complejos conjugados  $2 + i$  y  $2 - i$  son raíces de la ecuación cuadrática  $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$\text{para } x=2+i \quad (2+i)^2 - 4(2+i) + 5 = 4 + 4i + i^2 - 8 - 4i + 5 = 0.$$

$$\text{para } x=2-i \quad (2-i)^2 - 4(2-i) + 5 = 4 - 4i + i^2 - 8 + 4i + 5 = 0.$$

Debido a que cada número satisface la ecuación, se considera una raíz de la ecuación.

16.9 demuestre que ; el conjugado de la suma de dos números complejos es igual a la suma de sus conjugados.

Sean los números complejos  $a + bi$  y  $c + di$ . Su suma es  $(a + c) + (b + d)i$ , y el conjugado de la suma es  $(a + c) - (b + d)i$ .

El conjugado de cada uno de los dos números dados es  $a - bi$  y  $c - di$  y su suma es

$$(a + c) + (-b - d)i = (a + c) - (b + d)i$$

16.10 Represente gráficamente los siguientes números complejos (en forma de vectores).

$$(a) 3 + 2i, \quad (b) 2 - i, \quad (c) -2 + i, \quad (d) -1 - 3i$$

En cada caso, se localizan las siguientes coordenadas  $(3, 2)$ ,  $(2, -1)$ ,  $(-2, 1)$ ,  $(-1, -3)$  y posteriormente, se une cada una con el origen  $O$ .

16.11 Realice gráficamente las siguientes operaciones;

$$(i) (3 + 4i) + (2 + 5i), \quad (b) (3 + 4i) + (2 - 3i), \quad (c) (4 + 3i) - (2 + i), \quad (d) (4 + 3i) - (2 - i)$$

Para (a) y (b), trace los dos vectores como en las Figuras 16-5 (a) y (b) y aplique la ley del paralelogramo.

Para (c) trace los vectores que representan  $4 + 3i$  y de  $-2 - i$  y aplique la ley del paralelogramo, como se muestra en la Figura 16-5 (c).

Para (d) trace los vectores que representan  $4 + 3i$  y de  $-2 + i$  y aplique la ley del paralelogramo, como se muestra en la Figura 16-5 (d).

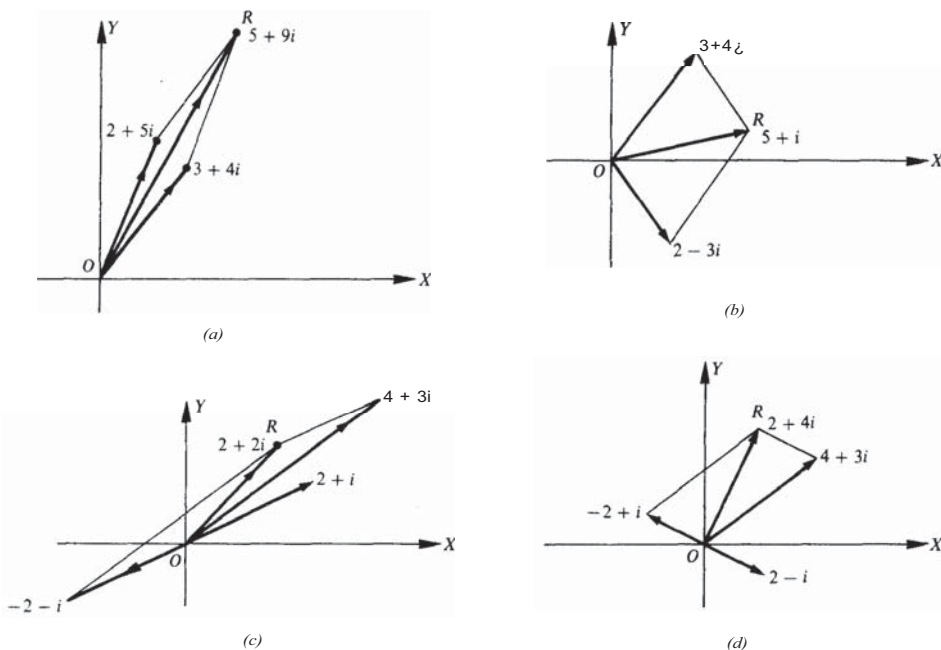


Fig. 16-5

16.12 Expresé cada uno de los siguientes números complejos  $z$  en forma polar:

- (a)  $-1 + i\sqrt{3}$ , (b)  $6\sqrt{3} + 6i$ , (c)  $2 - 2i$ , (d)  $-3 = -3 + 0i$ , (e)  $4i = 0 + 4i$ , (f)  $-3 - 4i$

(a)  $P$  pertenece al segundo cuadrante;  $r = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$ ;  $\tan \theta = \sqrt{3}/(-1) = -\sqrt{3}$  y  $\theta = 120^\circ$ .  
Así,  $z = 2(\cos 120^\circ + i \sen 120^\circ)$ .

(b)  $P$  pertenece al primer cuadrante;  $r = \sqrt{(6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12$ ;  $\tan \theta = 6/6\sqrt{3} = 1/\sqrt{3}$  y  $\theta = 30^\circ$ .  
Así,  $z = 12(\cos 30^\circ + i \sen 30^\circ)$ .

(c)  $P$  pertenece al cuarto cuadrante;  $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ ;  $\tan \theta = -2/2 = -1$  y  $\theta = 315^\circ$ .  
Así  $z = 2\sqrt{2}(\cos 315^\circ + i \sen 315^\circ)$ .

(d)  $P$  se encuentra en el eje negativo de las  $x$  y  $\theta = 180^\circ$ ;  $r = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3$ .  
Así,  $z = 3(\cos 180^\circ + i \sen 180^\circ)$ .

(e)  $P$  se encuentra en el eje positivo de las  $y$  y  $\theta = 90^\circ$ ;  $r = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$ .  
Así,  $z = 4(\cos 90^\circ + i \sen 90^\circ)$ .

(f)  $P$  pertenece al tercer cuadrante;  $r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = 5$ ;  $\tan \theta = -4/(-3) = 1.3333$  y  $\theta = 233^\circ 8'$ .  
Así,  $z = 5(\cos 233^\circ 8' + i \sen 233^\circ 8')$ .  $\theta$  no es un ángulo especial, debe ser aproximado para encontrar la forma polar.

16.13 Exprese cada uno de los siguientes números complejos  $z$  en forma rectangular:

(a)  $4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$  (c)  $3(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$

(b)  $2(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$  (d)  $5(\cos 128^\circ + i \operatorname{sen} 128^\circ)$ .

(a)  $4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 4[-1/2 + i(-\sqrt{3}/2)] = -2 - 2i\sqrt{3}$

(b)  $2(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ) = 2[1/\sqrt{2} + i(-1/\sqrt{2})] = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$

(c)  $3(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) = 3[0 + i(1)] = 3i$

(d)  $5(\cos 128^\circ + i \operatorname{sen} 128^\circ) = 5[-0.6157 + i(0.7880)] = -3.0785 + 3.9400i$  Dado que  $128^\circ$  no es un ángulo especial sus valores son aproximados

16.14 Compruebe: (a) El módulo del producto de dos números complejos es el producto de sus módulos, y la amplitud del producto es la suma de sus amplitudes.  
 (b) El módulo del cociente de dos números complejos, es el módulo del dividendo dividido entre el módulo del divisor, y su amplitud es la amplitud del dividendo menos la amplitud del divisor.

Sea  $z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)$  y  $z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$ .

(a)  $z_1 z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1) \cdot r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)$

$$= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)]$$

$$= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

(b)  $\frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)} = \frac{r_1(\cos \theta_1 + i \operatorname{sen} \theta_1)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}{r_2(\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2)(\cos \theta_2 - i \operatorname{sen} \theta_2)}$

$$= \frac{r_1}{r_2} \frac{(\cos \theta_1 \cos \theta_2 + \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2) + i(\operatorname{sen} \theta_1 \cos \theta_2 - \cos \theta_1 \operatorname{sen} \theta_2)}{\cos^2 \theta_2 + \operatorname{sen}^2 \theta_2}$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

16.15 Realice las operaciones indicadas, expresando los resultados tanto en forma polar como en forma rectangular.

(a)  $5(\cos 170^\circ + i \operatorname{sen} 170^\circ) \cdot (\cos 55^\circ + i \operatorname{sen} 55^\circ)$

(b)  $2(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ) \cdot 3(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$

(c)  $6(\cos 110^\circ + i \operatorname{sen} 110^\circ) \cdot \frac{1}{2}(\cos 212^\circ + i \operatorname{sen} 212^\circ)$

(d)  $10(\cos 305^\circ + i \operatorname{sen} 305^\circ) \div 2(\cos 65^\circ + i \operatorname{sen} 65^\circ)$

(e)  $4(\cos 220^\circ + i \operatorname{sen} 220^\circ) \div 2(\cos 40^\circ + i \operatorname{sen} 40^\circ)$

(f)  $6(\cos 230^\circ + i \operatorname{sen} 230^\circ) \div 3(\cos 75^\circ + i \operatorname{sen} 75^\circ)$

(a) El módulo del producto es  $5(1) = 5$  y la amplitud es  $170^\circ + 55^\circ = 225^\circ$ .

En forma polar el producto es  $5(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$ , y en rectángulo la forma del producto es  $5(-\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2) = -5\sqrt{2}/2 - 5i\sqrt{2}/2$ .

- (b) El módulo del producto es  $2(3) = 6$  y la amplitud es  $50^\circ + 40^\circ = 90^\circ$ .  
La forma polar del producto es  $6(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ)$ , y la forma rectangular es  $6(\theta + i) = 6i$ .
- (c) El módulo del producto es  $6(\frac{1}{2}) = 3$  y la amplitud es  $110^\circ + 212^\circ = 322^\circ$ .  
La forma polar del producto es  $3(\cos 322^\circ + i \operatorname{sen} 322^\circ)$  y la forma rectangular es aproximadamente  $3(0.7880 - 0.6157i) = 2.3640 - 1.8471i$ .
- (d) El módulo del cociente es  $10/2 = 5$  y la amplitud es  $305^\circ - 65^\circ = 240^\circ$ .  
La forma polar del cociente es  $5(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$  y la forma rectangular es  $5(-1/2 - i\sqrt{3}/2) = -5/2 - 5i\sqrt{3}/2$ .
- (e) El módulo del cociente es  $4/2 = 2$  y la amplitud es  $220^\circ - 40^\circ = 180^\circ$ .  
La forma polar del cociente es  $2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$  y la forma rectangular es  $2(-1 + 0i) = -2$ .
- (f) El módulo del cociente es  $6/3 = 2$  y la amplitud es  $230^\circ - 75^\circ = 155^\circ$ .  
La forma polar del cociente es  $2(\cos 155^\circ + i \operatorname{sen} 155^\circ)$   
y la forma rectangular es aproximadamente,  $2(-0.9063 + 0.4226i) = -1.8126 + 0.8452i$ .

16.16 Exprese cada uno de los siguientes incisos en forma polar, realice las operaciones que se indican y entregue los resultados en forma rectangular.

- (a)  $(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i)$                       (d)  $-2 \div (-\sqrt{3} + i)$
- (b)  $(3 - 3i\sqrt{3})(-2 - 2i\sqrt{3})$                       (e)  $6i \div (-3 - 3i)$
- (c)  $(4 - 4i\sqrt{3}) \div (-2\sqrt{3} + 2i)$                       (f)  $(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3})$
- (a)  $(-1 + i\sqrt{3})(\sqrt{3} + i) = 2(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) \cdot 2(\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$   
 $= 4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 4(-\sqrt{3}/2 + \frac{1}{2}i) = -2\sqrt{3} + 2i$
- (b)  $(3 - 3i\sqrt{3})(-2 - 2i\sqrt{3}) = 6(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \cdot 4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ)$   
 $= 24(\cos 540^\circ + i \operatorname{sen} 540^\circ) = 24(-1 + 0i) = -24$
- (c)  $(4 - 4i\sqrt{3}) \div (-2\sqrt{3} + 2i) = 8(\cos 300^\circ + i \operatorname{sen} 300^\circ) \div 4(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$   
 $= 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\sqrt{3}/2 + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$
- (d)  $-2 \div (-\sqrt{3} + i) = 2(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ) \div 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ)$   
 $= \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i$
- (e)  $6i \div (-3 - 3i) = 6(\cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ) \div 3\sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ)$   
 $= \sqrt{2}(\cos 225^\circ + i \operatorname{sen} 225^\circ) = -1 - i$
- (f)  $(1 + i\sqrt{3})(1 + i\sqrt{3}) = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) \cdot 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$   
 $= 4(\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ) = 4(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3}$

16.17 Verifique el teorema de De Moivre para  $n = 2$  y  $n = 3$ .

Sea  $z = r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)$ .

Para  $n = 2$ :  $z^2 = [r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)][r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]$   
 $= r^2[(\cos \theta - \operatorname{sen} \theta) + i(2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta)] = r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)$

Para  $n = 3$ :  $z^3 = z^2 \cdot z = [r^2(\cos 2\theta + i \operatorname{sen} 2\theta)][r(\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta)]$   
 $= r^3[(\cos 2\theta \cos \theta - \operatorname{sen} 2\theta \operatorname{sen} \theta) + i(\operatorname{sen} 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \operatorname{sen} \theta)]$   
 $= r^3(\cos 3\theta + i \operatorname{sen} 3\theta)$

El teorema puede establecerse por inducción para cualquier  $n$ , entero positivo.

16.18 Evalúe cada una de las siguientes expresiones utilizando el teorema de De Moivre, y exprese cada uno de los resultados en forma rectangular:

(a)  $(1 + i\sqrt{3})^4$ , (b)  $(\sqrt{3} - i)^5$ , (c)  $(-1 + i)^{10}$

$$(a) \quad (1 + i\sqrt{3})^4 = [2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)]^4 = 2^4(\cos 4 \cdot 60^\circ + i \operatorname{sen} 4 \cdot 60^\circ)(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ) \\ = 2^4(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = -8 - 8i\sqrt{3}$$

$$(b) \quad (\sqrt{3} - i)^5 = [2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ)]^5 = 32(\cos 1650^\circ + i \operatorname{sen} 1650^\circ) = 32 = -16\sqrt{3} - 16i$$

$$(c) \quad (-1 + i)^{10} = [\sqrt{2}(\cos 135^\circ + i \operatorname{sen} 135^\circ)]^{10} = 32(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ) = -32i$$

16.19 Encuentre las raíces de los siguientes números complejos en forma rectangular, excepto cuando se requieran las tablas.

(a) Raíces cuadradas de  $2 - 2i\sqrt{3}$

(e) Raíces cuartas de  $i$

(b) Raíces cuartas de  $-8 - 8i\sqrt{3}$

(f) Raíces sextas de  $-1$

(c) Raíces cúbicas de  $-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2}$

(g) Raíces cuartas de  $-16i$

(d) Raíces cúbicas de  $1$

$$(a) \quad 2 - 2i\sqrt{3} = 4[\cos(300^\circ + k360^\circ) + i \operatorname{sen}(300^\circ + k360^\circ)]$$

$$y \quad (2 - 2i\sqrt{3})^{1/2} = 2[\cos(150^\circ + k180^\circ) + i \operatorname{sen}(150^\circ + k180^\circ)]$$

Haciendo  $k = 0$  y  $1$ , las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$

$$R_2 = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i$$

$$(b) \quad -8 - 8i\sqrt{3} = 16[\cos(240^\circ + k360^\circ) + i \operatorname{sen}(240^\circ + k360^\circ)]$$

$$y \quad (-8 - 8i\sqrt{3})^{1/4} = 2[\cos(60^\circ + k90^\circ) + i \operatorname{sen}(60^\circ + k90^\circ)]$$

Haciendo  $k = 0, 1, 2$  y  $3$ , las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ) = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$R_2 = 2(\cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ) = 2(-\frac{1}{2}\sqrt{3} + \frac{1}{2}i) = -\sqrt{3} + i$$

$$R_3 = 2(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = 2(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = -1 - i\sqrt{3}$$

$$R_4 = 2(\cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ) = 2(\frac{1}{2}\sqrt{3} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{3} - i$$

$$(c) \quad -4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2} = 8[\cos(135^\circ + k360^\circ) + i \operatorname{sen}(135^\circ + k360^\circ)]$$

$$y \quad (-4\sqrt{2} + 4i\sqrt{2})^{1/3} = 2[\cos(45^\circ + k120^\circ) + i \operatorname{sen}(45^\circ + k120^\circ)]$$

Haciendo  $k = 0, 1$  y  $2$ , las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ) = 2(1/\sqrt{2} + i/\sqrt{2}) = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$$

$$R_2 = 2(\cos 165^\circ + i \operatorname{sen} 165^\circ)$$

$$R_3 = 2(\cos 285^\circ + i \operatorname{sen} 285^\circ)$$

$$(d) \quad 1 = \cos(0^\circ + k 360^\circ) + i \operatorname{sen}(0^\circ + k 360^\circ) \quad \text{y} \quad 1^{1/3} = \cos(k 120^\circ) + i \operatorname{sen}(k 120^\circ).$$

Haciendo  $k = 0, 1$  y  $2$ , las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = 1$$

$$R_2 = \cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ = -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$R_3 = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Note que  $R_2^2 = \cos 2(120^\circ) + i \operatorname{sen} 2(120^\circ) = R_3$

$$R_3^2 = \cos 2(240^\circ) + i \operatorname{sen} 2(240^\circ) = R_2$$

y  $R_2 R_3 = (\cos 120^\circ + i \operatorname{sen} 120^\circ)(\cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ) = \cos 0^\circ + i \operatorname{sen} 0^\circ = R_1$

$$(e) \quad i = \cos(90^\circ + k 360^\circ) + i \operatorname{sen}(90^\circ + k 360^\circ) \quad \text{y} \quad i^{1/4} = \cos(22\frac{1}{2}^\circ + k 90^\circ) + i \operatorname{sen}(22\frac{1}{2}^\circ + k 90^\circ).$$

Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 22\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 22\frac{1}{2}^\circ \quad R_3 = \cos 202\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 202\frac{1}{2}^\circ$$

$$R_2 = \cos 112\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 112\frac{1}{2}^\circ \quad R_4 = \cos 292\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 292\frac{1}{2}^\circ$$

$$(f) \quad -1 = \cos(180^\circ + k 360^\circ) + i \operatorname{sen}(180^\circ + k 360^\circ)$$

$$\text{y} \quad (-1)^{1/6} = \cos(30^\circ + k 60^\circ) + i \operatorname{sen}(30^\circ + k 60^\circ).$$

Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = \cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

$$R_2 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$$

$$R_3 = \cos 150^\circ + i \operatorname{sen} 150^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} + \frac{1}{2}i$$

$$R_4 = \cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ = -\frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

$$R_5 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$$

$$R_6 = \cos 330^\circ + i \operatorname{sen} 330^\circ = \frac{1}{2} \sqrt{3} - \frac{1}{2}i$$

Note que  $R_2^2 = R_5^2 = \cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ$  y por eso,  $R_2$  y  $R_5$  son las raíces cuadradas de  $-1$ ; además,  $R_1^2 = R_3^2 = R_5^2 = \cos 90^\circ + i \operatorname{sen} 90^\circ = i$  y así  $R_1, R_3$  y  $R_5$  son las raíces cúbicas de  $i$ ; y que  $R_2^2 = R_4^2 = R_6^2 = \cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ = -i$  y así  $R_2, R_4$  y  $R_6$  son las raíces cúbicas de  $-i$ .

$$(g) \quad -16i = 16[\cos(270^\circ + k 360^\circ) + i \operatorname{sen}(270^\circ + k 360^\circ)].$$

$$\text{y} \quad (-16i)^{1/4} = 2[\cos(67\frac{1}{2}^\circ + k 90^\circ) + i \operatorname{sen}(67\frac{1}{2}^\circ + k 90^\circ)]$$

Así, las raíces buscadas son

$$R_1 = 2(\cos 67\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 67\frac{1}{2}^\circ) \quad R_3 = 2(\cos 247\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 247\frac{1}{2}^\circ)$$

$$R_2 = 2(\cos 157\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 157\frac{1}{2}^\circ) \quad R_4 = 2(\cos 337\frac{1}{2}^\circ + i \operatorname{sen} 337\frac{1}{2}^\circ)$$

## Problemas propuestos

16.20 Realice las operaciones indicadas, y escriba los resultados en la forma  $a + bi$ .

- (a)  $(6 - 2i) + (2 + 3i) = 8 + i$       (m)  $(2 - i)^2 = 3 - 4i$   
 (b)  $(6 - 2i) - (2 + 3i) = 4 - 5i$       (n)  $(4 + 2i)^2 = 12 + 16i$   
 (c)  $(3 + 2i) + (-4 - 3i) = -1 - i$       (o)  $(1 + i)^2(2 + 3i) = -6 + 4i$   
 (d)  $(3 - 2i) - (4 - 3i) = -1 + i$       (p)  $\frac{2 + 3i}{1 + i} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}i$   
 (e)  $3(2 - 0) = 6 - 3i$       (q)  $\frac{3 - 2i}{3 - 4i} = \frac{17}{25} + \frac{6}{25}i$   
 (f)  $2i(3 + 4i) = -8 + 6i$       (r)  $\frac{3 - 2i}{2 + 3i} = -i$   
 (g)  $(2 + 3i)(1 + 2i) = -4 + 7i$   
 (h)  $(2 - 3i)(5 + 2i) = 16 - 11i$   
 (0)  $(3 - 2i)(-4 + i) = -10 + 11i$   
 (y)  $(2 - 3i)(3 + 2i) = 13i$   
 (k)  $(2 + \sqrt{-5})(3 - 2\sqrt{-4}) = (6 + 4\sqrt{5}) + (3\sqrt{5} - 8)i$   
 (l)  $(1 + 2\sqrt{-3})(2 - \sqrt{-3}) = 8 + 3\sqrt{3}i$

16.21 Demuestre que  $3 + 2i$  y  $3 - 2i$  son raíces de  $x^2 - 6x + 13 = 0$ .

16.22 Realice las siguientes operaciones en forma gráfica.

- (a)  $(2 + 3i) + (1 + 4i)$       (c)  $(2 + 3i) - (1 + 4i)$   
 (b)  $(4 - 2i) + (2 + 3i)$       (A)  $(4 - 2i) - (2 + 3i)$

16.23 Exprese cada uno de los siguientes números complejos en forma polar.

- (a)  $3 + 3i = 3\sqrt{2}(\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$       (e)  $-8 = 8(\cos 180^\circ + i \operatorname{sen} 180^\circ)$   
 (b)  $1 + \sqrt{3}i = 2(\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$       (f)  $-2i = 2(\cos 270^\circ + i \operatorname{sen} 270^\circ)$   
 (c)  $-2\sqrt{3} - 2i = 4(\cos 210^\circ + i \operatorname{sen} 210^\circ)$       (g)  $-12 + 5i \approx 13(\cos 157^\circ 23' + i \operatorname{sen} 157^\circ 23')$   
 (d)  $\sqrt{2} - i\sqrt{i} = 2(\cos 315^\circ + i \operatorname{sen} 315^\circ)$       (h)  $-4 - 3i \approx 5(\cos 216^\circ 52' + i \operatorname{sen} 216^\circ 52')$

16.24 Realice las operaciones indicadas, y escriba los resultados en la forma  $a + bi$ .

- (a)  $3(\cos 25^\circ + i \operatorname{sen} 25^\circ)8(\cos 200^\circ + i \operatorname{sen} 200^\circ) = -12\sqrt{2} - 12\sqrt{2}i$   
 (b)  $4(\cos 50^\circ + i \operatorname{sen} 50^\circ)2(\cos 100^\circ + i \operatorname{sen} 100^\circ) = -4\sqrt{3} + 4i$   
 (c)  $\frac{4(\cos 190^\circ + i \operatorname{sen} 190^\circ)}{2(\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)} = -1 + i\sqrt{3}$   
 (d)  $\frac{12(\cos 200^\circ + i \operatorname{sen} 200^\circ)}{3(\cos 350^\circ + i \operatorname{sen} 350^\circ)} = -2\sqrt{3} - 2i$

16.25 Utilice la forma polar para encontrar cada uno de los siguientes productos y cocientes, y escriba los resultados en la forma  $a + bi$ .

$$(a) (1+i)(\sqrt{2}-i\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$$

$$(b) (-1-i\sqrt{3})(-4/\sqrt{3}+40) = 8\sqrt{3}+8i$$

$$(c) \frac{1-i}{1+i} = -i$$

$$(d) \frac{4+4\sqrt{3}i}{\sqrt{3}+i} = 2\sqrt{3}+2i$$

16.26 Utilice el teorema de De Moivre para evaluar las siguientes expresiones y escriba los resultados en la forma  $a + bi$ .

$$(a) [2(\cos 6^\circ + i \sin 6^\circ)]^5 = 16\sqrt{3} + 16i$$

$$(b) [\sqrt{2}(\cos 75^\circ + i \sin 75^\circ)]^4 = 2 - 2\sqrt{3}i$$

$$(c) (1+i)^8 = 16$$

$$(d) (1-i)^6 = 8i$$

$$(e) (1/2 - i\sqrt{3}/2)^{20} = -1/2 - i\sqrt{3}/2$$

$$(f) (\sqrt{3}/2 + i/2)^9 = -i$$

$$(g) \frac{(1-i\sqrt{3})^3}{(-2+2i)^4} = \frac{1}{8}$$

$$(h) \frac{(1+i)(\sqrt{3}+i)^3}{(1-i\sqrt{3})^3} = 1-i$$

16.27 Encuentre las raíces indicadas, escriba los resultados en la forma  $a + bi$ , a menos que requiera el uso de tablas.

(a) Las raíces cuadradas de  $i$       Resp.  $\sqrt{2}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2 - i\sqrt{2}/2$

(b) Las raíces cuadradas de  $1 + i\sqrt{3}$       Resp.  $\sqrt{6}/2 + i\sqrt{2}/2, -\sqrt{6}/2 - i\sqrt{2}/2$

(c) Las raíces cúbicas de  $-8$       Resp.  $1 + i\sqrt{3}, -2, 1 - i\sqrt{3}$

(d) Las raíces cúbicas de  $27i$       Resp.  $3\sqrt{3}/2 + 3i/2, -3\sqrt{3}/2 + 3i/2, -3i$

(e) Las raíces cúbicas de  $-4\sqrt{3} + 4i$       Resp.  $2(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ), 2(\cos 170^\circ + i \sin 170^\circ), 2(\cos 290^\circ + i \sin 290^\circ)$

(f) Las raíces quintas de  $1 + i$       Resp.  $\sqrt[5]{2}(\cos 9^\circ + i \sin 9^\circ), \sqrt[5]{2}(\cos 81^\circ + i \sin 81^\circ), \text{ etc.}$

(g) Las raíces sextas de  $-\sqrt{3} + i$       Resp.  $\sqrt[6]{2}(\cos 25^\circ + i \sin 25^\circ), \sqrt[6]{2}(\cos 85^\circ + i \sin 85^\circ), \text{ etc.}$

16.28 Calcule las diez raíces de 1 y demuestre que el producto de dos raíces cualesquiera es otra vez una de las diez raíces de 1.

16.29 Demuestre que el recíproco de cualquiera de las diez raíces de 1 es otra vez una de las raíces de 1.

16.30 Denote una de las raíces cúbicas complejas de 1 (Prob. 16.19d) por  $\omega_1$  y la otra por  $\omega_2$ . Demuestre que  $\omega_1^2\omega_2 = \omega_1$  y que  $\omega_1\omega_2^2 = \omega_2$ .

16.31 Demuestre que  $(\cos \theta + i \sin \theta)^{-n} = \cos n\theta - i \sin n\theta$ .

16.32 A partir de la igualdad de los segmentos OS y  $P_2P_1$  de la Figura 16-2(c), encuentre un segundo procedimiento que permita la construcción de la diferencia  $OS = z_1 - z_2$  de los números complejos  $z_1$  y  $z_2$ .

# Apéndice 1

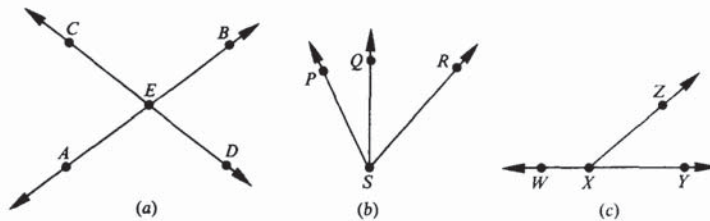
## Geometría

### A1.1 INTRODUCCIÓN

El apéndice 1 es un resumen de las definiciones, relaciones y teoremas fundamentales de geometría. El propósito de este material es proporcionar información útil para la resolución de problemas de trigonometría.

### A1.2 ÁNGULOS

Un *ángulo* es una figura determinada por dos líneas que terminan en el mismo punto. Un ángulo agudo es un ángulo cuya medida está entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ . Un ángulo es un ángulo que mide  $90$ , mientras un ángulo *obtuso* mide entre  $90$  y  $180$ . Cuando la suma de la medida de dos ángulos es  $90$ , los ángulos son *complementados* cuando la suma de la medida de dos ángulos es  $180$ , los ángulos son *suplementarios*. Dos ángulos son iguales, cuando tienen la misma medida.



Si dos líneas se intersecan, los ángulos enfrentados se llaman ángulos *opuestos*. En la Fig. A1-1(a),  $\angle AED$  y  $\angle BEC$  son  $\angle$  ángulos opuestos y  $\angle CEA$  y  $\angle BED$  son también un par de ángulos opuestos. Cuando dos ángulos tienen un vértice y un lado común, los ángulos son *adyacentes*. En la Fig. A1-1(b),  $\angle PSQ$  y  $\angle QSR$  son  $\angle$  un par de ángulos adyacentes. Si los lados externos de dos ángulos adyacentes forman una línea recta, los ángulos forman *unparlineal*. En la Fig. A1-1(c),  $\angle WXY$  y  $\angle ZXY$  son un par lineal.

#### Propiedades y teoremas

- ▲ La magnitud de dos ángulos opuestos es la misma.
- ▲ Los ángulos en un par lineal son suplementarios.

## APÉNDICE 1: GEOMETRÍA

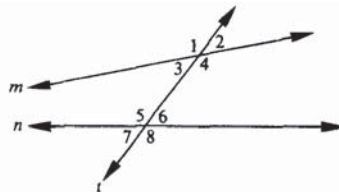
- ▲ Si los ángulos en un par lineal son iguales, los ángulos son ángulos rectos.
- ▲ Los ángulos complementarios al mismo ángulo o a dos ángulos iguales, son iguales entre sí.
- ▲ Los ángulos suplementarios al mismo ángulo o a dos ángulos iguales, son iguales entre sí.

### A1.3 LINEAS

Dos líneas en un plano, o se intersecan o son paralelas. Si dos líneas se *intersecan* tienen exactamente un punto en común. Dos líneas en un plano son *paralelas* entre sí, si no tienen ningún punto en común.

Cuando dos líneas se intersecan formando ángulos adyacentes iguales, las líneas son *perpendiculares*. Cada uno de los ángulos formados por dos líneas perpendiculares es un ángulo recto. Los lados de un ángulo recto son perpendiculares.

Una *transversal* es una línea que corta dos o más líneas coplanares en distintos puntos. En la Fig. A1-2, las líneas *m* y *n* son cortadas por una transversal *t*. Cuando dos líneas son cortadas por una transversal, los ángulos formados son clasificados por su posición. A los ángulos que se encuentran entre las dos líneas se les llama *ángulos internos* y los ángulos que no están entre éstas, se les llaman *externos*. Los ángulos internos o externos se dice que son *alternos* si los dos ángulos tienen diferentes vértices y se localizan en lados opuestos de la transversal. Un par de ángulos son *correspondientes*, cuando un ángulo interno y un ángulo externo, tienen diferentes vértices y están ubicados del mismo lado de la transversal. En la Fig. A1-2, los ángulos internos están numerados como 3, 4, 5 y 6, mientras que los externos se numeran como 1, 2, 7 y 8. Los ángulos numerados 3 y 6 y los numerados 4 y 5 son pares de ángulos internos alternos. Los ángulos numerados 1 y 8 aquellos numerados 2 y 7 son pares de ángulos alternos y externos. Los pares de ángulos correspondientes son numerados con 1 y 5, 2 y 6, 3 y 7 y 4 y 8.



// Fig. A1-2

#### Propiedades y teoremas

- ▲ En un plano, si dos líneas son perpendiculares a la misma línea, entonces son paralelas.
- ▲ Dos líneas paralelas a una tercera son paralelas entre sí.
- ▲ Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos internos son iguales.
- ▲ Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos alternos externos son iguales.
- ▲ Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos correspondientes son iguales.
- ▲ Si dos líneas paralelas son cortadas por una transversal, entonces los ángulos internos en el mismo lado de la transversal son suplementarios.
- ▲ Cualquier par de líneas horizontales son paralelas.
- ▲ Cualquier par de líneas verticales son paralelas.
- ▲ Cualquier línea vertical es perpendicular a cualquier línea horizontal.

- ▲ Si dos ángulos tienen sus lados paralelos, el lado derecho con el lado derecho y el lado izquierdo con el lado izquierdo, entonces los ángulos son iguales.
- ▲ Si dos ángulos tienen sus lados perpendiculares, el lado derecho con el lado derecho y el lado izquierdo con el lado izquierdo, entonces los ángulos son iguales.
- ▲ Si dos líneas son cortadas por una transversal de forma tal, que los ángulos alternos internos formados son iguales, entonces las líneas son paralelas.
- ▲ Si dos líneas son cortadas por una transversal de forma tal que los ángulos alternos externos formados son iguales, entonces las líneas son paralelas.
- ▲ Si dos líneas son cortadas por una transversal de forma tal que los ángulos correspondientes formados son iguales, entonces las líneas son paralelas.
- ▲ Si dos líneas son cortadas por una transversal de forma tal que los ángulos interiores en el mismo lado de la transversal sean suplementarios, entonces las líneas son paralelas.
- ▲ Si una transversal es perpendicular a una de dos las líneas paralelas, entonces también es perpendicular a la segunda.
- ▲ A través de un punto que no pertenezca a una línea, pasa exactamente una línea paralela a la primera.
- ▲ A través de un punto que no pertenezca a una línea, pasa exactamente una línea perpendicular a la primera.
- ▲ En un plano, hay exactamente una línea perpendicular a una línea dada en cualquier punto.

#### A1.4 TRIÁNGULOS

Un *triángulo* es una figura plana cerrada, formada por tres segmentos lineales que se intersecan entre ellos en sus extremos. Los triángulos que no tienen dos lados con la misma longitud son llamados triángulos *escalenos*, aquellos que poseen al menos dos lados con la misma longitud se llaman triángulos *isósceles* y aquellos en los cuales los tres lados tienen la misma longitud se llaman triángulos *equiláteros*. Si un triángulo contiene un ángulo recto, es un triángulo *rectángulo*. Un triángulo que no tiene un ángulo recto se llama triángulo *oblicuángulo*.

Se dice que dos triángulos son *congruentes* cuando tienen el mismo tamaño y la misma forma. Cuando dos triángulos son congruentes, los pares de los lados correspondientes tienen la misma longitud y los pares de ángulos correspondientes son iguales.

Los triángulos que tienen la misma forma, se llaman similares. Los triángulos similares tienen los lados correspondientes proporcionales en longitud y sus ángulos correspondientes son iguales.

La *mediana* de un triángulo es el segmento rectilíneo que va del vértice al punto medio del lado opuesto. La de un triángulo es el segmento rectilíneo que pasa por un vértice y es perpendicular al lado opuesto.

##### Propiedades y teoremas

- ▲ Si los tres lados de un triángulo son iguales a los tres lados de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
- ▲ Si dos lados de un triángulo, y el ángulo formado por éstos son iguales a los correspondientes lados y ángulo de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
- ▲ Si dos ángulos de un triángulo y el lado que se encuentra entre ellos son iguales a los correspondientes ángulos y lado de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
- ▲ Si dos ángulos de un triángulo y un lado no contenido entre ellos son iguales a los correspondientes ángulos y lado de otro triángulo, los triángulos son congruentes.
- ▲ Si la hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo son iguales a los correspondientes lados de otro triángulo rectángulo, entonces los dos triángulos rectángulos son congruentes.
- ▲ Si dos ángulos de un triángulo son iguales a los correspondientes dos ángulos de otro triángulo, los triángulos son similares.
- ▲ La suma de la medida de los ángulos de un triángulo es  $180^\circ$ .

- ▲ Un ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de la medida de los dos ángulos internos no adyacentes de triángulo.
- ▲ Los ángulos agudos de un triángulo rectángulo son como suplementarios.
- ▲ La medida de cada uno de los ángulos de un triángulo equiángulo es  $60^\circ$ .
- ▲ Si dos lados de un triángulo son iguales, entonces los ángulos opuestos a esos lados son iguales.
- ▲ Si un triángulo es equilátero, entonces también es equiángulo.
- ▲ Si dos ángulos de un triángulo son iguales, entonces los lados opuestos a esos lados son iguales.
- ▲ Si un triángulo es equiángulo, entonces también es equilátero.
- ▲ La altura que pasa por la base de un triángulo isósceles, bisecta a la base y al ángulo del vértice.
- ▲ La mediana a la base de un triángulo isósceles bisecta el ángulo del vértice y es perpendicular a la base.
- ▲ La línea que bisecta el ángulo del vértice de un triángulo isósceles, bisecta la base perpendicularmente.
- ▲ En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la longitud de la hipotenusa  $c$  es igual a la suma de los cuadrados de la longitud de los dos catetos  $a$  y  $b$ : es decir,  $c^2 = a^2 + b^2$ . (Teorema de Pitágoras.)
- ▲ En un triángulo rectángulo cuyos ángulos restantes sean  $45^\circ - 45^\circ$ , la longitud de la hipotenusa es igual a  $\sqrt{2}$  veces a longitud del cateto  $a$ , es decir,  $c = \sqrt{2} a$ .
- ▲ En un triángulo rectángulo cuyos ángulos restantes sean  $30^\circ - 60^\circ$ , la longitud de la hipotenusa es igual a 2 veces la longitud del cateto  $a$  opuesto al ángulo de  $30^\circ$ , es decir,  $c = 2a$ . También la longitud del cateto  $b$  opuesto al ángulo  $60^\circ$  es igual a  $\sqrt{3}$  veces la longitud del cateto  $a$  opuesto al ángulo de  $30^\circ$ , es decir,  $b = \sqrt{3} a$ .
- ▲ El punto medio de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es equidistante a los tres vértices del triángulo.
- ▲ Si el cuadrado de la longitud de un lado  $c$  de un triángulo es igual a la suma de las longitudes al cuadrado de los otros dos lados  $a$  y  $b$  del triángulo; es decir,  $c^2 = a^2 + b^2$ , entonces, el triángulo es rectángulo.
- ▲ El área  $K$  de un triángulo es la mitad del producto de su altura  $a$  y su base  $b$ , es decir,  $K = \frac{1}{2} ab$ .
- ▲ El área de un triángulo equilátero es igual a un cuarto del cuadrado del lado multiplicado por  $\sqrt{3}$ , es decir,  $K = \frac{1}{4} s^2 \sqrt{3}$ .

### ▲ 1.5 POLÍGONOS

Un *polígono* es una figura plana cerrada, cuyos lados son segmentos lineales no colineales y cada lado interseca exactamente a dos de los otros segmentos lineales en sus extremos. Un *cuadrilátero* es un polígono que tiene cuatro lados. Un polígono *regular* es un polígono que es tanto equilátero como equiángulo. La *diagonal* de un polígono es un segmento lineal que une dos vértices no adyacentes del polígono.

Un *paralelogramo* es un cuadrilátero con lados opuestos paralelos. Un *rectángulo* es un paralelogramo con un ángulo recto. Un rombo es un paralelogramo con dos lados adyacentes iguales. Un *cuadrado* es un rectángulo con dos lados adyacentes iguales.

Un *trapezio* es un cuadrilátero que tiene exactamente un par de lados paralelos. Un *trapezio isósceles* es un trapezio con lados no paralelos de igual magnitud.

#### Propiedades y teoremas

- ▲ Los ángulos opuestos de un paralelogramo son iguales.
- ▲ Los lados opuestos de un paralelogramo son iguales.
- ▲ Las diagonales de un paralelogramo se bisectan entre sí.
- ▲ Los ángulos internos consecutivos de un paralelogramo son suplementarios.
- ▲ La suma de los ángulos interiores de un cuadrilátero es  $360^\circ$ .
- ▲ Si ambos pares de ángulos opuestos en un cuadrilátero son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.
- ▲ Si los pares de lados opuestos de un cuadrilátero son iguales, entonces el cuadrilátero es un paralelogramo.

- ▲ Si las diagonales de un cuadrilátero se bisectan entre sí, el cuadrilátero es un paralelogramo.
- ▲ Un rectángulo es un paralelogramo equiángulo.
- ▲ Un rombo es un paralelogramo equilátero.
- ▲ Las diagonales de un rectángulo son iguales.
- ▲ Las diagonales de un rombo son perpendiculares.
- ▲ Si las diagonales de un paralelogramo son iguales, el paralelogramo es un rectángulo.
- ▲ Si las diagonales de un paralelogramo son perpendiculares, el paralelogramo es un rombo.
- ▲ Las diagonales de un cuadrado son bisectrices perpendiculares entre sí.
- ▲ Un rombo con un ángulo recto es un cuadrado.
- ▲ Un cuadrado es un polígono regular,
- ▲ Las diagonales de un trapecio isósceles son iguales.
- ▲ El área  $K$  de un paralelogramo es igual al producto de su altura  $a$  por la base  $b$ , es decir,  $K = ab$ .
- ▲ El área  $K$  de un rectángulo es igual al producto de su largo  $l$  por su ancho  $w$ , es decir,  $K = lw$ .
- ▲ El área  $K$  de un rombo es igual a un medio del producto de las diagonales  $d$  y  $d'$ , es decir,  $K = \frac{1}{2} dd'$ .
- ▲ El área  $K$  de un cuadrado es igual al cuadrado de uno de sus lados  $s$ , es decir,  $K = s^2$ .
- ▲ El área  $K$  de un cuadrado es igual a un medio del cuadrado de su diagonal  $d$ , es decir,  $K = \frac{1}{2} d^2$ .
- ▲ El área  $K$  de un trapecio es igual a un medio del producto de la altura  $h$  y la suma de las bases  $b$  y  $b'$ , es decir,  $K = \frac{1}{2} h(b + b')$ .

## A1.6 CIRCUNFERENCIA

Una *circunferencia* es el conjunto de todos los puntos en un plano que son equidistantes a un punto dado. Cualquier segmento de recta cuyos extremos terminan sobre la circunferencia es una *cuerda* de la circunferencia. Si una cuerda de una circunferencia pasa por el centro de la circunferencia es llamada *diámetro*. El *radio* es un segmento lineal que va desde el centro de la circunferencia a un punto sobre la circunferencia. Una *secante* es una recta que interseca a la circunferencia en dos puntos. Una *tangente* es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto.

Un *arco* de circunferencia es una parte de la circunferencia de un punto a otro sobre la curva. Un *semicírculo* es un arco de circunferencia que une los extremos de un diámetro. Un *ángulo inscrito* es un ángulo cuyos lados son cuerdas de la circunferencia. Un *ángulo central* es un ángulo con lados que son radios de la circunferencia.

### Propiedades y teoremas

- ▲ Una circunferencia contiene  $360^\circ$ .
- ▲ Una semicircunferencia contiene  $180^\circ$ .
- ▲ Un ángulo central es igual en grados al arco de circunferencia limitado por la intersección de los lados del ángulo.
- ▲ Un ángulo inscrito es igual en grados a la mitad del arco de circunferencia limitado por la intersección de los lados del ángulo.
- ▲ Un ángulo inscrito en un semicírculo es un ángulo recto.
- ▲ En una circunferencia, si el diámetro es perpendicular a una cuerda, entonces el diámetro bisecta a la cuerda y al arco.
- ▲ En una circunferencia, dos cuerdas que son iguales, son equidistantes del centro de la circunferencia.
- ▲ Una tangente a una circunferencia es perpendicular al radio que pasa por el punto de tangencia.
- ▲ Si un triángulo está inscrito en una circunferencia, entonces el triángulo es un triángulo rectángulo.
- ▲ En el plano, si una recta es perpendicular al radio de una circunferencia y sus extremos están sobre la circunferencia, entonces la recta es tangente a la circunferencia.

- ▲ El segmento lineal que une un punto externo con el centro de una circunferencia, bisecta al ángulo formado por las dos tangentes al círculo, que pasan por dicho punto.
- ▲ Las longitudes de dos segmentos tangentes a la circunferencia que pasan por un punto externo a la circunferencia son iguales.
- ▲ Si dos secantes se intersecan en el interior de una circunferencia, entonces el ángulo formado es igual en grados a la mitad de la suma de los arcos formados por la intersección de los lados del ángulo y de su ángulo opuesto con el círculo.
- ▲ Si una línea que pasa a través del centro de una circunferencia, bisecta a una cuerda que no es un diámetro, entonces ésta es perpendicular a la cuerda.
- ▲ La circunferencia  $C$  de un círculo es igual a  $\pi$  veces el diámetro  $d$ , es decir,  $C = \pi d$ .
- ▲ El radio  $r$  de un círculo es igual a la mitad del diámetro  $d$ , es decir,  $r = \frac{1}{2}d$ .
- ▲ El área  $K$  de un círculo es igual a veces el radio  $r$  elevado al cuadrado, es decir,  $K = \pi r^2$ .

# Apéndice 2

## Tablas

Tabla 1 Funciones trigonométricas — Ángulos en intervalos de 10 minutos

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
0° 0'	0.0000	1.0000	0.0000	Indefinido	1.0000	indefinido	90° 0'
0°10'	0.0029	1.0000	0.0029	343.7730	1.0000	343.7740	89°50'
0°20'	0.0058	1.0000	0.0058	171.8850	1.0000	171.8880	89°40'
0°30'	0.0087	1.0000	0.0087	114.5880	1.0000	114.5930	39°30'
0°40'	0.0116	0.9999	0.0116	85.9396	1.0001	85.9454	89°20'
0°50'	0.0145	0.9999	0.0145	68,7499	1.0001	68.7572	89°10'
1° 0'	0.0175	0.9998	0.0175	57.2901	1.0002	57.2989	89° 0'
1°0'	0.0204	0.9998	0.0204	49.1040	1.0002	49.1142	88°50'
1°20'	0.0233	0.9997	0.0233	42.9641	1.0003	42.9758	88°40'
1°30'	0.0262	0.9997	0.0262	38.1885	1.0003	38.2016	88°30'
1°40'	0.0291	0.9998	0.0291	34.3678	1.0004	34,3823	88°20'
1°50'	0.0320	0,9995	0.0320	31.2416	1.0005	31.2576	88°10'
2° 0'	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1,0006	28.6537	88' 0'
2°10'	0.0378	0.9993	0.0378	26.4316	1.0007	26.4505	87°50'
2°20'	0.0407	0.9992	0.0407	24.5418	1.0008	24.5621	87°40'
2°30'	0.0436	0.9990	0.0437	22.9038	1.0010	22.9256	87°30'
2°40'	0.0465	0.9989	0.0466	21.4704	1.001	21.4937	87°20'
2°50'	0.0494	0.9988	0.0495	20.2055	1.0012	20.2303	87°10'
3° 0'	0.0523	0.9986	0.0624	19.0811	1.0014	19.1073	87° 0'
3°10'	0.0552	0.9985	0.0553	18.0750	1.0015	18.1026	86°50'
3°20'	0.0581	0.9983	0.0582	17.1694	1,0017	17.1984	86°40'
3°30'	0.0610	0.9981	0.0612	16.3499	1.0019	16.3804	86°30'
3°40'	0.0640	0.9980	0.0641	15.6048	1.0021	15.6368	86°20'
3°50'	0.0669	0.9978	0.0670	14.9244	1.0022	14.3579	86°10'
4° 0'	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86° 0'
4°10'	0.0727	0.9974	0,0729	13.7267	1.0027	13.7631	85°50'
4°20'	0.0756	0.9971	0.0758	13.1969	1,0029	13.2347	85°40'
4°30'	0.0785	0.9969	0.0787	12.7062	1.0031	12.74c5	85°80'
4°40'	0.0814	0.9967	0.0816	12.2505	1.0033	12.2912	85°20'
4°50'	0.0843	0.9964	0.0846	11.8262	1,0038	11.8684	85°10'
5° 0'	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85° 0'
5°10'	0.0901	0.9959	0.0904	11.0594	1.0041	11.1046	84°50'
5°20'	0.0929	0.9957	0.0934	10.7119	1.0043	10.7585	84°40'
5°30'	0.0958	0.9954	0.0963	10,3854	1.0046	10.4334	84°30'
5°40'	0.0987	0.9951	0.0992	10.0780	1.0049	10.1275	84°20'
5°50'	0.1016	0.9948	0.1022	9.7882	1.0052	9.8391	84°10'

$\text{cos } A$      $\text{sen } A$      $\text{col } A$      $\text{tan } A$      $\text{csc } A$      $\text{sec } A$      $A$

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
6° 0'	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84° 0'
6° 10'	0.1074	0.9942	0.1080	9.2593	1.0058	9.3092	83° 50'
6° 20'	0.1103	0.9939	0.1110	9.0098	1.0061	9.0652	83° 40'
6° 30'	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	1.0065	8.8337	83° 30'
6° 40'	0.1161	0.9932	0.1169	8.5555	1.0068	8.6138	83° 20'
6° 50'	0.1190	0.9929	0.1198	8.3450	1.0072	8.4047	83° 10'
7° 0'	0.1219	0.9925	0.1228	8.1444	1.0075	8.2055	83° 0'
7° 10'	0.1248	0.9922	0.1257	7.9530	1.0079	8.0156	82° 50'
7° 20'	0.1276	0.9918	0.1287	7.7704	1.0082	7.8344	82° 40'
7° 30'	0.1305	0.9914	0.1317	7,5958	1.0086	7.6613	82° 30'
7° 40'	0.1334	0.9911	0.1346	7.4287	1.0090	7.4957	82° 20'
7° 50'	0.1363	0.9907	0.1376	7.2687	1.0094	7.3372	82° 10'
8° 0'	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82° 0'
8° 10'	0.1421	0.9899	0.1435	6.9682	1.0102	7.0396	81° 50'
8° 20'	0.1449	0.9894	0.1465	6.8269	1.0107	6.8998	81° 40'
8° 30'	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	1.0111	6.7655	81° 30'
8° 40'	0.1507	0.9886	0.1524	6.5606	1.0116	6.6363	81° 20'
8° 50'	0.1536	0.9881	0.1554	6.4348	1.0120	6.5121	81° 10'
9° 0'	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81° 0'
9° 10'	0.1593	0.9872	0.1614	6.1970	1.0129	6.2772	80° 50'
9° 20'	0.1622	0.9868	0.1644	6.0844	1.0134	6.1661	80° 40'
9° 30'	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	1.0139	6.0589	80° 30'
9° 40'	0.1679	0.9858	0.1703	5.8708	1.0144	5.9554	80° 20'
9° 50'	0.1708	0.9853	0.1733	5.7594	1.0149	5.8554	80° 10'
10° 0'	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80° 0'
10° 10'	0.1765	0.9843	0.1793	5.5764	1.0160	5.6653	79° 50'
10° 20'	0.1794	0.9838	0.1823	5.4845	1.0165	5.5749	79° 40'
10° 30'	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	1.0170	5.4874	79° 30'
10° 40'	0.1851	0.9827	0.1883	5.3093	1.0176	5.4026	79° 20'
10° 50'	0.1880	0.9822	0.1914	5.2257	1.0181	5.3205	79° 10'
11° 0'	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79° 0'
11° 10'	0.1937	0.9811	0.1974	5.0658	1.0193	5.1636	78° 50'
11° 20'	0.1965	0.9805	0.2004	4.9894	1.0199	5.0886	78° 40'
11° 30'	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	1.0205	5.0159	78° 30'
11° 40'	0.2022	0.9793	0.2065	4.8430	1.0211	4.9452	78° 20'
11° 50'	0.2051	0.9787	0.2095	4.7729	1.0217	4.8765	78° 10'
12° 0'	0.2079	0.9785	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78° 0'
12° 10'	0.2108	0.9775	0.2156	4.6382	1.0230	4.7448	77° 50'
12° 20'	0.2136	0.9759	0.2186	4.5736	1.0236	4.6817	77° 40'
12° 30'	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	1.0243	4.6202	77° 30'
12° 40'	0.2193	0.9757	0.2247	4.4494	1.0249	4.5604	77° 20'
12° 50'	0.2221	0.9750	0.2278	4.3897	1.0256	4.5022	77° 10'
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{cot } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$A$

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
$13^{\circ} 0'$	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	$77^{\circ} 0'$
$13^{\circ} 10'$	0.2278	0.9737	0.2339	4.2747	1.0270	4.3901	$76^{\circ} 50'$
$13^{\circ} 20'$	0.2306	0.9730	0.2370	4.2193	1.0277	4.3362	$76^{\circ} 40'$
$13^{\circ} 30'$	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	1.0284	4.2837	$76^{\circ} 30'$
$13^{\circ} 40'$	0.2363	0.9717	0.2432	4.1126	1.0291	4.2324	$76^{\circ} 20'$
$13^{\circ} 50'$	0.2391	0.9710	0.2462	4.0611	1.0299	4.1824	$76^{\circ} 10'$
$14^{\circ} 0'$	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	$76^{\circ} 0'$
$14^{\circ} 10'$	0.2447	0.9696	0.2524	3.9617	1.0314	4.0859	$75^{\circ} 50'$
$14^{\circ} 20'$	0.2476	0.9689	0.2555	3.9136	1.0321	4.0394	$75^{\circ} 40'$
$14^{\circ} 30'$	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	1.0329	3.9939	$75^{\circ} 30'$
$14^{\circ} 40'$	0.2532	0.9674	0.2617	3.8208	1.0337	3.9495	$75^{\circ} 20'$
$14^{\circ} 50'$	0.2560	0.9667	0.2648	3.7760	1.0345	3.9061	$75^{\circ} 10'$
$15^{\circ} 0'$	0.2588	0.9659	0.2679	3.7321	1.0353	3.8637	$75^{\circ} 0'$
$15^{\circ} 10'$	0.2616	0.9652	0.2711	3.6891	1.0361	3.8222	$74^{\circ} 50'$
$15^{\circ} 20'$	0.2644	0.9644	0.2742	3.6470	1.0369	3.7817	$74^{\circ} 40'$
$15^{\circ} 30'$	0.2672	0.9636	0.2773	3.6059	1.0377	3.7420	$74^{\circ} 30'$
$15^{\circ} 40'$	0.2700	0.9628	0.2805	3.5656	1.0386	3.7032	$74^{\circ} 20'$
$15^{\circ} 50'$	0.2728	0.9621	0.2836	3.5261	1.0394	3.6652	$74^{\circ} 10'$
$16^{\circ} 0'$	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	$74^{\circ} 0'$
$16^{\circ} 10'$	0.2784	0.9605	0.2899	3.4495	1.0412	3.5915	$73^{\circ} 50'$
$16^{\circ} 20'$	0.2812	0.9598	0.2931	3.4124	1.0421	3.5559	$73^{\circ} 40'$
$16^{\circ} 30'$	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	1.0429	3.5209	$73^{\circ} 30'$
$16^{\circ} 40'$	0.2868	0.9580	0.2994	3.3402	1.0439	3.4867	$73^{\circ} 20'$
$16^{\circ} 50'$	0.2896	0.9572	0.3026	3.3052	1.0448	3.4532	$73^{\circ} 10'$
$17^{\circ} 0'$	0.2924	0.9563	0.3057	3.2709	1.0457	3.4203	$73^{\circ} 0'$
$17^{\circ} 10'$	0.2952	0.9555	0.3089	3.2371	1.0466	3.3881	$72^{\circ} 50'$
$17^{\circ} 20'$	0.2979	0.9546	0.3121	3.2041	1.0476	3.3565	$72^{\circ} 40'$
$17^{\circ} 30'$	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	1.0485	3.3255	$72^{\circ} 30'$
$17^{\circ} 40'$	0.3035	0.9528	0.3185	3.1397	1.0495	3.2951	$72^{\circ} 20'$
$17^{\circ} 50'$	0.3062	0.9520	0.3217	3.1084	1.0505	3.2653	$72^{\circ} 10'$
$18^{\circ} 0'$	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	$72^{\circ} 0'$
$18^{\circ} 10'$	0.3118	0.9502	0.3281	3.0475	1.0525	3.2074	$71^{\circ} 50'$
$18^{\circ} 20'$	0.3145	0.9492	0.3314	3.0178	1.0535	3.1792	$71^{\circ} 40'$
$18^{\circ} 30'$	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	1.0545	3.1515	$71^{\circ} 30'$
$18^{\circ} 40'$	0.3201	0.9474	0.3378	2.9600	1.0555	3.1244	$71^{\circ} 20'$
$18^{\circ} 50'$	0.3228	0.9465	0.3411	2.9319	1.0566	3.0977	$71^{\circ} 10'$
$19^{\circ} 0'$	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0716	$71^{\circ} 0'$
$19^{\circ} 10'$	0.3283	0.9446	0.3476	2.8770	1.0587	3.0458	$70^{\circ} 50'$
$19^{\circ} 20'$	0.3311	0.9436	0.3508	2.8502	1.0598	3.0206	$70^{\circ} 40'$
$19^{\circ} 30'$	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	1.0608	2.9957	$70^{\circ} 30'$
$19^{\circ} 40'$	0.3365	0.9417	0.3574	2.7980	1.0619	2.9713	$70^{\circ} 20'$
$19^{\circ} 50'$	0.3393	0.9407	0.3607	2.7725	1.0631	2.9474	$70^{\circ} 10'$
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{cot } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$A$

APÉNDICE 2: TABLAS

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
20° 0'	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70° 0'
20°10'	0.3448	0.9387	0.3673	2.7228	1.0653	2.9006	69°50'
20°20'	0.3475	0.9377	0.3706	2.6985	1.0665	2.8779	69°40'
20°30'	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	1.0676	2.8555	69°30'
20°40'	0.3529	0.9356	0.3772	2.6511	1.0688	2.8334	69°20'
20°50'	0.3557	0.9346	0.3805	2.6279	1.0700	2.8117	69°10'
21° 0'	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69° 0'
21°10'	0.3611	0.9325	0.3872	2.5826	1.0723	2.7695	68°50'
21°20'	0.3638	0.9315	0.3906	2.5605	1.0736	2.7488	68°40'
21° 30'	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	1.0748	2.7285	68°30'
21°40'	0.3692	0.9293	0.3973	2.5172	1.0760	2.7085	68°20'
21°50'	0.3719	0.9283	0.4006	2.4960	1.0773	2.6888	68°10'
22° 0'	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68° 0'
22°10'	0.3773	0.9261	0.4074	2.4545	1.0798	2.6504	67°50'
22°20'	0.3800	0.9250	0.4108	2.4342	1.0811	2.6316	67°40'
22°30'	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	1.0824	2.6131	67°30'
22°40'	0.3854	0.9228	0.4176	2.3945	1.0837	2.5949	67°20'
22°50'	0.3881	0.9216	0.4210	2.3750	1.0850	2.5770	67°10'
23° 0'	0.3907	0.9205	0.4245	2.3559	1.0864	2.5593	67° 0'
23°10'	0.3934	0.9194	0.4279	2.3369	1.0877	2.5419	66°50'
23°20'	0.3961	0.9182	0.4314	2.3183	1.0891	2.5247	66°40'
23°30'	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	1.0904	2.5078	66°30'
23°40'	0.4014	0.9159	0.4383	2.2817	1.0918	2.4912	66°20'
23°50'	0.4041	0.9147	0.4417	2.2637	1.0932	2.4748	66°10'
24° 0'	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66° 0'
24° 10'	0.4094	0.9124	0.4487	2.2286	1.0961	2.4426	65°50'
24°20'	0.4120	0.9112	0.4522	2.2113	1.0975	2.4269	65°40'
24°30'	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	1.0989	2.4114	65°30'
24°40'	0.4173	0.9088	0.4592	2.1775	1.1004	2.3961	65°20'
24°50'	0.4200	0.9075	0.4628	2.1609	1.1019	2.3811	65°10'
25° 0'	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65° 0'
25° 10'	0.4253	0.9051	0.4699	2.1283	1.1049	2.3515	64°50'
25°20'	0.4279	0.9038	0.4734	2.1123	1.1064	2.3371	64°40'
25°30'	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	1.1079	2.3228	64°30'
25°40'	0.4331	0.9013	0.4806	2.0809	1.1095	2.3088	64°20'
25°50'	0.4358	0.9001	0.4841	2.0655	1.1110	2.2949	64°10'
26° 0'	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64° 0'
26°10'	0.4410	0.8975	0.4913	2.0353	1.1142	2.2677	63°50'
26°20'	0.4436	0.8962	0.4950	2.0204	1.1158	2.2543	63°40'
26°30'	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	1.1174	2.2412	63°30'
26°40'	0.4488	0.8936	0.5022	1.9912	1.1190	2.2282	63°20'
26°50'	0.4514	0.8923	0.5059	1.9768	1.1207	2.2153	63° 10'
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{cot } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$A$

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan. } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
27° 0'	0,4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63° 0'
2710'	0.4566	0.8897	0.5132	1.9486	1.1240	2.1902	6250'
27°20'	0.4592	0.8884	0.5169	1.9347	1.1257	2.1779	62 40'
27°30'	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	1.1274	2.1657	62°30'
27°40'	0.4643	0.8857	0.5243	1.9074	1.1291	2.1537	62°20'
27°50'	0.4669	0.8843	0.5280	1.8940	1.1308	2.1418	62° 10'
28° 0'	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1301	62° 0'
28°10'	0.4720	0.8816	0.5354	1.8676	1.1343	2.1185	61° 50'
2820'	0.4746	0.8802	0.5392	1.8546	1.1361	2.1070	6140'
2830'	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	1.1379	2.0957	6130'
2840'	0.4797	0.8774	0.5467	1.8291	1.1397	2.0846	61° 20'
28°50'	0.4823	0.8760	0.5505	1.8165	1.1415	2.0736	6110'
29° 0'	0.4848	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61" 0'
29° 10'	0.4874	0.8732	0.5581	1.7917	1.1452	2.0519	60 SO'
29° 20'	0.4899	0.8718	0.5619	1.7796	1.1471	2.0413	60°40'
29° 30'	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	1.1490	2.0308	60°30'
29°40'	0.4950	0.8689	0.5696	1.7556	1.1503	2.0204	60° 20'
29°50'	0.4975	0.8675	0.5735	1.7437	1,1528	3.0101	60° 10'
30° 0'	0.5000	0.8660	0.5774	1.7321	1.1547	2.0000	60° 0'
30 10'	0.5025	0.8646	0.5812	1.7205	1.1566	1.9900	59° 50'
3020'	0.5050	0.8631	0.5851	1.7090	1.1586	1.9801	59°40'
3030'	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	1.1606	1.9703	59°30'
30 40'	0.5100	0.8601	0.5930	1.6864	1.1626	1.9606	59°20'
3050'	0.5125	0.8587	0.5969	1.6753	1.1646	1.9511	59°10'
31° 0	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9413	59° 0'
31 10'	0.5175	0.8557	0.6048	1.6534	1.1687	1.9323	58°50'
31'20'	0.5200	0.8542	0.6088	1.6426	1.1707	1,9230	5840'
31 30'	0.5225	0.8526	0.6128	1.6319	1.1728	1.9139	58 30'
31 40'	0.5250	0.8511	0.6168	1.6212	1.1749	1.9048	58°20'
31°50'	0.5275	0.8496	0.5208	1.6107	1.1770	1.8959	5810'
32° 0'	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58 0'
32°10'	0.5324	0.8465	0.6289	1.5900	1.1813	1.8783	57°50'
32 20'	0.5348	0.8450	0.6330	1.5798	1.1835	1.8697	57 40'
32 30'	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	1.1857	1.8612	5730'
32°40'	0.5398	0.8418	0.6412	1.5597	1.1879	1.8527	57° 20'
32°50'	0.5422	0.8403	0.6453	1.5497	1.1901	1.3443	5710'
33 0'	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57° 0'
33°10'	0.5471	0.8371	0.6536	1.5301	1.1946	1.8279	56° 50'
33=20'	0.5495	0.8355	0.6577	1.5204	1.1969	1.8198	56 40'
33°30	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	1.1952	1.8118	56° 30'
3340'	0.5544	0.8323	0.6661	1.5013	1.2015	1.8039	56 20'
33 50'	0,5568	0.8307	0.6703	1.4919	1.2039	1.7960	56°10'
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{col } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$A$

<i>A</i>	sen <i>A</i>	cos <i>A</i>	tan <i>A</i>	cot <i>A</i>	sec <i>A</i>	csc <i>A</i>	
34° 0'	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56° 0'
34°10'	0.5616	0.8274	0.6787	1.4733	1.2086	1.7806	55°50'
34°20'	0.5640	0.8258	0.6830	1.4641	1.2110	1.7730	55°40'
34°30'	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	1.2134	1.7655	55°30'
34°40'	0.5688	0.8225	0.6916	1.4460	1.2158	1.7581	55°20'
34°50'	0.5712	0.8208	0.6959	1.4370	1.2183	1.7507	55° 10'
35° 0'	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55° 0'
35°10'	0.5760	0.8175	0.7046	1.4193	1.2233	1.7362	54°50'
35°20'	0.5783	0.8158	0.7089	1.4106	1.2258	1.7291	54°40'
35°30'	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	1.2283	1.7221	54°30'
35°40'	0.5831	0.8124	0.7177	1.3934	1.2309	1.7151	54°20'
35°50'	0.5854	0.8107	0.7221	1.3848	1.2335	1.7081	54°10'
36° 0'	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54° 0'
36°10'	0.5901	0.8073	0.7310	1.3680	1.2387	1.6945	53°50'
36°20'	0.5925	0.8056	0.7355	1.3597	1.2413	1.6878	53°40'
36°30'	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	1.2440	1.6812	53°30'
36°40'	0.5972	0.8021	0.7445	1.3432	1.2467	1.6746	53°20'
36°50'	0.5995	0.8004	0.7490	1.3351	1.2494	1.6681	53° 0'
37° 0'	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53° 0'
37°10'	0.6041	0.7969	0.7581	1.3190	1.2549	1.6553	52°50'
37°20'	0.6065	0.7951	0.7627	1.3111	1.2577	1.6489	52°40'
37°30'	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	1.2605	1.6427	52°30'
37°40'	0.6111	0.7916	0.7720	1.2954	1.2633	1.6365	52°20'
37°50'	0.6134	0.7898	0.7766	1.2876	1.2661	1.6303	52°10'
38° 0'	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52° 0'
38°10'	0.6180	0.7862	0.7860	1.2723	1.2719	1.6183	51°50'
38°20'	0.6202	0.7844	0.7907	1.2647	1.2748	1.6123	51°40'
38°30'	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	1.2778	1.6064	51°30'
38°40'	0.6248	0.7808	0.8002	1.2497	1.2807	1.6005	51°20'
38°50'	0.6271	0.7790	0.8050	1.2423	1.2837	1.5948	51°10'
39° 0'	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51° 0'
39°10'	0.6316	0.7753	0.8146	1.2276	1.2898	1.5833	50°50'
39°20'	0.6338	0.7735	0.8195	1.2203	1.2929	1.5777	50°40'
39 30'	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	1.2960	1.5721	50°30'
39°40'	0.6383	0.7698	0.8292	1.2059	1.2991	1.5666	50°20'
39°50'	0.6406	0.7679	0.8342	1.1988	1.3022	1.5611	50°10'
40° 0'	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50° 0'
4010'	0.6450	0.7642	0.8441	1.1847	1.3086	1.5504	49°50'
4020'	0.6472	0.7623	0.8491	1.1778	1.3118	1.5450	49°40'
40°30'	0.6494	0.7604	0.8541	1.1708	1.3151	1.5398	49°30'
40 40'	0.6517	0.7585	0.8591	1.1640	1.3184	1.5345	49°20'
40 50'	0.6539	0.7566	0.8642	1.1571	1.3217	1.5294	49°10'
	cos <i>A</i>	sen <i>A</i>	cot <i>A</i>	tan <i>A</i>	csc <i>A</i>	sec <i>A</i>	<i>A</i>

A.	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A	
41° 0'	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49° 0'
41° 10'	0.6583	0.7528	0.8744	1.1436	1.3284	1.5192	48° 50'
41° 20'	0.6604	0.7509	0.8796	1.1369	1.3318	1.5141	48° 40'
41° 30'	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	1.3352	1.5092	48° 30'
41° 40'	0.6648	0.7470	0.8899	1.1237	1.3386	1.5042	48° 20'
41° 50'	0.6670	0.7451	0.8952	1.1171	1.3421	1.4993	48° 10'
42° 0'	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48° 0'
42° 10'	0.6713	0.7412	0.9057	1.1041	1.3492	1.4897	47° 50'
42° 20'	0.6734	0.7392	0.9110	1.0977	1.3527	1.4849	47° 40'
42° 30'	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	1.3563	1.4802	47° 30'
42° 40'	0.6777	0.7353	0.9217	1.0850	1.3600	1.4755	47° 20'
42° 50'	0.6799	0.7333	0.9271	1.0786	1.3636	1.4709	47° 10'
43° 0'	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47° 0'
43° 10'	0.6841	0.7294	0.9380	1.0661	1.3711	1.4617	46° 50'
43° 20'	0.6862	0.7274	0.9435	1.0599	1.3748	1.4572	46° 40'
43° 30'	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	1.3786	1.4527	46° 30'
43° 40'	0.6905	0.7234	0.9545	1.0477	1.3824	1.4483	46° 20'
43° 50'	0.6926	0.7214	0.9601	1.0416	1.3863	1.4439	46° 10'
44° 0'	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46° 0'
44° 10'	0.6967	0.7173	0.9713	1.0295	1.3941	1.4352	45° 50'
44° 20'	0.6988	0.7153	0.9770	1.0235	1.3980	1.4310	45° 40'
44° 30'	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	1.4020	1.4267	45° 30'
44° 40'	0.7030	0.7112	0.9884	1.0117	1.4061	1.4225	45° 20'
44° 50'	0.7050	0.7092	0.9942	1.0058	1.4101	1.4183	45° 10'
45° 0'	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45° 0'
	cos A	sen A	cot A	tan A	csc A	sec. A	A

Tabla 2 Funciones trigonométricas — Ángulos en intervalos de décimas de grado

$i$	sen $A$	cos $A$	tan $A$	cot $A$	sec $A$	csc $A$	
0.0°	0.0000	1.0000	0.0000	Indefinido	1.0000	Indefinido	90.0°
0.1°	0.0017	1.0000	0.0017	572.9680	1.0000	572.9590	89.9°
0.2°	0.0035	1.0000	0.0035	286.4750	1.0000	286.4770	89.8°
0.3°	0.0052	1.0000	0.0052	190.9840	1.0000	190.9870	89.7°
0.4°	0.0070	1.0000	0.0070	143.2380	1.0000	143.2410	89.6°
0.5°	0.0087	1.0000	0.0087	114.5880	1.0000	114.5930	89.5°
0.6°	0.0105	0.9999	0.0105	95.4896	1.0001	95.4948	89.4°
0.7°	0.0122	0.9999	0.0122	81.8473	1.0001	81.8534	89.3°
0.8°	0.0140	0.9999	0.0140	71.6150	1.0001	71.6220	89.2°
0.9°	0.0157	0.9999	0.0157	63.6568	1.0001	63.6647	89.1°
1.0°	0.0175	0.9998	0.0175	57.2898	1.0002	57.2986	89.0°
1.1	0.0192	0.9998	0.0192	52.0806	1.0002	52.0902	88.9°
1.2°	0.0209	0.9998	0.0209	47.7396	1.0002	47.7500	88.8°
1.3°	0.0227	0.9997	0.0227	44.0660	1.0003	44.0774	88.7°
1.4°	0.0244	0.9997	0.0244	40.9174	1.0003	40.9296	88.6°
1.5°	0.0262	0.9997	0.0262	38.1885	1.0003	38.20*16	88.5°
1.6°	0.0279	0.9996	0.0279	35.8005	1.0004	35.8145	88.4°
1.7°	0.0297	0.9996	0.0297	33.6935	1.0004	33.7083	88.3°
1.8°	0.0314	0.9995	0.0314	31.8205	1.0005	31.8363	88.2°
1.9°	0.0332	0.9995	0.0332	30.1446	1.0006	30.1612	88.1°
2.0°	0.0349	0.9994	0.0349	28.6363	1.0006	28.6537	88.0°
2.1°	0.0366	0.9993	0.0367	27.2715	1.0007	27.2898	87.9°
2.2°	0.0384	0.9993	0.0384	26.0307	1.0007	26.0499	87.8°
2.3°	0.0401	0.9992	0.0402	24.8978	1.0008	24.9179	87.7°
2.4°	0.0419	0.9991	0.0419	23.8593	1.0009	23.8802	87.6°
2.5°	0.0436	0.9990	0.0437	22.9038	1.0010	22.9256	87.5°
2.6°	0.0454	0.9990	0.0454	22.0217	1.0010	22.0444	87.4°
2.7°	0.0471	0.9989	0.0472	21.2050	1.0011	21.2285	87.3°
2.8°	0.0488	0.9988	0.0489	20.4465	1.0012	20.4709	87.2°
2.9	0.0506	0.9987	0.0507	19.7403	1.0013	19.7656	87.1°
3.0	0.0523	0.9986	0.0524	19.0812	1.0014	19.1073	87.0°
3.1°	0.0541	0.9985	0.0542	18.4645	1.0015	18.4915	86.9°
3.2°	0.0558	0.9984	0.0559	17.8863	1.0016	17.9143	86.8°
3.3	0.0576	0.9983	0.0577	17.3432	1.0017	17.3720	86.7°
3.4°	0.0593	0.9982	0.0594	16.8319	1.0018	16.8616	86.6°
3.5°	0.0610	0.9981	0.0612	16.3499	1.0019	16.3804	86.5°
3.6°	0.0628	0.9980	0.0629	15.8946	1.0020	15.9260	86.4°
3.7°	0.0645	0.9979	0.0647	15.4638	1.0021	15.4961	86.3°
3.8°	0.0663	0.9978	0.0664	15.0557	1.0022	15.0889	86.2°
39°	0.0680	0.9977	0.0682	14.6685	1.0023	14.7026	86.1°
	cos $A$	sen $A$	cot $A$	tan $A$	csc $A$	sec $A$	$A$

$\bar{A}$	sen $\bar{A}$	cos $\bar{A}$	tan $\bar{A}$	cot $\bar{A}$	sec $\bar{A}$	csc $\bar{A}$	
4.0°	0.0698	0.9976	0.0699	14.3007	1.0024	14.3356	86.0°
4.1°	0.0715	0.9974	0.0717	13.9507	1.0026	13.9865	85.9°
4.2°	0.0732	0.9973	0.0734	13.6174	1.0027	13.6541	85.8°
4.3°	0.0750	0.9972	0.0752	13.2996	1.0028	13.3371	85.7°
4.4°	0.0767	0.9971	0.0769	12.9962	1.0030	13.0346	85.6°
4.5°	0.0785	0.9969	0.0787	12.7062	1.0031	12.7455	85.5°
4.6°	0.0802	0.9968	0.0805	12.4288	1.0032	12.4690	85.4°
4.7°	0.0819	0.9966	0.0822	12.1632	1.0034	12.2043	85.3°
4.8°	0.0837	0.9965	0.0840	11.9087	1.0035	11.9506	85.2°
4.9°	0.0854	0.9963	0.0857	11.6645	1.0037	11.7073	85.1°
5.0°	0.0872	0.9962	0.0875	11.4301	1.0038	11.4737	85.0°
5.1°	0.0889	0.9960	0.0892	11.2048	1.0040	11.2493	84.9°
5.2°	0.0906	0.9959	0.0910	10.9882	1.0041	11.0336	84.8°
5.3°	0.0924	0.9957	0.0928	10.7797	1.0043	10.8260	84.7°
5.4°	0.0941	0.9956	0.0945	10.5789	1.0045	10.6261	84.6°
5.5°	0.0958	0.9954	0.0963	10.3854	1.0046	10.4334	84.5°
5.6°	0.0976	0.9952	0.0981	10.1988	1.0048	10.2477	84.4°
5.7°	0.0993	0.9951	0.0998	10.0187	1.0050	10.0685	84.3°
5.8°	0.1011	0.9949	0.1016	9.8448	1.0051	9.8955	84.2°
5.9°	0.1028	0.9947	0.1033	9.6768	1.0053	9.7283	84.1°
6.0°	0.1045	0.9945	0.1051	9.5144	1.0055	9.5668	84.0°
6.1°	0.1063	0.9943	0.1069	9.3572	1.0057	9.4105	83.9°
6.2°	0.1080	0.9942	0.1086	9.2052	1.0059	9.2593	83.8°
6.3°	0.1097	0.9940	0.1104	9.0579	1.0061	9.1129	83.7°
6.4°	0.1115	0.9938	0.1122	8.9152	1.0063	8.9711	83.6°
6.5°	0.1132	0.9936	0.1139	8.7769	1.0065	8.8337	83.5°
6.6°	0.1149	0.9934	0.1157	8.6428	1.0067	8.7004	83.4°
6.7°	0.1167	0.9932	0.1175	8.5126	1.0069	8.5711	83.3°
6.8°	0.1184	0.9930	0.1192	8.3863	1.0071	8.4457	83.2°
6.9°	0.1201	0.9928	0.1210	8.2636	1.0073	8.3239	83.1°
7.0°	0.1219	0.9925	0.1228	8.1444	1.0075	8.2055	83.0°
7.1°	0.1236	0.9923	0.1246	8.0285	1.0077	8.0905	82.9°
7.2°	0.1253	0.9921	0.1263	7.9158	1.0079	7.9787	82.8°
7.3°	0.1271	0.9919	0.1281	7.8062	1.0082	7.8700	82.7°
7.4°	0.1288	0.9917	0.1299	7.6996	1.0084	7.7642	82.6°
7.5°	0.1305	0.9914	0.1317	7.5958	1.0086	7.6613	82.5°
7.6°	0.1323	0.9912	0.1334	7.4947	1.0089	7.5611	82.4°
7.7°	0.1340	0.9910	0.1352	7.3962	1.0091	7.4635	82.3°
7.8°	0.1357	0.9907	0.1370	7.3002	1.0093	7.3684	82.2°
7.9°	0.1374	0.9905	0.1388	7.2066	1.0096	7.2757	82.1°
	cos $\bar{A}$	sen $\bar{A}$	cot $\bar{A}$	tan $\bar{A}$	csc $\bar{A}$	sec $\bar{A}$	$\bar{A}$

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{sec } A$	$\text{csc } A$	
8.0°	0.1392	0.9903	0.1405	7.1154	1.0098	7.1853	82.0°
8.1°	0.1409	0.9900	0.1423	7.0264	1.0101	7.0972	81.9°
8.2°	0.1426	0.9898	0.1441	6.9395	1.0103	7.0112	81.8°
8.3°	0.1444	0.9895	0.1459	6.8548	1.0106	6.9273	81.7°
8.4°	0.1461	0.9893	0.1477	6.7720	1.0108	6.8454	81.6°
8.5°	0.1478	0.9890	0.1495	6.6912	1.0111	6.7655	81.5°
8.6°	0.1495	0.9888	0.1512	6.6122	1.0114	6.6874	81.4°
8.7°	0.1513	0.9885	0.1530	6.5350	1.0116	6.6111	81.3°
8.8°	0.1530	0.9882	0.1548	6.4596	1.0119	6.5366	81.2°
8.9°	0.1547	0.9880	0.1566	6.3859	1.0122	6.4637	81.1°
9.0°	0.1564	0.9877	0.1584	6.3138	1.0125	6.3925	81.0°
9.1°	0.1582	0.9874	0.1602	6.2432	1.0127	6.3228	80.9°
9.2°	0.1599	0.9871	0.1620	6.1742	1.0130	6.2546	80.8°
9.3°	0.1616	0.9869	0.1638	6.1066	1.0133	6.1880	80.7°
9.4°	0.1633	0.9866	0.1655	6.0405	1.0136	6.1227	80.6°
9.5°	0.1650	0.9863	0.1673	5.9758	1.0139	6.0589	80.5°
9.6°	0.1668	0.9860	0.1691	5.9124	1.0142	5.9963	80.4°
9.7°	0.1685	0.9857	0.1709	5.8502	1.0145	5.9351	80.3°
9.8°	0.1702	0.9854	0.1727	5.7894	1.0148	5.8751	80.2°
9.9°	0.1719	0.9851	0.1745	5.7297	1.0151	5.8164	80.1°
10.0°	0.1736	0.9848	0.1763	5.6713	1.0154	5.7588	80.0°
10.1°	0.1754	0.9845	0.1781	5.6140	1.0157	5.7023	79.9°
10.2°	0.1771	0.9842	0.1799	5.5578	1.0161	5.6470	79.8°
10.3°	0.1788	0.9839	0.1817	5.5026	1.0164	5.5928	79.7°
10.4°	0.1805	0.9836	0.1835	5.4486	1.0167	5.5396	79.6°
10.5°	0.1822	0.9833	0.1853	5.3955	1.0170	5.4874	79.5°
10.6°	0.1840	0.9829	0.1871	5.3435	1.0174	5.4362	79.4°
10.7°	0.1857	0.9826	0.1890	5.2923	1.0177	5.3860	79.3°
10.8°	0.1874	0.9823	0.1908	5.2422	1.0180	5.3367	79.2°
10.9°	0.1891	0.9820	0.1926	5.1929	1.0184	5.2883	79.1°
11.0°	0.1908	0.9816	0.1944	5.1446	1.0187	5.2408	79.0°
11.1°	0.1925	0.9813	0.1962	5.0970	1.0191	5.1942	78.9°
11.2°	0.1942	0.9810	0.1980	5.0504	1.0194	5.1484	78.8°
11.3°	0.1959	0.9806	0.1998	5.0045	1.0198	5.1034	78.7°
11.4°	0.1977	0.9803	0.2016	4.9594	1.0201	5.0593	78.6°
11.5°	0.1994	0.9799	0.2035	4.9152	1.0205	5.0158	78.5°
11.6°	0.2011	0.9796	0.2053	4.8716	1.0209	4.9732	78.4°
11.7°	0.2028	0.9792	0.2071	4.8288	1.0212	4.9313	78.3°
11.8°	0.2045	0.9789	0.2089	4.7867	1.0216	4.8901	78.2°
11.9°	0.2062	0.9785	0.2107	4.7453	1.0220	4.8496	78.1°
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{cot } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$A$

$A$	$\text{sen } A$	$\text{cos } A$	$\text{tan } A$	$\text{cot } A$	$\text{csc } A$	$\text{csc } .A$	
12.0°	0.2079	0.9781	0.2126	4.7046	1.0223	4.8097	78.0°
12.1°	0.2096	0.9778	0.2144	4.6646	1.0227	4.7706	77.9°
12.2°	0.2113	0.9774	0.2162	4.6262	1.0231	4.7320	77.8°
12.3°	0.2130	0.9770	0.2180	4.5864	1.0235	4.6942	77.7
12.4°	0.2147	0.9767	0.2199	4.5483	1.0239	4.6569	77.6
12.5°	0.2164	0.9763	0.2217	4.5107	1.0243	4.6202	77.5°
12.6°	0.2181	0.9759	0.2235	4.4737	1.0247	4.5841	77.4°
12.7°	0.2198	0.9755	0.2254	4.4373	1.0251	4.5486	77.3°
12.8°	0.2215	0.9751	0.2272	4.4015	1.0255	4.5137	77.2°
12.9°	0.2233	0.9748	0.2290	4.3662	1.0259	4.4783	77.1°
13.0°	0.2250	0.9744	0.2309	4.3315	1.0263	4.4454	77.0°
13.1°	0.2267	0.9740	0.2327	4.2972	1.0267	4.4121	76.9°
13.2°	0.2284	0.9736	0.2345	4.2635	1.0271	4.3792	76.8°
13.3°	0.2300	0.9732	0.2364	4.2303	1.0276	4.3469	76.7°
13.4°	0.2317	0.9729	0.2382	4.1976	1.0280	4.3150	<b>76.6°</b>
13.5°	0.2334	0.9724	0.2401	4.1653	1.0284	4.2837	76.5°
13.6°	0.2351	0.9720	0.2419	4.1335	1.0288	4.2527	76.4°
13.7°	0.2368	0.9715	0.2438	4.1022	1.0293	4.2223	76.3°
13.8°	0.2385	0.9711	0.2456	4.0713	1.0297	4.1923	76.2°
13.9°	0.2402	0.9707	0.2475	4.0408	1.0302	4.1627	76.1°
14.0°	0.2419	0.9703	0.2493	4.0108	1.0306	4.1336	76.0°
14.1°	0.2436	0.9699	0.2512	3.9812	1.0311	4.1048	75.9°
14.2°	0.2453	0.9694	0.2530	3.9520	1.0315	4.0765	75.8°
14.3°	0.2470	0.9690	0.2549	3.9232	1.0320	4.0486	75.7°
14.4°	0.2487	0.9686	0.2568	3.8947	1.0324	4.0211	75.6°
14.5°	0.2504	0.9681	0.2586	3.8667	1.0329	3.9939	75.5°
14.6°	0.2521	0.9677	0.2605	3.8391	1.0334	3.9672	75.4°
14.7°	0.2538	0.9673	0.2623	3.8118	1.0338	3.9408	75.3
14.8°	0.2554	0.9668	0.2642	3.7848	1.0343	3.9147	75.2°
14.9°	0.2571	0.9664	0.2661	3.7583	1.0348	3.8890	75.1°
15.0°	0.2588	0.9659	0.2679	3.7320	1.0353	3.8637	75.0°
15.1°	0.2605	0.9655	0.2698	3.7062	1.0358	3.8387	74.9°
15.2°	0.2622	<b>0.9650</b>	0.2717	<b>3.6806</b>	1.0363	3.8140	74.8°
15.3°	0.2639	<b>0.9646</b>	0.2736	<b>3.6554</b>	1.0367	3.7897	74.7°
15.4°	0.2656	0.9641	0.2754	<b>3.6305</b>	1.0372	3.7657	74.6°
15.5°	0.2672	0.9636	0.2773	<b>3.6059</b>	1.0377	3.7420	74.5°
15.6°	0.2689	0.9632	0.2792	<b>3.5816</b>	1.0382	3.7186	74.4°
15.7°	0.2706	0.9627	0.2811	<b>3.5576</b>	1.0388	3.6955	74.3°
15.8°	0.2723	0.9622	0.2830	<b>3.5339</b>	1.0393	3.6727	74.2°
15.9°	0.2740	0.9617	0.2849	<b>3.5105</b>	1.0398	3.6502	<b>74.1°</b>
	$\text{cos } A$	$\text{sen } A$	$\text{cot } A$	$\text{tan } A$	$\text{csc } A$	$\text{sec } A$	$i$

A	sen A	ceos A	tan A	cot A	sec A	csc A	
16.0"	0.2756	0.9613	0.2867	3.4874	1.0403	3.6280	74.0°
16.1	0.2773	0.9608	0.2886	3,4646	1.0408	3.6060	73.9°
16.2°	0.2790	0.9603	0.2905	3.4420	1.0413	3.5843	73.8°
16.3°	0.2807	0.9598	0.2924	3.4197	1.0419	3.5629	73.7°
16.4°	0.2823	0.9593	0.2943	3.3977	1.0424	3.5418	73.6°
16.5°	0.2840	0.9588	0.2962	3.3759	1.0429	3.5209	73.5°
16.6°	0.2857	0.9583	0.2981	3.3544	1.0435	3.5003	73.4°
16.7°	0.2874	0.9578	0.3000	3.3332	1.0440	3.4799	73.3°
16.8°	0.2890	0.9573	0.3019	3.3122	1.0446	3.4598	73.2°
16.9°	0.2907	0.9568	0.3038	3.2914	1.0451	3.4399	73.1°
17.0°	0.2924	0.9563	0.3057	3.2708	1.0457	3.4203	73.0°
17.1°	0.2940	0.9558	0.3076	3.2505	1.0463	3.4009	72.9°
17.2°	0.2957	0.9553	0.3096	3.2305	1.0468	3.3817	72.8°
17.3°	0.2974	0.9548	0.3115	3.2106	1.0474	3.3628	72.7°
17.4°	0.2990	0.9542	0.3134	3.1910	1.0480	3.3440	72.6°
17.5°	0.3007	0.9537	0.3153	3.1716	1.0485	3.3255	72.5°
17.6°	0.3024	0.9532	0.3172	3.1524	1.0491	3.3072	72.4°
17.7°	0.3040	0.9527	0.3191	3.1334	1.0497	3.2891	72.3°
17.8°	0.3057	0.9521	0.3211	3.1146	1.0503	3.2712	72.2°
17.9°	0.3074	0.9516	0.3230	3.0961	1.0509	3.2535	72.1°
18.0°	0.3090	0.9511	0.3249	3.0777	1.0515	3.2361	72.0°
18.1°	0.3107	0.9505	0.3269	3.0595	1.0521	3.2188	71.9°
18.2°	0.3123	0.9500	0.3288	3.0415	1.0527	3.2017	71.8°
18.3°	0.3140	0.9494	0.3307	3.0237	1.0533	3.1848	71.7°
18.4°	0.3156	0.9489	0.3327	3.0061	1.0539	3.1681	71.6°
18.5'	0.3173	0.9483	0.3346	2.9887	1.0545	3.1515	71.5°
18.6°	0.3190	0.9478	0.3365	2.9714	1.0551	3.1352	71.4°
18.7°	0.3206	0.9472	0.3385	2.9544	1.0557	3.1190	71.3°
18.8°	0.3223	0.9466	0.3404	2.9375	1.0564	3.1030	71.2°
18.9°	0.3239	0.9461	0.3424	2.9208	1.0570	3.0872	71.1°
19.0°	0.3256	0.9455	0.3443	2.9042	1.0576	3.0715	71.0°
19.1°	0.3272	0.9449	0.3463	2.8878	1.0583	3.0561	70.9°
19.2°	0.3289	0.9444	0.3482	2.8716	1.0589	3.0407	70.8°
19.3°	0.3305	0.9438	0.3502	2.8555	1.0595	3.0256	70.7°
19.4°	0.3322	0.9432	0.3522	2.8396	1.0602	3.0106	70.6°
19.5°	0.3338	0.9426	0.3541	2.8239	1.0608	2.9957	70.5°
19.6°	0.3355	0.9421	0.3561	2.8083	1.0615	2.9811	70.4°
19.7°	0.3371	0.9415	0.3581	2.7929	1.0622	2.9665	70.3°
19.8°	0.3387	0.9409	0.3600	2.7776	1.0628	2.9521	70.2°
19.9°	0.3404	0.9403	0.3620	2.7625	1.0635	2.9379	70.1°
	cos A	sen A	cot A	tan A	csc A	sec A	A

$\bar{A}$	sen $A$	cos $A$	tan $A$	cot $A$	sec $A$	csc $A$	
20.0°	0.3420	0.9397	0.3640	2.7475	1.0642	2.9238	70.0°
20.1°	0.3437	0.9391	0.3659	2.7326	1.0649	2.9098	69.9°
20.2°	0.3453	0.9385	0.3679	2.7179	1.0655	2.8960	69.8°
20.3°	0.3469	0.9379	0.3699	2.7033	1.0662	2.8824	69.7°
20.4°	0.3486	0.9373	0.3719	2.6889	1.0669	2.8688	69.6°
20.5°	0.3502	0.9367	0.3739	2.6746	1.0676	2.8554	69.5°
20.6"	0.3518	0.9361	0.3759	2.6605	1.0683	2.8422	69.4°
20.7"	0.3535	0.9354	0.3779	2.6464	1.0690	2.8291	69.3°
20.8°	0.3551	0.9348	0.3799	2.6325	1.0697	2.8160	69.2°
20.9°	0.3567	0.9342	0.3819	2.6187	1.0704	2.8032	69.1°
21.0°	0.3584	0.9336	0.3839	2.6051	1.0711	2.7904	69.0°
21.1°	0.3600	0.9330	0.3859	2.5916	1.0719	2.7778	68.9°
21.2"	0.3616	0.9323	0.3879	2.5781	1.0726	2.7653	68.8°
21.3°	0.3633	0.9317	0.3899	2.5649	1.0733	2.7529	68.7°
21.4°	0.3649	0.9311	0.3919	2.5517	1.0740	2.7406	68.6°
21.5°	0.3665	0.9304	0.3939	2.5386	1.0748	2.7285	68.5°
21.6°	0.3681	0.9298	0.3959	2.5257	1.0755	2.7165	68.4°
21.7°	0.3697	0.9291	0.3979	2.5129	1.0763	2.7045	68.3°
21.8°	0.3714	0.9285	0.4000	2.5002	1.0770	2.6927	68.2°
21.9°	0.3730	0.9278	0.4020	2.4876	1.0778	2.6810	68.1°
22.0"	0.3746	0.9272	0.4040	2.4751	1.0785	2.6695	68.0°
22.1°	0.3762	0.9265	0.4061	2.4627	1.0793	2.6580	67.9°
22.2°	0.3778	0.9259	0.4081	2.4504	1.0801	2.6466	67.8°
22.3°	0.3795	0.9252	0.4101	2.4382	1.0808	2.6353	67.7°
22.4°	0.3811	0.9245	0.4122	2.4262	1.0816	2.6242	67.6°
22.5°	0.3827	0.9239	0.4142	2.4142	1.0824	2.6131	67.5°
22.6°	0.3843	0.9232	0.4163	2.4023	1.0832	2.6022	67.4°
22.7°	0.3859	0.9225	0.4183	2.3906	1.0840	2.5913	67.3°
22.8°	0.3875	0.9219	0.4204	2.3789	1.0848	2.5805	67.2°
22.9°	0.3891	0.9212	0.4224	2.3673	1.0856	2.5699	67.1°
23.0°	0.3907	0.9205	0.4245	2.3558	1.0864	2.5593	67.0°
23.1°	0.3923	0.9198	0.4265	2.3445	1.0872	2.5488	66.9°
23.2°	0.3939	0.9191	0.4286	2.3332	1.0880	2.5384	66.8°
23.3°	0.3955	0.9184	0.4307	2.3220	1.0888	2.5281	66.7°
23.4°	0.3971	0.9178	0.4327	2.3109	1.0896	2.5179	66.6°
23.5°	0.3987	0.9171	0.4348	2.2998	1.0904	2.5078	66.5°
23.6°	0.4003	0.9164	0.4369	2.2889	1.0913	2.4978	66.4°
23.7°	0.4019	0.9157	0.4390	2.2781	1.0921	2.4879	66.3°
23.8°	0.4035	0.9150	0.4411	2.2673	1.0929	2.4780	66.2°
23.9°	0.4051	0.9143	0.4431	2.2566	1.0938	2.4683	66.1°
	cos $A$	sen $A$	cot $A$	tan $A$	csc $A$	sec $A$	$\bar{A}$

$\bar{A}$	sen $\bar{A}$	cos $\bar{A}$	tan $\bar{A}$	cot $\bar{A}$	sec $\bar{A}$	csc $\bar{A}$	
24.00°	0.4067	0.9135	0.4452	2.2460	1.0946	2.4586	66.0°
24.1°	0.4083	0.9128	0.4473	2.2355	1.0955	2.4490	65.9°
24.2	0.4099	0.9121	0.4494	2.2251	1.0963	2.4395	65.8°
24.3°	0.4115	0.9114	0.4515	2.2147	1.0972	2.4300	65.7°
24.4°	0.4131	0.9107	0.4536	2.2045	1.0981	2.4207	65.6°
24.5°	0.4147	0.9100	0.4557	2.1943	1.0989	2.4114	65.5°
24.6°	0.4163	0.9092	0.4578	2.1842	1.0998	2.4022	65.4°
24.7°	0.4179	0.9085	0.4599	2.1742	1.1007	2.3931	65.3°
24.8°	0.4195	0.9078	0.4621	2.1642	1.1016	2.3841	65.2°
24.9°	0.4210	0.9070	0.4642	2.1543	1.1025	2.3751	65.1°
25.0°	0.4226	0.9063	0.4663	2.1445	1.1034	2.3662	65.0°
25.1°	0.4242	0.9056	0.4684	2.1348	1.1043	2.3574	64.9°
25.2°	0.4258	0.9048	0.4706	2.1251	1.1052	2.3486	64.8°
25.3°	0.4274	0.9041	0.4727	2.1155	1.1061	2.3400	64.7°
25.4°	0.4289	0.9033	0.4748	2.1060	1.1070	2.3313	64.6°
25.5°	0.4305	0.9026	0.4770	2.0965	1.1079	2.3228	64.9°
25.6°	0.4321	0.9018	0.4791	2.0872	1.1089	2.3144	64.4°
25.7°	0.4337	0.9011	0.4813	2.0778	1.1098	2.3060	64.3°
25.8°	0.4352	0.9003	0.4834	2.0686	1.1107	2.2976	64.2°
25.9°	0.4368	0.8996	0.4856	2.0594	1.1117	2.2894	<b>64.1°</b>
26.0°	0.4384	0.8988	0.4877	2.0503	1.1126	2.2812	64.0°
26.1°	0.4399	0.8980	0.4899	2.0412	1.1136	2.2730	63.9°
26.2°	0.4415	0.8973	0.4921	2.0323	1.1145	2.2650	63.8°
26.3°	0.4431	0.8965	0.4942	2.0233	1.1155	2.2570	63.7°
26.4°	0.4446	0.8957	0.4964	2.0145	1.1164	2.2490	63.6°
26.5°	0.4462	0.8949	0.4986	2.0057	1.1174	2.2412	63.5°
26.6°	0.4478	0.8942	0.5008	1.9969	1.1184	2.2333	63.4°
26.7°	0.4493	0.8934	0.5029	1.9883	1.1194	2.2256	63.3°
26.8°	0.4509	0.8926	0.5051	1.9797	1.1203	2.2179	63.2°
26.9°	0.4524	0.8918	0.5073	1.9711	1.1213	2.2103	63.1°
27.0°	0.4540	0.8910	0.5095	1.9626	1.1223	2.2027	63.0°
27.1°	0.4555	0.8902	0.5117	1.9542	1.1233	2.1952	62.9°
27.2°	0.4571	0.8894	0.5139	1.9458	1.1243	2.1877	62.8°
27.3°	0.4587	0.8886	0.5161	1.9375	1.1253	2.1803	62.7°
27.4°	0.4602	0.8878	0.5184	1.9292	1.1264	2.1730	62.6°
27.5°	0.4617	0.8870	0.5206	1.9210	1.1274	2.1657	62.5°
27.6°	0.4633	0.8862	0.5228	1.9128	1.1284	2.1584	62.4°
27.7°	0.4648	0.8854	0.5250	1.9047	1.1294	2.1513	62.3°
27.8°	0.4664	0.8846	0.5272	1.8967	1.1305	2.1441	62.2°
27.9°	0.4679	0.8838	0.5295	1.8887	1.1315	2.1371	62.1°
	cos $\bar{A}$	sen $\bar{A}$	cot $\bar{A}$	tan $\bar{A}$	csc $\bar{A}$	sec $\bar{A}$	<b><math>\bar{A}</math></b>

A	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	cscA	
32.0°	0.5299	0.8480	0.6249	1.6003	1.1792	1.8871	58.0"
32.1°	0.5314	0.8471	0.6273	1.5941	1.1805	1.8818	57.9°
32.2°	0.5329	0.8462	0.6297	1.5880	1.1818	1.8766	57.8°
32.3°	0.5344	0.8453	0.6322	1.5818	1.1831	1.8714	57.7°
32.4°	0.5358	0.8443	0.6346	1.5757	1.1844	1.8663	57.6°
32.5°	0.5373	0.8434	0.6371	1.5697	1.1857	1.8612	57.5"
32.6°	0.5388	0.8425	0.6395	1.5637	1.1870	1.8561	57.4°
32.7°	0.5402	0.8415	0.6420	1.5577	1.1883	1.8510	57.3°
32.8°	0.5417	0.8406	0.6445	1.5517	1.1897	1.8460	57.2"
32.9°	0.5432	0.8396	0.6469	1.5458	1.1910	1.8410	57.1°
33.0°	0.5446	0.8387	0.6494	1.5399	1.1924	1.8361	57.0°
33.1°	0.5461	0.8377	0.6519	1.5340	1.1937	1.8312	56.9°
33.2°	0.5476	0.8368	0.6544	1.5282	1.1951	1.8263	56.8°
33.3°	0.5490	0.8358	0.6569	1.5224	1.1964	1.8214	56.7°
33.4°	0.5505	0.8348	0.6594	1.5166	1.1978	1.8166	56.6°
33.5°	0.5519	0.8339	0.6619	1.5108	1.1992	1.8118	56.5°
33.6°	0.5534	0.8329	0.6644	1.5051	1.2006	1.8070	56.4°
33.7°	0.5548	0.8320	0.6669	1.4994	1.2020	1.8023	56.3°
33.8°	0.5563	0.8310	0.6694	1.4938	1.2034	1.7976	56.2"
33.9°	0.5577	0.8300	0.6720	1.4882	1.2048	1.7929	56.1°
34.0	0.5592	0.8290	0.6745	1.4826	1.2062	1.7883	56.0"
34.1°	0.5606	0.8281	0.6771	1.4770	1.2076	1.7837	55.9"
34.2°	0.5621	0.8271	0.6796	1.4715	1.2091	1.7791	55.8°
34.3°	0.5635	0.8261	0.6822	1.4659	1.2105	1.7745	55.7°
34.4°	0.5650	0.8251	0.6847	1.4605	1.2120	1.7700	55.6°
34.5°	0.5664	0.8241	0.6873	1.4550	1.2134	1.7655	55.5°
34.6°	0.5678	0.8231	0.6899	1.4496	1.2149	1.7610	55.4°
34.7°	0.5693	0.8221	0.6924	1.4442	1.2163	1.7566	55.3°
34.8°	0.5707	0.8211	0.6950	1.4388	1.2178	1.7522	55.2°
34.9°	0.5721	0.8202	0.6976	1.4335	1.2193	1.7478	55.1°
35.0°	0.5736	0.8192	0.7002	1.4281	1.2208	1.7434	55.0°
35.1°	0.5750	0.8181	0.7028	1.4229	1.2223	1.7391	54.9°
35.2°	0.5764	0.8171	0.7054	1.4176	1.2238	1.7348	54.8"
35.3°	0.5779	0.8161	0.7080	1.4123	1.2253	1.7305	54.7°
35.4°	0.5793	0.8151	0.7107	1.4071	1.2268	1.7263	54.6°
35.5°	0.5807	0.8141	0.7133	1.4019	1.2283	1.7220	54.5°
35.6°	0.5821	0.8131	0.7159	1.3968	1.2299	1.7178	54.4°
35.7°	0.5835	0.8121	0.7186	1.3916	1.2314	1.7137	54.3°
35.8°	0.5850	0.8111	0.7212	1.3865	1.2329	1.7095	54.2°
35.9°	0.5864	0.8100	0.7239	1.3814	1.2345	1.7054	54.1°
	cos A	sen A	cot A	tan A	cscA	sec A	A

A	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	cscA	
28.0°	0.4695	0.8829	0.5317	1.8807	1.1326	2.1300	62.0°
28.1°	0.4710	0.8821	0.5340	1.8728	1.1336	2.1231	61.9°
28.2°	0.4726	0.8813	0.5362	1.8650	1.1347	2.1162	61.8°
28.3°	0.4741	0.8805	0.5384	1.8572	1.1357	2.1093	61.7°
28.4°	0.4756	0.8796	0.5407	1.8495	1.1368	2.1025	61.6°
28.5°	0.4772	0.8788	0.5430	1.8418	1.1379	2.0957	61.5°
28.6°	0.4787	0.8780	0.5452	1.8341	1.1390	2.0890	61.4°
28.7°	0.4802	0.8771	0.5475	1.8265	1.1401	2.0824	61.3°
28.8°	0.4818	0.8763	0.5498	1.8190	1.1412	2.0757	61.2°
28.9°	0.4833	0.8755	0.5520	1.8115	1.1423	2.0692	61.1°
29.0°	0.4843	0.8746	0.5543	1.8040	1.1434	2.0627	61.0°
29.1°	0.4863	0.8738	0.5566	1.7966	1.1445	2.0562	60.9°
29.2°	0.4879	0.8729	0.5589	1.7893	1.1456	2.0498	60.8°
29.3°	0.4894	0.8721	0.5612	1.7820	1.1467	2.0434	60.7°
29.4°	0.4909	0.8712	0.5635	1.7747	1.1478	2.0371	60.6°
29.5°	0.4924	0.8704	0.5658	1.7675	1.1490	2.0308	60.5°
29.6°	0.4939	0.8695	0.5681	1.7603	1.1501	2.0245	60.4°
29.7°	0.4955	0.8686	0.5704	1.7532	1.1512	2.0183	60.3°
29.8°	0.4970	0.8678	0.5727	1.7461	1.1524	2.0122	60.2°
29.9°	0.4985	0.8669	0.5750	1.7390	1.1535	2.0061	60.1°
30.0°	0.5000	0.8660	0.5774	1.7320	1.1547	2.0000	60.0°
30.1°	0.5015	0.8652	0.5797	1.7251	1.1559	1.9940	59.9°
30.2°	0.5030	0.8643	0.5820	1.7182	1.1570	1.9880	59.8°
30.3°	0.5045	0.8634	0.5844	1.7113	1.1582	1.9820	59.7°
30.4°	0.5060	0.8625	0.5867	1.7045	1.1594	1.9761	59.6°
30.5°	0.5075	0.8616	0.5890	1.6977	1.1606	1.9703	59.5°
30.6°	0.5090	0.8607	0.5914	1.6909	1.1618	1.9645	59.4°
30.7°	0.5105	0.8599	0.5938	1.6842	1.1630	1.9587	59.3°
30.8°	0.5120	0.8590	0.5961	1.6775	1.1642	1.9530	59.2°
30.9°	0.5135	0.8581	0.5985	1.6709	1.1654	1.9473	59.1°
31.0°	0.5150	0.8572	0.6009	1.6643	1.1666	1.9416	59.0°
31.1°	0.5165	0.8563	0.6032	1.6577	1.1679	1.9360	58.9°
31.2°	0.5180	0.8554	0.6056	1.6512	1.1691	1.9304	58.8°
31.3°	0.5195	0.8545	0.6080	1.6447	1.1703	1.9249	58.7°
31.4°	0.5210	0.8536	0.6104	1.6383	1.1716	1.9193	58.6°
31.5°	0.5225	0.8526	0.6128	1.6318	1.1728	1.9139	58.5°
31.6°	0.5240	0.8517	0.6152	1.6255	1.1741	1.9084	58.4°
31.7°	0.5255	0.8508	0.6176	1.6191	1.1754	1.9030	58.3°
31.8°	0.5270	0.8499	0.6200	1.6128	1.1766	1.8977	58.2°
31.9°	0.5284	0.8490	0.6224	1.6066	1.1779	1.8924	58.1°
	cos A	sen A	cot A	tan A	cscA	sec A	A

$A$	sen $A$	cos $A$	tan $A$	cot $A$	sec $A$	csc $A$	
36.0°	0.5878	0.8090	0.7265	1.3764	1.2361	1.7013	54.0°
36.1°	0.5892	0.8080	0.7292	1.3713	1.2376	1.6972	53.9°
36.2°	0.5906	0.8070	0.7319	1.3663	1.2392	1.6932	53.8°
36.3°	0.5920	0.8059	0.7346	1.3613	1.2408	1.6892	53.7°
36.4°	0.5934	0.8049	0.7373	1.3564	1.2424	1.6851	53.6°
36.5°	0.5948	0.8039	0.7400	1.3514	1.2440	1.6812	53.5°
36.6°	0.5962	0.8028	0.7427	1.3465	1.2456	1.6772	53.4°
36.7°	0.5976	0.8018	0.7454	1.3416	1.2472	1.6733	53.3°
36.8°	0.5990	0.8007	0.7481	1.3367	1.2489	1.6694	53.2°
36.9°	0.6004	0.7997	0.7508	1.3319	1.2505	<b>1.6655</b>	53.1°
37.0°	0.6018	0.7986	0.7536	1.3270	1.2521	1.6616	53.0°
37.1°	0.6032	0.7976	0.7563	1.3222	1.2538	1.6578	52.9°
37.2°	0.6046	0.7965	0.7590	1.3175	1.2554	1.6540	52.8°
37.3°	0.6060	0.7955	0.7618	1.3127	1.2571	1.6502	52.7°
37.4°	0.6074	0.7944	0.7646	1.3079	1.2588	1.6464	52.6°
37.5°	0.6088	0.7934	0.7673	1.3032	1.2605	1.6427	52.5°
37.6°	0.6101	0.7923	0.7701	1.2985	1.2622	1.6390	52.4°
37.7°	0.6115	0.7912	0.7729	1.2938	1.2639	1.6353	52.3°
37.8°	0.6129	0.7902	0.7757	1.2892	1.2656	1.6316	52.2°
37.9°	0.6143	0.7891	0.7785	1.2846	1.2673	1.6279	52.1°
38.0°	0.6157	0.7880	0.7813	1.2799	1.2690	1.6243	52.0°
38.1°	0.6170	0.7869	0.7841	1.2753	1.2708	1.6207	51.9°
38.2°	0.6184	0.7859	0.7869	1.2708	1.2725	1.6171	51.8°
38.3°	0.6198	0.7848	0.7898	1.2662	1.2742	1.6135	51.7°
38.4°	0.6211	0.7837	0.7926	1.2617	1.2760	1.6099	51.6°
38.5°	0.6225	0.7826	0.7954	1.2572	<b>1.2778</b>	1.6064	51.5°
38.6°	0.6239	0.7815	0.7983	1.2527	1.2796	1.6029	51.4°
38.7°	0.8252	0.7804	0.8012	1.2482	1.2813	1.5994	51.3°
38.8°	0.6266	0.7793	0.8040	1.2438	1.2831	1.5959	51.2°
38.9°	0.6280	0.7782	0.8069	1.2393	1.2849	1.5925	51.1°
39.0°	0.6293	0.7771	0.8098	1.2349	1.2868	1.5890	51.0°
39.1°	0.8307	0.7760	0.8127	1.2305	1.2886	1.5856	50.9°
39.2°	0.6320	0.7749	0.8156	1.2261	1.2904	1.5822	50.8°
39.3°	0.6334	0.7738	0.8185	1.2218	1.2923	1.5788	50.7°
39.4°	0.6347	0.7727	0.8214	1.2174	1.2941	1.5755	50.6°
39.5°	0.6361	0.7716	0.8243	1.2131	1.2960	1.5721	50.5°
39.6°	0.6374	0.7705	0.8273	1.2088	1.2978	1.5688	50.4°
39.7°	0.6388	0.7694	0.8302	1.2045	1.2997	1.5655	50.3°
39.8°	0.6401	0.7683	0.8332	1.2002	1.3016	1.5622	50.2°
39.9°	0.6414	0.7672	0.8361	1.1960	1.3035	1.5590	50.1°
	cos $A$	sen $A$	cot $A$	tan $A$	csc $A$	sec $A$	<b><math>A</math></b>

A	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A	
40.0°	0.6428	0.7660	0.8391	1.1918	1.3054	1.5557	50.0°
40.1°	0.6441	0.7649	0.8421	1.1875	1.3073	1.5525	49.9°
40.2°	0.6455	0.7638	0.8451	1.1833	1.3092	1.5493	49.8°
40.3°	0.6468	0.7627	0.8481	1.1792	1.3112	1.5461	49.7°
40.4°	0.6481	0.7615	0.8511	1.1750	1.3131	1.5429	49.6°
40.5°	0.6494	0.7604	0.8541	1.1709	1.3151	1.5398	49.5°
40.6°	0.6508	0.7593	0.8571	1.1667	1.3171	1.5366	49.4°
40.7°	0.6521	0.7581	0.8601	1.1626	1.3190	1.5335	49.3°
40.8°	0.6534	0.7570	0.8632	1.1585	1.3210	1.5304	49.2°
40.9°	0.6547	0.7559	0.8662	1.1544	1.3230	1.5273	49.1°
41.0°	0.6561	0.7547	0.8693	1.1504	1.3250	1.5243	49.0°
41.1°	0.6574	0.7536	0.8724	1.1463	1.3270	1.5212	48.9°
41.2°	0.6587	0.7524	0.8754	1.1423	1.3291	1.5182	48.8°
41.3°	0.6600	0.7513	0.8785	1.1383	1.3311	1.5151	48.7°
41.4°	0.6613	0.7501	0.8816	1.1343	1.3331	1.5121	48.6°
41.5°	0.6626	0.7490	0.8847	1.1303	1.3352	1.5092	48.5°
41.6°	0.6639	0.7478	0.8876	1.1263	1.3373	1.5062	48.4°
41.7°	0.6652	0.7466	0.8910	1.1224	1.3393	1.5032	48.3'
41.8°	0.6665	0.7455	0.8941	1.1184	1.3414	1.5003	48.2°
41.9°	0.6678	0.7443	0.8972	1.1145	1.3435	1.4974	48.1°
42.0°	0.6691	0.7431	0.9004	1.1106	1.3456	1.4945	48.0°
42.1°	0.6704	0.7420	0.9036	1.1067	1.3478	1.4916	47.9°
42.2°	0.6717	0.7408	0.9067	1.1028	1.3499	1.4887	47.8°
42.3°	0.6730	0.7396	0.9099	1.0990	1.3520	1.4859	47.7°
42.4°	0.6743	0.7385	0.9131	1.0951	1.3542	1.4830	47.6°
42.5°	0.6756	0.7373	0.9163	1.0913	1.3563	1.4802	47.5°
42.6°	0.6769	0.7361	0.9195	1.0875	1.3585	1.4774	47.4°
42.7°	0.6782	0.7349	0.9228	1.0837	1.3607	1.4746	47.3°
42.8°	0.6794	0.7337	0.9260	1.0799	1.3629	1.4718	47.2°
42.9°	0.6807	0.7325	0.9293	1.0761	1.3651	1.4690	47.1°
43.0°	0.6820	0.7314	0.9325	1.0724	1.3673	1.4663	47.0°
43.1°	0.6833	0.7302	0.9358	1.0686	1.3696	1.4635	46.9°
43.2°	0.6845	0.7290	0.9391	1.0649	1.3718	1.4608	46.8°
43.3°	0.6858	0.7278	0.9423	1.0612	1.3741	1.4581	46.7°
43.4°	0.6871	0.7266	0.9457	1.0575	1.3763	1.4554	46.6°
43.5°	0.6884	0.7254	0.9490	1.0538	1.3786	1.4527	46.5°
43.6°	0.6896	0.7242	0.9523	1.0501	1.3809	1.4501	46.4°
43.7°	0.6909	0.7230	0.9556	1.0464	1.3832	1.4474	46.3°
43.8°	0.6921	0.7218	0.9590	1.0428	1.3855	1.4448	46.2°
43.9°	0.6934	0.7206	0.9623	1.0392	1.3878	1.4422	46.1°
	cos A	sen A	cot A	tan A	csc A	sec A	A

$A$	$\text{sen } A$	$\cos A$	$\tan A$	$\cot A$	$\sec A$	$\text{csc } A$	
44.0°	0.6947	0.7193	0.9657	1.0355	1.3902	1.4396	46.0°
44.1°	0.6959	0.7181	0.9691	1.0319	1.3925	1.4370	45.9
44.2°	0.6972	0.7169	0.9725	1.0283	1.3949	1.4344	45.8°
44.3°	0.6984	0.7157	0.9759	1.0247	1.3972	1.4318	45.7°
44.4°	0.6997	0.7145	0.9793	1.0212	1.3996	1.4293	45.6°
44.5°	0.7009	0.7133	0.9827	1.0176	1.4020	1.4267	45.5
44.6°	0.7022	0.7120	0.9861	1.0141	1.4044	1.4242	45.4
44.7°	0.7034	0.7108	0.9896	1.0105	1.4069	1.4217	45.3
44.8°	0.7046	0.7096	0.9930	1.0070	1.4093	1.4192	45.2°
44.9°	0.7059	0.7083	0.9965	1.0035	1.4117	1.4167	45.1
45.0°	0.7071	0.7071	1.0000	1.0000	1.4142	1.4142	45.0°
	$\cos A$	$\text{sen } A$	$\cot A$	$\tan A$	$\text{csc } A$	$\sec A$	$A$

Tabla 3 Funciones trigonométricas — Ángulos en intervalos de centésimas de radián

$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } X$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$
0.00	0.0000	1.0000	0.0000	Indefinido	1.0000	Indefinido
0.01	0.0100	1.0000	0.0100	99.9967	1.0000	100.0020
0.02	0.0200	0.9998	0.0200	49.9933	1.0002	50.0033
0.03	0.0300	0.9996	0.0300	33.3233	1.0005	33.3383
0.04	0.0400	0.9992	0.0400	24.9867	1.0008	25.0067
0.05	0.0500	0.9988	0.0500	19.9833	1.0013	20.0083
0.06	0.0600	0.9982	0.0601	16.6467	1.0018	16.6767
0.07	0.0699	0.9976	0.0701	14.2624	1.0025	14.2974
0.08	0.0799	0.9968	0.0802	12.4733	1.0032	12.5133
0.09	0.0899	0.9960	0.0902	11.0811	1.0041	11.1261
0.10	0.0998	0.9950	0.1003	9.9666	1.0050	10.0167
0.11	0.1098	0.9940	0.1104	9.0542	1.0061	9.1093
0.12	0.1197	0.9528	0.1206	8.2933	1.0072	8.3534
0.13	0.1296	0.9916	0.1307	7.6489	1.0085	7.7140
0.14	0.1395	0.9902	0.1409	7.0961	1.0099	7.1662
0.15	0.1494	0.9888	0.1511	6.6166	1.0114	6.6917
0.16	0.1593	0.9872	0.1614	6.1966	1.0129	6.2767
0.17	0.1692	0.9856	0.1717	5.8256	1.0146	5.9108
0.18	0.1790	0.9838	0.1820	5.4954	1.0164	5.5857
0.19	0.1889	0.9820	0.1923	5.1997	1.0183	5.2950
0.20	0.1987	0.9801	0.2027	4.9332	1.0203	5.0335
0.21	0.2085	0.9780	0.2131	4.6917	1.0225	4.7971
0.22	0.2182	0.9759	0.2236	4.4719	1.0247	4.5823
0.23	0.2280	0.9737	0.2341	4.2709	1.0270	4.3864
0.24	0.2377	0.9713	0.2447	4.0864	1.0295	4.2069
0.25	0.2474	0.9689	0.2553	3.9163	1.0321	4.0420
0.26	0.2571	0.9664	0.2660	3.7591	1.0348	3.8898
0.27	0.2667	0.9638	0.2768	3.6133	1.0376	3.7491
0.28	0.2764	0.9611	0.2876	3.4776	1.0405	3.6185
0.29	0.2860	0.9582	0.2984	3.3511	1.0436	3.4971
0.30	0.2955	0.9553	0.3093	3.2327	1.0468	3.3839
0.31	0.3051	0.9523	0.3203	3.1218	1.0501	3.2781
0.32	0.3146	0.9492	0.3314	3.0176	1.0535	3.1790
0.33	0.3240	0.9460	0.3425	2.9195	1.0570	3.0860
0.34	0.3335	0.9428	0.3537	2.8270	1.0607	2.9986
0.35	0.3429	0.9394	0.3650	2.7395	1.0645	2.9163
0.36	0.3523	0.9359	0.3764	2.6567	1.0685	2.8387
0.37	0.3616	0.9323	0.3879	2.5782	1.0726	2.7654
0.38	0.3709	0.9287	0.3994	2.5037	1.0768	2.6960
0.39	0.3802	0.9249	0.4111	2.4328	1.0812	2.6303
$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } X$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$

$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } X$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$
0.40	0.3894	0.9211	0.4228	2.3652	1.0857	2.5679
0.41	0.3986	0.9171	0.4346	2.3008	1.0904	2.5087
0.42	0.4078	0.9131	0.4466	2.2393	1.0952	2.4524
0.43	0.4169	0.9090	0.4586	2.1804	1.1002	2.3988
0.44	0.4259	0.9048	0.4708	2.1241	1.1053	2.3478
0.45	0.4350	0.9004	0.4831	2.0702	1.1106	2.2990
0.46	0.4439	0.8961	0.4954	2.0184	1.1160	2.2525
0.47	0.4529	0.8916	0.5080	1.9686	1.1216	2.2081
0.48	0.4618	0.8870	0.5206	1.9208	1.1274	2.1655
0.49	0.4706	0.8823	0.5334	1.8748	1.1334	2.1248
0.50	0.4794	0.8776	0.5463	1.8305	1.1395	2.0858
0.51	0.4882	0.8727	0.5594	1.7878	1.1458	2.0484
0.52	0.4969	0.8678	0.5726	1.7465	1.1523	2.0126
0.53	0.5055	0.8628	0.5859	1.7067	1.1590	1.9781
0.54	0.5141	0.8577	0.5994	1.6683	1.1659	1.9450
0.55	0.5227	0.8525	0.6131	1.6310	1.1730	1.9132
0.56	0.5312	0.8473	0.6269	1.5950	1.1803	1.8826
0.57	0.5396	0.8419	0.6410	1.5601	1.1878	1.8531
0.58	0.5480	0.8365	0.6552	1.5263	1.1955	1.8247
0.59	0.5564	0.8309	0.6696	1.4935	1.2035	1.7974
0.60	0.5646	0.8253	0.6841	1.4617	1.2116	1.7710
0.61	0.5729	0.8196	0.6989	1.4308	1.2200	1.7456
0.62	0.5810	0.8139	0.7139	1.4007	1.2287	1.7211
0.63	0.5891	0.8080	0.7291	1.3715	1.2376	1.6974
0.64	0.5972	0.8021	0.7445	1.3431	1.2467	1.6745
0.65	0.6052	0.7961	0.7602	1.3154	1.2561	1.6524
0.66	0.6131	0.7900	0.7761	1.2885	1.2658	1.6310
0.67	0.6210	0.7838	0.7923	1.2622	1.2758	1.6103
0.68	0.6288	0.7776	0.8087	1.2366	1.2861	1.5903
0.69	0.6365	0.7712	0.8253	1.2116	1.2966	1.5710
0.70	0.6442	0.7648	0.8423	1.1872	1.3075	1.5523
0.71	0.6518	0.7584	0.8595	1.1634	1.3186	1.5341
0.72	0.6594	0.7518	0.8771	1.1402	1.3301	1.5166
0.73	0.6669	0.7452	0.8949	1.1174	1.3420	1.4995
0.74	0.6743	0.7385	0.9131	1.0952	1.3542	1.4830
0.75	0.6816	0.7317	0.9316	1.0734	1.3667	1.4671
0.76	0.6889	0.7248	0.9505	1.0521	1.3796	1.4515
0.77	0.6961	0.7179	0.9697	1.0313	1.3929	1.4365
0.78	0.7033	0.7109	0.9893	1.0109	1.4066	1.4219
0.79	0.7104	0.7038	1.0092	0.9908	1.4208	1.4078
$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } x$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$

X	sen X	cos X	tan X	cot A'	sec X	csc X
0.80	0.7174	0.6967	1.0296	0.9712	1.4353	1.3940
0.81	0.7243	0.6895	1.0505	0.9520	1.4503	1.3807
0.82	0.7311	0.6822	1.0717	0.9331	1.4658	1.3677
0.83	0.7379	0.6749	1.0934	0.9146	1.4818	1.3551
0.84	0.7446	0.6675	1.1156	0.8964	1.4982	1.3429
0.85	0.7513	0.6600	1.1383	0.8785	1.5152	1.3311
0.86	0.7578	0.6524	1.1616	0.8609	1.5327	1.3195
0.87	0.7643	0.6448	1.1853	0.8437	1.5508	1.3083
0.88	0.7707	0.6372	1.2097	0.8267	1.5695	1.2975
0.89	0.7771	0.6294	1.2346	0.8100	1.5888	1.2869
0.90	0.7833	0.6216	1.2602	0.7936	1.6087	1.2766
0.91	0.7895	0.6137	1.2864	0.7774	1.6293	1.2666
0.92	0.7956	0.6058	1.3133	0.7615	1.6507	1.2569
0.93	0.8016	0.5978	1.3409	0.7458	1.6727	1.2475
0.94	0.8076	0.5898	1.3692	0.7303	1.6955	1.2383
0.95	0.8134	0.5817	1.3984	0.7151	1.7191	1.2294
0.96	0.8192	0.5735	1.4284	0.7001	1.7436	1.2207
0.97	0.8249	0.5653	1.4592	0.6853	1.7690	1.2123
0.98	0.8305	0.5570	1.4910	0.6707	1.7953	1.2041
0.99	0.8360	0.5487	1.5237	0.6563	1.8225	1.1961
1.00	0.8415	0.5403	1.5574	0.6421	1.8508	1.1884
1.01	0.8468	0.5319	1.5922	0.6281	1.8802	1.1809
1.02	0.8521	0.5234	1.6281	0.6142	1.9107	1.1736
1.03	0.8573	0.5148	1.6652	0.6005	1.9424	1.1665
1.04	0.8624	0.5062	1.7036	0.5870	1.9754	1.1595
1.05	0.8674	0.4976	1.7433	0.5738	2.0098	1.1528
1.06	0.8724	0.4889	1.7844	0.5604	2.0455	1.1463
1.07	0.8772	0.4801	1.8270	0.5473	2.0828	1.1400
1.08	0.8820	0.4713	1.8712	0.5344	2.1217	1.1338
1.09	0.8866	0.4625	1.9171	0.5216	2.1622	1.1279
1.10	0.8912	0.4536	1.9648	0.5090	2.2046	1.1221
1.11	0.8957	0.4447	2.0143	0.4964	2.2489	1.1164
1.12	0.9001	0.4357	2.0660	0.4840	2.2952	1.1110
1.13	0.9044	0.4267	2.1197	0.4718	2.3438	1.1057
1.14	0.9086	0.4176	2.1759	0.4596	2.3947	1.1006
1.15	0.9128	0.4085	2.2345	0.4475	2.4481	1.0956
1.16	0.9168	0.3993	2.2958	0.4356	2.5041	1.0907
1.17	0.9208	0.3902	2.3600	0.4237	2.5631	1.0861
1.18	0.9246	0.3809	2.4273	0.4120	2.6252	1.0815
1.19	0.9284	0.3717	2.4979	0.4003	2.6906	1.0772
X	sen X	cos X	tan X	cot X	sec A	csc X

$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } X$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$
1.20	0.9320	0.3624	2.5722	0.3888	2.7597	1.0729
1.21	0.9356	0.3530	2.6503	0.3773	2.8327	1.0688
1.22	0.9391	0.3436	2.7328	0.3659	2.9100	1.0648
1.23	0.9425	0.3342	2.8198	0.3546	2.9919	1.0610
1.24	0.9458	0.3248	2.9119	0.3434	3.0789	1.0573
1.25	0.9490	0.3153	3.0096	0.3323	3.1714	1.0538
1.26	0.9521	0.3058	3.1133	0.3212	3.2699	1.0503
1.27	0.9551	0.2963	3.2236	0.3102	3.3752	1.0470
1.28	0.9580	0.2867	3.3414	0.2993	3.4878	1.0438
1.29	0.9608	0.2771	3.4672	0.2884	3.6085	1.0408
1.30	0.9636	0.2675	3.6021	0.2776	3.7383	1.0378
1.31	0.9662	0.2579	3.7471	0.2669	3.8782	1.0350
1.32	0.9687	0.2482	3.9033	0.2562	4.0294	1.0323
1.33	0.9711	0.2385	4.0723	0.2456	4.1933	1.0297
1.34	0.9735	0.2288	4.2556	0.2350	4.3715	1.0272
1.35	0.9757	0.2190	4.4552	0.2245	4.5661	1.0249
1.36	0.9779	0.2092	4.6734	0.2140	4.7792	1.0226
1.37	0.9799	0.1994	4.9131	0.2035	5.0138	1.0205
1.38	0.9819	0.1896	5.1774	0.1931	5.2731	1.0185
1.39	0.9837	0.1798	5.4707	0.1828	5.5613	1.0166
1.40	0.9854	0.1700	5.7979	0.1725	5.8835	1.0148
1.41	0.9871	0.1601	6.1654	0.1622	6.2459	1.0131
1.42	0.9887	0.1502	6.5811	0.1519	6.6567	1.0115
1.43	0.9901	0.1403	7.0555	0.1417	7.1260	1.0100
1.44	0.9915	0.1304	7.6018	0.1315	7.6673	1.0086
1.45	0.9927	0.1205	8.2381	0.1214	8.2986	1.0073
1.46	0.9939	0.1106	8.9886	0.1113	9.0441	1.0062
1.47	0.9949	0.1006	9.8874	0.1011	9.9378	1.0051
1.48	0.9959	0.0907	10.9834	0.0910	11.0288	1.0041
1.49	0.9967	0.0807	12.3499	0.0810	12.3903	1.0033
1.50	0.9975	0.0707	14.1014	0.0709	14.1368	1.0025
1.51	0.9982	0.0608	16.4281	0.0609	16.4585	1.0019
1.52	0.9987	0.0508	19.6696	0.0508	19.6950	1.0013
1.53	0.9992	0.0408	24.4984	0.0408	24.5188	1.0008
1.54	0.9995	0.0308	32.4612	0.0308	32.4766	1.0005
1.55	0.9998	0.0208	48.0784	0.0208	48.0888	1.0002
1.56	0.9999	0.0108	92.6208	0.0108	92.6262	1.0001
1.57	1.0000	0.0008	1255.6700	0.0008	1255.6700	1.0000
1.58	1.0000	-0.0092	-108.6510	-0.0092	-108.6560	1.0000
1.59	0.9998	-0.0192	-52.0672	-0.0192	-52.0768	1.0002
$X$	$\text{sen } X$	$\text{cos } X$	$\text{tan } X$	$\text{cot } X$	$\text{sec } X$	$\text{csc } X$

Tabla 4 Tabla de logaritmos comunes (base 10) con cuatro decimales

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038
32	5052	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5515	5527	5539	5551
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

<i>N</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
50	6990	6998	7007	7018	7024	7033	7042	7050	7059	7067
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701
59	7709	7718	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627
73	8633	8639	8646	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538
<i>N</i>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

APÉNDICE 2: TABLAS

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680
93	9635	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9764	9768	9773
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	3818
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

# Apéndice 3

## Logaritmos

### A3.1 LOGARITMOS COMUNES

El logaritmo común de un número positivo dado  $N$  (se escribe  $\log N$ ) es el exponente al que hay que elevar a 10 para obtener dicho número. Por ejemplo,

$$\begin{aligned} \log 1 &= 0 \quad \text{dado que } 10^0 = 1 & \log 100 &= 2 \quad \text{dado que } 10^2 = 100 \\ \log 10 &= 1 \quad \text{dado que } 10^1 = 10 & \log 0.001 &= -3 \quad \text{dado que } 10^{-3} = 0.001 \end{aligned}$$

Entonces  $\log P = p$  si  $10^p = P$

### A3.2 LEYES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

- I. El logaritmo de un producto de dos o más números positivos es igual a la suma de los logaritmos de éstos; es decir,

$$\begin{aligned} \log P \cdot Q &= \log P + \log Q \\ \log P \cdot Q \cdot R &= \log P + \log Q + \log R, \text{ etc} \end{aligned}$$

- II. El logaritmo del cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor; esto es,

$$\log \frac{P}{Q} = \log P - \log Q$$

- III. El logaritmo de un número positivo elevado a una potencia es igual al logaritmo del número multiplicado por el exponente de la potencia; es decir,

$$\log (P^n) = n \log P$$

- IV. El logaritmo de la raíz de un número positivo es igual al logaritmo del número dividido por el índice de la raíz; es decir,

$$\log \sqrt[n]{P} = \frac{1}{n} \log P$$

La comprobación de estas leyes aparece en el Problema A3.1.

El logaritmo de una expresión que involucra dos o más de las operaciones citadas en las leyes I a IV. se obtiene combinando los resultados de las diferentes leyes, es decir,

$$\log \frac{P \cdot Q}{R} = \log (P \cdot Q) - \log R = \log P + \log Q - \log R$$

Otros ejemplos aparecen en los problemas A3.2 a A3.4.

### A3.3 CARACTERÍSTICA Y MANTISA

El logaritmo común de un número positivo (por ejemplo,  $\log 300 = 2.4771$  y  $\log 0.2 = 9.3010 - 10$ ), está constituido por dos partes: una parte entera llamada *característica* y una parte decimal pura llamada *mantisa*.

De los problemas A3.3 y A3.4 se observa que la característica depende sólo de la posición del punto decimal en el número. Por ejemplo,

$$\begin{array}{lcl} \log 2 = 0.3010 & \text{y} & \log 200 = 2.3010 \\ \log 25 = 1.3979 & \text{y} & \log 2.5 = 0.3979 \end{array}$$

La característica del logaritmo común de cualquier número mayor que 1 es el número de dígitos, que se encuentran a la izquierda del punto decimal del número dado, menos uno.

La característica del logaritmo común de cualquier número menor que uno se obtiene restando de 9 el número de ceros que se encuentran inmediatamente a la derecha del punto decimal y finalmente restándole 10. Así, la característica del logaritmo común de .2 es  $9 - 10$ , de 0.04 es  $8 - 10$ , de 0.0005 es  $6 - 10$ .

(Véase además el Prob. A3.5)

La mantisa del logaritmo común de un número positivo generalmente es un decimal continuo. Todas las referencias hechas aquí corresponden a la Tabla 4 del Apéndice 2, en donde se dan las mantisas con cuatro decimales.

### A3.4 PARA ENCONTRAR EL LOGARITMO DE UN NUMERO POSITIVO DADO

- (a) Se escribe la característica de acuerdo a las reglas establecidas anteriormente.
- (b<sub>1</sub>) Cuando el número dado tenga tres o menos dígitos significativos, lea la mantisa de la Tabla.

**EJEMPLO A3.1** Encuentre el  $\log 32.8$

La característica es 1. Para encontrar la mantisa, localice el número 5159 en el renglón a la derecha de 32 y la columna encabezada por 8. Entonces,  $\log 32.8 = 1.5159$

**EJEMPLO A3.2** Encuentre el  $\log 5.2$

La característica es 0. Dado que  $5.2 = 5.20$ , se encuentra la mantisa localizando el número 7160 en el renglón a la derecha de 52 y la columna encabezada por 0. Entonces,  $\log 5.2 = 0.7160$

- (b<sub>2</sub>) Cuando un número dado está formado por cuatro dígitos, se interpola utilizando el método de las partes proporcionales.

**EJEMPLO A3.3** Encuentre el  $\log 654.8$

La característica es 2. Para la mantisa, se tiene

$$\begin{array}{l} \text{Mantisa de } \log 654.0 = .8156 \\ \text{Mantisa de } \log 655.0 = .8162 \\ \text{Diferencia tabular} = .0006 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 0.8 \times \text{diferencia tabular} = .00048 \text{ o } .0005 \text{ para cuatro decimales} \\ \text{Mantisa de } \log 654.8 = .8156 + .0005 = .8161 \end{array}$$

Entonces,  $\log 654.8 = 2.8161$ .

Observe que el cálculo importante aquí fue  $8156 + 0,8(6) = 8166.8$  u  $8161$

- (b<sub>2</sub>) Cuando un número dado contiene más de cuatro dígitos, se redondea a cuatro dígitos, entonces se interpola utilizando el método de partes proporcionales.

**EJEMPLO A3.4** Encuentre el log 1.1917

Para los cuatro primeros decimales, se quiere encontrar log 1.192. La característica es 0. Para la mantisa se tiene

$$\text{Mantisa de log 1.190} = .0755$$

$$\text{Mantisa de log 1.200} = .0792$$

$$\text{Diferencia tabular} = .0037$$

$$0.2 \times \text{diferencia tabular} = .00074 \text{ o } .0007 \text{ para cuatro decimales}$$

$$\text{Mantisa de log 1.192} = .0755 + .0007 = .0762$$

$$\text{Entonces, log 1.1917} = 0.0762.$$

(Véanse Problemas A3.6 y A3.7)

**A3.5 PARA ENCONTRAR EL NUMERO CORRESPONDIENTE A UN LOGARITMO COMÚN DADO**

Cuando encuentre una mantisa en la Tabla, lea el número del renglón y el que encabeza la columna, y coloque el punto decimal de acuerdo a la regla de la característica. El número resultante se llama *antilogaritmo* (antilog) de un logaritmo dado.

**EJEMPLO A3.5** Antilog 1.8808 = 76.0.

La mantisa .8808 se encuentra en la Tabla en el renglón 76 y en la columna encabezada por 0. Como la característica es 1, se tendrán dos dígitos a la izquierda del punto decimal.

Cuando no se encuentre una mantisa en la Tabla, se debe recurrir a la interpolación.

**EJEMPLO A3.6** Antilog 9.5657 - 10 = 0.3679.

$$\text{Mantisa del log 3670} = .5647$$

$$\text{Mantisa del log 3680} = .5658$$

$$\text{Diferencia tabular} = .0011$$

$$\text{Mantisa dada} = .5657$$

$$\text{Mantisa menor siguiente} = .5647$$

$$\text{Diferencia} = .0010$$

$$\text{Corrección} = \frac{0.0010}{0.0011} (0.0010) = 0.00091 \text{ o } 0.0009 \text{ aproximando a 4 decimales}$$

$$\text{Entonces, el antilog } 9.5657 - 10 = 0.3670 + 0.0009 = 0.3679.$$

$$\text{Note que la operación esencial es en este caso } \frac{10 \times 10}{12} = 9.1 \text{ 0 9.}$$

(Véase también Prob. A3.8)

**3.6 COLOGARITMOS**

El **cologaritmo de un número positivo  $N$  (denotado por  $\text{colog } N$ ) es el logaritmo de su recíproco  $1/N$ . Así,  $\text{colog } N = \log (1/N) = \log 1 - \log N = -\log N$ .**

**EJEMPLO A3.7** Colog 38.38 = 8.4159 - 10.

$$\text{colog } 38.38 = \log \frac{1}{38.38} = \log 1 - \log 38.38$$

$$\log 1 = 10.0000 - 10$$

$$(-) \log 38.38 = \frac{1.5841}{8.4159 - 10}$$

Note que  $\text{colog } N$  puede obtenerse restando cada dígito de  $\log N$  de 9 (empezando por la izquierda), con excepción del dígito menos significativo, el cual se resta de 10, y si  $N$  es mayor que 1 se escribe a continuación - 10. Por ejemplo:

- (a)  $\log 3163 = 3,5001$ ;  $\text{colog } 3163 = 6,4999 - 10$ .  
 (b)  $\log 0.0399 = 8.6010 - 10$ ;  $\text{colog } 0.0399 = 1.3990$ .

(Véanse también los Probs. A3.12 y A 3.13)

### Problemas resueltos

A3.1 Demuestre las leyes de los logaritmos.

Restringiendo las demostraciones a los logaritmos comunes, sea  $P = 10^p$  y  $Q = 10^q$  entonces,  $\log P = p$  y  $\log Q = q$ .

- I. Dado que  $P \cdot Q = 10^p \cdot 10^q = 10^{p+q}$ , entonces  $\log (P \cdot Q) = p + q = \log P + \log Q$ .  
 II. Dado que  $P/Q = 10^p / 10^q = 10^{p-q}$  entonces  $\log (P/Q) = p - q = \log P - \log Q$ .  
 III. Dado que  $P^n = (10^p)^n = 10^{np}$ , entonces  $\log P^n = np = n \log P$ .  
 IV Dado que  $\sqrt[n]{P} = (10^p)^{1/n} = 10^{p/n}$  entonces  $\log \sqrt[n]{P} = p/n = 1/n \log P$ .

A3.2 Exprese los logaritmos de las expresiones dadas en términos de cada una de las letras y números que aparecen en ellas.

$$(a) \log \frac{P \cdot Q}{R \cdot S} = \log (P \cdot Q) - \log (R \cdot S) = (\log P + \log Q) - (\log R + \log S) \\ = \log P + \log Q - \log R - \log S$$

$$(b) \log \sqrt[3]{\frac{P}{Q^4}} = \log \sqrt[3]{P} - \log Q^{\frac{4}{3}} = \frac{1}{3} \log P - 4 \log Q$$

$$(c) \log \frac{34(104)^2}{(49)^3} = \log 34 + 2 \log 104 - 3 \log 49$$

$$(d) \log \frac{(34.2)^2 \sqrt[3]{1.06}}{(9.8)^4 \sqrt{2.33}} \quad 11 = 2 \log 34.2 + \log 1.06 - 3 \log 9.8 - \log 2.33$$

A3.3 Dado que  $\log 2 = 0.3010$  y  $\log 3 = 0.4771$ , encuentre el logaritmo de:

- (a) 30, (b) 200, (c) 25, (d) 120, (e) 2.5, (f)  $\sqrt{6}$ , (g)  $\sqrt[3]{24}$

(a)  $30 = 3 \times 10$ :  $\log 30 = \log 3 + \log 10 = 0.4771 + 1.0000 = 1.4771$

(b)  $200 = 2 \times 10^2$ :  $\log 200 = \log 2 + 2 \log 10 = 0.3010 + 2.0000 = 2.3010$

(c)  $25 = 10^2/2^2$ :  $\log 25 = 2 \log 10 - 2 \log 2 = 2.0000 - 0.6020 = 1.3980$

(d)  $120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 10$ :  $\log 120 = 2 \log 2 + \log 3 + \log 10 = 0.6020 + 0.4771 + 1.0000 = 2.0791$

(e)  $2.5 = 10/2^2$ :  $\log 2.5 = \log 10 - 2 \log 2 = 1.0000 - 0.6020 = 0.3980$

(f)  $\sqrt{6} = (2 \times 3)^{1/2}$ :  $\log \sqrt{6} = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = \frac{1}{2}(0.7781) = 0.3890$

(g)  $\sqrt[3]{24} = \sqrt[3]{2^3 \times 3} = 2 \sqrt[3]{3}$ :  $\log \sqrt[3]{24} = \log 2 + \log \sqrt[3]{3} = 0.3010 + (0.4771) = 0.4600$

**A3.4** Dado que  $\log 2 = 0.3010$  y  $\log 3 = 0.4771$ , encuentre el logaritmo de:

(a) 0.2, (b) 0.003, (c) 0.5, (d)  $(0.02)^3$ , (e)  $4\sqrt{0.006}$

$$(a) \quad 0.2 = 2/10; \log 0.2 = \log 2 - \log 10 = 0.3010 - 1.0000 = -1 + 0.3010.$$

Se debería escribir de la siguiente forma  $9.3010 - 10$ .

$$(b) \quad 0.003 = 3/10^3; \log 0.003 = \log 3 - 3 \log 10 = -3 + 0.4771 = 7.4771 - 10$$

$$(c) \quad 0.5 = 1/2; \log 0.5 = \log 1 - \log 2 = 0.0000 - 0.3010 \\ = (10.0000 - 10) - 0.3010 = 9.6990 - 10$$

$$(d) \quad (0.02)^3 = (2/10^2)^3; \log (0.02)^3 = 3 \log 2 - 6 \log 10 \\ = 0.9030 - 6.0000 \\ = (10.9030 - 10) - 6.0000 = 4.9030 - 10$$

$$(e) \quad 4\sqrt{0.006} = 4\sqrt{2 \times 3/10^3}; \log 4\sqrt{0.006} = \frac{1}{4}(\log 2 + \log 3 - 3 \log 10) \\ = \frac{1}{4}(0.3010 + 0.4771 - 3.0000) \\ = \frac{1}{4}(7.7781 - 10) = \frac{1}{4}(37.7781 - 40) = 9.4445 - 10$$

**A3.5** Determine la característica del logaritmo común de cada uno de los siguientes números:

(a) 3864    (c) 8.746    (e) 0.3874    (g) 0.07295    (i) 2.3567    (k) 0.44636

(b) 286    (d) 982,600    (f) 0.00826    (h) 0.000023    (j) 88.725    (l) 0.00072358

Las características son:

(a) 3    (c) 0    (e) 9 - 10    (g) 8 - 10    (i) 0    (k) 9 - 10

(b) 2    (d) 5    (f) 7 - 10    (h) 5 - 10    (j) 1    (l) 6 - 10

**A3.6** Verifique cada uno de los siguientes logaritmos. (Utilice la Tabla 4, Apéndice 2.)

$$(a) \quad \log 38.64 = 1.5870 \qquad (e) \quad \log 2.356 = 0.3722$$

$$(b) \quad \log 286 = 2.4564 \qquad (f) \quad \log 88.72 = 1.9480$$

$$(c) \quad \log 0.3874 = 9.5881-10 \qquad (g) \quad \log 0.4463 = 9.6496-10$$

$$(d) \quad \log 0.00826 = 7.9170-10 \qquad (h) \quad \log 0.0007235 = 6.8594-10$$

**A3.7** Verifique cada una de las siguientes expresiones. (Utilice la Tabla 4, Apéndice 2.)

$$(a) \quad \log (0.07324 \times 0.0006235) = \log 0.07324 + \log 0.0006235 \\ = 8.8647 - 10 + 6.7948 - 10 = 15.6595 - 20 = 5.6595 - 10$$

$$(b) \quad \log (8.7633 \times 0.0074288) = \log 8.763 + \log 0.007429 \text{ (redondeando cada número a cuatro dígitos)} \\ = 0.9426 + 7.8709 - 10 = 8.8135 - 10$$

$$(c) \quad \log 34.72/5.384 = \log 34.72 - \log 5.384 \\ = 1.5406 - 0.7311 = 0.8095$$

$$(d) \quad \log 7218/0.0235 = \log 7218 - \log 0.0235 \\ = 3.8584 - (8.3710 - 10) = 13.8584 - 10 - (8.3710 - 10) = 5.4873$$

- (e)  $\log (24.56)^3 = 3 \log 24.56 = 3(1.3902) = 4.1706$
- (f)  $\log (0.4893)^4 = 4 \log 0.4893 = 4(9.6896 - 10) = 38.7584 - 40 = 8.7584 - 10$
- (g)  $\log \sqrt{876.4} = \frac{1}{2} \log 876.4 = \frac{1}{2} (2.9427) = 1.4714$
- (h)  $\log \sqrt[3]{66175} = \frac{1}{3} \log 66.75 = \frac{1}{3} (1.8244) = 0.6081$
- (i)  $\log \sqrt{0.9494} = \frac{1}{2} \log 0.9494 = \frac{1}{2} (9.9775 - 10) = \frac{1}{2}(19.9775 - 20) = 9.9888 - 10$

**A3.8** Verifique cada una de las siguientes expresiones. (Utilice la **Tabla 4, Apéndice 2**)

- (a)  $\text{Antilog } 2.5615 = 3.643.$
- (b)  $\text{Antilog } 5.6900 = 489800.$
- (c)  $\text{Antilog } 8.8135 - 10 = 0.06509.$  Del Prob. A3.7(b),  $8.7633 \times 0.0074288 = 0.06509.$
- (d)  $\text{Antilog } 1.4365 = 27.32.$
- (e)  $\text{Antilog } 8.6915 - 10 = 0.04915.$
- (f)  $\text{Antilog } 4.1706 = 14,810.$  Del Prob. A3.7(c),  $(24.56)^3 = 14,810.$
- (g)  $\text{Antilog } 1.4714 = 29.61.$  Del Prob. A3.7(g),  $\sqrt{876.4} = 29.61$

Calcular cada uno de los siguientes logaritmos. (Utilice la **Tabla 4, Apéndice 2**)

A3.9  $N = 36.23 \times 2.674 \times 0.007175$

$$\begin{aligned} \log 36.23 &= 1.5591 \\ (+) \log 2.674 &= 0.4271 \\ (+) \log 0.007175 &= 7.8558 - 10 \\ \log N &= 9.8420 - 10 \\ N &= 0.6950 \end{aligned}$$

A3.10  $N = \frac{47.75 \times 8.643}{6467}$

$$\begin{aligned} \log 47.75 &= 1.6790 \\ (+) \log 8.643 &= 0.9366 \\ 12.6156 - 10 & \quad (2.6156 = 12.6156 - 10) \\ (-) \log 6467 &= \underline{3.8107} \\ \log N &= 8.8049 - 10 \\ N &= 0.06381 \end{aligned}$$

A3.11  $N = \sqrt[3]{0.4847}$ .

$$\begin{aligned}\log N &= 1/3 \log 0.4847 \\ \log 0.4847 &= 9.6854 - 10 \\ &= 29.6854 - 30 \\ \log N &= 9.8951 - 10 \\ N &= 0.7854\end{aligned}$$

A3.12 Resuelva el problema A3.10 utilizando cologaritos.

$$\begin{aligned}N &= 47.75 \times 8.643 \times 1/6467. \\ \log 47.75 &= 1.6790 \\ (+) \log 8.643 &= 0.9366 \\ (+) \operatorname{colog} 6467 &= \underline{6.1893} - 10 \quad (\log 6467 = 3.8107) \\ \log N &= 8.8049 - 10 \\ N &= 0.06381\end{aligned}$$

A3.13  $\frac{74.72}{\sqrt{8.394} \sqrt[3]{0.002877}} = N$ .

$$\begin{aligned}\log N &= \log 74.72 + 1/2 \operatorname{colog} 8.394 + 1/3 \operatorname{colog} 0.002877 \\ \log 74.72 &= \underline{1.8734} \\ (+) 1/2 \operatorname{colog} 8.394 &= \underline{9.5380} - 10 & \log 8.394 &= 0.9240 \\ (+) 1/3 \operatorname{colog} 0.002877 &= \underline{0.8470} & \operatorname{colog} 8.394 &= 9.0760 - 10 \\ \log N &= 12.2584 - 10 & \log 0.002877 &= 7.4590 - 10 \\ &= 2.2584 & \operatorname{colog} 0.002877 &= 2.5410 \\ N &= 181.3\end{aligned}$$

### Problemas propuestos

Utilice la Tabla 4, Apéndice 2.

A3.14 Encuentre los siguientes logaritmos:

- |                                  |                                   |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| (a) $\log 211 = 2.3243$          | (i) $\log 4287. = 3.6322$         |
| (b) $\log 9.17 = 0.9624$         | (j) $\log 0.005555 = 7.7447 - 10$ |
| (c) $\log 0.00466 = 7.6684 - 10$ | (k) $\log 0.09714 = 8.9874 - 10$  |

- (d)  $\log 0.6754 = 9.8295 - 10$       (o)  $\log 2.122 = 0.3267$   
 (e)  $\log 32.86 = 1.5167$       (m)  $\log 66.98 = 1.8260$   
 (f)  $\log 264.7 = 2.4227$       (n)  $\log 781.5 = 2.8930$   
 (g)  $\log 7.177 = 0.8559$       (o)  $\log 2348 = 3.3707$   
 (h)  $\log 0.9663 = 9.9851 - 10$       (p)  $\log 0.09123 = 8.9602 - 10$

A3.15 Encuentre los siguientes antilogaritmos:

- (a)  $\text{antilog } 1.9864 = 96.91$       (i)  $\text{antilog } 1.1207 = 13.20$   
 (b)  $\text{antilog } 0.7500 = 5.624$       (j)  $\text{antilog } 2.6282 = 424.8$   
 (c)  $\text{antilog } 8.6208 - 10 = 0.04176$       (k)  $\text{antilog } 0.9584 = 9.086$   
 (d)  $\text{antilog } 1.0970 = 12.50$       (l)  $\text{antilog } 9.6129 - 10 = 0.4101$   
 (e)  $\text{antilog } 2.6561 = 453$       (m)  $\text{antilog } 2.2395 = 173.6$   
 (f)  $\text{antilog } 0.9182 = 8.283$       (n)  $\text{antilog } 1.2225 = 16.69$   
 (g)  $\text{antilog } 8.1184 - 10 = 0.01313$       (o)  $\text{antilog } 4.8403 = 69230$   
 (h)  $\text{antilog } 3.6662 = 4637$       (p)  $\text{antilog } 2.6718 = 469.7$

A3.16 Evalúe las siguientes expresiones:

- (a)  $\frac{819(748)}{3670} = 166.9,$       (d)  $787.9(0.003323) = 2.618$   
 (b)  $\frac{827.6}{518.3} = 1.596,$       (e)  $\frac{(227.3)^2(0.0007764)}{(86.33)^2(0.3848)} = 0.02563$   
 (c)  $\frac{48.62}{77.65} = 0.6260,$       (f)  $\sqrt[3]{\frac{781.5(3.434)}{852.7(586.7)}} = 0.1751$

# Índice

- Abscisa, 11
- Adición, fórmulas de, 113
- Amplitud, de un número complejo, 192
  - de una curva senoidal, 94
- Ángulo, 1
  - agudo, funciones del, 29
  - complementario, funciones del, 30
  - coterminal, 13, 81
  - cuadrantal, 13
    - funciones del, 15
  - de depresión, 33, 34, 40
  - de elevación, 33, 34, 40
  - de referencia, 82
  - dirigido, 1
  - doble, funciones del, 113
  - general, funciones del, 13
  - medición del, en grados, 2
  - medición del, en radianes, 2
  - negativo, 1
  - posición estándar del, 12
  - positivo, 1
- Ángulo agudo, funciones del, 29
- Ángulo doble, fórmulas, 113
- Ángulo genérico, funciones del, 13
- Ángulos, 204
- Ángulos complementarios, funciones de, 30
- Antilogaritmo, 238
- Arco cosecante, 171, 172
- Arco coseno, 171, 172
- Arco cotangente, 171, 172
- Arco, longitud del, 3
  - en un círculo unitario, 4
- Arco secante, 171, 172
- Arco seno, 171, 172
- Arco tangente, 172
- Área:
  - de un sector circular, 5, 165
  - de un segmento circular, 165
  - de un triángulo, 159
- Calculadora, uso de una, 31, 47, 48, 49
- Características de los logaritmos comunes, 236
- Caso ambiguo de la ley de los senos, 136, 138
- Cifras significativas, 49
- Círculo unitario, 4, 16
- Circunferencia, 208
- Cise, 192
- Cociente de dos números complejos, 190, 192
- Cociente, relaciones, 103
- Cologaritmos, 238
- Complejos conjugados, números, 190
- Componentes de un vector, 63
- Composición de curvas senoidales, 94
- Conversión de fórmulas para medición en grados y radianes, 2
- Coordenadas rectangulares, 11
  - en un círculo unitario, 16
- Cosecante definida, 13, 29
  - gráfica de la, 92
  - periodo de la, 94
  - representación por medio de rectas de la, 90
- Coseno definido, 13, 29
  - gráfica del, 93
  - periodo del, 94
  - representación por medio de rectas del, 90

- Cosenos, ley de los, 132, 139
- Cotangente definida, 13, 28
  - gráfica de la, 92
  - periodo de la, 94
  - representación por medio de rectas de la, 90
- Coterminal, ángulos, 13, 81
- Cuadrantales, ángulos, 13
  - funciones de los, 14
- Cuadrantes, 11
- Curso, 64
  
- Depresión, ángulo de, 34, 40
- Desplazamientos, vertical y horizontal, 92
- Desviación angular de un aeroplano, 63
- Diferencia de dos ángulos, fórmulas, 113
- Diferencia de números complejos, 190, 191
- Dígitos, significativos, 49
- Dirigidas, líneas, 11
- Dirigidos, ángulos, 1
  
- Ecuaciones condicionales, 181
- Ecuaciones trigonométricas, 181
  - inversas, 170
- Elevación, ángulo de, 33, 34, 40
- Errores en los resultados calculados, 32, 49
- Exactitud de los resultados calculados, 32, 49
- Expresiones conjugadas, 105
  
- Fórmulas:
  - ángulo doble, 113
  - conversión, grado y ángulo, 2
  - diferencia de dos ángulos, 113
  - Heron, de, 160
  - semiángulo, 114, 137
  - Mollweide, de, 134
  - Pitágoras, de, 44, 102
  - producto a suma, 128
  - suma de dos ángulos, 112
- Fórmulas de un semiángulo, 114
  - para un triángulo, 137
- Funciones circulares, 16
- Funciones periódicas, 94
- Funciones trigonométricas:
  - de ángulos agudos, 29
  - de ángulos complementarios, 30
  - de ángulos especiales, 31, 37
  - de la diferencia de dos ángulos, 113
  - de la suma de dos ángulos, 29
  - de un ángulo general, 13
  - de un ángulo negativo, 81
  - de un semiángulo, 114
  - del ángulo doble, 114
  - gráficas de, 92, 93
  - relaciones fundamentales entre, 13, 29, 81, 103
  - representación por medio de rectas de, 90
  - signos de, 13
  - variaciones de, 91
- Funciones trigonométricas indefinidas, 15
- Funciones trigonométricas inversas, 170, 171
- Fundamental, periodo, 94
  
- Grado, 2
- Gráficas:
  - de funciones inversas, 171
  - de funciones trigonométricas, 92, 93
  - de relaciones inversas, 170, 171
  
- Heron, fórmula de, 160
- Hipotenusa, 29
- Horizontal, desplazamiento, 93
  
- Identidades trigonométricas, 104, 181
  - ángulo negativo, 81
  - cociente, 103, 107
  - cofunción, 30
  - recíprocas, 13, 103
  - Pitágoras, 103, 107
- Imaginaria, unidad, 190
- Inclinado, plano, 64
- Interpolación en tablas, 45, 46
- Intervalo, valores principales de, 172
- Inversa, notación, 70
- Inversas, funciones trigonométricas, 170
  - dominio de, 172
  - gráficas de, 171
  - intervalo de valores principales, 172
- Inversas, relaciones trigonométricas, 170
  - gráfica de, 171
- Isósceles, triángulo, 53, 206
  
- Ley de las tangentes, 136
- Ley de los cosenos, 131, 139
- Ley de los logaritmos, 236
- Ley de los senos, 133
  - caso ambiguo, 135, 136, 138
- Lineal, interpolación, 45, 46
- Lineal, representación de las funciones, 90

- Lineal, velocidad, 6  
 Líneas, 205  
 Logaritmos, 74  
   leyes de, 236  
 Logaritmos comunes, 236  
   tabla de, 233  
 Longitud de un arco, 3  
   en un círculo unitario, 4
- Magnitud de un vector, 61  
 Mantis, 237  
 Medición de un ángulo, 2  
 Método del paralelogramo para la suma de vectores, 62  
 Método del triángulo para la suma de vectores, 62  
 Minuto, 2  
 Módulo de un número complejo, 192  
 Mollweide, fórmulas de, 134  
 Multiplicación de números complejos, 190, 193
- Negativos, ángulos, 1  
   funciones trigonométricas de, 81  
 Numérica, escala, 11  
 Números complejos, 190  
   amplitud de, 192  
   conjugado de, 190  
   forma polar de, 192  
   forma rectangular de, 192  
   forma trigonométrica de, 192  
   módulo de, 192  
   potencias y raíces de, 194  
   producto y cociente de, 193  
   representación gráfica de, 191  
   valor absoluto de, 192
- Oblicuo, triángulo, 134  
 Ordenada, 11  
 Orientación, 60  
 Orientación de un aeroplano, 63  
 Origen, 11
- Paralelogramo, para la suma de vectores, 62, 191  
 Periódicas, funciones, 94  
 Pitágoras, teorema de, 75  
 Pitagóricas, relaciones, 102  
 Polar, Números complejos, forma, 192  
 Polígonos, 207  
 Posición estándar de un ángulo trigonométrico, 12  
 Potencias de números complejos, 194  
 Producto a suma, fórmulas, 128  
 Proyección, fórmulas de, 135  
 Radián, 2  
 Radio vector de un punto, 12
- Raíces de números complejos, 194  
 Rectangulares, coordenadas, 11  
 Recto, solución de un triángulo, 29, 75  
 Redondeo, procedimientos de, 32, 49, 50  
 Referencia, ángulo de, 82  
 Relaciones básicas, 103  
   ángulo negativo, 81  
   cociente, 103, 107  
   cofunción, 30  
   pitagóricas, 103, 107  
   recíprocas, 13, 103  
 Relaciones cuadráticas, 103  
 Relaciones recíprocas, 13, 103  
 Relaciones trigonométricas inversas, 171, 172  
 Resolución de vectores, 63  
 Resultante de dos vectores, 61
- Secante definida, 13, 29  
   gráfica de la, 93  
   periodo de la, 94  
   representación por medio de rectas de la, 90  
 Sector de un círculo, 5  
 Segundo, 2  
 Seno definido, 13, 29  
   gráfica del, 93  
   periodo del, 94  
   representación por medio de rectas del, 90  
 Senoidales, composición de curvas, 94, 95  
 Senos, ley de los, 133  
   caso ambiguo, 135, 138  
 Significativos, dígitos, 49  
 Signos de las funciones según el cuadrante, 14  
 Signos de las funciones trigonométricas, 14  
 Solución de ecuaciones trigonométricas, 181  
 Suma:  
   de números complejos, 190  
   de vectores, 61  
 Suma a producto, fórmulas de, 128  
 Suma de vectores, 61  
 Suma, fórmulas de, 113  
 Sustracción, fórmulas de, 113
- Tabla de logaritmos comunes, 233  
 Tabla de valores de las funciones trigonométricas,  
   31,44  
   tabla 1, 210  
   tabla 2, 217  
   tabla 3, 229  
 Tangente definida, 29  
   gráfica de la, 92  
   periodo de la, 94  
   representación por medio de rectas de la, 90

- Tangentes a un círculo, 209
- Tangentes, ley de las, 136
- Trayectoria de un aeroplano, 63
- Triángulo".
  - área de un, 159
  - oblicuo, 133
  - recto, 29, 75
- Triángulos, 206
- Trigonométrica, forma de un número complejo, 192
- Trigonométricas, ecuaciones, 181
- Trigonométricas, funciones:
  - de ángulos agudos, 29
  - de la diferencia de dos ángulos, 113
  - de la suma de dos ángulos, 113
  - de un ángulo general, 13
  - de un ángulo negativo, 81
  - de un semiángulo, 114
  - del ángulo doble, 113
  - gráficas de, 92
  - relaciones fundamentales entre, 13, 29, 81, 107
  - representación por medio de rectas de, 90
  - variantes de, 91
- Trigonométricas, identidades, 13, 29, 81, 108, 181
- Unitario, círculo, 4, 16
- Valor absoluto de un número complejo, 192
- Valores generales de relaciones inversas, 172
- Valores principales de funciones inversas, 172
- Variación de las funciones, 91
- Vectores, 61
- Velocidad:
  - aérea, 63
  - angular, 6
  - lineal, 6
  - terrestre, 63
- Velocidad aérea de un aeroplano, 63
- Velocidad angular, 6
- Velocidad terrestre de un aeroplano, 63
- Vector del viento, 64
- Verificación de identidades, 104
- Vertical desplazamiento, 93
- Vértice de un ángulo, 1

# Schaum

Esta nueva edición, presenta cambios muy significativos contra la anterior, se enfoca directamente a la trigonometría plana, se ha relegado el uso de logaritmos, se introduce el uso de la calculadora para la resolución de problemas y provee de tablas necesarias para resolver problemas sin el uso de aquella. Además proporciona un resumen de las propiedades geométricas que son necesarias en la resolución de ejercicios de Trigonometría. Una obra muy completa tanto para aquellos que por primera vez estudian la materia, como por los que sólo desean reafirmar los conceptos básicos de la misma.



ISBN 968-422-785-X