Martha Alvarado Arellano | Carlos García Franchini

Recursos en línea

Cálculo integral en competencias

Grupo Editorial Patria

Cálculo integral

en competencias

Martha Alvarado Arellano
Carlos García Franchini
Tecnológico Nacional de
México Instituto Tecnológico de
Puebla

Grupo Editorial Patria

Para establecer comunicación
con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan
Tlihuaca, Azcapotzalco,
02400, Cd. de México

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Supervisor de preprensa: Jorge Antonio Martínez Jiménez
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís/Signx
Ilustraciones: Jorge Antonio Martínez Jiménez
Fotografías: © Thinkstockphoto

Revisión Técnica:

Luis Rafael Liljehult López
Universidad Tecnológica de Puebla

Roberto Hernández Cárdenas
Universidad Mexiquense del Bicentenario

Cálculo integral
en competencias

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca
Azcapotzalco, Ciudad de México

Miembro de la Cámara Nacional de la Industrial Editorial Mexicana
Registro Núm. 43

ISBN ebook: 978-607-744-478-7

Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2016

A nuestros hijos Carlos,
Marthy Stívaliz y Johnna,
pero muy especialmente
para la alegría de todos:
Carlos Samuel.
¡Sigue haciendo maravillas,
Carlitos!

ÍNDICE DE CONTENIDO

Prefacio

En continuidad con el texto *Cálculo diferencial en competencias*, ponemos a su consideración su continuidad: ***Cálculo integral en competencias***. Pretendemos continuar con la misma estrategia didáctica que parte de los conocimientos previos del estudiante, para después permitir que emplee su bagaje de herramientas y conceptos, los reconstruya y fortalezca nuevos aprendizajes basados en sus preconceptos.

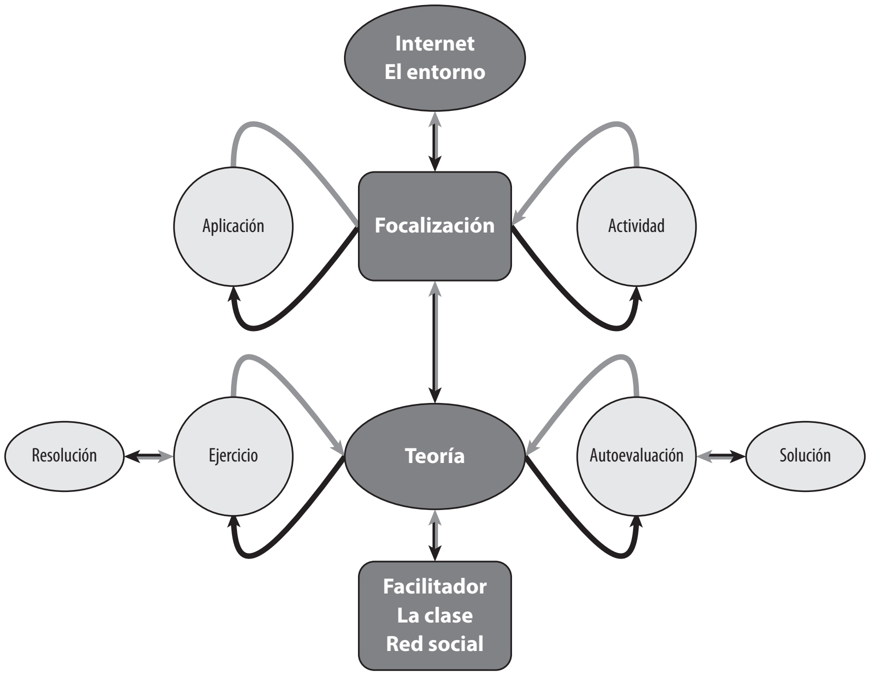


Figura I. Hiperrecorrido del texto.

Se podrá encontrar mayor contenido operativo que en cálculo diferencial, lo cual es necesario, ya que a pesar de que la integración es un proceso físico más sencillo que la derivación, implica algoritmos y teoremas con mayor complejidad relativa que los abordados en cálculo diferencial. Por ello ponemos especial énfasis en la explicación de los conceptos, pues de manera natural es más simple localizar una integral en la naturaleza que un proceso de diferenciabilidad.

De nuevo, consideramos que este texto es el primero en su género, ya que aborda el cálculo integral desde una óptica diferente centrada, en principio, en las aplicaciones; y a través del análisis de esas situaciones prácticas y naturales que le dan sentido a la integración, nos acercamos a los conceptos, para después formalizarlos y aplicar la algoritmia en los ejercicios necesarios para su dominio analítico. Al igual que en el primer *tour* del texto de *Cálculo diferencial*, se continúa el viaje sobre un libro que deseamos lo veas como un hipertexto que te permite abordar la realidad desde cada una de las páginas y viajar libremente desde él, a los aspectos aplicativos, realizar actividades de aprendizaje, integrar el conocimiento con otras fuentes y practicar con los conceptos para aprender de su operatividad. En la figura I, planteamos esta idea. Al inicio abordaremos cada concepto por medio de aplicaciones en donde deseamos que observes al concepto en acción y, sin conocerlo, vayas obteniendo su esencia, para extraerlo y no buscar después en qué se aplica. De manera paralela, trabajamos con tus conocimientos pre-

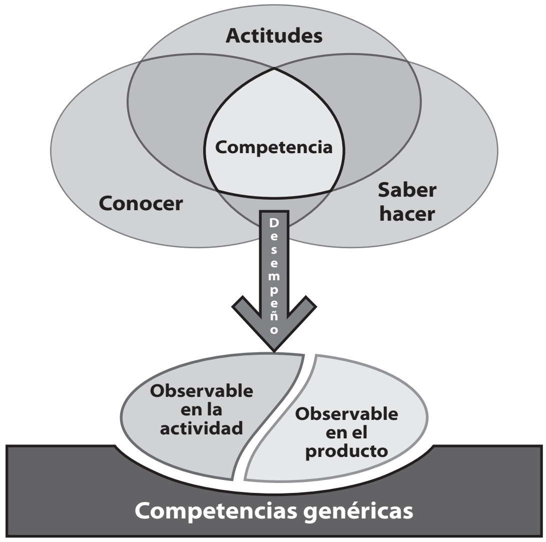
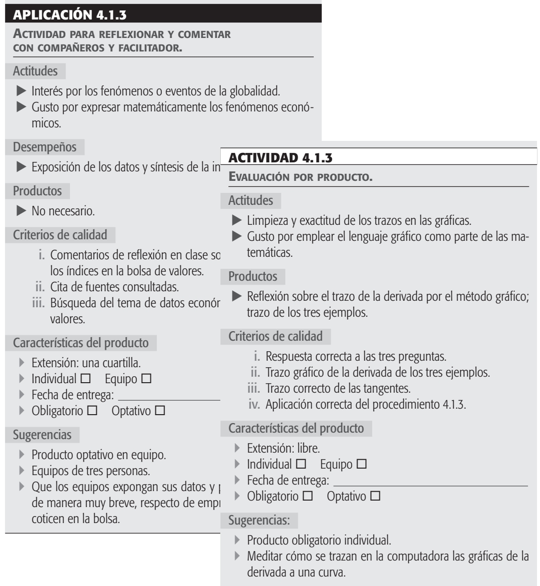


Figura II. Competencias.

El centro de la estrategia didáctica que se promueve en el texto es la focalización, que consideramos propicia el *enfoque* hacia lo ya conocido, y buscamos trasformar por medio de una serie de actividades y cuestionamientos, a los cuales cada uno habrá de reflexionar y encontrar respuesta, para después socializar en la clase e incluso contrastar contra la teoría, de tal forma que se permita reconstruir o fortalecer el conocimiento sobre cada concepto.

vios para ir construyendo los nuevos y afinándolos, poco a poco, por medio de actividades de aprendizaje. No se abandona la teoría necesaria para fortalecer tu conocimiento y se realizan ejercicios que permiten manipular al objeto de manera algebraica o gráfica. Las flechas de la figura I te marcan la libertad del camino.

Es importante construir nuevas competencias específicas, pero resulta crucial soportar y fortalecer tus competencias genéricas para poder manifestarlas en desempeños por medio de la actividad presencial u observable a través de la calidad de los productos que construyas de manera individual o en equipo. Recuerda que se deben fortalecer de manera integral y sin desprenderse los tres elementos que se movilizan en una competencia: las actitudes, los conocimientos y el saber hacer; como se observa en la figura II. No hay muchos ejercicios, ya que lo importante es comprender el concepto bajo estudio y verlo en acción. Y no olviden colegas profesores que este texto no es lineal, la guía es la figura I.


APLICACIÓN 4.1.3

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes
- Interés por los fenómenos o eventos de la globalidad.
- Gusto por expresar matemáticamente los fenómenos económicos.

Desempeños
- Exposición de los datos y síntesis de la in

Productos
- No necesario.

Criterios de calidad
- i. Comentarios de reflexión en clase so los índices en la bolsa de valores.
- ii. Cita de fuentes consultadas.
- iii. Búsqueda del tema de datos económ valores.

Características del producto
- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias
- Producto optativo en equipo.
- Equipos de tres personas.
- Que los equipos expongan sus datos y p de manera muy breve, respecto de empr coticen en la bolsa.

ACTIVIDAD 4.1.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes
- Limpieza y exactitud de los trazos en las gráficas.
- Gusto por emplear el lenguaje gráfico como parte de las matemáticas.

Productos
- Reflexión sobre el trazo de la derivada por el método gráfico; trazo de los tres ejemplos.

Criterios de calidad
- i. Respuesta correcta a las tres preguntas.
- ii. Trazo gráfico de la derivada de los tres ejemplos.
- iii. Trazo correcto de las tangentes.
- iv. Aplicación correcta del procedimiento 4.1.3.

Características del producto
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias:
- Producto obligatorio individual.
- Meditar cómo se trazan en la computadora las gráficas de la derivada a una curva.

FIGURA III. Guía para rúbrica.

El texto es, además, un libro de trabajo que permite trazar el calendario de las actividades en el mismo. Las tablas guía de rúbrica, como las mostradas en la figura III, te auxiliarán en todo momento, ya que te indican en cada actividad cuáles son las competencias genéricas que se fortalecen y qué aspectos se habrán de observar para evaluar la competencia. Desde luego, la clase es siempre abierta y caben en el curso muchas más evidencias adicionales o sustitutas a las presentadas, ya que ésta es solo una guía de discusión para la clase.

Cada guía para rúbrica, indica el tipo de actividad a realizar y si se recomienda como trabajo extraclase o para reflexión grupal. Además, señala si el desempeño será observable en el producto o en las actividades, así como las actitudes que se espera fortalecer y los criterios de calidad que se promoverá para evaluar cada evidencia.

En cuanto a la sección característica del producto, ésta permite las anotaciones del programa propio, y finalmente se aporta una serie de sugerencias sobre actividades de clase, de búsqueda, de ampliación de contenidos, de posibles proyectos, etcétera.

Carlos García Franchini

Martha Alvarado Arellano

I. Anexo. Formulario

Axiomas de los números reales:

Axioma 0a: Propiedad de cerradura de la suma: para cada x y y, números reales, la suma $x + y$ es otro número real.

Axioma 0p: Propiedad de cerradura del producto: para cada x y y, números reales, el producto xy es un número real.

Axioma 1: Propiedad conmutativa de la suma:

$$x + y = y + x$$

Axioma 2: Propiedad asociativa de la suma:

$$x + (y + z) = (x + y) + z$$

Axioma 3: Existencia del elemento neutro aditivo. Existe un número real único 0 tal que:

$$0 + x = x + 0 = x$$

Axioma 4: Existencia del inverso aditivo: Para cada número real x existe un número real $-x$ tal que

$$x + (-x) = (-x) + x = 0$$

Axioma 5: Propiedad conmutativa del producto:

$$xy = yx$$

Axioma 6: Propiedad asociativa del producto:

$$x(yz) = (xy)z$$

Axioma 7: Existencia del elemento neutro multiplicativo: Existe un número real único, 1 diferente de 0, tal que

$$1x = x1 = x$$

Axioma 8: Existencia del inverso multiplicativo o recíproco: Para cada número real x, pero no para el cero, existe un número x^{-1} tal que:

$$xx^{-1} = x^{-1}x = 1$$

Axioma 9: Propiedad distributiva:

$$x(y + z) = xy + xz$$

Propiedades de los números reales:

P1.1 Propiedad de tricotomía: Para a y b números reales se verifica una y sólo una de las tres relaciones $a < b$, $b < a$, $a = b$.

P1.2 Si $a < b$ es $a + c < b + c$.

P1.3 Si $a < b$ y $c > 0$ es $ac < bc$.

P1.4 Propiedad transitiva: Si $a < b$, $b < c$, es $a < c$.

T1.1 Ley de la simplificación de la suma: Si $a + b = a + c$, entonces $b = c$.

T1.2 Posibilidades de la sustracción: Dado a y b, existe un x tal que $a + x = b$, x se designa por $b - a$.

T1.3 $b - a = b + (-a)$.

T1.4 $-(-a) = a$.

T1.5 $a(b - c) = ab - ac$.

T1.6 $0a = a0 = 0$.

T1.7 Ley de simplificación para la multiplicación: Si $ab = ac$ y $a \neq 0$, entonces $b = c$.

T1.8 Posibilidades de la división: Dados a y b con $a \neq 0$, existe un y sólo un x tal que $ax = b$. La x se designa por $\frac{b}{a}$ y se denomina cociente de b y a. En particular, $\frac{1}{a} = a^{-1}$.

T1.9 Si $a \neq 0$, entonces $\frac{b}{a} = ba^{-1}$.

T1.10 Si $a \neq 0$, entonces $(a^{-1})^{-1} = a$.

T1.11 Si $ab = 0$ entonces o $a = 0$ o $b = 0$. (La o puede implicar ambos.)

T1.12 $(-a)b = -(ab)$ y $(-a)(-b) = \text{ab}$.

T1.13 $\left(\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{d}\right)=\frac{(ad+bc)}{(bd)}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

T1.14 $\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{c}{d}\right) = \frac{(ac)}{(bd)}$ si $b \neq 0$ y $d \neq 0$.

T1.15 $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{(ad)}{(bc)}$ si $b \neq 0$, $c \neq 0$ y $d \neq 0$.

T1.16 Si $a \neq 0$, $a^2 > 0$.

T1.17 $1 > 0$.

T1.18 Si $a < b$ y $c < 0$, es $ac > bc$.

T1.19 Si $a < b$, es $-a > -b$. En particular, si $a < 0$, es $-a > 0$.

T1.20 Si $ab > 0$, entonces a y b son ambos positivos o ambos negativos.

T1.21 Si $a < c$ y $b < d$, entonces $a + b < c + d$.

T1.22 Si $a \geq 0$, es $|x| \leq a$, si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

T1.23 Si $|x| > a$, se sigue que o $x < -a$ o $x > a$.

T1.24 Desigualdad del triángulo. Para x y y números reales: $|x + y| \leq |x| + |y|$.

T1.25 $\sqrt{a^2} = |a|$

Exponentes

E1 $x^n x^m = x^{n+m}$

E2 $\frac{x^n}{x^m} = x^{n-m}$

E3 $(x^n)^m = x^{nm}$

E4 $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

E5 $(xy)^n = x^n y^n$

E6 $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$

E6 $x^{1/2} = \sqrt{x}$

E7 $x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$

E8 $x^{n/m} = \sqrt[m]{x^n} = \left(\sqrt[m]{x}\right)^n$

E9 $(xy)^{n/m} = \sqrt[m]{(xy)^n} = \left(\sqrt[m]{xy}\right)^n = \sqrt[m]{x^n}\,\sqrt[m]{y^n}$

E10 $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x}$

E11 $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$; $y \neq 0.$

Álgebra

A1 $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

A2 $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$

A3 $(x \pm y)^3 = x^3 \pm 3x^2y + 3xy^2 \pm y^3$

A4 $x^3 \pm y^3 = (x + y)(x^2 \mp xy + y^2)$

A5 $n! = n(n - 1)(n - 2)...1$

A6 $0! = 1$

A7 $n! = n(n - 1)!$

A8 $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \dfrac{n(n-1)\ldots(k+1)}{(n-k)!}$

A9 $\dbinom{n}{k} = \dbinom{n}{n-k}$

A10 $\dbinom{n}{n} = \dbinom{n}{0} = 1$

A10 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$

A11 $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

$$(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \frac{n(n-1)}{2}x^2y^{n-2+\cdots+}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k} + \cdots + nxy^{n-1} + y^n$$

A12 Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

A13 $\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i$

A14 $\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

A15 $|a| = a$, si $a \geq 0$; $|a| = -a$, si $a < 0$

A16 $|ab| = |a|\,|b|$

A17 $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$; $b \neq 0$

A18 $|a^n| = |a|^n$

A19 Si $y = \log_a x$, entonces $a^y = x$

A20 $\log_a 1 = 0$

A21 $\log_a a = 1$

A22 $\log_{10} x = \log x$

A23 $\log_e x = \ln x$

A24 $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$

A25 $\log_a \left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$

A26 $\log_a x^r = r \log_a x$

A27 $\log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

Geometría

G1 Área del rectángulo: $A = bh$

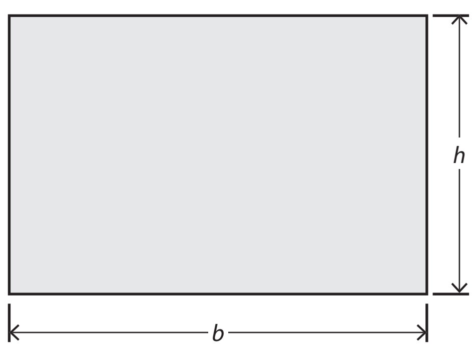


FIGURA I.1 Rectángulo.

G2 Área del triángulo: $A = \dfrac{bh}{2}$

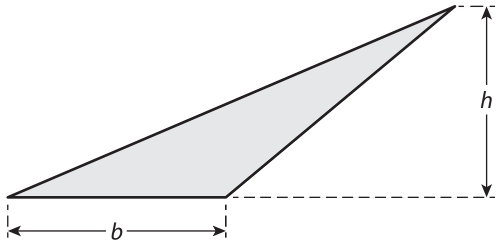


FIGURA I.2 Triángulo.

G3 Área del trapecio: $A = \dfrac{(b+d)}{2}h$

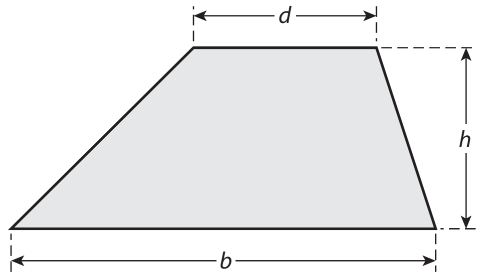


FIGURA I.3 Trapecio.

G4 Área del círculo: $A = \pi r^2$

G5 Perímetro de la circunferencia: $P = 2\pi r$

G6 Arco de círculo: $s = r\theta$, θ radianes.

G7 Área de sector circular: $A = \dfrac{\theta r^2}{2}$, θ radianes.

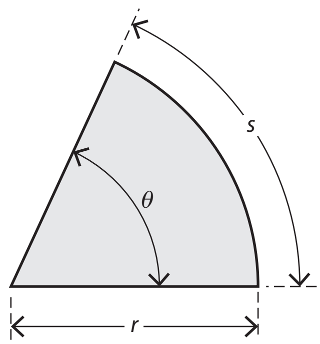


FIGURA I.4 Arco y sector circular.

G8 Área de la esfera: $A = 4\pi r^2$

G9 Volumen de la esfera: $V = \dfrac{4}{3}\pi r^3$

G10 Volumen del cilindro: $V = \pi r^2 h$

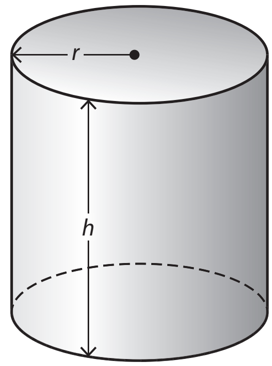


FIGURA I.5 Cilindro.

G11 Volumen de pirámide: $V = \frac{1}{3} A_{\text{base}} h$

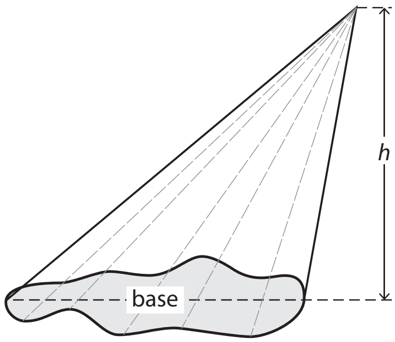


FIGURA I.6 Pirámide (cono) genérica.

G12 Volumen del cono: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

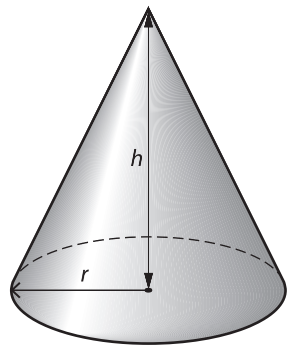


FIGURA I.7 Cono.

Geometría analítica

Ga1 Distancia entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$d = \sqrt{\left(x_2 - x_1\right)^2 + \left(y_2 - y_1\right)^2}$$

Ga2 Coordenadas del punto medio entre los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2}{2},\ \overline{y} = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Ga3 Pendiente de la recta que pasa por los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2):

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ga4 Ecuación de la recta que pasa por el punto (x_1, y_1) con pendiente m: $y - y_1 = m(x - x_1)$

Ga5 Ecuación de la recta con ordenada en el origen b y pendiente m: $y = mx + b$

Ga6 Pendiente m_1 de la recta normal a la recta de pendiente m:

$$m_1 = -\frac{1}{m}$$

Ga7 Parábola con eje paralelo al eje y vértice en (x_1, y_1): $y - y_1 = k(x - x_1)^2$, k es cualquier número real.

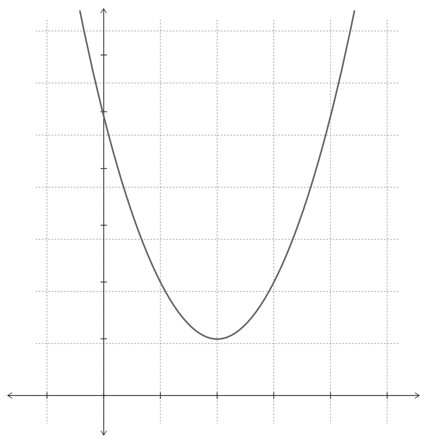


FIGURA I.8 Parábola.

Ga8 Circunferencia con centro en el punto (h, k) y radio r: $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

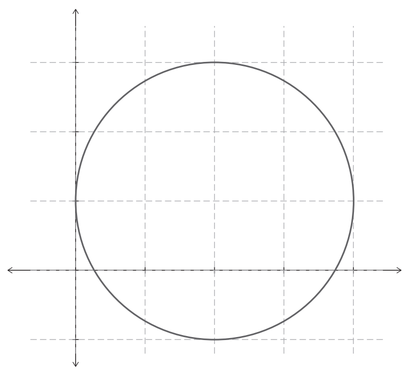


FIGURA I.9 Circunferencia.

Ga9 Elipse con centro en el punto (h, k) y semiejes paralelos a los ejes coordenados: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$, a y b son números reales positivos.

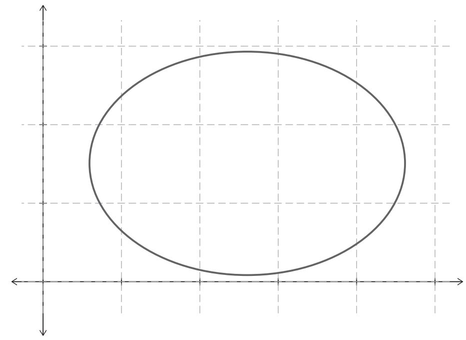


FIGURA I.10 Elipse.

Ga10 Hipérbola con centro en el punto (h, k) y semiejes paralelos a los ejes coordenados: $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$, a y b son números reales positivos.

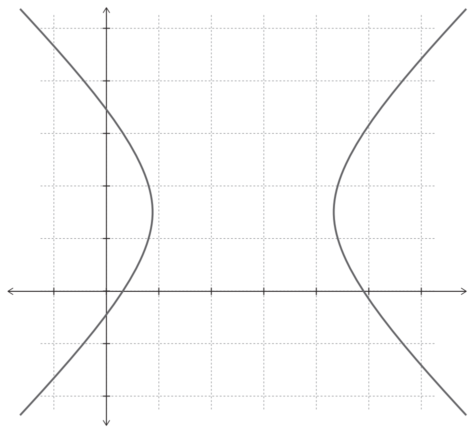


FIGURA I.11 Hipérbola.

Trigonometría

Tr1 $1° = \dfrac{\pi}{180}$ radianes (rad), 1 rad $= \dfrac{180}{\pi}$

Tr2 $\text{sen}\ \theta = \dfrac{a}{c}$

Tr3 $\cos\theta = \dfrac{b}{c}$

Tr4 $\tan\theta = \dfrac{a}{b}$

Tr5 $\cot\theta = \dfrac{b}{a}$

Tr6 $\sec\theta = \dfrac{c}{b}$

Tr7 $\csc\theta = \dfrac{c}{a}$

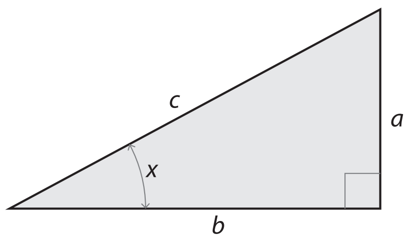


FIGURA I.12 Razones trigonométricas.

En el círculo trigonométrico:

Tr8 $\operatorname{sen} x = a$

Tr9 $\cos x = b$

Tr10 $\tan x = c$

Tr11 $\cot x = d$

Tr12 $\sec x = f$

Tr13 $\csc x = e$

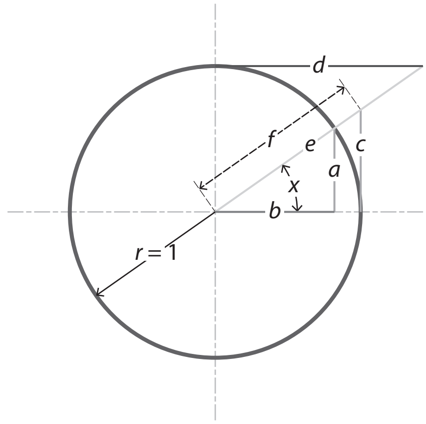


FIGURA I.13 Círculo trigonométrico.

Tr14

θ	RAD	sen θ	cos θ	tan θ
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1	0	∞
180°	π	0	–1	0

Tr15 $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$

Tr16 $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$

Tr17 $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$

Tr18 $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Tr19 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

Tr20 $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

Tr21 $1 + \tan^2 x = \sec^2 x$

Tr22 $1 + \cot^2 x = \csc^2 x$

Tr23 $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

Tr24 $\cos(-x) = \cos x$

Tr25 $\tan(-x) = -\tan x$

Tr26 $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$

Tr27 $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{sen} x$

Tr28 $\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$

Tr29 Ley de senos: $\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

Tr30 Ley de cosenos: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

Tr31 $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

Tr32 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

Tr33 $\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

Tr34 $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

Tr35 $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos 2x = 1 - 2\operatorname{sen}^2 x$

Tr36 $\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

Tr37 $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

Tr38 $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$

Tr39 $2\operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y)$

Tr40 $2\cos x \operatorname{sen} y = \operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y)$

Tr41 $2 \cos x \cos y = \cos (x + y) + \cos (x - y)$

Tr42 $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos (x - y) - \cos (x + y)$

Funciones hiperbólicas

Fh1 $\operatorname{senh} x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

Fh2 $\cosh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

Fh3 $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

Fh4 $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

Fh5 $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

Fh6 $\coth x = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

Fh7 $\operatorname{senh} (-x) = -\operatorname{senh} x$

Fh8 $\cosh (-x) = \cosh x$

Fh9 $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

Fh10 $1 - \tanh^2 x = \operatorname{sech}^2 x$

Fh11 $\operatorname{senh} (x + y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \cosh x \operatorname{senh} y$

Fh12 $\cosh (x + y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

Derivadas

Considerando $u = f(x)$, $v = g(x)$, c una constante:

D1 $\dfrac{d}{dx} c = 0$

D2 $\dfrac{d}{dx}(u + v) = \dfrac{du}{dx} + \dfrac{dv}{dx}$

D3 $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

D4 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

D5 $$\frac{d}{dx}\left(f(g(x))\right) = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

D6 $$\frac{d}{dx}u^n = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

D7 $$\frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$

D8 $$\frac{d}{dx}a^u = a^u \ln a\frac{du}{dx}$$

D9 $$\frac{d}{dx}\ln u = \frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

D10 $$\frac{d}{dx}\log_a u = \frac{1}{u\ln a}\frac{du}{dx}$$

D11 $$\frac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u\frac{du}{dx}$$

D12 $$\frac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

D13 $$\frac{d}{dx}\tan u = -\sec^2 u\frac{du}{dx}$$

D14 $$\frac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

D15 $$\frac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u\frac{du}{dx}$$

D16 $$\frac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

D17 $$\frac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

D18 $$\frac{d}{dx}\cos^{-1} u = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

D19 $$\frac{d}{dx}\tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

D20 $$\frac{d}{dx}\sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

D21 $$\frac{d}{dx}\csc^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

D22 $$\frac{d}{dx}\cot^{-1} u = -\frac{1}{1+u^2}\frac{du}{dx}$$

D23 $$\frac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\frac{du}{dx}$$

D24 $$\frac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}$$

D25 $$\frac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^2 u\frac{du}{dx}$$

D26 $$\frac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^2 u\frac{du}{dx}$$

D27 $$\frac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u \tanh u\frac{du}{dx}$$

D28 $$\frac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u \coth u\frac{du}{dx}$$

D29 $$\frac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\frac{du}{dx}$$

D30 $$\frac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}}\frac{du}{dx}$$

D31 $$\frac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$$

D32 $$\frac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = -\frac{1}{u\sqrt{1-u^2}}\frac{du}{dx}$$

D33 $$\frac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = -\frac{1}{|u|\sqrt{u^2+1}}\frac{du}{dx}$$

D34 $$\frac{d}{dx}\coth^{-1} u = \frac{1}{1-u^2}\frac{du}{dx}$$

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO INTEGRAL

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si interpreta la presencia de procesos de acumulación en forma adecuada y propone hipótesis acerca de las posibles consecuencias del fenómeno en estudio.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando como herramienta fundamental la integración.

CALENDARIO DEL PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

FECHA	EVIDENCIA	FECHA	EVIDENCIA
	Actividad 1.1.1		
	Actividad 1.1.2		
	Aplicación 1.1.1		
	Aplicación 1.1.2		

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

¿Cómo puedes decir que sabes algo, si cuando admiras el mundo no lo relacionas con ese conocimiento?

1.1 Las variaciones imperceptibles

En los procesos que observas a tu alrededor puedes percibir la variación, pero, ¿qué tan grande debe ser esa variación para que la logres percibir?

Cada pequeña variación que midamos o percibamos de alguna manera es lo que llamamos "incremento"; sin embargo, supongamos que la variación es tan pequeña que ni siquiera con los instrumentos que conoces se puede medir. ¿Aún existe esta variación?

Observa y analiza las siguientes situaciones e imagina si existe una variación tan pequeña que sea imperceptible a tus sentidos. ¿Cómo puedes estar seguro de que en cada fenómeno sucede la variación?

1. ¿Puedes observar cómo crece uno de los tallos de una planta trepadora?
2. ¿Puedes ver el agua de un vaso evaporarse de manera continua?
3. ¿Logras percibir cómo se seca la ropa al viento, cuando se "tiende" mojada?
4. ¿Puedes, en dos instantes sucesivos, percibir si el café caliente en una taza se ha enfriado?

Estas variaciones son imperceptibles.

Actividad 1.1.1

En el texto del apartado 1.1 hemos planteado cuatro situaciones en las que existen variaciones imperceptibles y, sin embargo, a pesar de que éstas no son "visibles" en forma instantánea, es posible verificar que la variación existe después de cierto tiempo y se puede medir.

Las situaciones que se señalaron son las siguientes:

1. ¿Puedes observar cómo crece uno de los tallos de una planta trepadora?
2. ¿Puedes ver el agua de un vaso evaporarse de manera continua?
3. ¿Logras percibir cómo se seca la ropa al viento, cuando se "tiende" mojada?
4. ¿Puedes, en dos instantes sucesivos, percibir si el café caliente en una taza se ha enfriado?

ACTIVIDAD 1.1.1

Evaluación por producto.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con reflexiones y respuesta a cada una de las cinco situaciones propuestas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Ahora, tú plantea cinco situaciones en las que ocurren variaciones imperceptibles y señala qué ocurre cuando estas variaciones se acumulan.

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizar en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos observados en el entorno.
- Alentar a los estudiantes para proponer conjeturas acerca del tamaño de los incrementos de la variable en cada fenómeno.

La acumulación de las pequeñas variaciones

Observa y analiza los siguientes fenómenos:

- Cómo se forma un charco.
- Cómo se forma un árbol a partir de una semilla.
- Cómo crece el pelo.
- Cómo te llenan el "hígado de piedritas".
- La acumulación de apuntes a lo largo de un curso.
- La cantidad de dinero que un inversionista tiene en el banco cada día.

¿Qué tienen en común estos procesos?

Actividad 1.1.2

La acumulación de las variaciones

Cada uno de los procesos citados con anterioridad representa un proceso de acumulación:

1. ¿Qué cosas se acumulan en cada caso?
2. Para cada uno de los procesos señalados haz una gráfica aproximada de la cantidad acumulada que se tiene en cada instante.
3. Para cada uno de los procesos señalados haz una gráfica aproximada de la cantidad que se acumula en cada intervalo (instante, minuto, hora o año, según sea el caso).
4. ¿La cantidad que se acumula en cada intervalo es fija? ¿En qué casos sí lo es y en qué casos no? ¿Cómo observas esto en las dos gráficas que has trazado?
5. ¿Son diferentes las dos gráficas trazadas para los puntos 2 y 3? ¿Qué relación tiene una con la otra?
6. Si algo no se acumula, ¿cómo serán en ese caso las dos gráficas solicitadas? ¿Por qué?
7. Observa las cosas a tu alrededor y describe sus procesos de acumulación. Identifica y describe qué son las pequeñas cosas que se acumulan en al menos cinco casos.

ACTIVIDAD 1.1.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones, gráficas y respuesta a cada una de las cinco situaciones propuestas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizar en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos observados en el entorno y trazar las gráficas de los incisos 2 y 3.
- Alentar a los estudiantes para proponer conjeturas acerca de cómo son los incrementos de la variable en cada caso.

8. Prepara el análisis de al menos cinco casos diferentes, para compartir y discutir en clase.

Cualquier comentario o discusión plantéala con tus compañeros o con tu facilitador en la clase.

Aplicación 1.1.1

En la imagen de la figura 1.1 se observa una bomba de extracción de petróleo crudo; pero, ¿qué es el petróleo?, ¿cómo se formó?

Imagina cómo se fueron convirtiendo, poco a poco, los restos orgánicos en el recurso no renovable del que disponemos ahora. Desde luego, son diversas las variables que intervinieron en este proceso, pero se puede analizar con relación al tiempo; este proceso, en definitiva, representa una acumulación que desde este capítulo llamaremos integral.

¿Qué otras integrales puedes observar en la figura 1.1?

1. ¿Crees que los procesos de extracción y consumo de este energético no renovable lo agotarán en corto plazo? ¿Estos procesos o consumos son integrales?
2. ¿Crees que la combustión del energético incrementa de manera paulatina la temperatura de la atmósfera del planeta? ¿Por qué?
3. ¿Has oído hablar de la entropía? Investiga qué tiene que ver esto con el consumo energético. ¿Qué significa el estado de entropía final del Universo?
4. ¿Crees que la contaminación provocada es una integral? ¿Podrá revertirse?
5. ¿Qué es el cambio climático?
6. Todos los procesos comentados implican integrales, ¿puedes sugerir cómo?

FIGURA 1.1 Extracción de petróleo.

APLICACIÓN 1.1.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de la ciencia y la tecnología.
- Interés por los problemas de la humanidad.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas de cómo dentro de los problemas planteados en los cinco casos se esconden acumulaciones que son integrales.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los fenómenos señalados.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo a realizarse en equipo, de considerarse obligatorio aplicar los criterios de calidad de la Actividad 1.1.1.
- Equipos de tres personas.

Aplicación 1.1.2

Un fenómeno que interesa mucho a la humanidad es el incremento de la contaminación. En particular, la Ciudad de México es considerada una de las metrópolis más contaminadas del mundo, motivo por el cual se monitorea de manera permanente el índice de los contaminantes más críticos en los diversos sectores de la ciudad.

El sistema de información de la calidad del aire de la Ciudad de México detalla de manera continua la calidad del aire y sus contaminantes a través de internet en su dirección:

http://www.aire.df.gob.mx/default.php

http://www.aire.df.gob.mx/default.php

Visita este sitio para descubrir las principales consecuencias de la acumulación de contaminantes que corresponden a aplicaciones de la integral en la pestaña "Estadísticas > Gráficos interactivos". Observa la gráfica de los diferentes contaminantes, selecciona la zona y contaminante de tu interés y analiza:

1. ¿En la última semana, cuál fue el valor máximo del ozono? ¿Qué zona de la ciudad lo registró?

   Observa que ese valor es la respuesta acumulativa a lo largo del día; así, la barra que lo representa indica el valor de la integral de todo el día. Como puedes observar, suele comenzar con un valor bajo y poco a poco se incrementa hasta alcanzar su valor máximo, para después decrecer debido a otras acciones atmosféricas y humanas. Así, el fenómeno se incrementa de manera positiva y negativa.

2. Detecta los momentos de máxima acumulación de contaminantes e identifica las regiones más contaminadas durante una semana.

3. Evalúa un día en el que se reporten fuertes lluvias y compáralo con el día previo (sin lluvia) para evaluar el impacto de este fenómeno.

4. Cuando los pequeños incrementos que suceden en un fenómeno son positivos se puede observar que la integral es creciente a lo largo del tiempo; y viceversa, si los incrementos son negativos, la integral puede decrecer. ¿Qué contaminante tiene un comportamiento más estacionario? (Véase http://www.aire.df.gob.mx/default.php?opc=%27aqBhnmQ=%27)

   ¿Cómo se detecta eso en la integral?

http://www.aire.df.gob.mx/default.php?opc=%27aqBhnmQ=%27

APLICACIÓN 1.1.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por el análisis de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de la ciencia y la tecnología.
- Interés por los problemas de la humanidad.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas acerca de cómo, dentro del análisis de las cinco preguntas, se estudian las acumulaciones que son integrales.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los fenómenos señalados.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.
iii. Trazo y análisis de gráficas para reforzar sus conjeturas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo a realizarse en equipo; de considerarse obligatorio, adicionar los criterios de calidad de la Actividad 1.1.1.
- Equipos de tres personas.
- Inducir la discusión acerca de qué significado podría tener la derivada de la integral, trazar la curva derivada por método gráfico.

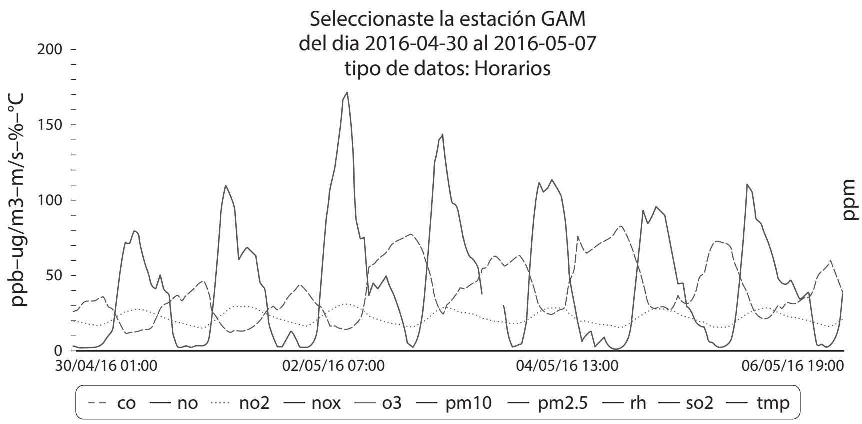


Figura 1.2 Gráfica que arroja el sistema en la Estación Gustavo A. Madero, del 30 de abril al 7 de mayo de 2016.

5. Compara durante varias semanas (todos los días) cómo se comportan sus máximos y mínimos. ¿Existe un patrón que permita tratar de predecir cuáles serán los extremos el día de mañana? Explica por qué.

   Comparte tus análisis con tus compañeros y tu facilitador.

En el presente curso nos concentramos básicamente en los procesos de acumulación de las pequeñas variaciones imperceptibles, la parte de las matemáticas que se encarga del estudio de esta acumulación se llama cálculo integral y a él se dedica nuestro curso.

CAPÍTULO 2

DIFERENCIALES

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si interpreta la presencia de procesos de acumulación en forma adecuada y propone hipótesis acerca de las posibles consecuencias del fenómeno en estudio.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando la integración como herramienta fundamental.

CALENDARIO DEL PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

FECHA	EVIDENCIA
	Actividad 2.1.1
	Aplicación 2.1.1
	Actividad 2.3.1
	Aplicación 2.3.1
	Ejercicios 2.1
	Ejercicios 2.2
	Ejercicios 2.3
	Ejercicios 2.4
	Autoevaluación 2.1
	Autoevaluación 2.2
	Autoevaluación 2.3
	Autoevaluación 2.4

FECHA	EVIDENCIA

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

¿Qué tan grande puede ser una variación antes de que la percibas?

2.1 LAS PEQUEÑAS VARIACIONES

Por experiencia sabemos que las plantas y nosotros mismos crecemos día con día; de otra forma, no podríamos explicar el porqué si dejamos de ver a una persona durante cierto tiempo, al volverla a encontrar la notamos cambiada. De igual modo, por más que fijemos la vista en una planta, no lograremos ver que ésta crezca; sin embargo, uno o dos días después quizá notemos que ha cambiado, tiene nuevos retoños e, incluso, sus flores se han abierto.

Los cambios que sufren muchas de las cosas que nos rodean resultan imperceptibles ante nuestros sentidos si las observamos de manera continua, salvo que hagamos comparaciones entre momentos distantes en el tiempo (véase figura 2.1). Desde luego, es posible encontrar fenómenos cuya variación es tan grande que, aún de manera instantánea, podemos notar con claridad cómo ocurren los cambios.

Por ejemplo, si observas las nubes en un día tranquilo sin viento, las notarás apacibles y, en apariencia, estacionadas en el fondo azul del cielo; por el contrario, en un día de tormenta cambiará su forma y éstas se desplazarán ante tus ojos "visiblemente". Entonces, es posible imaginar qué tan grande puede ser una variación antes de que la percibas.

Ahora a la inversa, ¿qué tan pequeña puede ser esa variación para que dejes de percibirla? Esta pregunta ya la hemos analizado en cálculo diferencial y sabemos que podemos imaginar el instante de tiempo tan pequeño como se quiera y decir que es infinitamente pequeña. O en nuestra notación matemática, si $\Delta t \to 0$, luego $\Delta x \to 0$, x es la variable en observación. Por ahora, no nos referimos a ese límite que sabemos que existe y es 0; la pregunta se planteó a la inversa, ya que mucho antes de que Δx alcance su límite al cero hay un momento en el que deja de ser perceptible; en ese instante y después de él, dentro del proceso en que $\Delta x \to 0$, podemos considerar que hemos alcanzado el **diferencial** escrito dx.

El diferencial es el concepto matemático asociado a la idea de que:

$$\lim_{\Delta x \to 0}(x + \Delta x) = x + dx$$

Observa que para propósitos prácticos con $x + dx$ ¡aún estás en x! El movimiento desde x es imperceptible; sin embargo, si acumulas más de "dx", llega un momento en el que distingues que estás en un nuevo lugar, ¡ahora estás en $x + \Delta x$!, ya que Δx sí se percibe (véase cuadro 2.1).

FIGURA 2.1 ¿Cuánto tiempo debes esperar para observar el resultado de la acumulación? Por ejemplo, en el crecimiento de las palmas, la formación de estalactitas y estalagmitas.

CUADRO 2.1

Según la Real Academia de la Lengua Española, en una de sus acepciones, ***percibir*** es captar por uno de los sentidos las imágenes, impresiones o sensaciones externas.

Para acercarnos al contexto del ***diferencial***, aceptaremos que percibir también implica el uso de instrumentos de medición adecuados a la situación y que incluso estos tienen una sensibilidad muy fina. Por ejemplo, un óhmetro, digital o analógico, permite medir la resistencia de un cable eléctrico. Si tomas un cable y el óhmetro marca 0, ¿el cable en realidad tiene resistencia 0? O si mides ese cable con una cinta métrica y ves que mide 5 m, ¿en realidad mide 5 metros?

¿Qué tiene que ver esto con diferenciales?

Discute con tus compañeros otros ejemplos al respecto.

Actividad 2.1.1

Diferenciales en acción

Analiza y comenta las siguientes situaciones:

1. Una gota de lluvia cae en un lago. Si V es el volumen actual de agua del lago, ¿se puede decir que con la gota que ha caído se tiene $V + dV$? ¿Por qué?
2. Una persona hace ejercicio todos los días y sabe que caminando pierde peso. No obstante, hoy ha decidido hacer poco ejercicio y solo da un paso. Si P es su peso antes de dar el paso, después de éste su peso será $P + dP$. ¿Es esto posible? Explica por qué sí o por qué no.
3. Mientras oyes una melodía, detén el CD (t es el lugar en el que la melodía se detuvo en el CD). Ahora, llama a un compañero y enciende el reproductor un instante: dt. ¿Tu compañero podrá reconocer la melodía en cuestión solo con escuchar a partir del dt? Explica por qué sí o por qué no.
4. Mientras escribes con tu bolígrafo, en cierto instante mides algunas de sus características. Si dibujas un único punto muy tenue, casi no se puede ver, aunque sí lo hayas dibujado. ¿Qué podrá ser considerado x, y en este caso $x+dx$?
5. Estás en el estadio Maracaná con un lleno casi total T, viendo un juego de la selección nacional y llega una persona más, como se muestra en la figura 2.2. ¿La persona que llega se representa dT? Explica por qué sí o por qué no.
6. Compras el envase más grande de palomitas en el cine ¡y se te cae una! ¿Dicha situación se podrá representar como $x+dx$? Claro, con dx negativo.
7. En casa, en la llave del lavabo que acabas de cerrar se ve una gota a punto de caer. ¿Qué podrá ser considerado x y qué $x+dx$?
8. Mientras observas el cielo de noche ves una estrella fugaz y pides un deseo. ¿Qué podrá ser considerado x y qué $x+dx$?
9. Probaste tu café y estaba muy caliente; entonces, lo vuelves a probar casi de inmediato. ¿Qué podrá ser considerado x y qué $x+dx$?
10. Compraste un nuevo traje y al pagarlo te hicieron un descuento de uno por ciento. ¿Puede

ACTIVIDAD 2.1.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Gusto por la observación y el análisis de los hechos cotidianos, así como por la propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.

Productos

- Ensayo con reflexiones, dibujos o esquemas que den respuesta a cada una de las 20 situaciones propuestas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizar en equipo de tres personas.
- Que la clase proponga nuevos ejemplos para discusión.
- Debatir en qué condiciones agregar (por ejemplo, una silla más al salón) no es una situación del tipo $x + dx$.
- ¿Qué es un incremento en una variable discreta y en una continua?

FIGURA 2.2 La gente llegando al estadio de futbol.

ser un caso del tipo $x+dx$? ¿Qué podrá ser considerado x y qué $x+dx$?

Plantea un caso similar, adicional a cada uno de los 10 anteriores. Esto es, en total vas a entregar 20 casos analizados: los 10 anteriores y los 10 propuestos por ti.

Comenta los casos preparados con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

Aplicación 2.1.1

Aquí están los diferenciales

La figura 2.3 muestra una explosión de fuegos artificiales; en ésta, la vista está tomada en un tiempo dado T. Pero, con seguridad, tú has observado situaciones similares en diversas ocasiones, así que es muy posible que recuerdes muchos eventos parecidos. Ahora, con base en la imagen, ¿qué se infiere que ha ocurrido en los instantes previos?, ¿qué sugieres que ocurrirá después? Recuerda que es imposible percibir lo que ocurre con exactitud en dT y, por tanto, no percibimos la diferencia entre los instantes T y $T + dT$; sin embargo, una vez que se acumula más T, sí podemos describir qué ocurre como diferencia entre T y $T + \Delta T$; además, debemos ser explícitos con respecto a si $dT < 0$ o $dT > 0$. Por lo que, si partimos del supuesto de que $dT > 0$, entonces $T + dT$ tiene un significado diferente de $T - dT$.

¿Cómo propones expresar la acumulación continua de una variable? Porque, a pesar de que su diferencial es imperceptible, debe quedar claro que es una pequeña variación que al acumularse de manera sucesiva genera cambios perceptibles.

Comenta tus propuestas con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

APLICACIÓN 2.1.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Gusto por el debate de ideas y el logro de conclusiones.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas acerca de por qué la acumulación imperceptible al inicio de la observación de un proceso se vuelve un proceso donde el cambio es evidente al acumularse.

Productos

- No es necesario.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los fenómenos señalados.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo en equipo; de considerarse obligatorio, aplicar los criterios de calidad de la Actividad 2.1.1.
- A realizarse en equipos de tres personas.
- Propiciar la discusión en la clase acerca de la percepción de la acumulación. Por ejemplo, que se ve en realidad en la pantalla de un televisor en un instante dado.

FIGURA 2.3 Exhibición de pirotecnia.

2.2 EL DIFERENCIAL

Como se ha señalado hasta aquí, una variable continua presenta su posibilidad de cambio como cualidad esencial. En particular, si en una situación se tiene una variable independiente x, el diferencial se define como aquella cantidad diferente de cero que satisface la cualidad:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = dx$$

O bien:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (x + \Delta x) = x + dx$$

Hasta este punto, la definición del diferencial de una variable independiente no presenta ninguna cualidad diferente respecto a los incrementos que hagan necesaria y útil su definición; sin embargo, su importancia y utilidad se presenta cuando analizamos qué ocurre en una función.

Una función cualquiera en un punto x_0 dado se puede "aproximar linealmente"; dicha aproximación es válida en puntos muy cercanos al x deseado, siempre que la función se aproxime mediante su recta tangente en el punto, como se muestra en la figura 2.4.

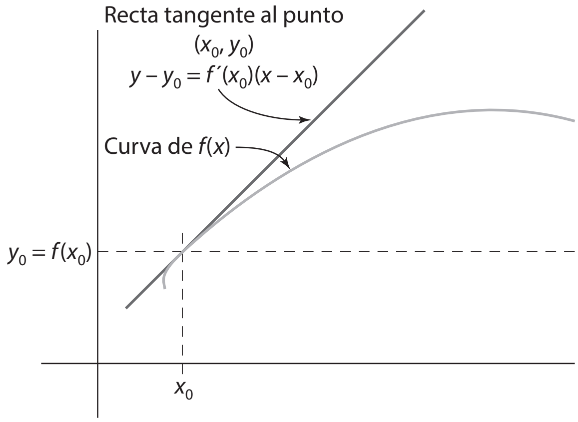


FIGURA 2.4 Aproximación lineal de una función en un punto.

Como se puede observar, la ecuación de la recta tangente que aproxima a la función dada en el punto x_0 resulta ser:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

Pero, la "aproximación lineal" es válida para valores de x muy cercanos a x_0, entonces conforme x se aleja de x_0, el error de la aproximación crece cada vez más, ya que representa la separación entre la curva de $f(x)$ y la recta tangente, luego la diferencia $\Delta x = (x - x_0) \to 0$; es decir, en el límite resulta ser dx, de acuerdo con nuestra definición previa, pero de la misma forma se observa que $\Delta y = y - y_0$, por lo que al sustituir en la ecuación de la recta tangente resulta:

$$dy = f'(x_0)dx$$

La cantidad $dy = f'(x_0)dx$ se denomina "diferencial de la función" en el punto x_0 y su significado se observa en la figura 2.5. Es importante señalar que en la notación diferencial de Leibniz para la derivada podemos simplemente despejar dy para encontrar, a partir de $dy/dx = f'(x)$, la misma expresión.

Se debe tener presente que dy es una condición límite cuando $x \to x_0$ y resulta idéntico a Δy cuando se evalúa dicho límite. En la figura 2.5, esta igualdad se observa al realizar la operación $\Delta x \to 0$.

Debemos aclarar que antes, en nuestro acercamiento de manera informal, se estableció la conversión de Δx a dx con respecto a la percepción posible del cambio al acercarse el límite. La figura 2.5 clarifica, además, que esta condición se alcanza cuando la función se puede "sustituir" por la recta tangente sin pérdida perceptible entre Δy y $f'(x_0)dx = dy$, lo cual corresponde a:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = f'(x_0)dx = dy$$

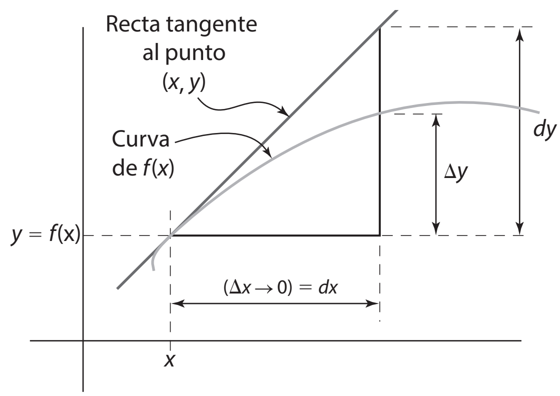


FIGURA 2.5 Diferenciales e incrementos.

❖ Teoremas sobre diferenciales

De acuerdo con la definición $dy = f'(x)dx$, por lo que el cálculo del diferencial depende en esencia de la determinación de la derivada; así, por ejemplo, para $y = f(x) = 3x^2 - 5x + 2$, se tiene que $dy = (6x - 5)dx$.

Ahora, supongamos dos funciones $u(x)$ y $v(x)$; luego, si $y = u(x)v(x)$, al multiplicar por dx se tiene que:

$$\frac{dy}{dx} = u(x)\frac{dv}{dx} + v(x)\frac{du}{dx} \quad \Rightarrow \quad dy = u(x)dv + v(x)du$$

Esto nos muestra la forma típica de calcular los diferenciales de una función dada; es decir, se deriva la función y luego la expresión resultante se multiplica por el diferencial de la variable independiente. Por ejemplo:

Si $u(x) = 2\cos x$ y $v(x) = 4x^3$; luego, si $y = 8x^3 \cos x$, por lo que al derivar resulta $y' = 8(3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x)$; o bien, al multiplicar por dx se obtiene $dy = 8(3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x)dx$.

Otro método de cálculo consiste en aplicar la fórmula encontrada $dy = u\,dv + v\,du$; como en este caso $du = -2\operatorname{sen} x\,dx$ y $dv = 12x^2\,dx$, al sustituir se tiene:

$$\begin{aligned} dy &= (2\cos x)(12x^2\,dx) + (4x^3)(-2\operatorname{sen} x\,dx) \\ &= 8(3x^2 \cos x - x^3 \operatorname{sen} x)dx \end{aligned}$$

De la misma forma en que se ha encontrado el teorema $dy = u\,dv + v\,du$, también es posible demostrar los siguientes teoremas en los cuales u y v son funciones de x, mientras c y n son números reales diferentes de cero:

T2.1 $dc = 0$

T2.2 $d(cu) = c\,du$

T2.3 $d(u + v) = du + dv$

T2.4 $d(uv) = u\,dv + v\,du$

T2.5 $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

T2.6 $d(u^n) = nu^{n-1}du$

T2.7 $d(\operatorname{sen} u) = \cos u\,du$

T2.8 $d(\cos u) = -\operatorname{sen} u\,du$

T2.9 $d(\tan u) = \sec^2 u\,du$

T2.10 $d(\cot u) = -\csc^2 u\,du$

T2.11 $d(\sec u) = \sec u \tan u\,du$

T2.12 $d(\csc u) = \csc u \cot u\,du$

Si revisas con cuidado cada uno de los teoremas anteriores, puedes encontrar que cada una de estas fórmulas corresponde a las fórmulas del cálculo de derivadas.

En particular, la notación de diferenciales permite trabajar la regla de la cadena de una manera muy simple; por ejemplo, si tienes:

$$\frac{dv}{du} = f(u); \ \frac{dv}{du}\frac{dx}{dx} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{du} = f(u) \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dx} = f(u)\frac{du}{dx}$$

$$\therefore \quad dv = f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)dx$$

Por lo que se concluye el teorema:

$$\text{T2.13 si } dv = f(u)du \ \Rightarrow \ dv = f(u)\left(\frac{du}{dx}\right)dx$$

❖ Cálculo de aproximaciones empleando diferenciales

El uso de los diferenciales como medio de aproximación se basa en la aproximación lineal del apartado 2.2; en éste mostramos la expresión $y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$ que podemos escribir $y = f(x_0) + f'(x_0)dx$, o en términos aproximados $y \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, lo cual nos permite calcular el nuevo valor de y una vez que nos ubicamos en el punto $x + \Delta x$. O bien, el incremento que sufre el valor de y mediante $dy = f'(x_0)dx$ que, en términos aproximados, se escribe $\Delta y \approx f'(x_0)\Delta x$.

En las diferentes expresiones que se han señalado, debemos recordar que se emplea la aproximación: $\Delta x \approx dx$ y $\Delta y \approx dy$. La situación más complicada que se podría presentar en las situaciones reales será conocer el valor de la expresión $f'(x_0)$, misma que se puede aproximar mediante la medición de la velocidad media con la que ocurre la variación dentro de la situación en estudio. Por ejemplo:

Un fabricante de pelotas de plástico produce 1 000 pelotas del modelo R-45, cuya característica de diseño implica un diámetro de 30 cm y un espesor de 2 mm. Los encargados de control de calidad afirman que debido a un desajuste en la maquinaria, las pelotas tienen un espesor de 2.3 milímetros. ¿Cuánto plástico en exceso se ha gastado aproximadamente en la producción?

En este caso, ya que podemos considerar que la pelota es un recipiente de "pared delgada", es posible calcular la cantidad de plástico empleada en cada pelota como

$$V = \text{espesor(área de la pelota)} = h(4\pi\, r^2);$$

sin embargo, puesto que h ha variado un poco se tiene:

$$\Delta V = f'(h_0)\Delta h = 4\pi\ r^2\Delta h = 4\pi(15)^2(0.03) = 84.823\ \text{cm}^3$$

Y puesto que se produjeron 1 000 pelotas, tendremos 84 823 cm^3 es decir 84.823 L de plástico, lo que representa una pérdida considerable.

Observa que si calculamos el volumen de plástico con relación al volumen de la esfera, se tendría $V = 4\pi(a^3 - b^3)/3$, donde a y b son el radio exterior e interior, respectivamente; luego, si consideramos que la variación se dio en el radio exterior a, tendremos que la variación resulta $\Delta V = f'(a_0)\Delta a = 4\pi a^2 \Delta a$ y se obtiene el mismo resultado. Sin embargo, en este caso es posible considerar que cada pelota estándar emplea

$$V = 4\pi(a^3 - b^3)/3 = 4\pi(15.2^3 - 15^3)/3 = 573.06\ \text{cm}^3$$

de plástico, mientras que la pelota con el desperdicio tiene $V_2 = 4\pi(15.23^3 - 15^3)/3 = 660.332\ \text{cm}^3$ que resulta en una diferencia "exacta" de 87.272 cm^3 por pelota, con lo que el cálculo previo representa un error ligero respecto de este valor "exacto". ¿A qué se debe esa diferencia?

Una cosa es segura, no siempre conocemos la función que representa el fenómeno, y en esos casos no es posible prever el valor exacto, de modo que solo disponemos de los diferenciales, como se muestra en algunos ejemplos.

2.3 ¿Incremento y diferencial es lo mismo?

De la sección anterior hemos obtenido un acercamiento a los diferenciales y a los incrementos de una variable independiente, pero en la mayoría de los fenómenos que ocurren en nuestra vida diaria existen variables dependientes que son resultado de las variaciones en la variable independiente. ¿Qué ocurre en este caso con los diferenciales y los incrementos? ¿Son lo mismo? ¿O los diferencia la misma característica que mencionamos en la sección previa? Esperamos que eso se aclare en esta sección.

Del análisis en el curso previo de cálculo diferencial, concluimos que las funciones son una forma muy importante de representar modelos de los fenómenos. En particular, si el fenómeno en estudio puede ser modelado mediante una función entre dos variables, tendremos que se satisface una relación entre las variables independiente y dependiente de la forma $y = f(x)$. Dicha función tiene evidentemente una gráfica que la representa. Por otro lado, se ha definido a la derivada como el cociente entre dos incrementos llevados al límite. Recordemos tal definición:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Ahora, veámosla de manera gráfica en la figura 2.5. Observa con cuidado que mientras que $\Delta x \to 0$. alcanza su valor imperceptible dx, se determina la relación $f'(x) = dy \,/\, dx$. Sin embargo, la curva que representa el fenómeno se sigue recorriendo y, en cierto momento, cuando se tiene $x + \Delta x$, la función se encuentra en $y + \Delta y$. Por otro lado, como el triángulo que determina la derivada ya se definió y resulta inamovible, entonces define un cateto vertical de magnitud dy diferente de Δy. Luego, en general $dy \neq \Delta y$ y únicamente, son iguales en el límite estrictamente cuando se satisface $\Delta x \to 0$. Observa que de la figura 2.5 se tiene la relación exacta $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$. ¿Qué pasa si despejamos dy en la igualdad citada $f'(x) = dy \,/\, dx$?

Actividad 2.3.1

Diferenciales en la variable dependiente

En esta actividad retomamos la figura presentada en el apartado 2.2. Analiza los cambios que hemos realizado (véase figura 2.6).

En esta ocasión se han considerado dos instantes diferentes subindicados en 1 y 2, respectivamente, dentro del proceso de desarrollar $\Delta x \to 0$.

Es muy importante el empleo de la derivada equivalente a la tangente del ángulo de inclinación de la recta tangente. Así pues, con base en esta responde las siguientes preguntas.

1. Muestra cómo se calcularon los segmentos verticales.
2. ¿Por qué se ha señalado el segmento "Error 1" y "Error 2" como ERRORES?
3. ¿Si $\Delta x \to 0$ siempre decrece el error? Muestra cómo se da esto en diferentes gráficas (al menos tres diferentes a la mostrada).
4. Si NO conocieras la función que representa a un fenómeno, ¿cuál Δx de las mostradas en la figura emplearías para calcular los segmentos verticales y por qué?
5. Indica en la figura cuáles segmentos corresponden a diferenciales.
6. ¿Puede el error ser CERO? ¿Cuándo y por qué?

ACTIVIDAD 2.3.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de nuevos conceptos.
- Gusto por la observación y la abstracción.
- Interés por realizar conjeturas sobre conceptos nuevos.

Productos

- Ensayo con las reflexiones, dibujos o esquemas que den respuesta a cada uno de los seis cuestionamientos y conclusiones, después de repetir el proceso, como se señala en el punto 7.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Discutir en clase el concepto de linealización.

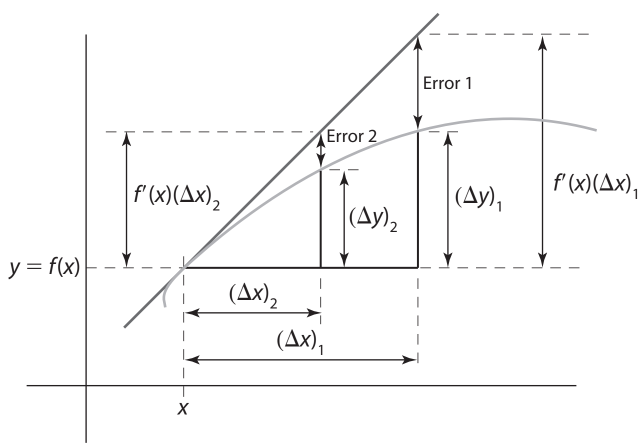


FIGURA 2.6 Diferenciales e incrementos en dos instantes.

7. Traza de nuevo una gráfica parecida a la mostrada, pero con una función cóncava hacía arriba. Repite los análisis establecidos. ¿En qué cambia la situación si la gráfica es cóncava hacía abajo o hacía arriba?

Comenta tus respuestas con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

Aplicación 2.3.1

Aquí están los diferenciales

Observa las fotografías de la figura 2.7, todas ellas tienen, al menos, una característica en común.

Entre otras características, las situaciones presentadas están asociadas a problemas de volumen; en cada uno de los casos, conocer, en mayor o menor grado, el volumen exacto que puede contener el objeto resulta muy importante. En general, los objetos mostrados presentan formas cuyo volumen es relativamente fácil de calcular. ¿Qué pasa si alguna de las dimensiones nominales del obje-

APLICACIÓN 2.3.1

Actividad para reflexionar y comentar con compañeros y facilitador.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Gusto por el debate de ideas y el logro de conclusiones.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas acerca de cómo pequeños errores o desviaciones en un producto, variable o proceso pueden provocar situaciones críticas en cuanto a seguridad, costos u otro tipo de factores en diferentes situaciones.

Productos

- No es necesario.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los fenómenos señalados.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.

Figura 2.7 ¿Qué comparten en común estas imágenes?

to varía un poco su valor? ¿Cómo cambia el volumen contenido debido a ese error?

Por ejemplo, supón que el objeto es un cilindro. Su volumen está determinado por $V = \pi r^2 h$, donde r es el radio y h su altura. Si se tiene un cilindro de radio y altura nominales de 50 cm y 120 cm, respectivamente, ¿cuánto varía aproximadamente su volumen si su radio es en realidad de 50.5 cm?

Desde luego, eso se puede calcular de manera exacta calculando ambos volúmenes y encontrando su diferencia, que en este caso es de $961\,421.5998 - 942\,477.7961 = 18\,943.8037$ cm^3; sin embargo, existe otra forma rápida de aproximar el resultado que resulta bastante simple en aquellos casos en los que no es posible calcular mediante alguna fórmula, como se hizo en el caso previo.

Consideremos la fórmula de cálculo de volumen presentada $V = \pi r^2 h$; ahora, derivemos respecto de r puesto que es la variable cuyo valor no ha resultado exacto, tendremos $dV / dr = 2\pi rh$; o $dV = 2\pi rhdr$. Luego, ya que los diferenciales corresponden a pequeños incrementos, se debe cumplir $\Delta V \approx 2\pi rh\Delta r = 2\pi(50)120(0.5) =$ $18\,849.5559$ cm^3, que resulta ser una muy buena aproximación y en particular nos muestra que un pequeño error de construcción implica grandes consecuencias en el volumen total.

Podemos imaginar y calcular las implicaciones de algún error de medidas "menor" en cada uno de los casos que se presentan, siempre y cuando no sean tan críticos; pero, ¿puedes proponer algún caso en el cual un error "menor" de construcción respecto de las especificaciones tenga consecuencias graves?

Explica en cada caso qué implicación tienen los diferenciales respecto del objeto que se presenta en las fotografías de la figura 2.7.

En estos y muchos otros casos, los diferenciales son una forma rápida del cálculo de esas variaciones.

Comenta tus conclusiones con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo en equipo; de considerarse obligatorio aplicar los criterios de calidad de la Actividad 2.1.1.
- Equipos de tres personas.
- Propiciar la discusión en la clase sobre qué son las tolerancias, los errores de medición y las desviaciones en las especificaciones de un producto o proceso; y los costos o pérdidas que pueden producir.

Ejercicios 2.1

2.1.1 Calcula el diferencial de la función:

$$f(x) = 3x + 1$$

Resolución

Puesto que $df = f'(x)dx$ se tendrá $df = 3dx$.

2.1.2 Calcula el diferencial de la función:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + x - 1}$$

EJERCICIOS 2.1-2.5

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la investigación.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Resolución

Puesto que $df = f'(x)dx$ se tendrá $df = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2+x-1}}(2x+1)dx$.

2.1.3 Calcula el diferencial de la función: $f(x) = 3x \operatorname{sen} x$

Resolución

Puesto que $df = f'(x)dx$ se tendrá $df = 3(\operatorname{sen} x + x\cos x)dx$

2.1.4 Calcula el diferencial de la función:

$$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$$

Resolución

Puesto que $df = f'(x)dx$, se tendrá

$$df = \frac{(x^2-1) - x(2x)}{(x^2-1)^2}dx = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}dx.$$

2.1.5 Calcula el diferencial de la función:

$$f(x) = xe^{2x-1}$$

Resolución

Puesto que $df = f'(x)dx$, se tendrá $df = (e^{2x-1} + 2xe^{2x-1})dx$
$= (1+2x)e^{2x-1}dx$.

Ejercicios 2.2

Para las siguientes funciones calcula una aproximación lineal alrededor del punto dado.

2.2.1 $f(x) = 3x + 1$ en $x = 1$

Resolución

Puesto que la aproximación lineal solicitada se puede escribir $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, resulta con $f(x_0) = f(1) = 4$ y $f'(1) = 3$, sustituyendo $y = 4 + 3(x-1) = 3x + 1$; es decir, para una función lineal ¡su aproximación lineal es ella misma! Y, por supuesto, es exacta.

2.2.2 $f(x) = \sqrt{x^2+x-1}$ en $x = 2$

Resolución

En este caso, la aproximación lineal solicitada se escribe $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ y si se toma:

$$f'(2) = \frac{1}{2\sqrt{x^2+x-1}}(2x+1)\bigg|_{x=2} = \frac{5}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Por último, la aproximación lineal deseada resulta:

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su solución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la solución para que el estudiante la repase, la analice con cuidado y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la solución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para preguntas acerca de los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

$$y=\sqrt{5}+\frac{\sqrt{5}}{2}(x-2)$$

2.2.3 $f(x)=3x \operatorname{sen} x$ en $x=\pi/4$

Resolución

Nuevamente, si se toma:

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, se tiene con $f'(x)=3(\operatorname{sen} x+x\cos x)$ que la aproximación lineal deseada resulta:

$$y=\frac{3\pi}{4}\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+3\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right);\ \text{o bien,}$$

$$y=\frac{3\pi\sqrt{2}}{8}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(1+\frac{\pi}{4}\right)\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$$

2.2.4 $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ en $x=-\dfrac{1}{2}$

Resolución

Ahora, con $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ obtenemos la aproximación lineal deseada:

$$y=\left.\frac{x}{x^2-1}\right|_{x=-\frac{1}{2}}-\left.\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}\right|_{x=-\frac{1}{2}}(x+\frac{1}{2})\quad\Rightarrow\quad y=\frac{2}{3}-\frac{20}{9}\left(x+\frac{1}{2}\right)$$

2.2.5 $f(x)=xe^{2x-1}$ en $x=0$

Resolución

Al igual que en los casos anteriores, con $y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ obtenemos la aproximación lineal deseada:

$$y=\left.xe^{2x-1}\right|_{x=0}+\left.(1+2x)e^{2x-1}\right|_{x=0}(x-0)\quad\Rightarrow\quad y=\frac{x}{e}$$

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

Ejercicios 2.3

En cada uno de los siguientes casos calcula:

1. El cambio exacto de la función para el valor de x dado si se tiene el incremento Δx.
2. El cambio de la función empleando diferenciales.
3. El error que se genera entre el cálculo exacto y el encontrado empleando diferenciales.

2.3.1 $f(x)=2x-5,\ x=2,\ \Delta x=0.5$

Resolución

1. $f(2)=-1,\ \ f(2.5)=0\quad\Rightarrow\quad \Delta f=0-(-1)=1$

2. $df = f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad df = 2(0.5) = 1$

3. El error de la aproximación es: $\varepsilon = |\Delta f - df| = |1 - 1| = 0$; el error en toda función lineal debe ser cero, porque la aproximación lineal a la curva es ella misma.

2.3.2 $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, $x = 5$, $\Delta x = 0.01$

Resolución

1. $f(5) = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24}$,

   $f(5.01) = \sqrt{5.01^2 - 1} = 4.90918$

   $\Rightarrow \quad \Delta f = 4.90918 - \sqrt{24} = 0.01020578$

2. $df = f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad df = \left.\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}}\right|_{x=5} dx$

   $\approx \dfrac{5}{\sqrt{24}} 0.01 = 0.0102062$

3. El error de la aproximación es: $\varepsilon = |\Delta f - df| = |0.010205782 - 0.0102062| = 0.000000417$. Este error planteado es engañoso, ya que depende de cifras no significativas que pueden provenir del error funcional en las calculadoras y, desde luego, depende de la cantidad de cifras significativas tomadas; de cualquier manera, observemos que debido a la pequeña magnitud que representa Δx, el error resulta despreciable para propósitos prácticos, y es la forma del diferencial en general más rápida y útil para incrementos muy cercanos al cero (véase figura 2.8).

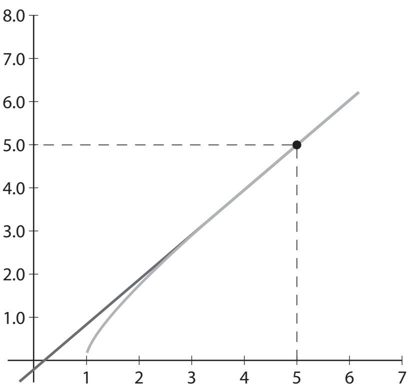


FIGURA 2.8 El error es despreciable alrededor de $x = 5$, para la función del ejercicio 2.3.2.

2.3.3 $f(x) = 2x\cos 2x$, $x = \pi/3$, $\Delta x = \pi/200$

Resolución

1. $f(\pi/3) = -1.047197551$, $f(\pi/3 + \pi/200) = f(1.062905514)$

   $= -1.120208442 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = -0.073010891$

2. $df = f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad df = (2\cos 2x - 4x \operatorname{sen} 2x)\big|_{x=\pi/3} dx$

   $= (2\cos 2x - 4x \operatorname{sen} 2x)\big|_{x=\pi/3} \pi/200 = -0.07269015$

3. El error de la aproximación es:

   $\varepsilon = |\Delta f - df| = |-0.073010891 + 0.7269015 = 0.00032074$.

   Al igual que en el caso anterior, el error es engañoso debido a los errores de cálculo que se pueden generar dentro de la calculadora (véase figura 2.9).

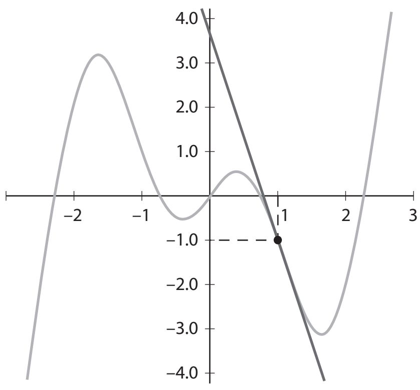


FIGURA 2.9 El error es despreciable alrededor de $x = \pi/3$ para la función del ejercicio 2.3.3.

2.3.4 $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x^2}$, $x = 0.2$, $\Delta x = -0.1$

Resolución

Puesto que la función puede ser reescrita como $f(x) = 1 + \dfrac{3}{x^2}$, se tiene:

1. $f(0.2) = 76,\ f(0.2 - 0.1) = f(0.1) = 301 \quad \Rightarrow \quad \Delta f = 301 - 76 = 225$

2. $df = f'(x)dx \quad \Rightarrow \quad df = -\left.\dfrac{6}{x^3}\right|_{x=0.2} dx \approx -\left.\dfrac{6}{x^3}\right|_{x=0.2} (-0.1) = 75$

3. En este caso, el error es enorme debido a que la función se acerca a una región asintótica en cero y el valor de Δx es muy grande para este propósito $\varepsilon = \left|\Delta f - df\right| = \left|\ 225 - 75\ \right| = 150$, como se puede observar en la figura 2.10.

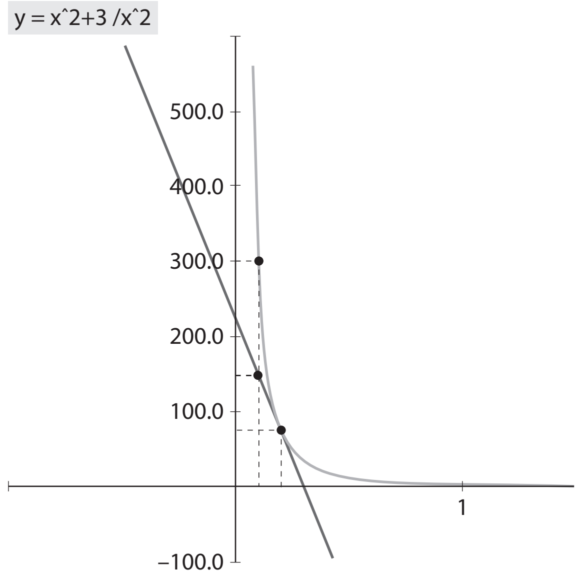


FIGURA 2.10 Observa la causa del error tan grande para la función del ejercicio 2.3.4. ¿Dónde pasa la tangente al punto $x = 2$?

2.3.5 $f(x) = 3xe^{-2x}$, $x = 0$, $\Delta x = 0.001$

Resolución

1. $\Delta f = 0.002994005$

   $f(0) = 0,\ \ f(0.001) = 0.002994005 \quad \Rightarrow$

2. $df = f'(x)dx = 3(e^{-2x} - 2xe^{-2x})\Big|_{x=0} dx$

   $\approx 3(e^{-2x} - 2xe^{-2x})\Big|_{x=0} 0.001 = 0.003$

3. El error de la aproximación es $\varepsilon = \left|\Delta f - df\right|$ $= \left|\ 0.002994005 - 0.003\ \right| = 0.000005994$; que, al igual que en los casos anteriores, se puede deber en gran medida a los errores de cálculo internos en la calculadora. La figura 2.11 muestra la gráfica de la función y su tangente.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

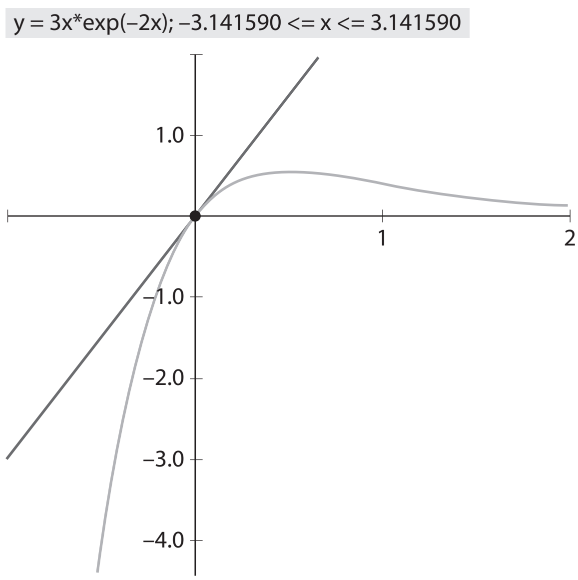


FIGURA 2.11 Error muy pequeño en la cercanía de $x = 0$, pero crece con rapidez si nos alejamos para la función del ejercicio 2.3.5.

Ejercicios 2.4

Resuelve los siguientes problemas:

2.4.1 Un terreno mide el doble de largo que de ancho. ¿Cuánto varía su área si al delimitarlo se comete un pequeño error idéntico en ambas magnitudes?

Resolución

Sea x el ancho del terreno y $2x$ su largo, de tal forma que su área es $A = 2x^2$. Resulta que se comete un pequeño error en x; es decir, el error es dx, luego, se tiene que la variación del área es $dA = 4x\,dx$, desde luego, si la delimitación es por exceso $dx > 0$ y el área crece. En caso contrario, si el error es por defecto se tiene que $dx < 0$ y $dA < 0$, es decir, el área decrece como es de esperarse. Por ejemplo, si el ancho midiera 1000 m, y el error fuera de 5 cm, el error sería $dA = 4(1000)(0.05) = 200\ \text{m}^2$ que no es tan despreciable como se creería.

2.4.2 Se va a construir un cubo de cartón; sin embargo, al realizar los cortes sobre el material se comete el mismo pequeño error en la longitud de todas sus aristas. En términos de ese error:

1. ¿Cuánto cambia la suma de la longitud de todas sus aristas?
2. ¿Cuánto cambia su área?
3. ¿Cuánto cambia su volumen?

Resolución

Sea x la longitud de la arista del cubo, el error cometido es dx.

1. La suma de las longitudes de sus aristas es $L = 12x$, donde la variación de dicha longitud es $dL = 12dx$, $dx > 0$, L crece; pero, en caso contrario, si $dx < 0$ se tiene que L decrece.
2. El área del cubo $A = 6x^2$; luego, debido al error dx cometido se tiene que $dA = 12x\,dx$; en las mismas condiciones, si $dx < 0$, entonces $dA < 0$, mientras que si $dx > 0$ se tiene que $dA > 0$.
3. El volumen del cubo es $V = x^3$, con el error cometido, la variación del volumen es $dV = 3x^2dx$, en donde resulta obvio que si $dx < 0$ el volumen decrece, mientras que si $dx > 0$, entonces el volumen crece.

   Aunque no es solicitado, se debe hacer notar que en este caso $dx < dL < dA < dV$, debido a los factores de x presentes. En general, esto siempre es válido. Es decir, las longitudes son menos sensibles al error que las áreas, y lo más sensible es el volumen.

2.4.3 Se construye un cilindro sin tapas mediante una hoja rectangular de papel aluminio que debe tener el triple de largo que de alto. Si al cortar la hoja se comete un pequeño error en el largo de la hoja, ¿cuánto varía el volumen que encierra el cilindro construido si se emplea el alto de la hoja como altura del cilindro?

Resolución

Sean h el alto de la hoja de papel correspondiente a la altura del cilindro y L el largo de la hoja; sabemos que $L = 3h$, pero el volumen del cilindro se da en términos del radio de la base, esto es $V = \pi r^2 h$. La circunferencia de la base es $L = 2\pi r$, luego $r = L/(2\pi)$.

Ahora, $V = \pi(L/(2\pi))^2 h = L^2h/(4\pi)$. Como el error que se comete es dL se tiene:

$$V = \frac{L^2h}{4\pi} \quad \Rightarrow \quad dV = \frac{2Lh}{4\pi}dL$$

Por último, como $L = 3h$ resulta:

$$dV = \frac{3h^2}{2\pi}dL$$

2.4.4 La vía del tren entre dos ciudades mide M kilómetros y el área de su sección es A cm^2, si el coeficiente de dilatación volumétrico del acero es v $(1/^\circ C)$.

1. ¿Cuánto varía el volumen si se da una pequeña variación de la temperatura uniforme a lo largo de toda la vía?
2. ¿Cómo cambia el planteamiento si la variación de la temperatura no fuese uniforme a lo largo de toda la vía?

Resolución

1. Sea $V = MA(10^5)\ \text{cm}^3$ el volumen de la vía, entonces, puesto que el volumen cambia v (cm^3 por cada ºC) se tiene que: $dV = MA(10^5)vdT\ \text{cm}^3$.
2. Si la temperatura no cambia de manera uniforme supón que se tienen n segmentos de vía de longitud M_i cada uno, y variación de temperatura ΔTi en cada segmento, luego se tendrá $\Delta Vi = M_i A(10^5)v\Delta T_i\ \text{cm}^3$; por último, al sumar todos esos incrementos se tendrá que la variación total de volumen en la vía es:

$$\Delta V = \sum_{i=1}^{n} M_i A(10^5)v\Delta T_i = Av10^5\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta T_i$$

2.4.5 Se construye un tanque mediante un cilindro de radio r y altura h, sellado en sus extremos mediante dos semiesferas. ¿Cuál error es más crítico: equivocarse ligeramente en la altura h o en el radio r?

Resolución

Puesto que las tapas del cilindro son semiesferas, juntas representan una esfera completa cuyo volumen es $Ve = \Delta 4\pi r^3/3$, mientras que el volumen del cilindro es $Vc = \pi r^2 h$, el volumen total del tanque es $V = 4\pi r^3/3 + \pi r^2 h$. Si el error se comete en la altura h se tiene $dV_h = \pi r^2 dh$, pero si el error se comete en el radio se tiene $dV_r = (4\pi r^2 + 2\pi rh)dr$. Si suponemos que los errores en la altura h o el radio r son del mismo orden, es decir $dr \approx dh$ se tiene:

$$\frac{dV_r}{dV_h} = \frac{(4\pi r^2 + 2\pi rh)dr}{\pi r^2 dh} = \frac{4r^2 + 2rh}{r^2} = 4 + \frac{2h}{r}$$

En general, es común que $h > r$, aunque esto no afecta la conclusión. Luego, continuamos y, puesto que $2h/r > 0$, tenemos:

$$\frac{dV_r}{dV_h} = 4 + \frac{2h}{r} > 4 \quad \Rightarrow \quad dV_r > 4dV_h$$

Se concluye que para el tanque resulta más crítico un error en el radio que en la altura. Si ambos errores son por exceso, se satisface la desigualdad mostrada. En caso de que ambos errores sean por defecto, tomamos sus valores absolutos (ya que ambas variaciones de volumen serían negativas) y se concluye lo mismo.

Ejercicios 2.5

Resuelve los siguientes problemas:

2.5.1 El encargado de control de calidad de una empresa productora de envases de vidrio ha notado que el espesor de la pared del envase a mayor presión de la línea de aire comprimido es más delgada; por tal motivo, ha colocado un manómetro digital en la línea. De manera experimental, concluye que la operación óptima se logra cuando la presión en la línea es de 4.2 kg/cm^2, y de acuerdo con las mediciones que ha efectuado cuando la presión baja 0.1 kg/cm^2, el espesor de la pared se incrementa en 0.03 milímetros. Si la pared estándar debe medir 2.7 mm, ¿entre qué presiones debe manejar su máquina, de tal forma que la pared de la botella no varíe más de 10% respecto del estándar?

Resolución

Sea E el espesor de la pared del envase y p la presión en la línea, entonces se tiene que $E_0 = 2.7$ mm, mientras que $p_0 = 4.2$ kg/cm^2. Además, se conoce que si $dp = 0.1$ kg/cm^2 se tiene que $dE = 0.03$ mm y se pide que $|\Delta E| \leq 0.1(2.7) = 0.27$ mm.

Como $E = f(p)$, entonces $dE/dp = 0.03/0.1$ $= 0.3$ [mm cm^2/kg]. Ahora, $\Delta E = (dE/dp)\Delta p$ por lo que al despejar Δp, resulta $\Delta p = \Delta E/(dE/dp) = 0.27$ [mm]/0.3 [mm cm^2/kg] $= 0.9$ kg/cm^2, de donde la presión de la máquina debe estar en el rango:

$$4.2 - 0.9 \leq p \leq 4.2 + 0.9 \text{ o bien } 3.3 \leq p \leq 5.1 \text{ kg/cm}^2$$

Como se desconoce la naturaleza exacta de $E = f(p)$, y debido a las condiciones de error que genera el cálculo por diferenciales, se sugiere, por razones de seguridad, disminuir el rango de presión $3.3 \leq p \leq 5.1$ kg/cm^2 de manera práctica.

2.5.2 Una troqueladora corta arandelas con las dimensiones mostradas en la figura 2.12. Conforme el troquel trabaja el filo se pierde y comienza a hacer las arandelas cada vez con mayor diámetro en el exterior y menor diámetro en la perforación. Si las arandelas se venden por kilogramos y en condiciones normales, un kilogramo representa 572 arandelas, ¿hasta qué momento se puede soportar el desgaste del troquel si el kilogramo de arandelas no debe contener menos de 550 piezas? Supón que el espesor de la lámina de la cual se cortan las arandelas permanece constante.

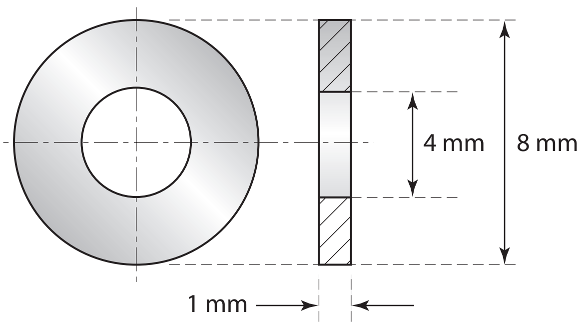


FIGURA 2.12 Dimensiones de la arandela del ejercicio.

Resolución

Sea W el peso de cada arandela $W = \gamma V$, donde γ es el peso específico del material y V su volumen. El volumen de la arandela es $V = \pi h(R^2 - r^2)$, donde $R_0 = 8$ mm y $r_0 = 4$ mm son respectivamente el radio exterior e interior de la arandela. Luego, $W = \gamma\pi h(R^2 - r^2)$, puesto que un kilogramo de arandelas contiene 572 piezas y cada pieza pesa $1/572 \text{ kg} = 0.001748251748 \text{ kg} = \gamma\pi(1)(8^2 - 4^2)$; entonces:

$$\gamma = 0.000011593454 \text{ kg} / \text{mm}^3$$

Conforme se va dando el desgaste del troquel, las arandelas tienen un R mayor y simultáneamente un r menor; puesto que el desgaste se da en todo el filo del troquel, se puede suponer que esto implica $dR = dr$. Si R varía, se tiene $dW_R = 2\gamma\pi hRdR$, mientras que si r lo hace se provoca $dW_r = -2\gamma\pi hr(-dr) = 2\gamma\pi hrdr$ (dr es negativo porque r disminuye). Luego, el nuevo peso de la arandela comprende ambos incrementos de peso, el producido por R y el de r, ya que ocurren al mismo tiempo. Entonces:

$$W = W_0 + dW = \gamma\pi h\left(R_0^2 - r_0^2\right) + (2\gamma\pi hRdR + 2\gamma\pi hrdr)$$

$= 1/572 + 2\gamma\pi h(R + r)dr < 1/550$, puesto que no puede haber menos de 550 arandelas en un kilogramo.

Por último, al despejar y sustituir los valores conocidos resulta:

$$dr < \left(1/550 - 1/572\right)/\left[2\gamma\pi h(R + r)\right] = 0.08 \text{ mm}$$

Que es el máximo error permitido para el desgaste de la herramienta de corte.

2.5.3 En una empresa se producen balines (esferas de acero) para rodamientos. ¿Con qué precisión se debe medir el diámetro del balín si su peso teórico no puede exceder más de 5% de la norma?

Resolución

Sea W el peso; entonces, $W = \gamma V$, donde γ es el peso específico del material y V su volumen. Para la esfera $V = 4\pi r^3/3$, de donde $W = \gamma 4\pi r^3/3 = \gamma 4\pi D^3/24$, con el diámetro $r = D/2$. Para una pequeña variación de D, se tiene $dW = \gamma\pi D^2 dD/2$ y ésta es la variación que no puede exceder de $(5\%)W$, por lo que se tiene $dW < 5W/100 = W/20$ que corresponde a $\gamma\pi D^2 dD/2 < (\gamma 4\pi D^3/24)/20$; o bien $dD < D/60$. Es decir, el error de medición del diámetro no puede exceder $D/60 = 0.016666D$; o sea $\pm 1.6666\%$.

2.5.4 Un fusible mecánico está formado por un alambre que se diseña para que se reviente si la carga soportada por un mecanismo rebasa un máximo de 1 250 kg. El diámetro nominal del cable es de 0.02 mm, para reventarse muy cerca (por encima) de los 1 250 kg. Si las características adicionales del cable se mantienen invariantes, ¿con qué precisión se debe producir el diámetro del cable si la carga de ruptura debe estar en el rango de 1 240 a 1 300 kg?

Resolución

Sea S el esfuerzo soportado por el cable fusible, luego $S = F/A$, donde F es la carga soportada por el cable y A su área de sección. Para el círculo $A = \pi D^2/4$, de donde $F = S(\pi D^2/4)$. Con

$F_0 = 1250$ kg y $D_0 = 0.02$ mm, se tiene el esfuerzo nominal $F_0 = 1250(4)/(\pi 0.02^2)[\text{kg/mm}^2]$, ahora $dF = S_0 \pi D dD/2$ de donde $dD = 2dF/(S_0 \pi D)$, pero de acuerdo con las condiciones limitantes $dF_- = 1240 - 1250 = -10$ kg, mientras $dF_+ = 1300$. Puesto que $dF_- = -10$ kg representa la condición más crítica de exactitud, se tiene: $dD = 2dF/(S_0 \pi D) = 2(-10)\pi 0.02^2/[1250(4)\pi 0.02] = 0.00008$. Es decir, el error de medición no debe exceder a $(0.00008/0.02)100 = \pm 0.4\%$, que es la precisión deseada.

2.5.5 En cierto momento, una laguna tiene una superficie de 17.2 km^2, medida sobre el espejo del agua. Un día llueve y se observa que en una lata cilíndrica de 5 cm de diámetro el agua alcanzó una altura de 1.3 cm en los 23 minutos que duró la lluvia.

1. ¿Cuánto se espera que la presa haya incrementado su volumen de agua si se sabe que reúne el agua de 122 km^2 de superficie y llovió con esa intensidad en cerca de 85% de ese terreno?
2. ¿Cuánto se habrá elevado el nivel del espejo del agua?
3. Si se calcula que el volumen contenido por la presa antes de esa lluvia era de 247 km^3 de agua, ¿qué porcentaje de su volumen se incrementó por cada minuto de lluvia?

Resolución

1. Sea A el área del espejo de la presa en un momento dado, entonces el volumen de la laguna después de un momento de lluvia es $V = V_0 + Adh$, donde dh es el incremento en la altura del espejo del agua debido a la lluvia.

   Puesto que la altura se incrementó en 1.3 cm en 23 minutos de lluvia, se tiene que $dh/dt = 1.3/23$ [cm/min]; o bien, $dh = (1.3/23)dt$ [cm]. Es necesario notar que si en la lata el nivel del agua subió 1.3 cm también lo hizo de igual forma en cualquier otro lugar del terreno en que haya llovido.

   Ahora, la cantidad total de lluvia que cayó en todo el terreno que capta la presa (directamente en ésta y los arroyos que reúnen el agua del área circundante) es:

$$\begin{aligned} dV_T &= A_T dh = 122(0.85)[\text{km}^2]1.3[\text{cm}](10^{-5})[\text{km/cm}] \\ &= 134.81(10^{-5})[\text{km}^3] \end{aligned}$$

2. Ahora, considerando únicamente el área de la presa, ya que el agua se vertió en ella, se tiene:

$$dV_T = dV = Adh$$

   De donde:

$$\begin{aligned} dh = dV/A &= 134.81(10^{-5})[\text{km}^3]/17.2\ [\text{km}^2] \\ &= 7.7003428571(10^{-5})\ [\text{km}](10^5)[\text{cm/km}] \\ &= 7.7003428571 \text{ cm} \end{aligned}$$

3. Puesto que $dV = A\,dh$, al dividir entre dt: se tiene:
   $dV/dt = A\,dh/dt$

AUTOEVALUACIÓN 2.1-2.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la solución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se comprenda cómo los procesos de variación se representan mediante diferenciales, y cómo estos se pueden aproximar mediante incrementos. Esto es útil sobre todo en situaciones en las que se desconocen las expresiones analíticas de los fenómenos en estudio.

Desempeños

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la solución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

$$= 17.2[\text{km}^2]7.7003428571[\text{cm}](10^{-5})[\text{km/cm}]/23[\text{min}]$$
$$= 5.758517267(10^{-5})\ \text{km}^3/\text{min}$$

Por último, el porcentaje deseado es:

$$(dV/dt)100/V_0 = 5.758517267(10^{-5})(100)/247$$
$$= 0.000023313\%/\text{min}$$

Autoevaluación 2.1

Resuelve los siguientes cuestionamientos:

2.1.1 Encuentra el diferencial df de la función en términos de x: $f(u) = u^3 + \text{sen}(2 + 3u)$, si se sabe que $u(x) = 3x\cos x$.

2.1.2 Calcula una aproximación lineal alrededor del punto $x = 3$, para la función $f(x) = 5x^2 \cos(x - \pi)$.

2.1.3 De acuerdo con la segunda ley de Newton, la fuerza depende de la masa y la aceleración. ¿Cuánto variará la fuerza si simultáneamente varían una cantidad infinitesimal la masa y la aceleración?

2.1.4 Para la función $f(x) = \dfrac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{|x^3|}$, tomando $x = -1$ y $\Delta x = 0.001$, calcula:

1. El cambio exacto de la función para el valor de x dado, si se tiene el incremento Δx.
2. El cambio de la función empleando diferenciales.
3. El error que se genera entre el cálculo exacto y el encontrado empleando diferenciales.

AUTOEVALUACIÓN 2.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Solución a la autoevaluación 2.1

2.1.1 $df = [(81x^2\cos^3 x - 81x^3\cos^2 x\,\text{sen}\,x$
$+ 27\cos(2 + 9x\cos x)(9\cos x - 9x\,\text{sen}\,x)]dx$

2.1.2 Como, $f'(x) = -10x\cos x + 5x^2\text{sen}\,x$, se tiene:
$f(x) \approx -63.60 + 36.05\,x$

2.1.3 Como $F = ma$, se tiene: $dF = m\,da + a\,dm$

2.1.4

1. $\Delta f = f[-1 + 0.001] - f[-1] = 0.00153908$
2. $df = 0.00153553$
3. El error es -3.54727×10^{-6}

Autoevaluación 2.2

Resuelve los siguientes cuestionamientos:

2.2.1 Encuentra el diferencial df de la función en términos de x: $f(u) = 3uv + 4(u + 2v)^2$, si se sabe que $u(x) = 3e^x$ y $v(x) = 5\cos x$.

AUTOEVALUACIÓN 2.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

2.2.2 Calcula una aproximación lineal alrededor del punto $x = 2$ para la función: $f(x) = 5x^2 \ln(x+1)$.

2.2.3 De acuerdo con la ley de la gravitación, la fuerza gravitacional se calcula mediante:

$$F = G\frac{Mm}{r^2}$$

donde G es una constante, M y m la masa de dos cuerpos que se atraen mutuamente y r la distancia entre el centro de masa de los dos cuerpos. Considerando la segunda ley de Newton $F = ma$.

1. ¿La aceleración de la gravedad es constante?
2. Si una persona se sube a una mesa de 1 m de altura, ¿cuánto cambió la gravedad para esa persona?

2.2.4 Para la función $f(x) = \dfrac{x^2 + \operatorname{sen} x}{x+1}$, tomando $x = 3$ y $\Delta x = 0.001$, calcula:

1. El cambio exacto de la función para el valor de x dado, si se tiene el incremento Δx.
2. El cambio de la función empleando diferenciales.
3. El error que se genera entre el cálculo exacto y el encontrado empleando diferenciales.

Solución a la autoevaluación 2.2

2.2.1 $df = 3(udv + vdu) + 8(u + 2v)(du + 2dv)$

Como $du = 3e^x dx$ y $dv = -5 \operatorname{sen} x\, dx$:

$df = [45e^x(-\operatorname{sen} x + \cos x) + 8(3e^x + 10\cos x)(3e^x - 10 \operatorname{sen} x)]dx$

2.2.2 Como $f'(x) = 10x\ln(x+1) + \dfrac{5x^2}{x+1}$: $f(x) \approx -35.308 + 28.64\,x$

2.2.3

1. Como $F = ma = G\dfrac{Mm}{r^2} \Rightarrow g = G\dfrac{M}{r^2}$ no es constante.
2. El cambio en la gravedad es: $dg = -2G\dfrac{M}{r^3}dr \approx -2G\dfrac{M}{r^3}\Delta r$ $= -2G\dfrac{M}{r^3}$, donde M y r son la masa y el radio de la Tierra, respectivamente.

2.2.4

1. $\Delta f = f[3 + 0.001] - f[3] = 0.000681243$
2. $df = 0.00068181$
3. El error es -5.66×10^{-7}.

Autoevaluación 2.3

Resuelve los siguientes cuestionamientos:

2.3.1 Encuentra el diferencial df de la función en términos de x: $f(u) = u/v + e^{(u+v)}$, si se sabe que $u(x) = 3\tan x$ y $v(x) = 2x^2 - x + 1$.

2.3.2 Calcula una aproximación lineal alrededor del punto $x = 2$, para la función $f(x) = 2xe^{2x+1}$.

2.3.3 Un cono circular recto tiene radio en su base de 5 cm y altura de 12 cm. ¿Cuánto crece aproximadamente su volumen si su generatriz crece 1 por ciento?

Solución a la autoevaluación 2.3

2.3.1

$$df = \frac{vdu - udv}{v^2} + e^{u+v}(du + dv)$$

$$du = 3\sec^2 x dx; \; dv = (4x-1)dx$$

$$df = [\frac{(2x^2 - x + 1)(3\sec^2 x) - 3\tan x(4x-1)}{(2x^2 - x + 1)^2}$$

$$+e^{3\tan x + 2x^2 - x + 1}(3\sec^2 x + 4x - 1)]dx$$

2.3.2 Como $f'(x) = 2(2x+1)e^{2x+1}$:

$$f(x) \approx -2\,374.61 + 1\,484.13x$$

2.3.3 Tomando r como el radio, h como la altura y g la generatriz, se tiene, de acuerdo con la figura 2.13:

$$V = \frac{h\pi r^2}{3} \text{ con } r = \sqrt{g^2 - h^2} \text{ de donde:}$$

$$dV = \frac{2}{3} h \, \pi \, r dr + \frac{1}{3} \pi \, r^2 dh$$

$$dg = \frac{hdh}{\sqrt{h^2 + r^2}} + \frac{rdr}{\sqrt{h^2 + r^2}}$$

O bien:

$$gdg = hdh + rdr$$

Con $dg = g0.01 = \sqrt{144 + 25}(0.01)$, si únicamente varía el radio $dh = 0$, luego $dV = 42.47$; al contrario, si únicamente varía la altura $dr = 0$ y se tiene $dV = 3.687$. Entonces, la variación del radio es más crítica y la variación del volumen se da en el intervalo $3.687 < dV < 42.74$, en caso de que varíen ambos de manera simultánea se logra un máximo $0.01g$, tal como se indica.

Autoevaluación 2.4

Resuelve los siguientes cuestionamientos:

2.4.1 La empresa Fluid, S.A., presenta su ecuación de precios de venta (en pesos) $F(x) = 3.21xP(x) + 17.21Q(x) - 3.4P(x)/Q(x)$ con base en los precios unitarios de dos de sus proveedores a quienes les compra la misma cantidad x en kilogramos (kg). Si los precios unitarios de los proveedores son respectivamente $P(x) = 3x - 4/x$, $x > 100$ y $Q(x) = \sqrt{x} + 1223/x^2$ (en pesos) y Fluid, S.A., comprará

AUTOEVALUACIÓN 2.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

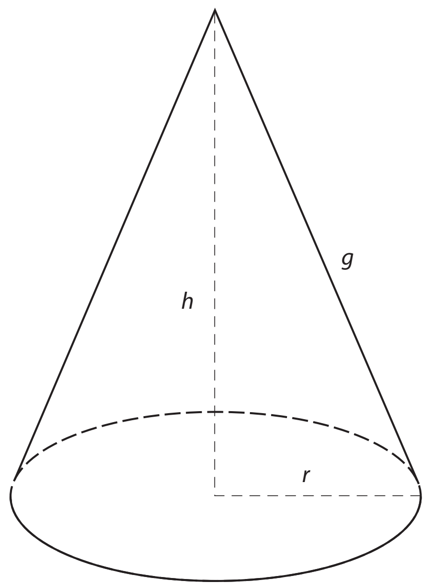


FIGURA 2.13 Dimensiones del cono del ejercicio 2.1.4.

AUTOEVALUACIÓN 2.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

500 artículos para satisfacer un pedido por la misma cantidad. Encuentra para Fluid, S. A., cuánto variará su precio de venta si su pedido aumentara o disminuyera pequeñas cantidades alrededor de las 500 unidades solicitadas.

2.4.2 Calcula una aproximación lineal alrededor del punto dado $x = \pi - 1.72$, para la función $f(x) = x + \tan(x+1)$.

2.4.3 Una lata de aluminio cilíndrica para líquidos mide 3.18 cm de radio y 15.8 cm de alto, mientras el espesor de la lámina con que está hecha es de 0.64 milímetros (mm). Si en forma simultánea se provocara un error máximo en radio, altura y espesor del $k\%$ de incremento en cada magnitud:

1. ¿Cuánto varía en porcentaje el peso de la lata?
2. ¿Cuánto varía en porcentaje la cantidad de lámina empleada para construir la lata?
3. ¿Cuánto varía en porcentaje el volumen que puede contener la lata?
4. En cada caso, ¿qué magnitud al variar resulta más crítica: la altura, el radio o el espesor de la lata?
5. ¿Qué valor máximo puede tener k si ninguna de las magnitudes mencionadas en los incisos 1, 2 y 3 debe modificar su valor más de un 2 por ciento?

Solución a la autoevaluación 2.4

2.4.1 La expresión solicitada es:

$$\Delta F = [3.21(P(x) + xP'(x)) + 17.21Q'(x)$$
$$-3.4\frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{Q(x)^2}]\Delta x$$

Donde:

$P(x) = 3x - 4/x,\ x > 100$ y $P'(x) = 3 + 4/x^2,\ x > 100$

$Q(x) = \sqrt{x} + 1223/x^2$ y $Q'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{2\,446}{x^3}$

De donde la ecuación solicitada es: $\Delta F = 9\,630.12\Delta x$

2.4.2 Como $f'(x) = 1 - \sec^2(x+1)$: $f(x) \approx 1.638 - 0.7692x$

2.4.3 Tomando r como el radio, h como la altura, t como el espesor de la lámina, W el peso de la lata vacía, A el área de la lámina y V su volumen, se tiene:

1. $W = 2\pi(hr + r^2)t\gamma$

   $dW = 2\pi(hr + r^2)\gamma dt + 2\pi\, rt\gamma dh + 2\pi\,(h + 2r)t\gamma dr$

   Ahora, $dr = rk/100$, $dt = tk/100$ y $dh = hk/100$ resulta en:

   $dW = ((hr + r^2)t +\ rth + (h + 2r)tr)2\pi\gamma\, k/100$

   $dW/W = \dfrac{3(h+r)2\pi\gamma rtk/100}{2\pi\gamma r(h+r)t}100 = 3k\%$

2. $A = 2\pi\,(hr + r^2)$

$$dA = 2\pi(h + 2r)dr + 2\pi r dh = 2\pi((h + 2r)r + rh)k/100$$

$$dA/A = \frac{4\pi(h + r)rk/100}{2\pi(h + r)r}100 = 2k\%$$

3. Existen dos posibilidades, la primera por analizar es que el espesor de la lámina crezca hacia el exterior, por lo que el volumen de la lata no dependerá del espesor de la lámina, sino solo de la variación en radio y altura:

$$V = h\pi\, r^2;\ dV = 2\pi rhrdr + \pi\, r^2 dh;$$

$$dV/V = \frac{(2r + 1)\pi r^2 hk/100}{\pi r^2 h}100 = 7.36k\%$$

En caso de que el espesor de la lata afectara al volumen, se tendrá $dr = dh = -\,tk/100$, por lo que con las variaciones simultáneas se tiene:

$$dV = (2r + 1)\pi r^2 hk/100 - (2\pi rhr + \pi r^2)tk/100$$

$$dV/V = \frac{((2r + 1)h - (2h + 1)t)\pi r^2 k/100}{2\pi r^2 h}100 = 3.646k\%$$

4. La magnitud que varía más críticamente, de acuerdo con las condiciones indicadas, es el espesor de la lata en el caso 1, mientras que en los otros dos es el radio de la lata.

5. Para el peso 0.667%, para el área 1% y para el volumen, según los dos casos 0.272% y 0.549%, respectivamente; de donde se concluye que la condición más crítica es 0.272%.

CAPÍTULO 3

INTEGRAL INDEFINIDA

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si interpreta y resuelve integrales indefinidas básicas en forma gráfica y analítica de manera correcta.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando como herramienta fundamental la integración.

CALENDARIO DEL PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

FECHA	EVIDENCIA
	Aplicación 3.1.1
	Actividad 3.1.1
	Aplicación 3.1.2
	Actividad 3.1.2
	Actividad 3.1.3
	Actividad 3.1.4
	Ejercicios 3.1
	Ejercicios 3.2
	Ejercicios 3.3
	Autoevaluación 3.1
	Autoevaluación 3.2
	Autoevaluación 3.3
	Autoevaluación 3.4

FECHA	EVIDENCIA
	Autoevaluación 3.5

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

El éxito es la acumulación de los pequeños triunfos cotidianos, el fracaso es una forma de vida siempre decreciente.

3.1 Integral indefinida

❖ Las pequeñas variaciones

Con el límite y la derivada logramos observar los detalles más pequeños de las funciones, así como desentrañar los secretos de lo infinitamente pequeño y localizar sus variaciones instantáneas. Pero, ¿qué ocurre con esas pequeñas variaciones?

¿Cómo calculamos la acumulación?

El mundo está compuesto de grandes y pequeñas cosas –objetos físicos o virtuales– que nos envían una constelación de estímulos, los cuales, a veces, son imperceptibles por su ínfima magnitud; sin embargo, esas pequeñas variaciones impactan de manera permanente a los objetos y los modifican, y solo son percibidos cuando se han "acumulado de manera suficiente"... Entonces, ¿cómo calculamos esa acumulación?

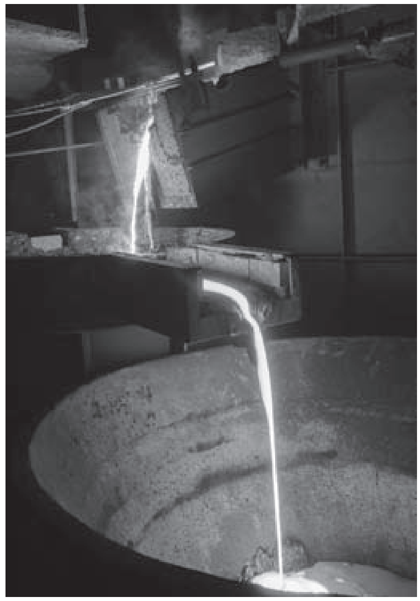


Figura 3.1 ¿Puedes sugerir qué cosas se han acumulado en los objetos de la fotografía y cómo calcular cuánto se acumuló?

1. Todos hemos experimentado el crecimiento del cabello. Describe un experimento que te permita calcular el crecimiento acumulado del cabello a lo largo del tiempo.
2. Explica cómo podrías calcular la acumulación de agua en el tinaco de tu casa.
3. Explica cómo calcular la acumulación del salario de una persona a lo largo de cinco años.
4. Explica cómo puedes calcular el área de un mapa de México dibujado en una hoja tamaño carta, como se muestra en la figura 3.2.
5. Si a principios de año, una persona tiene una cantidad $\$P$ en el banco y el interés i que le dan por su depósito cambia todos los días, explica cómo sugieres que se calcule lo que tendrá en el banco al final del año.
6. Si por la mañana dejas un vaso lleno de agua expuesto a los rayos del Sol, podrás observar que a lo largo del día el líquido se evapora. ¿Cómo sugieres que se calcule la cantidad de agua evaporada en cierto momento del día?
7. El grifo del lavabo de tu casa ha goteado durante cinco horas. Sugiere cómo puedes calcular cuánta agua se ha tirado.
8. Un costal de cal tiene un hoyo y empieza a tirar su contenido. Si durante los primeros cinco minutos se tira a razón de 5.4 g/s y después cada segundo se tira un gramo más que en el anterior, ¿cómo calculas la cal que se ha tirado en 15 minutos?

http://cuentame.inegi.org.mx/mapas/pdf/nacional/div_territorial/nacionalestados_sn.pdf

FIGURA 3.2 ¿Cómo calculas el área del mapa de México? **Fuente:** http://cuentame.inegi.org.mx/mapas/pdf/nacional/div_territorial/nacionalestados_sn.pdf

9. Una lata de refresco en la máquina llenadora de la fábrica se llena a razón de 5 ml por segundo hasta que alcanza 0.75% de su contenido. Después de ese momento, la cantidad que entra a la lata disminuye 5% cada segundo. ¿Cómo calculas el tiempo en que se llena la lata?

10. Un cepillo desbasta el espesor de una placa de acero que mide 22×44 cm^2 y 3 cm de espesor a razón de $t/100$ mm/s. ¿Cómo calculas cuánto acero se ha desbastado después de 10 segundos (s)?

Comenta tus respuestas con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

En muchos otros casos, esas variaciones se acumulan y logran los enormes cambios que observamos a nuestro alrededor. Lo importante es identificar métodos de cálculo o predicción de dicha acumulación.

Actividad 3.1.1

El proceso de exhausión

Los objetos físicos poseen cualidades dimensionales en términos del espacio que ocupan; por eso, desde la antigüedad el hombre se preocupó por medirlos. Los números reales positivos permiten tener una forma de medida para la longitud. El área se considera una medida compuesta y delimitada entre figuras geométricas ce-

APLICACIÓN 3.1.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por el análisis de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Gusto por la reflexión de propuestas heurísticas.
- Interés por proponer conjeturas en el análisis de problemass.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas de cálculo a las diez situaciones propuestas sin más información que la aportada.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los fenómenos señalados.
ii. Originalidad en las propuestas.
iii. Trazo y análisis de gráficas para reforzar sus conjeturas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Es claro que una respuesta general a los cuestionamientos es: “integrando, pero cómo lo hacemos si aún no sabemos integración”, por ello la respuesta es de tipo heurístico.
- Inducir la discusión sobre cómo resolver las diferentes situaciones de cálculo de acumulación, empleando sumas, álgebra, gráficas, etcétera.
- Discutir sobre la exactitud de cálculo propuesto.

rradas que poseen un interior, y para su medición la geometría aporta su herramental, al igual que sucede con el volumen.

Pero, ¿cómo calcular el área de figuras no perfectas, como las establecidas de manera ideal por la geometría?

En la antigüedad, esta pregunta fue planteada por los griegos, quienes comenzaron a emplear métodos exhaustivos, pensando que con estos siempre podrían aproximar el área deseada. Incluso, en ocasiones lograron calcular con exactitud el área de superficies irregulares, cubriéndolas en su totalidad con figuras geométricas, tales como cuadrados, rectángulos y, sobre todo, triángulos. Esto es lo que se llama proceso de exhausión.

La figura 3.3 muestra una forma irregular en un proceso de exhausión a base de triángulos. Calcular el área de estos triángulos es tarea fácil, ya que, como se observa, al sumarlos van aproximando el área de la figura poco a poco.

El proceso de exhausión se afina cuando se logra encontrar una propiedad común entre las figuras geométricas que forman la figura principal; por ejemplo, cuadrados del mismo tamaño, rectángulos de un ancho o un alto fijo, triángulos semejantes, etcétera.

ACTIVIDAD 3.1.1

Actividad para reflexionar y comentar con compañeros y facilitador.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación y el cálculo.

Productos

- Ensayo con las reflexiones, gráficas y respuesta a cada una de las doce situaciones propuestas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐

Realiza las siguientes actividades:

1. En una hoja de papel cuadriculado traza una forma irregular cerrada. ¿Cuál es la forma más fácil de calcular aproximadamente su área? (Puedes emplear el antifaz de la figura 3.4).
2. Observa que es posible aproximar al área de dos maneras: por exceso o por defecto. El exceso implica tomar los cuadros que contienen un pedacito de la superficie, aunque sea muy poco; mientras que por defecto solo se toman los cuadritos que están cubiertos en su totalidad por la superficie buscada. ¿Tomar el promedio entre ambos aproximará mejor al área?
3. ¿Qué dimensiones tenía el papel cuadriculado que usaste? Recuerda que hay cuadro chico (5 mm) y cuadro grande (7 mm), o más finamente papel milimétrico (1 mm). Si quisieras calcular el área con la mayor exactitud posible, ¿cuál cuadrícula emplearías y por qué?
4. ¿Reducir el tamaño de las figuras del proceso de exhausión mejora la exactitud del cálculo del área?
5. Investiga quién inventó el método de exhausión y qué resultados obtuvo. ¿Cuándo lo hizo?

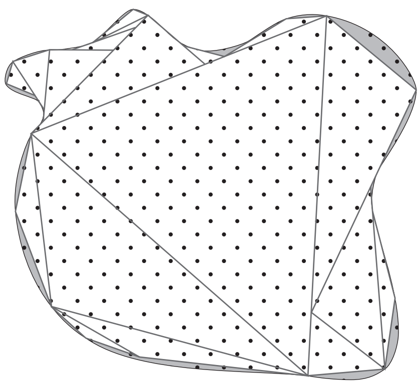


Figura 3.3 Figura irregular, aproximando su área mediante triángulos que la cubren exhaustivamente, paso a paso, con triángulos más pequeños.

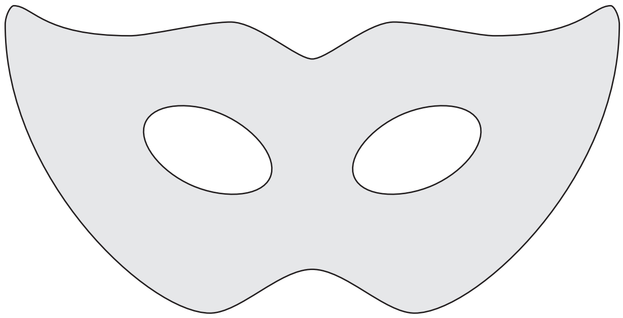


FIGURA 3.4 **Calcula el área del antifaz por exceso y por defecto.**

- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan análisis con diferentes formas y tamaños de áreas para las preguntas seis a nueve.
- ¿Qué pasa si la superficie no es plana, por ejemplo una esfera?

6. Si tienes una figura de área A y otra de área B, y las juntas sin empalmarlas, ¿cuál será el área total de la nueva figura que surge al unirlas?
7. Si tienes una figura de área A y le haces un "hoyo" de área B, ¿cuál será el área de la nueva figura?
8. Si tienes 20 figuras de área A cada una y las juntas sin empalmarlas, ¿cuál será el área total de la nueva figura que surge al unirlas?
9. Si tienes dos figuras de área A y B, respectivamente, y las juntas ¡pero una parte de ambas se empalma!, ¿qué puedes decir del área de la nueva figura?
10. ¿Cómo podrías resumir las propiedades del área descrita en las últimas cuatro preguntas?
11. ¿Crees que existan áreas negativas? Discute con tus compañeros este punto.
12. ¿Reconoces en el método de exhausión por exceso y por defecto procesos de cálculo de límites? ¿Por qué?

Comenta tus puntos de vista con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

En conclusión, el método de exhausión tiene como objetivo calcular la acumulación de pequeños elementos de área de formas complejas mediante formas geométricas simples, como triángulos, rectángulos, o de aquellas formas de área conocida o de fácil cálculo que más convengan.

Aplicación 3.1.2

¡Es el producto de dos variables!

El cálculo de áreas es un problema físico muy común que inició en la antigüedad, en el seno de la cultura griega, para el uso de la agrimensura; es decir, la medida de los terrenos. Ésta presenta muchas formas equivalentes que parten de una

FIGURA 3.5 **¿Se puede calcular la cantidad de grano en el camión como el producto de dos variables?**

figura geométrica muy simple: el rectángulo, para el cual su área se define como el producto de su base por su altura o algebraicamente $A = bh$.

✧ ¿Cambiaría en algo la expresión si en lugar de llamarle A, b y h; los llamáramos $C = pq$ o $r = st$; o cualesquier tres diferentes variables?

Del razonamiento previo se puede concluir que el área es un concepto abstracto que se identifica por el producto de dos variables; así, otros casos de áreas no geométricas son:

1. $C = np$, en donde p es el precio de un producto, n es el número de productos que deseas comprar, ¿y qué representa C?
2. $F = Pi$, en donde P es una cantidad de dinero depositada en el banco e i el interés que paga el banco cada mes. ¿Qué es F?
3. $L = nr$, donde r es la cantidad que crece por día el cabello y n el número de días que han transcurrido. ¿Qué es L?
4. $C = nv$, donde v es el valor asignado a cada pregunta en un examen y n es el número de preguntas correctas. ¿Qué es C?
5. $dy = f'(x)dx$, donde $f'(x)$ es la razón de cambio instantánea en un fenómeno y dx es el cambio infinitesimal de la variable independiente. ¿Qué es dy? ¿Qué unidades tiene cada término?
6. $V = RI$, también conocida como ley de Ohm, donde V es el voltaje, R es la resistencia e I la intensidad de la corriente. ¿Qué unidades tiene cada variable?
7. $F = ma$, también conocida como segunda ley de Newton. ¿Qué significan sus componentes?

APLICACIÓN 3.1.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Interés por la reflexión y propuesta de conjeturas para situaciones que se reducen al cálculo de un producto de dos variables.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas de diferentes casos que se reducen al cálculo de un área.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la posible abstracción de un problema a cálculo de área de un rectángulo.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo en equipo.
- Para realizarse en equipos de tres personas.
- Propiciar en la clase la graficación de las diferentes situaciones de cálculo de producto de dos variables y el análisis de significado como área.

Muchos problemas de volumen también se pueden simplificar a situaciones de cálculo de áreas. La geometría indica que el volumen de un prisma es $V = hA$ (compara esta expresión con las anteriores; **¡es el producto de dos variables!**, pero también es posible otro caso... continúa...), donde h es la altura y A el área de la base; entonces, si h es conocido y fijo, el volumen dependerá exclusivamente de A. Por ejemplo:

1. El peso de una placa de acero de 1/2″ de espesor.
2. La cantidad de aluminio que se requiere para hacer una lata.
3. La cantidad de plástico necesaria para hacer una botella de refresco de espesor de pared fijo.

Plantea al menos cinco casos de "áreas no geométricas" y tres casos de volúmenes que se pueden reducir al cálculo de áreas.

De la actividad 3.2.1 se desprende que el área de una figura geométrica de forma compleja se calcula mediante pequeñas áreas de figuras simples, como triángulos o rectángulos. En cada caso, el área de esa figura se puede calcular como el producto de dos longitudes: largo y ancho o base y altura. Pero, ¿qué significa algebraicamente este proceso?

Actividad 3.1.2

Antiderivada

Ya has analizado la derivación mediante procedimientos algebraicos y empleaste tablas de "derivadas", como los teoremas que se muestran, donde u y v son funciones de x, mientras n y c son números reales constantes diferentes de cero.

T3.1 $c' = 0$

T3.2 $x' = 1$

T3.3 $(cu)' = cu'$

T3.4 $\left(u \pm v\right)' = vu' \pm uv'$

T3.5 $(uv)' = vu' + uv'$

T3.6 $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{vu' - uv'}{v^2}$

T3.7 $(u^n)' = nu^{n-1}u'$

T3.8 $|u|' = \dfrac{u}{|u|}u'$

T3.9 $(e^u)' = e^u u'$

T3.10 $(ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

T3.11 $(\operatorname{sen} u)' = \cos u u'$

T3.12 $(\cos u)' = -\operatorname{sen} u u'$

T3.13 $(\tan u)' = \sec^2 u u'$

T3.14 $(\operatorname{ctg} u)' = -\csc^2 u u'$

T3.15 $(\sec u)' = \sec u \tan u u'$

T3.16 $(\csc u)' = -\csc u \cot u u'$

T3.17 $(\operatorname{sen}^{-1} u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$

ACTIVIDAD 3.1.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por la lectura técnica.
- Manifestación de interés por los desarrollos algebraicos.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y los desarrollos algebraicos que permiten la conversión y el análisis de las expresiones de derivación para escribirlas como antiderivadas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que localicen tablas de integración de otras fuentes y comparen la nomenclatura y los resultados.
- Explicar con claridad a los estudiantes que si no se coloca la constante de integración, la resolución de una integral indefinida está incompleta.

T3.18 $(\cos^{-1} u)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

T3.19 $(\tan^{-1} u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$

T3.20 $(\text{ctg}^{-1} u)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

T3.21 $(\sec^{-1} u)' = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

T3.22 $(\csc^{-1} u)' = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}$

Así, por ejemplo, para la expresión $f(x)=5x^2$, al derivar aplicaste los teoremas T3.1 y T3.7 para obtener $f'(x)=10x$, obviamente, por la propia notación, llamamos a $10x$ la derivada de $5x^2$ y, a la inversa, llamamos a $5x^2$ **la antiderivada de** $10x$. De esta forma, una tabla de derivadas también se puede entender como una tabla de antiderivadas. Por ejemplo, en el teorema T3.12 se expresa: $-\text{sen}\, uu'$ como la derivada de $\cos u$, por lo que de nuevo, a la inversa, $\cos u$ será la antiderivada de $-\text{sen}\, uu'$.

Pero, tenemos una dificultad debido al teorema T.3.1, ya que éste señala $c'=0$, de donde $5x^2+3$, o en general, para $5x^2+c$ se obtiene la misma $10x$; ahora, ¿cuál es entonces la antiderivada de $10x$? ¡La respuesta es que tiene muchas antiderivadas!, mismas que se pueden resumir como una familia, ya que únicamente difieren en la constante c que las acompaña y su forma general $5x^2+c$.

La antiderivada es tan importante que se utiliza una notación especial para ella. Observa la forma general de las expresiones en la tabla. Se puede expresar así:

$$\frac{d}{dx} f(x) = f'(x) \quad \Rightarrow \quad d(f(x)) = f'(x)dx$$

Ésta es una relación entre diferenciales, de donde para recuperar la antiderivada solamente nos falta decir cómo convertir el diferencial df en la función original. Eso lo definiremos así:

$$\int d(f(x)) = \int f'(x)\,dx = f(x) + c$$

Es decir, para indicar la obtención de la antiderivada se emplea el símbolo:

$$\int (\ldots)\,dx$$

Al que también llamamos **integral indefinida respecto de x**. Observa que es un símbolo que tiene dos componentes que no se pueden separar y *antiderivan lo que está entre ellos*, que llamamos integrando de la integral:

$$\int d(f(x)) = f(x) + c$$

Esta expresión indica que para poder obtener la antiderivada, la integral requiere que exista el diferencial de una función completo a la derecha del símbolo de la integral; por ello, si a los teoremas T3.1 a T3.22 les agregamos el símbolo de integral a ambos lados, observamos que representan diferenciales completos y resulta clara la obtención de la función original previa a la derivación, más la constante que identifica a la familia, resultado de la desaparición de las constantes al derivar según el T3.1. De hecho, la única forma de obtener antiderivadas es llegar a esta forma final de diferenciales completos.

Por ejemplo, retomando la expresión del teorema T3.18, con base en la expresión del lado derecho, que surge de aplicar la derivada, la escribimos así:

$$\int \frac{-u'}{\sqrt{1-u^2}}dx = \cos^{-1}(u) + c$$

Donde, de manera general, a c la llamamos **constante de integración**. De esta expresión se puede extraer que la siguiente igualdad es verdadera:

$$\int \frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}dx = \cos^{-1}(x^3) + c$$

Ya que si se hace $u = x^3$, se consigue que $u^2 = x^6$ y además $u' = 3x^2$. ¿Estás de acuerdo?

También se puede expresar como:

$$\int d\left(\frac{-3x^2}{\sqrt{1-x^6}}\right) = \cos^{-1}(x^3) + c$$

Donde se muestra con claridad que al integrarse el diferencial, nos regresa la familia de la función original.

Por eso, para encontrar **antiderivadas** o **integrales indefinidas** se debe buscar qué estructura de los teoremas T3.1 a T3.22 se cumple y confirmar que tenga todos los elementos que pide la expresión, tratando de recuperar aquellos que se pudieron haber eliminado mediante *simplificaciones algebraicas*.

1. Escribe las expresiones T3.7 a T3.22 como antiderivadas.
2. Muchos textos presentan "tablas de fórmulas de integración"; compáralas con tus resultados del cuestionamiento previo. ¿Hay diferencias? ¿No encontraste alguna? ¿Existen muchas más en las tablas? ¿Por qué crees que ocurre lo que has detectado?
3. En particular, la expresión del teorema T3.7 suele mostrarse diferente. Analiza con mucho cuidado y explica si existe una equivalencia entre ambas tablas.

4. Aplica tus conclusiones de la pregunta previa para resolver:

$$\int \frac{dx}{4x^2}$$

Recuerda que siempre existe una forma muy simple de verificar si has resuelto de manera correcta una antiderivada: *simplemente derívala.* ¿Y qué vas a encontrar como resultado?... No olvides esto, ya que siempre te será de gran utilidad.

Comenta tus conclusiones con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

La antiderivada es el proceso inverso de la derivada y tiene que ver con el cálculo de áreas. Estudiaremos ahora ese significado.

Actividad 3.1.3

El área bajo la curva

Partir del método de exhausión es posible empleando rectángulos para aproximar cualquier área. Llamamos área bajo la curva en un intervalo $f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$ a la superficie limitada por la curva, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

1. Traza una curva cualquiera (por arriba del eje x) y dos rectas verticales identificadas como a y b (véase figura 3.6).
2. Traza tantas rectas verticales como quieras entre $x = a$ y $x = b$. Entre cada dos rectas se ha limitado una pequeña superficie que está cerrada por abajo con el eje x y arriba por la función. Traza una recta horizontal aproximadamente en el mínimo del pequeño segmento de la curva, entre cada dos rectas; habrás formado una serie de rectángulos parecidos a la figura 3.6.
3. ¿La suma del área de los rectángulos trazados en la figura 3.6 es una aproximación al área bajo la curva? ¿La aproximación se hace por exceso o por defecto?
4. ¿Cómo puedes mejorar la exactitud de la aproximación al área bajo la curva?
5. Traza de nuevo la figura, pero ahora dibuja la recta horizontal superior aproximadamente en el máximo del pequeño segmento de curva. Habrás obtenido una figura similar a la 3.7.
6. ¿La suma del área de los rectángulos trazados en la figura 3.7 es una aproximación al área bajo la curva? ¿Esa aproximación se hace por exceso o por defecto?
7. ¿Se podrá decir que el área bajo la curva es mayor que la limitada por los rectángulos de la figura 3.6, pero menor que los de la figura 3.7? ¿Por qué?
8. ¿Se puede mejorar la exactitud de la aproximación al área bajo la curva mediante la forma empleada en la figura 3.7? ¿Es la misma propuesta que hiciste en el cuestionamiento 4? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 3.1.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por la lectura técnica.
- Manifestación de interés por el análisis de los desarrollos algebraicos y su representación gráfica.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y desarrollos algebraicos y análisis gráficos que permiten concluir los desarrollos en el límite.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase, pedir a los estudiantes que tracen diferentes gráficas con ordenadas positivas.
- Por ahora, evitar curvas con segmentos por debajo del eje *x*.

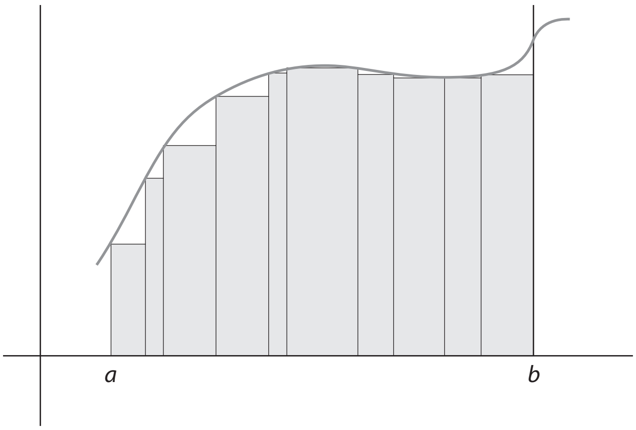


FIGURA 3.6 Curva que delimita un área entre las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x.

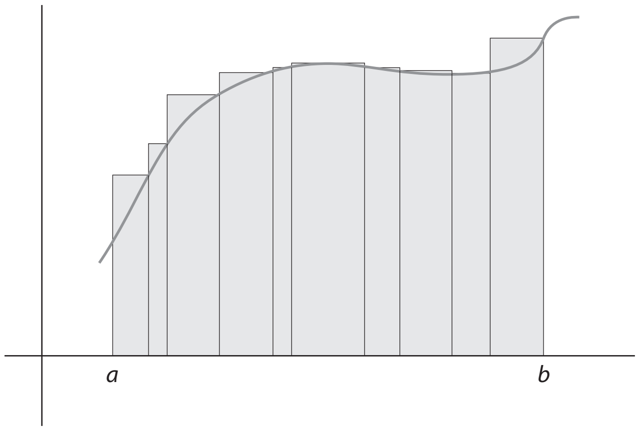


FIGURA 3.7 Curva que delimita un área entre las rectas $x = a$, $x = b$ y el eje x, trazo de rectángulos en el máximo de los intervalos.

9. Sin duda, tu respuesta al cuestionamiento 4 fue que se hagan más rectángulos, ¿cierto? Y con seguridad, diste la misma respuesta para el cuestionamiento 8. Pero, hay una segunda parte muy importante que debes considerar: **sí** se deben hacer más rectángulos, pero la *longitud de sus bases también debe hacerse cada vez más pequeña simultáneamente*. De nada serviría hacer más rectángulos con el mismo ancho. Si n es el número de rectángulos considerados y P es la dimensión de la base del rectángulo más ancho considerado: ¿qué efecto tiene sobre los dibujos que simultáneamente $n \to \infty$ y $P \to 0^+$?

10. Llama A al área exacta bajo la curva entre a y b, $S_i(n, P)$ (suma inferior) a la aproximación calculada mediante la figura 3.6 y $S_s(n, P)$ (suma superior) a la aproximación calculada mediante la figura 3.7. ¿Es verdadera la siguiente afirmación $S_i(n, P) \leq A \leq S_s(n, P)$? ¿Por qué se colocó la igualdad?

11. ¿Qué crees que ocurra si se calcula

$$\lim_{P\to 0^+, n\to\infty} \left[S_i(n, P) \leq A \leq S_s(n, P)\right]? \text{ ¿Qué significa esto?}$$

12. El proceso indicado en el cuestionamiento 11 tiene un final feliz y se denomina **integral definida** entre a y b, y se afirma que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{P\to 0^+, n\to\infty} S_i(n, P) = A = \lim_{P\to 0^+, n\to\infty} S_s(n, P)$$

¿Qué significa esta igualdad? ¿A qué se le llama con exactitud integral definida?

Discute las situaciones planteadas con tus compañeros y con tu facilitador.

Actividad 3.1.4

El método de Euler

La integral definida cuyo concepto se estructuró alrededor de las sumas superior e inferior de Riemman tiene aplicaciones inmediatas, como se muestra en la actividad 3.1.3, a pesar de que no se calculen los límites:

1. Si tienes tabulados solamente datos experimentales de un proceso o fenómeno y surge la necesidad de calcular la integral, ¿cómo aproximas dicha integral? En este caso no es necesario conocer la gráfica, ¡ya tienes los rectángulos en la propia tabla! ¿Cómo calculas entonces la suma superior y la suma inferior? ¿Será una buena aproximación el promedio de estas sumas?
2. Con los valores tabulados del comportamiento de la variación y los intervalos en que se mantiene esa variación, se tiene:

$$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x$$

   ¿Qué estás haciendo al aplicar sucesivamente esta expresión? Esta aplicación se denomina método de Euler y permite encontrar una antiderivada numéricamente a partir del comportamiento de la derivada y un punto de inicio. Investiga este método.
3. Observa que con el método de Euler estás recuperando f a partir de f'. Traza este método gráficamente para, al menos, tres ejemplos.

Comparte tus conclusiones y hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, hazlo con tu facilitador.

ACTIVIDAD 3.1.4

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las técnicas numéricas.
- Gusto por la investigación.
- Manifestación de interés por el análisis de los desarrollos algebraicos y su representación gráfica.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y desarrollos de integrales a partir de tablas y del método de Euler.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo a realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase explicar el trazo y la tabla resultante del método de Euler.
- Realiza presentaciones en el aula mediante Winplot®.

3.2 ANTIDERIVADA E INTEGRAL INDEFINIDA

Hasta ahora, con los conocimientos acerca de la derivada se ha podido observar lo que ocurre con las pequeñas variaciones y la sensibilidad a esos cambios. Sin embargo, como ya hemos visto, en muchos fenómenos esas pequeñas variaciones se acumulan. ¿Es posible calcular dicha acumulación? El objetivo de esta sección es darte elementos para realizar ese cómputo.

❖ Antiderivadas

Definición: Una función $F(x)$ es la antiderivada de $f(x)$ si $F'(x) = f(x)$ para todas las x en el dominio de f. El conjunto de todas las antiderivadas de $f(x)$ se designa como la integral indefinida de f respecto de x y se escribe:

$$\int f(x)\,dx$$

El símbolo empleado originalmente fue una S alargada, la cual indica que se refiere a una *suma* y se denomina **signo de integral**. La función $f(x)$ es el integrando de la integral y x es la variable de integración. En realidad, los símbolos $\int$ y dx dentro de $\int(...)dx$ son uno solo e identifican la acción latente de integrar. Cuando la integral se resuelve, ambos símbolos desaparecen, dando paso a la integral indefinida (y resulta) $F(x)+c$. La naturaleza de c, que diferencia a cada una de las antiderivadas o primitivas de $f(x)$, se denomina constante de integración y proviene del teorema T3.1 $(c)'=0$ y $(F(x)+c)'=F'(x)$. De esta manera, la resolución de la integral indefinida arroja:

$$\int f(x)\,dx = F(x)+c$$

Como $F(x)+c$ identifica una familia de curvas paralelas, la localización del valor adecuado de c en una situación particular dependerá de la ubicación de un punto conocido de la curva. A esto se le suele llamar *condiciones iniciales* y dado el punto (x_0, y_0) se podrá *calcular c* simplemente a partir de $y_0 = F(x_0)+c$.

Con estos elementos, los teoremas de derivadas adquieren una visión diferente y permiten enunciar los siguientes teoremas:

T3.23 $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}+c, n\neq -1$, n racional

T3.24 $\int dx = x+c$, caso con $n=0$ del T.3.23

T3.25 $\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$

T3.26 $\int\left[f(x)+g(x)\right]dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

T3.27 $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}+c; n\neq -1$, n racional

T3.28 $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c$

T3.29 $\int e^u\,du = e^u + c$

T3.30 $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + c$

T3.31 $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + c$

T3.32 $\int \sec^2 u\,du = \tan u + c$

T3.33 $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + c$

T3.34 $\int \csc^2 u\,du = -\operatorname{ctg} u + c$

T3.35 $\int \csc u \operatorname{ctg} u\,du = -\csc u + c$

T3.36 $\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \operatorname{sen}^{-1} u + c$

T3.37 $\int -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \cos^{-1} u + c$

T3.38 $\int \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u + c$

T3.39 $\int -\frac{du}{1+u^2} = \operatorname{ctg}^{-1} u + c$

T3.40 $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \sec^{-1} u + c$

T3.41 $\int -\frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \csc^{-1} u + c$

❖ Integración por sustitución

De la derivada de la composición de $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$, mejor conocida como regla de la cadena, se desprende la técnica de integración denominada integración por sustitución, la cual implica:

T3.42 Integración, sustitución o cambio de variable:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Donde se indica cómo emplear los teoremas T3.23 a T3.42, de modo que el proceso general para resolver una antiderivada consiste en los siguientes pasos:

Procedimiento 3.1

1. De acuerdo con la expresión del T3.42, revisa la estructura de la integral para localizar la que más se le parezca (cuál teorema elegir), donde el operador central es el que te invita a esa elección.
2. Separa la expresión en dos partes, una satisface la estructura del teorema y corresponderá a $f'(u)$, donde has agrupado todos los términos o factores que permitan "comprimir" la expresión para que coincida con la estructura. La otra parte corresponde a du, que debe ser equivalente a derivar lo que has elegido como u.
3. En la elección de u y localización de du, quizá te falte alguna constante como factor. Si es así, la multiplicas por $1 = k / k$, donde k es el factor y así aplicas el teorema T3.42. Esto es equivalente a derivar lo que supones es u, de modo que te resulte alguna expresión como: $du = k(...)dx$.

4. Por último, aplica la estructura del teorema para encontrar la solución y si hiciste alguna sustitución en la expresión, deberás regresar a la variable original.

Revisa el siguiente ejemplo en el que se aplica el procedimiento 3.1.

Resuelve la antiderivada:

$$\int \frac{3x}{5x^2+4}dx$$

1. Por estructura, un cociente puede provenir de los teorema T3.27, T3.28 o T3.38, mejor conocidos como de potencias, del logaritmo o de la tangente inversa.
2. Separamos la expresión en dos partes, para revisar la estructura y comparar con los teoremas. En general, se descarta el T3.27, porque al agrupar toda la expresión del denominador $5x^2 + 4$ como u, tendrá exponente $n = -1$, ya que está en el denominador y el T3.27 afirma que no se aplica en ese caso. Si suponemos ahora que se trata de un logaritmo, la estructura señala que en el denominador debe estar el diferencial completo de u. Por tanto, la separación de la expresión será:

$$\int\left(\frac{1}{5x^2+4}\right)(3xdx) = 3\int\left(\frac{1}{5x^2+4}\right)(xdx)$$

3. Con esa separación $du = (5x^2+4)'dx$ que difiere de $x\,dx$ en una constante, por lo que $du = 10x\,dx = kx\,dx$, de donde se observa que $k = 10$, $x\,dx = du/10$.
4. Por último, al aplicar el T3.28 resulta:

$$\int \frac{3x}{5x^2+4}dx = \frac{3}{10}\int\frac{(10x\,dx)}{5x^2+4} = \frac{3}{10}\ln(5x^2+4)+c$$

Donde se observa que $3/10$ fue extraído de la integral, por ser una constante que multiplica al resto de la expresión, de acuerdo con el teorema T3.25. De manera práctica, cuando falta una constante, se procede a multiplicar por $1 = k/k$, aplicar k dentro de du y factorizar $1/k$.

❖ El campo de pendientes

En la actividad 3.1.4 se te pidió investigar el método de Euler, el cual indica que a partir de un punto dado se traza una curva integral o problema de valor inicial, según se muestra para dos puntos sucesivos en la figura 3.8.

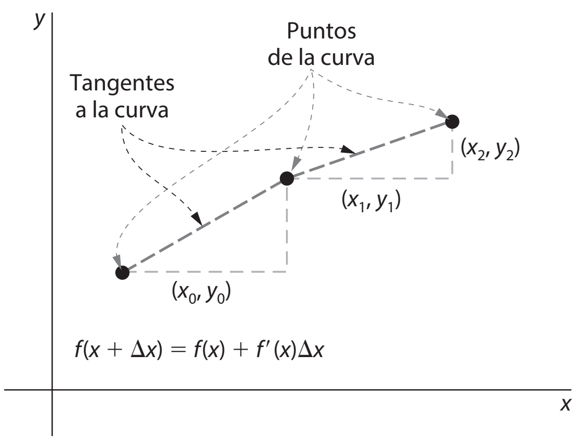


FIGURA 3.8 Tres puntos del método de Euler, en los cuales se traza la curva integral.

En general, si se tiene el problema $dy = f'(x)dx$, que puede ser evaluado en cualquier punto (x, y) del plano, sobre el cual $f'(x)$ exista, se tendrá el valor de la pendiente de la recta tangente en cada punto evaluado. Ahora bien, si en cada punto evaluado trazamos una pequeña recta con dicha inclinación, habremos generado el "campo de pendientes", para $dy = f'(x)dx$. Por ejemplo, en la figura 3.9 se muestra el campo de pendientes para $y' = \dfrac{(x-y)}{xy}$ trazado en Winplot®.

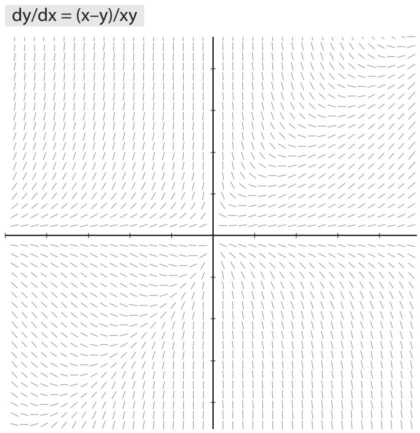


FIGURA 3.9 Campo de pendientes para $y' = \dfrac{(x-y)}{xy}$.

El campo de pendientes se trazó en Winplot®, en el menú Ecua>Ecua dif>dy/dx y en el cuadro de diálogo se colocaron los datos mostrados en la figura 3.10.

Como se señaló en la figura 3.9, para encontrar la curva integral se hace una curva suave que toque tangencialmente a las pequeñas rectas del campo de pendientes. Este trazo también se puede realizar con Winplot®, selecciona el menú Una>dy/dx y obtendrás el cuadro de diálogo de la figura 3.11. Con ese cuadro de diálogo abierto, da clic con el botón izquierdo del mouse (normalmente configurado de manera previa en el menú Btns) sobre el campo de pendientes en el punto deseado y en automático se trazará la curva integral mediante el método seleccionado (Euler en este caso). De igual manera, traza tantas curvas (pvi problemas de valor inicial) como necesites. Revisa y experimenta con los datos que se pueden modificar en el menú.

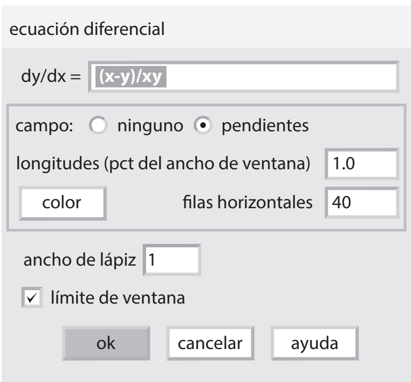


FIGURA 3.10 Cuadro de diálogo ecuación diferencial en Winplot®.

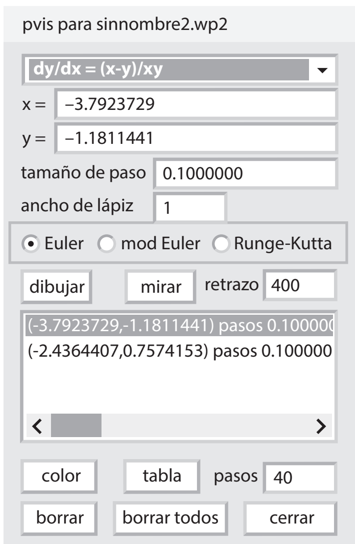


FIGURA 3.11 Menú en Winplot® para problemas de valor inicial.

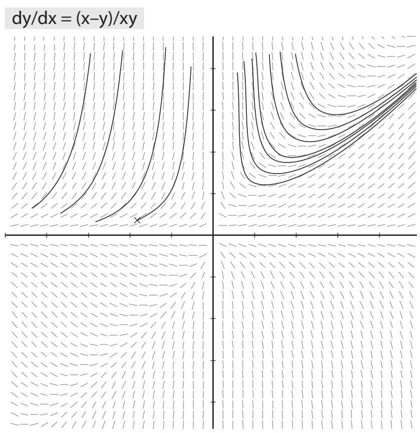


FIGURA 3.12 Trazo de curvas integrales en Winplot®.

Ejercicios 3.1

Encuentra la antiderivada de:

3.1.1 $f(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)^2$

Resolución

Al desarrollar la potencia y el cociente, se aplica el teorema T3.26, para separar la suma; después, se aplica el teorema T3.25, para extraer las constantes de las integrales y, finalmente, se aplica el teorema de potencias de x, T3.23 y se obtiene:

$$\begin{aligned}\int\left(\frac{1-x}{x}\right)^2 dx &= \int\frac{1-2x+x^2}{x^2}dx\\ &= \int\frac{1}{x^2}dx - 2\int\frac{dx}{x} + \int dx = \int x^{-2}\,dx - 2\int\frac{dx}{x} + \int dx\\ &= \frac{x^{-1}}{-1} - 2\ln x + x + c = -\frac{1}{x} - 2\ln x + x + c\end{aligned}$$

3.1.2 $f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

Resolución

Al aplicar en forma directa el teorema T3.25, para extraer la constante de la integral, y después el teorema T3.23, se concluye:

$$\int\frac{dx}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = x^{\frac{1}{2}} + c$$

3.1.3 Resuelve la integral $\displaystyle\int\frac{(2-x)^2}{3x\sqrt{x}}dx$.

Resolución

Realizada el álgebra, se reescribe como una suma de integrales por el T3.26 y se aplican en los tres casos los teoremas T3.25 y las potencias en T3.23, lo que resulta:

$$\begin{aligned}\int\frac{(2-x)^2}{3x\sqrt{x}}dx &= \frac{1}{3}\int\frac{4-4x+x^2}{x^{\frac{3}{2}}}dx\\ &= \frac{1}{3}\left(4\int x^{-\frac{3}{2}}dx - 4\int x^{-\frac{1}{2}}dx + \int x^{\frac{1}{2}}dx\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(4\frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} - 4\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right) + c\\ &= \frac{1}{3}\left(-8\frac{1}{\sqrt{x}} + 8\sqrt{x} + \frac{2}{3}\sqrt[3]{x^2}\right) + c\end{aligned}$$

3.1.4 $\displaystyle\int\sqrt{5x-1}\,dx$

Resolución

Se elige $u = 5x - 1$, $du = 5x\,dx$ y se aplica el teorema T3.27, de modo que resulta:

$$\int \sqrt{5x-1}\,dx = \frac{1}{5}\int (5x-1)^{\frac{1}{2}}(5\,dx) = \frac{1}{5}\frac{(5x-1)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c$$

$$= \frac{2}{15}(5x-1)^{\frac{3}{2}} + c$$

3.1.5 $\int 2x\,\text{sen}(3x^2+1)dx$

Resolución

$$\int 2x\,\text{sen}(3x^2+1)dx$$

Sea $u = 3x^2 + 1$, luego $du/dx = 6x$, de donde $dx = du/6x$; luego, se sustituye en la integral y se aplica el teorema T3.31, por lo que resulta:

$$\int 2x\,\text{sen}(3x^2+1)dx = 2\int x\,\text{sen}\,u\left(\frac{du}{6x}\right) = \frac{1}{3}\int \text{sen}\,u\,du = \frac{1}{3}\cos u + c$$

$$= -\frac{1}{3}\cos(3x^2+1) + c$$

3.1.6 $\int \frac{\text{sen}\,x}{1-3\cos x}dx$

Resolución

Sea $u = 1 - 3\cos x$; luego $du/dx = 3\,\text{sen}\,x$ donde, $dx = du/3\,\text{sen}\,x$. Al sustituir, resulta:

$$\int \frac{\text{sen}\,x}{1-3\cos x}dx = \int \frac{\text{sen}\,x}{u}\frac{du}{3\,\text{sen}\,x} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{u}$$

$$= \frac{1}{3}\ln u + c = \frac{1}{3}\ln(1-3\cos x) + c$$

3.1.7 $\int 7x^2\sec^2(4x^3-9)dx$

Resolución

Sea $u = 4x^3 - 9$, luego $du/dx = 12x^2$, donde $dx = du/12x^2$. Al sustituir resulta:

$$\int 7x^2\sec^2(4x^3-9)dx = 7\int x^2\sec^2 u\frac{du}{12x^2} = \frac{7}{12}\int \sec^2 u\,du =$$

$$= \frac{7}{12}\tan u + c = \frac{7}{12}\tan(4x^3-9) + c$$

Observa que se aplicó el teorema T.3.32.

3.1.8 Emplea el método de Euler para encontrar una aproximación de $f(3)$ para $f'(x) = \frac{2x+1}{\sec 2x}$; si se sabe que $f(0) = 4$. Usa $\Delta x = 0.2$.

Resolución

TABLA 3.1 Cálculo de la curva integral $x = 3$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x + \Delta x)$
0	4	1	4.2
0.2	4.2	1.289485392	4.457897078
0.4	4.457897078	1.254072077	4.708711494
0.6	4.708711494	0.79718706	4.868148906
0.8	4.868148906	−0.075918758	4.852965154
1	4.852965154	−1.24844051	4.603277052
1.2	4.603277052	−2.507138633	4.101849326
1.4	4.101849326	−3.580444895	3.385760347
1.6	3.385760347	−4.192838058	2.547192735
1.8	2.547192735	−4.125088715	1.722174992
2	1.722174992	−3.268218104	1.068531371
2.2	1.068531371	−1.659597498	0.736611872
2.4	0.736611872	0.507494104	0.838110692
2.6	0.838110692	2.904803362	1.419071365
2.8	1.419071365	5.118734798	2.442818324
3	2.442818324		

Empleando el método de Euler, en la primera columna de la tabla 3.1 se muestran los valores de x, a partir de $x = 0$, y se concluye en $x = 3$ con $\Delta x = 0.2$. En la segunda columna se calcula el valor de $f(x)$, que es una copia del valor previo de la cuarta columna calculada según la expresión $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$, y la tercera columna corresponde al valor de la derivada en la x de la misma fila. Por último, el valor solicitado es $f(3) = 2.442818$, en donde la exactitud mejora si $\Delta x \ll 0.2$ (véase figura 3.13)

3.1.9 Traza el campo de pendientes para la derivada $f'(x) = \dfrac{3x^2}{\sqrt{5x^2 + 7}}$ y la curva integral para $f(1) = 2$.

Resolución

Empleando Winplot® y la información dada, resulta la figura 3.14, donde se muestra el campo de pendientes y el pvi para $f(1) = 2$.

Se debe aclarar que Winplot® no puede dibujar "hacia atrás", así que se trazó la pvi solicitada pero solo se graficó para $x \geq 1$; después, se trazaron aproximadamente otras pvi, a partir del ter-

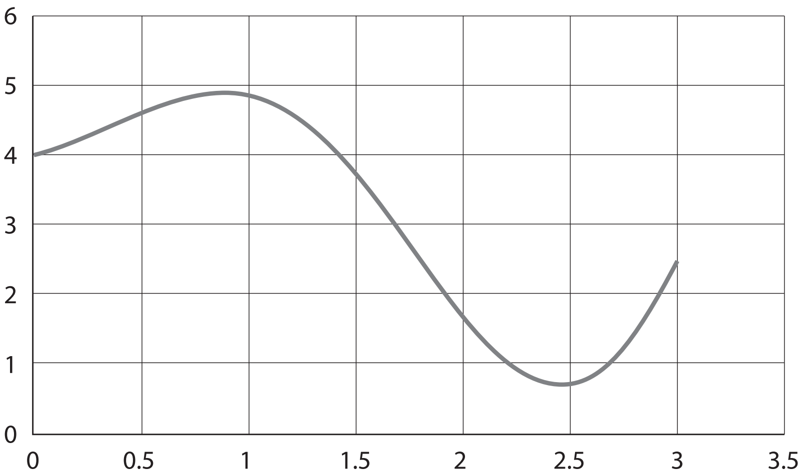


FIGURA 3.13 Gráfica de la curva integral del ejercicio 3.19 correspondiente a las dos primeras columnas de la tabla 3.1.

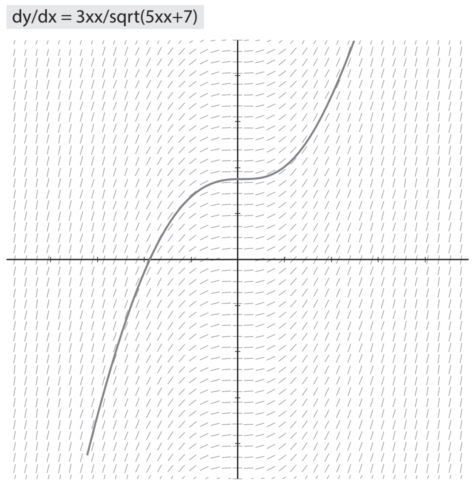


FIGURA 3.14 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.1.9.

cer cuadrante, hasta que coincidió con la trazada, que iniciaba en $f(1)=2$ (véase figura 3.14).

Ejercicios 3.2

3.2.1 Encuentra la antiderivada $f(x)=\dfrac{4x}{1+x^4}$.

Resolución

Como es un cociente y el numerador no corresponde a la derivada del denominador, no son aplicables potencias ni logaritmos (teoremas T3.27, T3.28). De los teoremas restantes, solo hay cocientes sin radicales en los teoremas T3.38 y T3.39. Por el signo, probemos T3.38 $u=x^2$, $du=2x\,dx$.

$$\int \frac{2x}{1+x^4}dx = \int \frac{(2x\,dx)}{1+(x^2)^2} = \tan^{-1} x^2 + c$$

3.2.2 Encuentra la antiderivada de:

$$f(x)=\frac{7x}{(4x-1)\sqrt{(4x-1)^2-1}}$$

Resolución

Al analizar $\displaystyle\int \frac{7x}{(4x-1)\sqrt{(4x-1)^2-1}}dx$ se observa la presencia de la expresión $(4x-1)$, que al derivar nos resulta $(4x-1)'=4$, por lo que podemos rescribir:

$$\int \frac{7x}{(4x-1)\sqrt{(4x-1)^2-1}}dx = \frac{7}{4}\int \frac{1}{(4x-1)\sqrt{(4x-1)^2-1}}(4\,dx)$$

que es un cociente con $u\sqrt{u^2-1}$ en el denominador. Si observamos los teoremas, corresponde exactamente con T3.40, por lo que resulta:

$$\frac{7}{4}\int \frac{1}{(4x-1)\sqrt{(4x-1)^2-1}}(4\,dx) = \frac{7}{4}\sec^{-1}(4x-1)+c$$

3.2.3 $\int \frac{3}{4}\sec(\ln x+2)\tan(\ln x+2)\frac{dx}{x}$

Resolución

La presencia repetida de $u=\ln x+2$, $du=\frac{dx}{x}$ y la estructura definida por la tangente y la secante invita directamente a aplicar el teorema T3.33:

$$\frac{3}{4}\int \sec(\ln x+2)\tan(\ln x+2)\frac{dx}{x} = \frac{3}{4}\sec(\ln x+2)+c$$

3.2.4 Resuelve $\int \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{1-8x}}dx$

Resolución

La expresión implica un radical en el denominador que puede provenir de una forma u^n o de funciones trigonométricas inversas, pero no tiene argumento en x^2; sin embargo, la presencia de $\frac{1}{\sqrt{x}}=x^{-\frac{1}{2}}$ hace recordar que $\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$, además $\left(\sqrt{x}\right)^2=x$, por lo que se toma $u^2=8x \therefore u=\sqrt{8x}=2\sqrt{2}\sqrt{x}$, y derivando $du=\frac{2\sqrt{2}}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx$, se sustituye en la expresión original:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int \frac{(\sqrt{2}x^{-\frac{1}{2}}dx)}{\sqrt{1-\left(\sqrt{8x}\right)^2}}dx = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{8x}+c$$

3.2.5 $\int (9x^3e^{2x^4-3}+1)dx$

Resolución

Primero, separamos de acuerdo con la suma y aplicamos el teorema T3.26.

$$\int (9x^3e^{2x^4-3}+1)dx = 9\int x^3e^{2x^4-3}\,dx+\int dx$$

Para la primera integral con el exponencial, tomemos $u=2x^4-3$; luego, $du/dx=8x^3$, donde $dx=du/8x^3$ y al sustituir en la integral resulta:

$$\frac{9}{8}\int e^{2x^4-3}(8x^3\,dx)+\int dx = \frac{9}{8}e^{2x^4-3}+x+c$$

Donde finalmente se aplicó el teorema T3.29.

3.2.6 $\int \frac{\operatorname{sen}\frac{4}{x}}{x^2}\,dx$

Resolución

Sea $u = 4/x$; luego, $du/dx = -8/x^2$, de donde $dx = -x^2 du/8$. Al sustituir y aplicar al final el teorema T3.31 resulta:

$$\int \frac{\operatorname{sen}\frac{4}{x}}{x^2}\,dx = \int \frac{1}{x^2}\operatorname{sen} u\left(-\frac{x^2\,du}{8}\right) = -\frac{1}{8}\int \operatorname{sen} u\,du$$

$$= \frac{1}{8}\cos u + c = \frac{1}{8}\cos\frac{4}{x} + c$$

3.2.7 $\int \frac{e^2+1}{x\ln x}\csc^2(\ln(\ln x))dx$

Resolución

La presencia de $\ln(\ln x)$ en el argumento de la cosecante sugiere $u = \ln(\ln x)$, luego $\frac{du}{dx} = \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \frac{1}{x\ln x}$, donde $dx = x\ln x\,du$. Al sustituir resulta:

$$\int \frac{e^2+1}{x\ln x}\csc^2(\ln(\ln x))dx = (e^2+1)\int \frac{1}{x\ln x}\csc^2 u(x\ln x\,du)$$

$$(e^2+1)\int \csc^2 u\,du = -(e^2+1)\operatorname{ctg} u + c = -(e^2+1)\operatorname{ctg}(\ln(\ln x)) + c$$

Donde se aplicó el teorema T3.34.

3.2.8 Emplea el método de Euler para encontrar una aproximación de $f\left(\frac{3}{2}\right)$ para $f'(x) = \frac{e^{1-2x}\cos x}{2-x}$; si se sabe que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\pi$.

Usa $\Delta x = 0.1$

Resolución

TABLA 3.2 Cálculo de la curva integral $x = \frac{3}{2}$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x+\Delta x)$
−0.5	−3.141592654	1.57322087	−2.984270567
−0.4	−2.984270567	1.556286047	−2.828641962
−0.3	−2.828641962	1.524092607	−2.676232701
−0.2	−2.676232701	1.47906165	−2.528326536

TABLA 3.2 Cálculo de la curva integral $x = \frac{3}{2}$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x + \Delta x)$
−0.1	−2.528326536	1.423408432	−2.385985693
0	−2.385985693	1.359140914	−2.250071602
0.1	−2.250071602	1.288060706	−2.121265531
0.2	−2.121265531	1.211765712	−2.00008896
0.3	−2.00008896	1.131653789	−1.886923581
0.4	−1.886923581	1.048926596	−1.782030921
0.5	−1.782030921	0.964592691	−1.685571652
0.6	−1.685571652	0.87946861	−1.597624791
0.7	−1.597624791	0.794176125	−1.518207179
0.8	−1.518207179	0.709132914	−1.447293887
0.9	−1.447293887	0.624532054	−1.384840682
1	−1.384840682	0.540302306	−1.330810451
1.1	−1.330810451	0.456034159	−1.285207035
1.2	−1.285207035	0.370841797	−1.248122856
1.3	−1.248122856	0.283097152	−1.219813141
1.4	−1.219813141	0.189887305	−1.20082441
1.5	−1.20082441		

Empleando el método de Euler, en la primera columna de la tabla 3.2 se muestran los valores de x, a partir de $x = -0.5$ y se concluye en $x = 3/2$ con $\Delta x = 0.1$. Por su parte, en la segunda columna se calcula el valor de $f(x)$, que es una copia del valor previo de la cuarta columna calculada según la expresión $f(x + \Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$; en tanto, la tercera columna corresponde al valor de la derivada en la x de la misma fila. Por último, el valor solicitado es $f(3/2) = -1.20082441$, donde la exactitud mejora si $\Delta x \ll 0.1$ (véase figura 3.15).

3.2.9 Traza el campo de pendientes para la derivada $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(2x-1)}{1-\ln(3x+2)}$ y la curva integral $f(0.4) = 2.5$.

Resolución

Empleando Winplot® y la información dada resulta la figura 3.16, donde se muestra el campo de pendientes y el pvi para $f(0.4) = 2.5$.

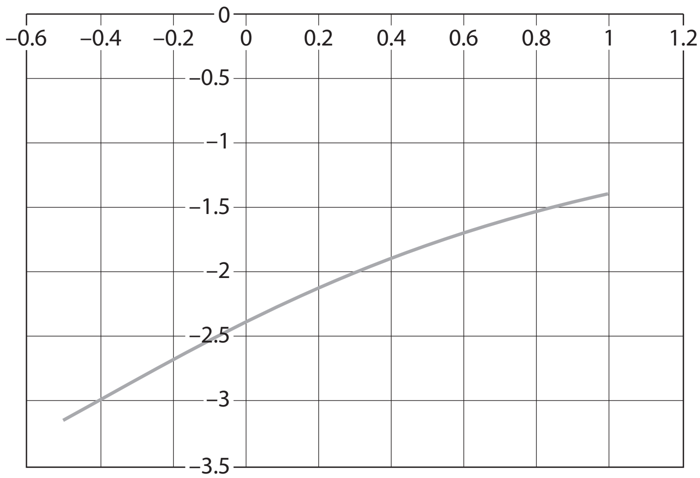


FIGURA 3.15 Gráfica de la curva integral del ejercicio 3.2.8 correspondiente a las dos primeras columnas de la tabla 3.2.

FIGURA 3.16 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.2.9.

Ejercicios 3.3

3.3.1 Encuentra la antiderivada $f(x)=\dfrac{\text{ctg } 3x}{\text{sen } 3x}$.

Resolución

Como es un cociente de funciones trigonométricas y la presencia de la ctg $3x$, sugiere una sola posibilidad: el teorema T3.35. Además, recordemos que $1/\text{sen } x = \csc x$ y que la expresión se puede escribir $u = 3x$, $du = 3\,dx$.

$$\int \frac{\text{ctg}\,3x}{\text{sen}\,3x}dx = \frac{1}{3}\int \csc 3x \,\text{ctg}\,3x\,(3\,dx) = -\frac{1}{3}\csc 3x + c$$

3.3.2 Encuentra la antiderivada de:

$$f(x) = -\frac{5}{\sqrt{e^{4x}-1}}$$

Resolución

La presencia de e^{4x}, al derivarse, resulta de nuevo en la misma expresión, por lo que la integral no está completa y no es una u^n. Otra posibilidad con radicales la representa la estructura para cosecante inversa, aunque ahora se observa la ausencia del término u fuera del radical; pero, sigamos el intento, ahora: $u = e^{2x}$, $du = 2e^{2x}\,dx \therefore dx = du/(2e^{2x})$ y así:

$$\int -\frac{5}{\sqrt{e^{4x}-1}}dx = -5\int \frac{\frac{du}{2e^{2x}}}{\sqrt{e^{4x}-1}} = -\frac{5}{2}\int \frac{du}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}}$$

$$= -\frac{5}{2}\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-1}} = \frac{5}{2}\csc^{-1} u + c = \frac{5}{2}\csc^{-1} e^{2x} + c$$

El resultado es correcto. Observa que al notar la falta del término e^{2x} se pudo haber multiplicado por $1 = e^{2x} / e^{2x}$ y resolver, ya que es exactamente lo mismo:

$$\int -\frac{5}{\sqrt{e^{4x}-1}}dx = -5\int \frac{e^{2x}\,dx}{e^{2x}\sqrt{e^{4x}-1}}$$

Recuerda, en ocasiones el álgebra al simplificar nos quita factores que nos hacen falta para resolver las integrales.

3.3.3 Resuelve la integral $\int \frac{x+1}{x+4}dx$.

Resolución

Es un cociente que en su forma original no corresponde a ninguno de los teoremas, pero en este caso al realizar la división resulta:

$$\frac{x+1}{x+4} = 1 - \frac{3}{x+4}$$

Por lo que ahora la integral se puede resolver muy fácilmente.

$$\int \frac{x+1}{x+4}dx = \int\left(1 - \frac{3}{x+4}\right)dx = \int dx - 3\int \frac{dx}{x+4} = x - 3\ln(x+4) + c$$

3.3.4 Resuelve $\int \frac{2e^{-3x}}{1+e^{-6x}}dx$

Resolución

La presencia de $u = e^{-3x}$ y de su cuadrado sugiere el teorema T3.38 de la tangente inversa, así $1 + u^2 = 1 + e^{-6x}$, $du = -3e^{-3x}$ $\therefore$

$$\int \frac{2e^{-3x}}{1+e^{-6x}}dx = -\frac{2}{3}\int \frac{-3e^{-3x}\,dx}{1+e^{-6x}} = \frac{2}{3}\operatorname{ctg}^{-1}\left(e^{-3x}\right) + c$$

Que resultó ser el teorema T3.39.

3.3.5 Resuelve $-\int \frac{2\operatorname{sen} 2x - 3\cos 3x}{\cos 2x + \operatorname{sen} 3x}dx$.

Resolución

La expresión implica un cociente de funciones trigonométricas. Ninguno de los teoremas tiene una estructura similar en funciones trigonométricas, por lo que de existir la antiderivada debe tratarse de una forma u^n o un logaritmo. Como el exponente del denominador es uno, la segunda propuesta es más factible:

$$u = \cos 2x + \operatorname{sen} 3x \;\Rightarrow\; du = (-2\operatorname{sen} 2x + 3\cos 3x)dx$$

Así:

$$-\int \frac{2\operatorname{sen} 2x - 3\cos 3x}{\cos 2x + \operatorname{sen} 3x}dx = \int \frac{-2\operatorname{sen} 2x + 3\cos 3x}{\cos 2x - \operatorname{sen} 3x}dx$$

$$= \ln(\cos 2x + \operatorname{sen} 3x) + c$$

3.3.6 $\int (3x^2 - 2x + 1)(2x^3 - 2x^2 + 2x + 7)dx$

Resolución

Puesto que es un producto de polinomios, si se resuelve el producto se tendrá una suma de monomios que son de la u^n; sin embargo, al revisar con cuidado se tiene:

$$\frac{d}{dx}(2x^3 - 2x^2 + 2x + 7) = 6x^2 - 4x + 2 = 2(3x^2 - 2x + 1)$$

O bien:

$$\frac{1}{2}\int (2x^3 - 2x^2 + 2x + 7)\,2\,(3x^2 - 2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{4}(2x^3 - 2x^2 + 2x + 7)^2 + c$$

3.3.7 $\int \frac{5\cos\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx$

Resolución

Por la presencia del coseno, la posibilidad es el teorema T3.30 con $u = \sqrt{3x} = \sqrt{3}\sqrt{x}$; luego, $du = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}dx$ al sustituir:

$$\int \frac{5\cos\sqrt{3x}}{\sqrt{x}}dx = 5\frac{2}{\sqrt{3}}\int \cos\sqrt{3x}\,\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{x}}dx = \frac{10}{\sqrt{3}}\operatorname{sen}\sqrt{3x} + c$$

3.3.8 Empleando el método de Euler, encuentra una aproximación de $f(-1)$ para $f'(x) = \frac{\operatorname{sen}(2x-1)\cos x}{x^2 - 4}$; si se sabe que $f(1) = -1/2$. Usa $\Delta x = 0.1$.

Resolución

TABLA 3.3 Cálculo de la curva integral $x = -1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x + \Delta x)$
1	−0.5	−0.139785485	−0.486021452
0.9	−0.486021452	−0.117080417	−0.47431341
0.8	−0.47431341	−0.08485572	−0.465827838
0.7	−0.465827838	−0.045046394	−0.461323198
0.6	−0.461323198	0	−0.461323198
0.5	−0.461323198	0.047652753	−0.466088474

TABLA 3.3 Cálculo de la curva integral $x = -1$.

x	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x+\Delta x)$
0.4	−0.466088474	0.0951472	−0.475603194
0.3	−0.475603194	0.139744247	−0.489577618
0.2	−0.489577618	0.1788903	−0.507466648
0.1	−0.507466648	0.210367746	−0.528503423
0	−0.528503423	0.23242676	−0.551746099
−0.1	−0.551746099	0.243890491	−0.576135148
−0.2	−0.576135148	0.244227401	−0.600557888
−0.3	−0.600557888	0.233586736	−0.623916562
−0.4	−0.623916562	0.212795617	−0.645196124
−0.5	−0.645196124	0.183318922	−0.663528016
−0.6	−0.663528016	0.147185965	−0.678246612
−0.7	−0.678246612	0.106890853	−0.688935698
−0.8	−0.688935698	0.065276481	−0.695463346
−0.9	−0.695463346	0.025415822	−0.698004928
−1	−0.698004928		

Empleando el método de Euler, en la primera columna de la tabla 3.3 se muestran los valores de x, a partir de $x = 1$ y se concluye en $x = -1$, con $\Delta x = -0.1$, lo que resulta ser una integración hacia atrás. En la segunda columna se calcula el valor de $f(x)$, que es una copia del valor previo de la cuarta columna calculada, según la expresión $f(x+\Delta x) = f(x) + f'(x)\Delta x$. Por su parte, la tercera columna corresponde al valor de la derivada en la x de la misma fila. Por último, el valor solicitado es $f(-1) = -0.698004928$, donde la exactitud mejora si $|\Delta x| \ll 0.1$ (véase figura 3.17).

3.3.9 Traza el campo de pendientes para la derivada $f'(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(2x-1)\cos x}{x^2-4}$ y varias curvas integrales, en particular para $f(-1) = -0.698$.

Resolución

Empleando Winplot® y la información dada resulta la figura 3.18, donde se muestra el campo de pendientes y varias curvas integrales. El pvi para $f(-1) = -0.698$ se destaca en un trazo más grueso.

AUTOEVALUACIÓN 3.1-3.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la solución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre la comprensión del concepto de antiderivada e integración indefinida mediante la resolución de los diversos ejercicios de forma analítica, gráfica y numérica.

Desempeños

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la solución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear al menos una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

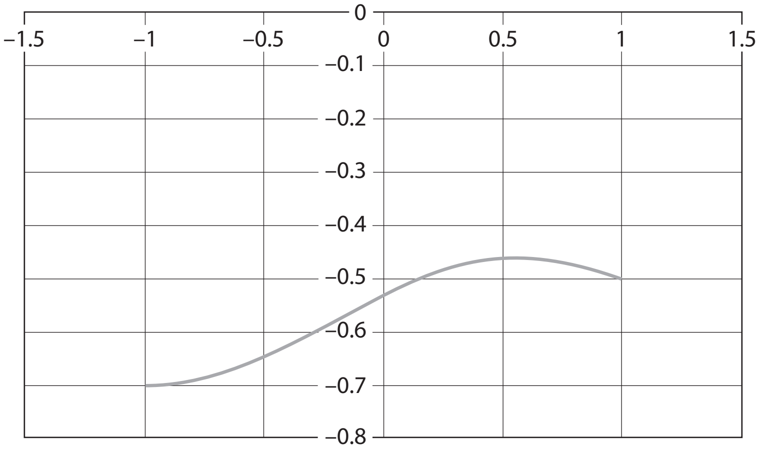


FIGURA 3.17 Gráfica de la curva integral del ejercicio 3.3.8 correspondiente a las dos primeras columnas de la tabla 3.3.

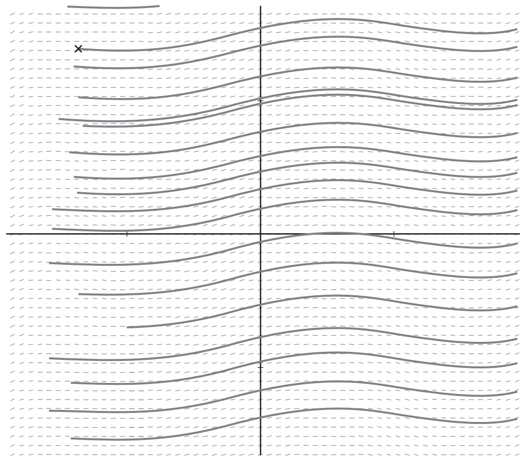


FIGURA 3.18 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.3.9.

Autoevaluación 3.1

3.1.1 Resuelve $\int 2x^3 e^{x^4+1}\,dx$.

3.1.2 Resuelve $\int\left(\sqrt{x}-\dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx$.

3.1.3 Calcula la antiderivada $f'(x)=\dfrac{x}{3x^2-1}$.

3.1.4 Resuelve $\int x(x^2-1)^2\,dx$.

3.1.5 Resuelve $\int 5x^2\cos(x^3+2)dx$.

3.1.6 Calcula la antiderivada de $\int\dfrac{\cos x}{2-5\,\text{sen}\,x}dx$.

AUTOEVALUACIÓN 3.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 3.2

3.2.1 Resuelve $\int 5x\cos x^2\ \text{sen}\ x^2\,dx$.

3.2.2 Resuelve $-3\int\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\sec^2(x+\ln x)dx$.

3.2.3 Calcula la antiderivada $f'(x)=\dfrac{7x}{(5x^2+\sqrt{2})^5}$.

3.2.4 Resuelve $\int x^3\left(\dfrac{x^4}{5}-1\right)^2dx$.

3.2.5 Resuelve $\int -9x^2\sec(4x^3-3)\tan(4x^3-3)dx$.

3.2.6 Calcula la antiderivada $\int\dfrac{\cos 3x}{5+\text{sen}^2\,3x}dx$.

AUTOEVALUACIÓN 3.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 3.3

3.3.1 Resuelve $\int -7(e^{2x} - 2e^{-2x})^2\, dx$.

3.3.2 Resuelve $\int 5\left(\frac{1+x}{x}\right)(x + \ln x)^5\, dx$.

3.3.3 Calcula la antiderivada de $f'(x) = -12x\csc^2(5x^2 + \sqrt{2})$.

3.3.4 Resuelve $\int 5x^3 e^{(x^4-1)}\, dx$.

3.3.5 Resuelve $\int -11x\csc(3x^2 - 5)\cot(3x^2 - 5)dx$.

3.3.6 Calcula la antiderivada de $\int \frac{1}{x\left(9 + \ln^2 7x\right)}\, dx$.

AUTOEVALUACIÓN 3.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 3.4

Utiliza el método de Euler para aproximar el valor funcional $f(x_0)$, para la derivada dada, conocido el punto de inicio $f(x_i) = y_i$ empleando $\Delta x = 0.1$.

3.4.1 $x_0 = 3,\ f'(x) = \frac{1}{21}e^{2x} - 2e^{-2x},\ x_i = 2,\ y_i = -2$

3.4.2 $x_0 = 10,\ f'(x) = \left(\frac{1+x}{x}\right)(x + \ln x),\ x_i = 12,\ y_i = \frac{3}{2}$

3.4.3 $x_0 = 1,\ f'(x) = x\csc^2(5x^2 + \sqrt{2}),\ x_i = 0.1,\ y_i = -3$

3.4.4 $x_0 = 0.5,\ f'(x) = x^3 e^{(x^4-1)},\ x_i = -0.5,\ y_i = \pi - 1$

3.4.5 $x_0 = 1.4,\ f'(x) = \frac{1}{x(9 + \ln^2 7x)},\ x_i = 0.2,\ y_i = 0.6$

AUTOEVALUACIÓN 3.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 3.5

Traza el campo de pendientes y la curva integral para la derivada y el punto $f(x_0)$ indicado.

3.5.1 $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}},\ f(0.1) = -2$

3.5.2 $f'(x) = \frac{x}{3x^2 - 1},\ f(1) = 0$

3.5.3 $f'(x) = \frac{1}{12}x(x^2 - 4)^2,\ f(-3) = 2$

3.5.4 $f'(x) = x^2\cos(x + 2),\ f(-2) = 0.5$

3.5.5 $f'(x) = \frac{5\cos x}{2 - \ln x},\ f(0.1) = -1.2$

AUTOEVALUACIÓN 3.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Solución a la autoevaluación 3.1

3.1.1 $\int 2x^3 e^{x^4+1}\,dx = \dfrac{e^{x^4+1}}{2} + c$

3.1.2 $\int \left(\sqrt{x} - \dfrac{3}{\sqrt{x}}\right)dx = 6\sqrt{x} + \dfrac{2x^{\frac{3}{2}}}{3} + c$

3.1.3 $\int \dfrac{x\,dx}{3x^2 - 1} = \dfrac{1}{6}\ln(3x^2 - 1) + c$

3.1.4 $\int x(x^2 - 1)^2\,dx = \dfrac{1}{6}(x^2 - 1)^3 + c$

3.1.5 $\int 5x^2 \cos(x^3 + 2)dx = \dfrac{5}{3}\operatorname{sen}(x^3 + 2) + c$

3.1.6 $\int \dfrac{\cos x}{2 - 5\operatorname{sen} x}dx = -\dfrac{1}{5}\ln(2 - 5\operatorname{sen} x) + c$

Solución a la autoevaluación 3.2

3.2.1 $\int 5x \cos x^2 \operatorname{sen} x^2\,dx = \dfrac{5}{4}\operatorname{sen}^2 x^2 + c$

3.2.2 $-3\int \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)\sec^2(x + \ln x)\,dx = -3\tan(x + \ln x) + c$

3.2.3 $\int \dfrac{7x}{(5x^2 + \sqrt{2})^5}dx = -\dfrac{7}{40}(5x^2 + \sqrt{2})^{-4} + c$

3.2.4 $\int x^3\left(\dfrac{x^4}{5} - 1\right)^2 dx = \dfrac{5}{12}\left(\dfrac{x^4}{5} - 1\right)^3 + c$

3.2.5 $\int -9x^2 \sec(4x^3 - 3)\tan(4x^3 - 3)dx = -\dfrac{3}{4}\sec(4x^3 - 3) + c$

3.2.6 $\int \dfrac{\cos 3x}{5 + \operatorname{sen}^2 3x}dx$

$$\frac{\sqrt{5}}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{5}}\cos 3x}{5(1 + \frac{1}{5}\operatorname{sen}^2 3x)}dx = \frac{1}{3\sqrt{5}}\tan^{-1} 3x + c$$

Solución a la autoevaluación 3.3

3.3.1 $\int -7(e^{2x} - 2e^{-2x})^2\,dx = -\dfrac{7}{4}\left(e^{4x} - 16x - e^{-4x}\right) + c$

3.3.2 $\int 5\left(\dfrac{1 + x}{x}\right)(x + \ln x)^5\,dx = \dfrac{5}{6}(x + \ln x)^6 + c$

3.3.3 $\int -12x \csc^2(5x^2 + \sqrt{2})dx = \dfrac{6}{5}\operatorname{ctg}(5x^2 + \sqrt{2}) + c$

3.3.4 $\int 5x^3 e^{(x^4-1)}\,dx = \frac{5}{4}e^{(x^4-1)} + c$

3.3.5 $\int -11x\csc(3x^2-5)\cot(3x^2-5)dx = \frac{11}{6}\csc(3x^2-5) + c$

3.3.6 $\int \frac{1}{x\left(9+\ln^2 7x\right)}dx = \frac{3}{9}\int \frac{\frac{1}{3x}}{1+\frac{\ln^2 7x}{9}}dx = \frac{1}{3}\tan^{-1}\left(\frac{\ln 7x}{3}\right) + c$

Solución a la autoevaluación 3.4

3.4.1 $f(3) = 7.149401242$

3.4.2 $f(10) = -27.83740564$

3.4.3 $f(1) = 9.169877607$

3.4.4 $f(0.5) = 2.136697583$

3.4.5 $f(1.4) = 2.991424432$

Solución a la autoevaluación 3.5

3.5.1 $f'(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}}$, $f(0.1) = -2$

3.5.2 $f'(x) = \frac{x}{3x^2-1}$, $f(1) = 0$

3.5.3 $f'(x) = \frac{1}{12}x(x^2-4)^2$, $f(-3) = 2$

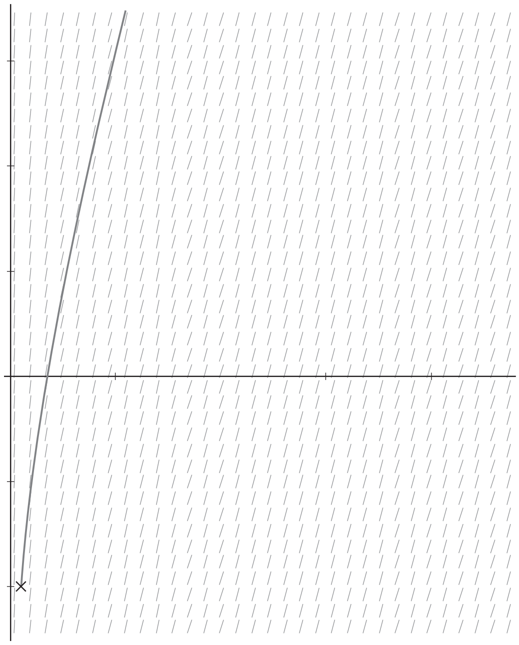


FIGURA 3.19 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.5.1.

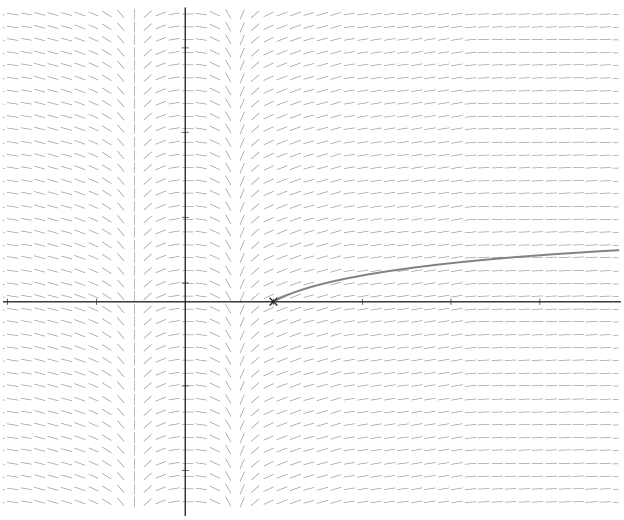


FIGURA 3.20 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.5.2.

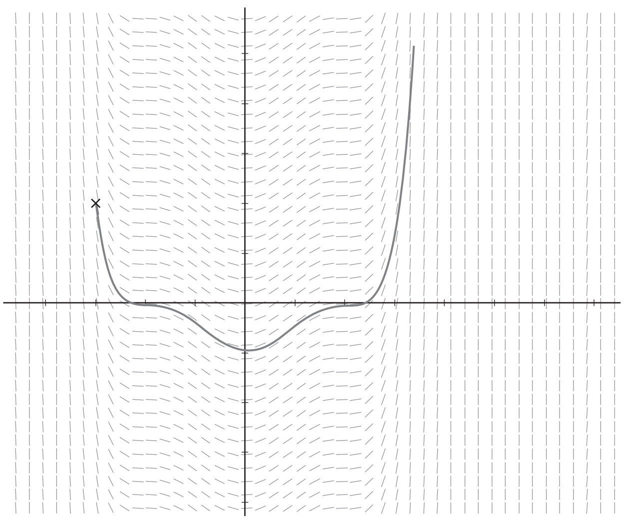


FIGURA 3.21 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.5.3.

3.5.4 $f'(x) = x^2 \cos(x+2), f(-2) = 0.5$

3.5.5 $f'(x) = \dfrac{5\cos x}{2 - \ln x}, f(0.1) = -1.2$

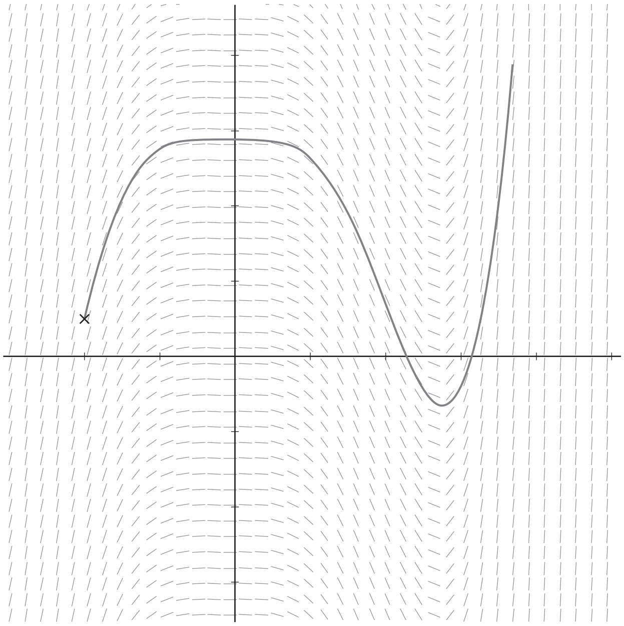


FIGURA 3.22 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.5.4.

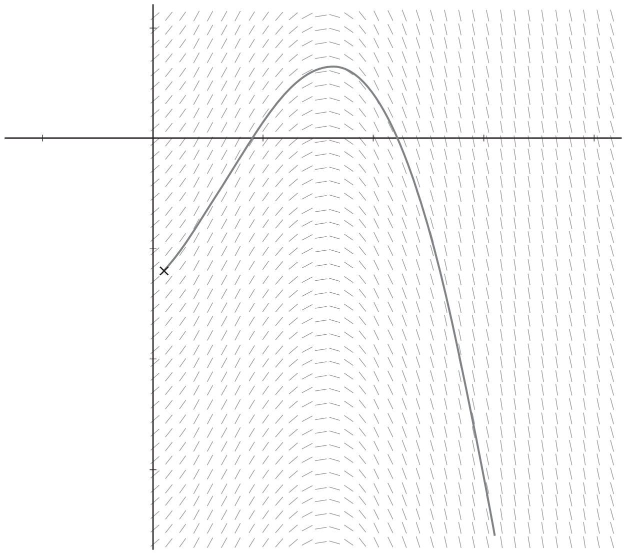


FIGURA 3.23 Campo de pendientes y curva integral del ejercicio 3.5.5.

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si para resolver una integral indefinida selecciona y aplica de manera correcta y analítica el método de integración más adecuado.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando la integración como herramienta fundamental.

CALENDARIO DEL PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

FECHA	EVIDENCIA
	Actividad 4.1.1
	Ejercicios 4.1
	Actividad 4.2.1
	Actividad 4.2.2
	Ejercicios 4.2
	Actividad 4.2.3
	Ejercicios 4.3
	Actividad 4.2.4
	Ejercicios 4.4
	Actividad 4.2.5
	Actividad 4.2.6
	Actividad 4.2.7
	Ejercicios 4.5

FECHA	EVIDENCIA
	Actividad 4.2.8
	Ejercicios 4.6
	Autoevaluación 4.1
	Autoevaluación 4.2
	Autoevaluación 4.3
	Autoevaluación 4.4
	Autoevaluación 4.5
	Autoevaluación 4.6
	Autoevaluación 4.7
	Autoevaluación 4.8
	Autoevaluación 4.9

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

Minino de Cheshire, ¿podrías decirme, por favor,
qué camino debo seguir para salir de aquí?
– Esto depende en gran parte del sitio al que quieras llegar
– dijo el Gato.
– No me importa mucho el sitio…
– dijo Alicia.
– Entonces tampoco importa mucho el camino que tomes
– dijo el gato.

Alicia en el país de las maravillas. *Lewis Carroll*

4.1 ANTIDERIVADAS

Resolver una integral puede ayudar a:

- Obtener una antiderivada si la integral que se pretende resolver es indefinida.
- Encontrar un número si la integral es definida, concepto que se aborda en el capítulo 5.

En el segundo caso, y de acuerdo con la forma de presentar la información, es posible emplear la integración numérica; o bien, aplicar el Teorema fundamental del cálculo, para obtener antiderivadas.

Este apartado se concentra, en principio, en la obtención de antiderivadas. Por tal motivo no se incluyen aplicaciones, ya que éstas caerían necesariamente en la categoría de ejercicios.

Actividad 4.1.1

El proceso de la antiderivada

La forma más elemental de obtener antiderivadas consiste en aplicar de manera inversa los teoremas de derivadas, tal como se muestra en la actividad 3.1.2. Sin embargo, debido al constante uso de las tablas, en este texto, al igual que en la mayoría de las obras que abordan el tema, se incluye una tabla que muestra los teoremas básicos de antiderivadas que te resultará de gran utilidad.

Una de las expresiones más simples, y a la vez muy útil, es la llamada u^n, ya que según la tabla de derivadas $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

- ¿Por qué la antiderivada presenta $\int u^n\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1} + c$?
- ¿Cómo se vería la antiderivada si el teorema se hubiera presentado de la siguiente manera?

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u^{n+1}}{n+1}\right) = u^n \frac{du}{dx}$$

- ¿Cuál de las dos formas es la más común en las expresiones?

ACTIVIDAD 4.1.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y los análisis del procedimiento 4.1 en tres ejemplos diferentes.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase, pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos que incluyan antiderivadas.
- Alentar a los estudiantes para analizar las expresiones presentadas en cada uno de los ocho pasos del procedimiento 4.1.

Encontrar una antiderivada es un proceso ordenado en el cual lo más importante es verificar que todos los elementos de la estructura estén presentes, así como identificar la elección más adecuada u. Para eso se sugiere el siguiente esquema.

Procedimiento 4.1

1. Detecta si existen simplificaciones algebraicas que generen un integrando más simple.
2. Si existen sumas o restas como expresión central, debes separar el integrando en varias integrales; recuerda, solo sumas y restas. Si hay alguna constante multiplicando **a todo el integrando** escríbela fuera de la integral.
3. Analiza la estructura del integrando y busca en los teoremas aquel que más se le parezca. Si tiene cocientes, busca cocientes; si tiene radicales, busca radicales; si tiene una función trigonométrica, busca la del mismo tipo.
4. No te sorprendas por la aparente complejidad; al seleccionar una u adecuada, pueden ocurrir simplificaciones importantes. Selecciona la parte del integrando que consideras que es u, n, a, o cualquier otro término o variable que la estructura señale.
5. El paso más delicado es probar que du está completo. Puedes adivinarlo en muchos casos, pero sé cuidadoso (aquí es donde la mayoría se equivoca) si seleccionaste una expresión $g(x)$ como u, y ya que la integral por resolver suele tener dx, derívala y obtendrás $\dfrac{du}{dx} = g'(x) \therefore dx = \dfrac{du}{g'(x)}$.
6. Sustituye la $g(x)$ elegida por u y dx por la expresión obtenida. Simplifica lo que resulte necesario y escribe fuera de la integral las constantes que multipliquen a todo el integrando. La integral obtenida en este punto debe ser del todo igual a la de la tabla de integrales, excepto por las constantes que están fuera. Si no es así, es que no elegiste de modo correcto u o que el teorema no es el adecuado, en cuyo caso tendrás que seleccionar de nuevo. A veces, el proceso se basa en prueba y error, mientras se adquiere experiencia. Asimismo, también cabe la posibilidad de que la expresión no tenga una solución analítica, ya que no todas las expresiones poseen una antiderivada.
7. Si las estructuras fueron iguales en el paso anterior, la integral está resuelta; así que solo se escribe el resultado.
8. Ahora, regresa el resultado a las variables originales y sustituye las u que encuentres por la $g(x)$ seleccionada. Simplifica, si es necesario, y no olvides colocar la constante de integración.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.1

Resuelve: $\displaystyle\int \frac{3x\cos x^2\,dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2}$

1. En apariencia, no hay simplificaciones.
2. Hay una constante que multiplica a todo el integrando que se extrae de la integral: $3\int \frac{x\cos x^2\,dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2}$
3. Es un cociente, pero el cuadrado del denominador invita a reescribir así: $3\int (5+\operatorname{sen} x^2)^{-2} x\cos x^2\,dx$

   Aquí es posible considerar una forma u^n. Avancemos en esta posibilidad.
4. Si u^n es la estructura elegida $n=-2$ y $u=5+\operatorname{sen} x^2$.
5. Al derivar $\frac{du}{dx}=2x\cos x^2 \therefore dx=\frac{du}{2x\cos x^2}$.
6. Se sustituye todo lo encontrado y se consigue:

   $3\int (5+\operatorname{sen} x^2)^{-2} x\cos x^2\,dx$

   $$=3\int u^n \cancel{x\cos x^2}\,\frac{du}{2\,\cancel{x\cos x^2}}=\frac{3}{2}\int u^n\,du$$

   Salvo las constantes, la expresión es idéntica a lo que expresa el teorema T3.27.
7. La antiderivada, según el teorema T3.27, es:

   $$\frac{3}{2}\frac{u^{n+1}}{n+1}=\frac{3}{2}\frac{u^{-2+1}}{(-2+1)}=\frac{3u^{-1}}{-2}=-\frac{3}{2u}$$

8. Por último, $-\frac{3}{2u}=-\frac{3}{2(5+\operatorname{sen} x^2)}$ y

   $$\int \frac{3x\cos x^2\,dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2}=-\frac{3}{2(5+\operatorname{sen} x^2)}+c$$

   que es el resultado encontrado con éxito.

Discute con tus compañeros acerca de cada uno de los pasos de la resolución en al menos tres ejercicios diferentes. Presenta el reporte ordenado de la aplicación del procedimiento 4.1 en cada caso. Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

4.2 MÉTODOS DE INTEGRACIÓN

De la regla de cadena $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))g'(x)$ se desprende la técnica de integración denominada integración por sustitución que implica el teorema T3.42:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx=\int f'(u)\,du=F(u)+c=F(g(x))+c$$

Sin embargo, no siempre es posible resolver una integral empleando los teoremas básicos o el teorema de sustitución. Cuando esto ocurre, se dispone de diferentes técnicas para resolver integrales cuya aplicación depende, en específico, de la estructura de la integral por resolver.

❖ Integración por sustitución directa

Para hacer coincidir una estructura con las fórmulas básicas es necesario seleccionar, de manera adecuada, los elementos *u, du, a* y *n*, de acuerdo con la estructura elegida. Debido a la propia simplificación, algunos elementos algebraicos desaparecen o se visualizan en apariencia de modo diferente. Para ello, se deben emplear algunos procedimientos prácticos que permitan recobrar los elementos perdidos para completar bien la estructura elegida. Dentro de estos procedimientos se sugiere probar:

Procedimiento 4.2

- **i.** Simplificar de manera algebraica el integrando.
- **ii.** Separar el integrando en sumandos y separar las integrales.
- **iii.** Hacer una sustitución directa de una expresión como u para simplificar; se ve en forma directa u y du.
- **iv.** Completar los cuadrados para lograr cubrir formas $u^2 + a^2$, $u^2 - a^2$ o $(u - a)^2$.
- **v.** Usar una identidad trigonométrica y simplificar, lo cual resulta útil cuando se presentan funciones trigonométricas.
- **vi.** Eliminar una raíz cuadrada. Esto suele presentarse después de completar un cuadrado o una sustitución trigonométrica.
- **vii.** Reducir una fracción impropia.
- **viii.** Separar los elementos del numerador de una fracción entre el denominador de la fracción.
- **ix.** Multiplicar por una forma unitaria $g(x)/g(x)$, que al multiplicar por el integrando $f(x)$ permita modificar de modo adecuado $[f(x)g(x)]/g(x)$.
- **x.** Probar sustituir $f(x)$ por $1/(1/f(x))$.

El procedimiento resulta adecuado si después de la u, du, la estructura de la integral es idéntica a los teoremas básicos y se aplica en forma directa la antiderivación.

Estas sugerencias son válidas para todas las técnicas de integración.

Ejercicios 4.1

Resuelve los siguientes ejercicios:

4.1.1 Encuentra una sustitución adecuada para resolver $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

Resolución

De acuerdo con la sugerencia del inciso vi del procedimiento 4.2, se prueba eliminar la raíz cuadrada, la única posibilidad es hacer $z^2 = x+1 \therefore 2z\,dz = dx$:

$$\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}} = \int \frac{2z\,dz}{1+\sqrt{z^2}} = \int \frac{2z\,dz}{1+z} = 2\int\left(1-\frac{1}{1+z}\right)dz$$

$$= 2\big(z-\ln(z+1)\big)+c = 2\left(\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)\right)+c$$

Donde, según el inciso *vii*, se redujo una fracción impropia al realizar la división para $z/(1+z)$.

4.1.2 Mediante la sustitución adecuada, resuelve $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

Resolución

No parece ser algún teorema específico, pero el cociente y el radical podrían sugerir una forma logarítmica o una potencia. Si suponemos que sea una forma u^n, se tendría $u = 1+\ln x \therefore du = dx/x$, que se simplifica directamente en:

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx = \int \sqrt{u}\,du = \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+c = \frac{2}{3}\left(1+\ln x\right)^{\frac{3}{2}}+c$$

4.1.3 Resuelve $\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}}$.

Resolución

El radical del denominador sugiere una forma u^n, pero el numerador no es su diferencial, se propone $z^4 = e^x+1 \therefore 4z^3\,dz = e^x\,dx$, que, según el inciso vi del procedimiento 4.2, resulta en:

$$\int \frac{e^{2x}\,dx}{\sqrt[4]{e^x+1}} = \int \frac{e^x\,4z^3\,dz}{\sqrt[4]{z^4}} = \int \frac{(z^4-1)4z^3\,dz}{z}$$

$$= \int (z^4-1)4z^2\,dz = 4\int (z^6-z^2)\,dz = 4\left(\frac{z^7}{7}-\frac{z^3}{3}\right)+c$$

$$= \frac{4}{7}(e^x+1)^{\frac{7}{4}} + \frac{4}{3}(e^x+1)^{\frac{3}{4}}+c$$

4.1.4 Resuelve $\int \frac{5\,dx}{e^{2x}+8}$.

EJERCICIOS 4.1

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por los desarrollos matemáticos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: __________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para plantear preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

Resolución

Es un cociente que puede ser considerado una suma de cuadrados, por lo que desde esta óptica podría tratarse de una función trigonométrica inversa; sin embargo, eso implica $u = e^x$ y $du = e^x\,dx$, donde el factor e^x no está presente, por lo que el intento no es viable. Probemos la factorización, como se propone en el inciso *i* del procedimiento 4.2:

$$\int \frac{5\,dx}{e^{2x}+8} = 5\int \frac{dx}{e^{2x}(1+8e^{-2x})} = 5\int \frac{e^{-2x}\,dx}{(1+8e^{-2x})}$$

Ahora, tenemos una forma logarítmica con $u = 1 + 8e^{-2x}$, de donde $du = -16e^{-2x}\,dx$ y:

$$\int \frac{5\,dx}{e^{2x}+8} = -\frac{5}{16}\int \frac{-16e^{-2x}\,dx}{1+8e^{-2x}} = -\frac{5}{16}\ln\left(1+8e^{-2x}\right) + c$$

4.1.5 Resuelve $\displaystyle\int \frac{3\,dx}{x^2-2x+2}$.

Resolución

No es una forma u^n, pues el denominador tendría exponente 1; en todo caso, sería una forma logarítmica, pero su diferencial no está completo en el numerador, por lo que también se excluye. Otros cocientes están representados por los teoremas de funciones trigonométricas inversas T3.38 y T3.39, pero son cuadrados. Sigue la sugerencia del inciso *iv* del procedimiento 4.2 y prueba completar el cuadrado. Toma $x^2 - 2x$ como los dos primeros términos de un trinomio cuadrado al que le falta un 1 para completar $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$, lo cual nos lleva a:

$$\int \frac{3\,dx}{x^2-2x+2} = 3\int \frac{dx}{(x^2-2x+1)+1} = 3\int \frac{dx}{(x-1)^2+1}$$

Con $u = x - 1$, $du = dx$ se aplica en forma directa el teorema T3.38 y resulta:

$$\int \frac{3\,dx}{x^2-2x+2} = 3\int \frac{dx}{(x-1)^2+1} = 3\tan^{-1}(x-1) + c$$

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

Integrales que no son antiderivadas directas

Debido tanto a la naturaleza de las aplicaciones como de los ejercicios o de los problemas de práctica, surgen integrales que no pueden ser resueltas en forma directa por los teoremas básicos de antiderivadas, así que se requieren métodos que permiten resolver este tipo de integrales. Dentro de estos métodos, por lo común denominados técnicas de integración o métodos de integración, se tienen los siguientes:

1. Integración por partes.

2. Integrales trigonométricas.
3. Integración por sustitución de variable trigonométrica.
4. Integración por fracciones parciales.
5. Integración por sustituciones diversas.
6. Uso de tablas de integración.

Actividad 4.2.1

La integración por partes

Una integral por partes se denomina así porque el método empleado **divide a la integral en dos nuevas integrales**, las cuales deben tener ciertas características.

Del teorema de derivación de un producto ya estudiado $(uv)' = uv' + vu'$, se obtiene el teorema T2.4 para diferenciales $d(uv) = udv + vdu$. Al integrar en ambos lados de la igualdad resulta:

T4.1 $$uv = \int u\,dv + \int v\,du \Rightarrow \int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Que es el teorema de la **integración por partes** y que enuncia lo siguiente:

- ✧ Al derivar el producto de dos funciones, debido a la manipulación algebraica que algún problema requiera, es posible perder alguno de los dos términos de la suma que generó su derivada. ¿Se puede recuperar el producto original?
- ✧ El teorema afirma lo anterior, ¡y además asegura que te permite resolver la integral incompleta si eliges de manera adecuada las partes u y dv!

En principio, se trabaja así:

Procedimiento 4.3

1. Supongamos que debes resolver una integral y no lo consigues al emplear los teoremas básicos. Pero, si observas con cuidado verás que el integrando es un producto y entonces la integral está compuesta por factores, digamos $\int f(x)g(x)h(x)\,dx$. ¡Podrían ser muchos más, pero al menos son dos! El teorema T4.1 te indica que elijas algunos factores dentro del integrando, que van a componer u, incluso algunos podrían ser 1.
2. Una vez elegida una combinación adecuada de factores a los cuales llamarás u, el resto que incluye a dx lo llamarás dv. Por ejemplo, para el producto $f(x)g(x)h(x)dx$ se tienen siete posibilidades, las cuales podrían ser:

   $\{u = 1, dv = f(x)g(x)h(x)dx\}$

   $\{u = f(x), dv = g(x)h(x)dx\}$

ACTIVIDAD 4.2.1

Evaluación por producto.

Actitudes

- ▶ Interés por la abstracción.
- ▶ Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- ▶ Gusto por la reflexión.
- ▶ Respeto por el orden.
- ▶ Seguimiento de procedimiento.

Productos

- ▶ Ensayo con las reflexiones del primer ejemplo y análisis del procedimiento 4.3 en el ejemplo propuesto y 5 adicionales.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- ▶ Extensión: una cuartilla.
- ▶ Individual ☐ Equipo ☐
- ▶ Fecha de entrega: ______________
- ▶ Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- ▶ Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- ▶ En la clase, pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos a resolver por integración de partes.
- ▶ Alentar a los estudiantes para analizar las expresiones presentadas en cada uno de los ocho pasos del procedimiento 4.3.

$\{u = f(x)g(x),\ dv = h(x)dx\}$
$\{u = f(x)g(x)h(x),\ dv = dx\}$
$\{u = g(x),\ dv = f(x)h(x)dx\}$
$\{u = g(x)h(x),\ dv = f(x)dx\}$
$\{u = h(x),\ dv = f(x)g(x)dx\}$
$\{u = f(x)h(x),\ dv = g(x)dx\}$

3. Se elige la que ofrezca más posibilidades; si ocurre lo siguiente:
   a) $\int dv = v$ suele ser fácilmente integrable.
   b) Al calcular du se estructura la nueva integral $\int v\,du$, que debe ser más simple que la integral original y, de preferencia, debe resolverse en forma inmediata. Quizá también sea posible resolverla por partes, pero se observa que es más simple, más sencilla; por ejemplo, han disminuido los exponentes o desaparecido algunas expresiones que la hacían ver más complicada.
4. Al resolver $\int dv = v$, se omite la constante de integración. Si esta integral resulta más complicada que la original, entonces se deduce que la elección fue incorrecta y se debe seleccionar otra opción.
5. Se estructura $\int v\,du$ y se resuelve.
6. Al final, se sustituyen los elementos de la solución con $uv - \int v\,du$.

Ejemplos de aplicación del procedimiento 4.3

Ejemplo 1: Considera $\int \ln x\,dx$ y aplica el procedimiento 4.3.

1. No existe antiderivada directa que permita resolverla y se observa que está compuesta solo por dos factores $\{\ln x, dx\}$.
2. Las combinaciones son únicas $u = \ln x,\ dv = dx$.
3. Al ser única, se calcula $du = dx / x$.
4. Resuelve la $\int dv = v$ de la cual $v = x$, como se señaló, se omite la constante de integración.
5. Se estructura y resuelve $\int v\,du$: $\int v\,du = \int x\dfrac{dx}{x} = \int dx = x.$
6. Llegaste a la solución, que es: $\int \ln x\,dx = x\ln x - x + c$.

¿Estás de acuerdo?

Ejemplo 2: Resuelve $\int x^2 e^{3x}\,dx$ aplicando el procedimiento 4.3.

1. No existe antiderivada directa que permita resolverla y se observa que está compuesta por cuatro factores: $\{x, x, e^{3x}, dx\}$.

2. ¿Cuántas y cuáles son las combinaciones de factores posibles para tener: $\{u, dv\}$?
3. ¿Cuál consideras la más adecuada para su elección y por qué?
4. Resuelve la $\int dv = v$ elegida. Esta debe ser más simple que la original. ¿Qué te resultó?
5. Estructura $\int v\,du$ y resuelve. Lo más factible en este ejercicio es que esta integral también se resuelva por partes, pero es más simple. De hecho, debe ser algo así: $\int xe^{3x}\,dx$. En efecto, es más simple, aunque de nuevo resultó ser por partes, así que deberás resolverla por este mismo método. Deja pendiente tu resolución previa y reinicia el proceso con esta nueva integral. Al concluirla, regresa a este punto con ese resultado intermedio y continúa.
6. Al final, debiste haber encontrado la solución. ¿Cuál es?

Propón cinco ejemplos adicionales. Aplica y reflexiona acerca del procedimiento elegido. Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Actividad 4.2.2

Integrales cíclicas

En ciertos casos, la integración por partes se vuelve ***cíclica*** y, en lo general, indica una mala selección de u y dv en integración por partes sucesiva. Se dirá que la integral es cíclica si después de diferentes pasos ¡vuelves a llegar a la expresión original! O sea que **no** resolviste nada y tendrás que volver a intentarlo con otras selecciones.

Pero, en otras situaciones se llega a una integración ***en apariencia cíclica;*** en este caso, no te preocupes, porque la solución ya está ahí. Esto ocurre si después de uno o varios pasos resulta que tu integral original vuelve a aparecer, pero con un coeficiente k diferente de 1, esto es:

$$\int u\,dv = g(x) - k\int u\,dv \Rightarrow (1+k)\int u\,dv = g(x) \therefore \int u\,dv = \frac{g(x)}{1+k}$$

¿Por qué k debe ser diferente de cero?

1. Considera el ejercicio $\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$ y observa que es "*en apariencia cíclica*", ya que después de aplicar la técnica de integración por partes regresas a la integral original, pero su coeficiente **no es uno**.
2. Un caso adicional será $\int \sec^3 x\,dx$, que por ahora esperará.

Resolución del ejemplo $\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$

Sea $u = e^{3x}$, $du = 3e^{3x}dx$ y $dv = \text{sen}\,2x\,dx$, $v = -\frac{1}{2}\cos 2x$.

ACTIVIDAD 4.2.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con las reflexiones del primer ejemplo y análisis y solución del procedimiento en los cuatro ejemplos propuestos.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase, pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos a resolver por integración por partes que resulten en integrales cíclicas.
- Mostrar en clase como una mala selección de u y dv lleva, en ocasiones, a una apariencia cíclica por error.

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x - \int -\frac{3}{2}e^{3x}\cos 2x\,dx$$

Para esta nueva integral sea, de nuevo, $u = e^{3x}$, $du = 3e^{3x}\,dx$ y $dv = \cos 2x\,dx$, $v = \frac{1}{2}\text{sen}\,2x$; por tanto,

$$-\int -\frac{3}{2}e^{3x}\cos 2x = \frac{3}{2}\left(e^{3x}\frac{1}{2}\text{sen}\,2x - \int \frac{1}{2}\text{sen}\,2x\,3e^{3x}\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

Sustituyendo en la original:

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x - \frac{9}{4}\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx$$

Se observa que la integral original es igual a la última encontrada, pero multiplicada por una constante $k = -9/4$; ahora, despejamos tal integral y resulta:

$$\left(1+\frac{9}{4}\right)\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = -\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{4}{13}\left(-\frac{1}{2}e^{3x}\cos 2x + \frac{3}{4}e^{3x}\,\text{sen}\,2x\right)$$

$$\int e^{3x}\,\text{sen}\,2x\,dx = \frac{1}{13}(3e^{3x}\,\text{sen}\,2x - 2e^{3x}\cos 2x) + c$$

Aplica el procedimiento descrito en esta actividad en los siguientes cuatro ejercicios:

1. $\int e^{3x}\,\text{sen}(2x)\,dx$
2. $\int \frac{e^{-4x}}{3}\cos(3x)\,dx$
3. $\int \frac{e^{5\sqrt{x}}}{7\sqrt{x}}\,\text{sen}(2\sqrt{x})\,dx$
4. $\int \frac{e^{-2(\ln x^2+4)}}{5x}\cos(3\ln x + 1)\,dx$

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

❖ Integración por partes

Como ya se dijo antes, resolver una integral no siempre es posible empleando los teoremas básicos o el teorema de sustitución T3.42:

$$\int f'(g(x))g'(x)\,dx = \int f'(u)\,du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

CUADRO 4.1 Un error en la selección de *u* y *dv*, en alguna parte de la integración por partes.

Para observar como una mala selección de u y dv, puede en apariencia generar una integración cíclica, considera el ejemplo:

Resolver $\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx$.

Sea $u = x^2 \Rightarrow du = 2x\,dx$

$dv = \text{sen}\,x\,dx \Rightarrow v = -\cos x$

$\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cos x\,dx$

En la nueva integral sea:

$u = \cos x \Rightarrow du = -\text{sen}\,x\,dx$

$dv = x\,dx \Rightarrow v = \frac{x^2}{2}$

Se sigue que:

$\int x\cos x\,dx = \frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\text{sen}\,x\,dx$

Sustituyendo:

$\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx = -x^2\cos x +$

$2\left(\frac{x^2}{2}\cos x + \int \frac{x^2}{2}\text{sen}\,x\,dx\right)$

$= -x^2\cos x + \left(x^2\cos x + \int x^2\,\text{sen}\,x\,dx\right)$

O bien:

$\int x^2\,\text{sen}\,x\,dx = \int x^2\,\text{sen}\,x\,dx$

¡No lograste nada!

¿Es cíclica?

¿En dónde está el error?

Para esos casos, se dispone de diferentes técnicas para resolver integrales, cuya aplicación depende en específico de la estructura de la integral por resolver.

En particular, dentro de la actividad 4.2.1 se ha concluido, a partir del teorema de derivación de un producto $(uv)' = uv' + vu'$, el teorema T2.4 para diferenciales $d(uv) = udv + vdu$, e integrando en ambos lados de la igualdad, se demostró el teorema de integración por partes:

T4.1 $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

Este tipo de integrales se identifica cuando no es posible localizar una sustitución adecuada u, para la cual du corresponda a la estructura supuesta. En estas condiciones, resultó claro que la solución de la integral depende de la identificación de los diferentes factores que componen el integrando del conjunto adecuado identificado como u, mientras que al resto de los factores, incluyendo el diferencial, lo denominamos dv. Con estas partes identificadas, aplicamos el teorema T4.1 para resolver la integral. Resulta claro que en muchas integrales propuestas tampoco existe una selección posible para u y dv, por lo que se aplicarán otros métodos aún por discutir.

Ejercicios 4.2

Resuelve los siguientes ejercicios:

4.2.1 $\int x(x+1)\,dx$

Resolución

Aunque esta integral se puede resolver sin integrar por partes, al desarrollar el polinomio se tiene:

$$\int x(x+1)\,dx = \int (x^2 + x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

Pero, también es posible resolver esta integral por partes:

Sea $u = x + 1 \therefore du = dx$ y $dv = x\,dx \therefore v = \dfrac{x^2}{2} \Rightarrow$

$$\int x(x+1)\,dx = (x+1)\frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\,dx = (x+1)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c$$

¿Por qué los resultados se ven diferentes? Con un poco de álgebra se demuestra que son iguales:

$$(x+1)\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c = \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + c = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + c$$

4.2.2 $\int 2\ln x^2\,dx$

Resolución

Al simplificar previamente por propiedades de logaritmos tenemos:

$$\int 2\ln x^2\,dx = 4\int \ln x\,dx$$

Sea $u = \ln x \therefore du = dx / x$, $dv = dx \therefore v = x$, de donde:

$$4\int \ln x\,dx = 4\left(x\ln x - \int x\frac{dx}{x}\right) = 4(x\ln x - x) + c$$

4.2.3 $\int (2x+3)\ln(2x+3)\,dx$

Resolución

Sea $u = \ln(2x+3) \therefore du = \dfrac{2\,dx}{2x+3}$, $dv = (2x+3)dx \therefore v = \dfrac{1}{4}(2x+3)^2$, de donde:

$$\int (2x+3)\ln(2x+3)\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x+3)(2x+3)^2$$

$$-\int \frac{1}{4}(2x+3)\cancel{^2}\,\frac{2\,dx}{\cancel{2x+3}}$$

$$\int (2x+3)\ln(2x+3)\,dx = \frac{1}{4}\ln(2x+3)(2x+3)^2 - \frac{1}{4}(2x+3)^2 + c$$

4.2.4 $\int 3x\sqrt{2x+5}\,dx$

Resolución

Sea $u = x \therefore du = dx$, $dv = \sqrt{2x+5}\,dx \therefore v = \dfrac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}}$, se sigue que:

$$\int 3x\sqrt{2x+5}\,dx = 3\left(\frac{x}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \int \frac{1}{3}(2x+5)^{\frac{3}{2}}\,dx\right) = x(2x+5)^{\frac{3}{2}}$$

$$-\int (2x+5)^{\frac{3}{2}}\,dx = x(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\frac{(2x+5)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}}$$

$$= x(2x+5)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}(2x+5)^{\frac{5}{2}} = (2x+5)^{\frac{3}{2}}\left(x - \frac{2x+5}{5}\right)$$

$$= \frac{1}{5}(2x+5)^{\frac{3}{2}}(3x-1) + c$$

4.2.5 $\int \tan^{-1}x\,dx$

Resolución

Sea $u = \tan^{-1}x \therefore du = \dfrac{dx}{x^2+1}$ y $dv = dx \therefore v = x$

$$\int \tan^{-1} x\, dx = x \tan^{-1} x - \int \frac{x\, dx}{x^2+1} = x \tan^{-1} x - \ln(x^2+1)x + c$$

4.2.6 $\int x \tan^{-1} x\, dx$

Resolución

Sea $u = \tan^{-1} x \therefore du = \dfrac{dx}{x^2+1}$ y $dv = x\, dx \therefore v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x \tan^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \int \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x - \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx$$

$$\int x \tan^{-1} x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \tan^{-1} x - \frac{x}{2} + c$$

4.2.7 $\int x \tan^2 x\, dx$

Resolución

Sea $u = \tan^2 x \therefore du = 2 \tan x \sec^2 x\, dx$, $dv = x\, dx \therefore v = \dfrac{x^2}{2}$

$$\int x \tan^2 x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^2 x - \int \frac{x^2}{2} 2 \tan x \sec^2 x\, dx$$

$$\int x \tan^2 x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^2 x - \int x^2 \sec x (\sec x \tan x)\, dx$$

En la nueva integral $u = x^2 \therefore du = 2x\, dx$,

$dv = \sec x (\sec x \tan x) dx \therefore v = \dfrac{\sec^2 x}{2}$

$$\int x^2 \sec x (\sec x \tan x)\, dx = \frac{x^2 \sec^2 x}{2} - \int x \sec^2 x\, dx$$

Ahora, $u = x \therefore du = dx$ y $dv = \sec^2 x\, dx \therefore v = \tan x$

$$\int x \sec^2 x\, dx = x \tan x - \int \tan x\, dx = x \tan x - \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} dx$$

$$= x \tan x + \ln(\cos x)$$

Sustituyendo:

$$\int x^2 \sec x (\sec x \tan x)\, dx = \frac{x^2}{2} \sec^2 x - x \tan x - \ln(\cos x)$$

$$\int x \tan^2 x\, dx = \frac{x^2}{2} \tan^2 x - \frac{x^2}{2} \sec^2 x + x \tan x + \ln(\cos x)$$

$$= -\frac{x^2}{2} (\sec^2 x - \tan^2 x) + x \tan x + \ln(\cos x)$$

$$\int x \tan^2 x\, dx = -\frac{x^2}{2} + x \tan x + \ln(\cos x) + c$$

En donde se aplicó la identidad $\sec^2 x - \tan^2 x = 1$.

4.2.8 $\int x^2 e^{-x}\, dx$

Resolución

Sea $u = x^2 \therefore du = 2x\, dx$ y $dv = e^{-x}dx \therefore v = -e^{-x} \Rightarrow$

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} - \int -e^{-x} 2x\, dx$$

En la nueva integral $u = x \therefore du = dx$ y la misma v:

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2\left(-xe^{-x} - \int (-e^{-x}\, dx)\right)$$

$$= -x^2 e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$$

4.2.9 $\int \ln(x^2 + 1)\, dx$

Resolución

No hay más posibilidad que:

$$u = \ln(x^2 + 1) \therefore du = \frac{2x}{x^2 + 1} dx \text{ y } dv = dx \therefore v = x \Rightarrow$$

$$\int \ln(x^2 + 1)\, dx = x \ln(x^2 + 1) - \int \frac{2x^2}{x^2 + 1} dx$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx$$

$$= x \ln(x^2 + 1) - 2x + 2\tan^{-1} x + c$$

4.2.10 $\int e^{ax} \cos nx\, dx$

Resolución

Sea $u = e^{ax} \therefore du = ae^{ax}dx$ y $dv = \cos nx\, dx \therefore v = \frac{1}{n}\text{sen } nx$

Para la nueva integral con el seno se hace una selección similar $u = {}^{ax} \therefore du = ae^{ax}dx$ y $dv = \text{sen } nx\, dx \therefore v = -\frac{1}{n}\cos nx$, se sigue:

$$\int e^{ax} \text{ sen } nx\, dx = -\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \int \frac{a}{n} e^{ax} \cos nx\, dx$$

Al sustituir lo anterior resulta la siguiente integral cíclica:

$$\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{1}{n} e^{ax} \text{ sen } nx - \frac{a}{n}\left(-\frac{1}{n} e^{ax} \cos nx + \frac{a}{n} \int e^{ax} \cos nx\, dx\right)$$

$$\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right) \int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{1}{n} e^{ax} \text{ sen } nx + \frac{a}{n^2} e^{ax} \cos nx;$$

$$\int e^{ax} \cos nx\, dx = \frac{ne^{ax} \text{ sen } nx + ae^{ax} \cos nx}{n^2 + a^2}$$

❖ Integrales trigonométricas

Se dice que una integral es trigonométrica si el integrando se compone básicamente de funciones trascendentes de este tipo y hay dos cosas dentro de las integrales: funciones trigonométricas y constantes. De manera común, se deben aplicar identidades trigonométricas para resolverlas, por eso es muy importante tenerlas a la mano.

Para su resolución, todos los teoremas de integración son válidos, pero, sobre todo, se deben tener siempre presentes los teoremas T3.30 al T3.35.

T3.30 $\int \cos u\, du = \operatorname{sen} u + c$

T3.31 $\int \operatorname{sen} u\, du = -\cos u + c$

T3.32 $\int \sec^2 u\, du = \tan u + c$

T3.33 $\int \sec u \tan u\, du = \sec u + c$

T3.34 $\int \csc^2 u\, du = -\operatorname{ctg} u + c$

T3.35 $\int \csc u \operatorname{ctg} u\, du = -\csc u + c$

En general, después de aplicar las diferentes sugerencias dadas en el procedimiento 4.2, se debe tener especial interés en las últimas seis:

v. Usar una identidad trigonométrica y simplificar resulta útil cuando se presentan funciones trigonométricas.

vi. Eliminar una raíz cuadrada. Suele presentarse después de completar un cuadrado o una sustitución trigonométrica.

vii. Reducir una fracción impropia.

viii. Separar los elementos del numerador de una fracción entre el denominador de la fracción.

ix. Multiplicar por una forma unitaria $g(x)\,/\,g(x)$ que al multiplicar por el integrando $f(x)$ permita modificar de modo adecuado $[f(x)g(x)]\,/\,g(x)$.

x. Probar sustituir $f(x)$ por $1\,/\,(1\,/\,f(x))$.

Es necesario tener siempre a la mano una tabla de identidades trigonométricas, la cual encontrarás en la actividad 4.2.3; si sustituyes de manera adecuada, llegarás a las fórmulas básicas de integración.

En especial, cuando además de los términos trigonométricos existen factores polinómicos o exponenciales, es más seguro que la integral propuesta deba ser resuelta por partes.

Actividad 4.2.3

Las integrales trigonométricas tienen en su integrando funciones trascendentes de este tipo y para su resolución se deben considerar

---

ACTIVIDAD 4.2.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre las identidades trigonométricas propuestas y análisis y solución de los tres ejercicios propuestos.
- Preparación de una tabla que incluya todas las identidades y teoremas de esta actividad.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos de integrales trigonométricas.
- Enfatizar en la clase cómo se aplican las identidades.

sustituciones basadas en identidades trigonométricas. Las identidades o funciones que se emplean de manera más común son:

1. Funciones recíprocas

1.1 $\operatorname{sen} x \csc x = 1$

1.2 $\cos x \sec x = 1$

1.3 $\tan x \cot x = 1$

2. Funciones pares e impares

2.1 $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

2.2 $\cos(-x) = \cos x$

2.3 $\tan(-x) = -\tan x$

3. Translaciones

3.1 $\operatorname{sen}(\pi/2 - x) = \cos x$

3.2 $\cos(\pi/2 - x) = \operatorname{sen} x$

3.3 $\tan(\pi/2 - x) = \operatorname{ctg} x$

3.4 $\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x$

3.5 $\cos(\pi - x) = -\cos x$

3.6 $\tan(\pi - x) = -\tan x$

4. Cocientes de funciones

4.1 $\tan x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

4.2 $\cot x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$

5. Funciones que de acuerdo con el teorema de Pitágoras suman una constante

5.1 $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

5.2 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

5.3 $\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

6. Identidades del ángulo doble y otros múltiplos

6.1 $\operatorname{sen}^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$

6.2 $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

6.3 $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$

6.4 $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$

6.5 $\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 - \cos x}{2}}$

6.6 $\cos \dfrac{x}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1 + \cos x}{2}}$

6.7 $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

7. Identidades de adiciones de argumentos

7.1 $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \cos x \operatorname{sen} y$

7.2 $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

7.3 $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$

7.4 $2 \operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x - y) + \operatorname{sen}(x + y)$

7.5 $2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = \cos(x - y) - \cos(x + y)$

7.6 $2 \cos x \cos y = \cos(x - y) + \cos(x + y)$

8. Teoremas relacionados con triángulos (véase figura 4.1)

8.1 Ley de senos $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

8.2 Ley de cosenos $c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C$

8.3 Ley de tangentes $\dfrac{a+b}{a-b} = \dfrac{\tan \frac{1}{2}(A+B)}{\tan \frac{1}{2}(A-B)}$

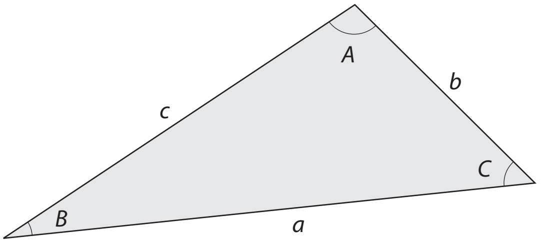


FIGURA 4.1 En los teoremas de triángulos, a cada ángulo *A*, *B* y *C*, se opone su lado *a*, *b* y *c*.

9. Funciones que están relacionadas mediante derivadas

9.1 $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

9.2 $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$

9.3 $(\tan x)' = \sec^2 x$

9.4 $(\cot x)' = -\csc^2 x$

9.5 $(\sec x)' = \sec x \tan x$

9.6 $(\csc x)' = -\csc x \cot x$

Cada integral exige de tu creatividad, por ejemplo:

1. $\int 5 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \cos^2 \frac{x}{2}\, dx$ emplea el ángulo doble y tendrás las sustituciones que te permiten resolverla. ¿Cuál es su solución?

2. $\int \tan^3 7x\, dx$ como $\tan^2 7x = \sec^2 7x - 1$ queda una tangente libre; realiza los productos y tendrás dos integrales de solución directa. ¿Cuál es la solución?

3. $\int \tan^3 5x \sec^4 5x\, dx$, como hay una potencia impar de la tangente, elige los términos $\tan 5x \sec 5x\, dx$ como diferencial y luego convierte todo a términos de $\sec 5x$, así tendrás dos integrales muy simples de la forma u^n.

Es muy importante que tengas tus identidades siempre a la mano para poder aplicar esta técnica de integración. ¡Adelante!

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Ejercicios 4.3

Resuelve los siguientes ejercicios:

4.3.1 $\int 3\tan 5x\,dx$

Resolución

$$3\int \tan 5x\,dx = 3\int \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 5x}dx = \frac{3}{5}\int \frac{\operatorname{sen} 5x}{\cos 5x}5\,dx$$
$$= -\frac{3}{5}\int \frac{(-\operatorname{sen}5x\,5dx)}{\cos 5x} = -\frac{3}{5}\ln(\cos 5x) + c$$

4.3.2 $\int -3\cos^3 4x \operatorname{sen} 4x\,dx$

Resolución

$$\int -3\cos^3 4x \operatorname{sen} 4x\,dx = \frac{3}{4}\int \cos^3 4x(-\operatorname{sen} 4x\,4\,dx)$$
$$= \frac{3}{4}\frac{\cos^4 4x}{4} + c = \frac{3}{16}\cos^4 4x + c$$

4.3.3 $\int \frac{\operatorname{sen}^2 x/2}{\cos^4 x/2}dx$

Resolución

$$\int \frac{\operatorname{sen}^2(x/2)}{\cos^2(x/2)\cos^2(x/2)}dx = \int \frac{\tan^2(x/2)}{\cos^2(x/2)}dx = \int \tan^2(x/2)\sec^2(x/2)\,dx$$
$$= 2\int \tan^2(x/2)(\sec^2(x/2)(dx/2)$$
$$= \frac{2}{3}\tan^3(x/2) + c$$

4.3.4 $\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{4-3\operatorname{sen}^2 2x}}dx$

Resolución

$$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{4-3\operatorname{sen}^2 2x}}dx = \int \frac{\cos 2x}{2\sqrt{1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x}}dx$$

Tomando

$$u^2 = \frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x, u = \frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x, du = \sqrt{3}\cos 2x\,dx \Rightarrow$$
$$\int \frac{\cos 2x}{2\sqrt{1-\frac{3}{4}\operatorname{sen}^2 2x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{sen}^{-1} u + c$$

Por último,

$$\int \frac{\cos 2x}{\sqrt{4-3\operatorname{sen}^2 2x}}dx = \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{sen} 2x\right) + c$$

EJERCICIOS 4.3

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Destinar, al menos, una sesión en la clase para plantear preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

4.3.5 $\int \frac{\sec 3x \tan 3x}{\sqrt{5+2\sec 3x}}dx$

Resolución

Sea $u = 5 + 2\sec 3x \therefore du = 6\sec 3x \tan 3x\, dx \Rightarrow$

$$\int \frac{\sec 3x \tan 3x}{\sqrt{5+2\sec 3x}}dx = \frac{1}{6}\int \frac{6\sec 3x \tan 3x\, dx}{\sqrt{5+2\sec 3x}}$$

$$= \frac{1}{6}\frac{\sqrt{5+2\sec 3x}}{\frac{1}{2}} + c = \frac{1}{3}\sqrt{5+2\sec 3x} + c$$

4.3.6 $\int \cos^4 2x \operatorname{sen}^2 2x\, dx$

Resolución

Sea $\operatorname{sen}^2 2x = \frac{1}{2}(1-\cos 4x)$ y $\cos^2 2x = \frac{1}{2}(1+\cos 4x)$

$$\therefore \int \cos^4 2x \operatorname{sen}^2 2x\, dx = \int \frac{1}{4}(1+\cos 4x)^2 \frac{1}{2}(1-\cos 4x)dx$$

$$= \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 4x)(1+\cos 4x)dx = \frac{1}{8}\int (1-\cos^2 4x)dx$$

$$+\frac{1}{8}\int (1-\cos^2 4x)\cos 4x\, dx = \frac{1}{8}\int dx - \frac{1}{8}\int \frac{1}{2}(1+\cos 8x)dx$$

$$+\frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{8}\int \cos^2 4x \cos 4x\, dx = \frac{1}{8}x$$

$$-\frac{1}{16}\int (1+\cos 8x)dx + \frac{1}{8}\int \cos 4x\, dx - \frac{1}{8}\int (1-\operatorname{sen}^2 4x)\cos 4x\, dx$$

$$= \frac{1}{8}x - \frac{1}{16}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{32}\int \operatorname{sen}^2 4x \cos 4x\, 4dx + c$$

$$= \frac{1}{16}x - \frac{1}{128}\operatorname{sen} 8x + \frac{1}{96}\operatorname{sen}^3 4x + c$$

4.3.7 $\int \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 2x\, dx$

Resolución

$$\int \operatorname{sen}^3 2x \cos^2 2x\, dx = \int \operatorname{sen}^2 2x \cos^2 2x \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$= \int (1-\cos^2 2x)\cos^2 2x \operatorname{sen} 2x\, dx$$

$$= \int \cos^2 2x \operatorname{sen} 2x\, dx - \int \cos^4 2x \operatorname{sen} 2x\, dx$$

Considerando $u = \cos 2x$, $du = -2\operatorname{sen} 2x\, dx$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\cos^3 2x}{3} + \frac{1}{2}\frac{\cos^5 2x}{5} = -\frac{\cos^3 2x}{6} + \frac{\cos^5 2x}{10} + c$$

4.3.8 $\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(1-\cos x)^2}$

Resolución

Al hacer $u = 1 - \cos x$, $du = \operatorname{sen} x\, dx$ resulta:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x\, dx}{(1-\cos x)^2} = \int \frac{du}{u^2} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{1-\cos x} + c$$

4.3.9 $\int \cot^4 x\, dx$

Resolución

$$\int \cot^4 x\, dx = \int \cot^2 x \cot^2 x\, dx = \int (\csc^2 x - 1)\cot^2 x\, dx$$

$$= \int \cot^2 x \csc^2 x\, dx - \int \cot^2 x\, dx = -\frac{\cot^3 x}{3} - \int (\csc^2 x - 1)\, dx$$

Habiendo tomado la primera integral $u = \cot x$ y $du = -\csc^2 x\, dx$ resulta:

$$\int \cot^4 x\, dx = -\frac{\cot^3 x}{3} + \cot x + x + c$$

4.3.10 $\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\operatorname{sen} x \cos x} dx$

Resolución

$$\int \frac{\sqrt{\tan x}}{\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\sqrt{\tan x}}{\frac{1}{\cos^2 x}\operatorname{sen} x \cos x} dx = \int \frac{\frac{\sqrt{\tan x}}{\cos^2 x}}{\frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\cos^2 x}} dx$$

$$= \int \frac{\tan^{\frac{1}{2}} x \sec^2 x\, dx}{\tan x} = \int \tan^{-\frac{1}{2}} x \sec^2 x\, dx = 2\sqrt{\tan x} + c$$

Donde se tomó $u = \tan x$, $du = \sec^2 x\, dx$. La estrategia que se empleó fue tratar de convertir todos los términos a funciones de la tangente y su derivada.

4.3.11 $\int \tan^3 x \sec^6 x\, dx$

Resolución

$$\int \tan^3 x \sec^6 x\, dx = \int \sec^5 x \tan^2 x (\sec x \tan x\, dx)$$

$$= \int \sec^5 x (\sec^2 x - 1)(\sec x \tan x\, dx)$$

$$= \int (\sec^7 x - \sec^5 x)(\sec x \tan x\, dx)$$

$$= \frac{1}{8}\sec^8 x - \frac{1}{6}\sec^6 x + c$$

4.3.12 $\int 2\cos 5x \operatorname{sen} 4x\, dx$

Resolución

Como $2\operatorname{sen} x \cos y = \operatorname{sen}(x-y)+\operatorname{sen}(x+y)$ se tiene:

$$\int 2\operatorname{sen} 4x\cos 5x\, dx = \int \big(\operatorname{sen}(4x-5x)+\operatorname{sen}(4x+5x)\big)dx$$

$$= \int (\operatorname{sen}(-x)+\operatorname{sen} 9x)dx = \int (-\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 9x)dx$$

$$= \cos x - \frac{1}{9}\cos 9x + c$$

4.3.13 $\int \csc^2 \pi\theta \sqrt{\cot \pi\theta}\, d\theta$

Resolución

$$\int \csc^2 \pi\theta\sqrt{\cot\pi\theta}\, d\theta = -\frac{1}{\pi}\int \cot^{\frac{1}{2}}\pi\theta \csc^2 \pi\theta\big(-\pi d\theta\big)$$

$$= -\frac{2}{3\pi}\cot^{\frac{3}{2}}\pi\theta + c$$

4.3.14 $\int \sqrt{1+\csc x}\, dx$

Resolución

La estrategia de algunas integrales, como ésta, consiste en tratar de llevar todos los términos a expresiones en senos y cosenos:

$$\int\sqrt{1+\csc x}\, dx = \int\sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\, dx = \int\sqrt{1+\frac{1}{u}}\,\frac{du}{\cos x}$$

Donde se hizo $u=\operatorname{sen} x$, $du=\cos x\, dx$ y

$$\cos x = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = \sqrt{1-u^2}$$

$$= \int\sqrt{\frac{1+u}{u}}\,\frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \int\sqrt{\frac{1}{u(1-u)}}\, du$$

$$= \int\frac{du}{\sqrt{u-u^2}} = \int\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(u^2-u+\frac{1}{4}\right)}} = \int\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}-\left(u-\frac{1}{2}\right)^2}}$$

Luego, se complementó el cuadrado dentro del radical. Factorizando 1/4 del radical, resulta:

$$1-4(u-1/2)^2 = 1-2^2(u-1/2)^2 = 1-(2u-1)^2$$

O bien:

$$= \int\frac{du}{\sqrt{\frac{1}{4}}\sqrt{1-(2u-1)^2}} = \int\frac{2\,du}{\sqrt{1-(2u-1)^2}} = \operatorname{sen}^{-1}(2u-1)+c$$

ACTIVIDAD 4.2.4

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre expresiones cuadráticas bajo radicales que corresponden a expresiones trigonométricas, demostración de la fórmula propuesta y respuestas a las cuatro preguntas.

Donde al final se aplicó el teorema T3.36:

$$\sqrt{1+\csc x}\, dx = \operatorname{sen}^{-1}(2\operatorname{sen} x - 1) + c$$

De manera equivalente, también se puede actuar así:

$$\sqrt{1+\csc x}\, dx = \int \sqrt{1+\frac{1}{\operatorname{sen} x}}\, dx = \int \sqrt{\frac{\operatorname{sen} x + 1}{\operatorname{sen} x}}\, dx$$

Haciendo:

$$u = \sqrt{\operatorname{sen} x},\ du = \frac{\cos x\, dx}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}} = \frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{2u} dx = \frac{\sqrt{1-u^4}}{2u} dx$$

Y continúa:

$$\int \sqrt{1+\csc x}\, dx = \int \frac{\sqrt{u^2+1}}{u} \frac{2u\, du}{\sqrt{1-u^4}} = 2\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

$$= 2\operatorname{sen}^{-1} u = 2\operatorname{sen}^{-1}\sqrt{\operatorname{sen} x} + c$$

Las expresiones resultantes aparentan ser diferentes, pero al calcular su derivada se muestra que son idénticas.

Actividad 4.2.4

Integrales por sustitución a variable trigonométrica

En muchas tablas de integración se puede encontrar el teorema:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = -\frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$$

¿Cómo se encontró esa antiderivada?

El razonamiento que se sigue en expresiones que contienen radicales y sumas de cuadrados está fundamentado en el teorema de Pitágoras. Para observar la relación en estudio, se traza un triángulo rectángulo y se ubican las componentes de manera adecuada.

Por ejemplo, en este caso al hacer $z = \sqrt{a^2 - u^2}$ resulta la figura 4.2.

✧ En la figura 4.2 se observa que se satisface el teorema de Pitágoras con esta selección y que, a su vez, coincide con el radical en el integrando; luego, $\operatorname{sen} w = u / a$. ¿Estás de acuerdo?

✧ De donde $u = a\operatorname{sen} w$ y $du = a\cos w\, dw$, ¿cierto?

Al sustituir en la integral por resolver se obtiene una integral trigonométrica:

$$\int \frac{\sqrt{a^2-u^2}}{u^2} du = \int \frac{z}{u^2} du = \int \frac{a\cos w}{(a\operatorname{sen} w)^2} a\cos w\, dw$$

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos y enfatizar cómo se aplica en integrales la sustitución por variable trigonométrica.

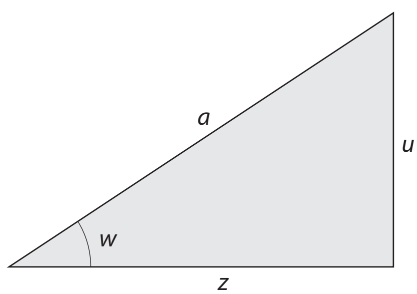


FIGURA 4.2 Triángulo rectángulo que satisface la relación $z = \sqrt{a^2 - u^2}$.

$$=\int \frac{\cos^2 w}{\operatorname{sen}^2 w} dw = \int \cot^2 w\, dw = \int (\csc^2 w - 1)\, dw$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\cot w - w$$

De nuevo, al analizar el triángulo de la figura 4.2 se observa que se cumplen las razones trigonométricas siguientes: $\tan w = u / z$ y $\cot w = z / u$ y, por otro lado, desde $\operatorname{sen} w = u / a$ se tiene que al despejar $w = \operatorname{sen}^{-1}(u / a)$. O bien, también escrito $w = \operatorname{arcsen}(u / a)$, así que se sustituye:

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u^2} du = -\frac{z}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} = -\frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$$

Esto es lo que se quería probar.

1. Si encontraras términos $a^2 + u^2$, ¿cómo será tu triángulo?
2. Si localizas expresiones $u^2 - a^2$, ¿qué sustitución a variable trigonométrica sugieres?
3. En una tabla de integrales se localizó el siguiente teorema:

$$\int \frac{u^2\, du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 - a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + c$$

   Demuestra que es verdadero.

4. Si encuentras expresiones $a^2 - b^2u^2$, ¿qué sustitución trigonométrica sugieres?

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

❖ Integrales por sustitución a variable trigonométrica

Se dice que hay una sustitución a variable trigonométrica cuando la variable de integración se cambia por una función trigonométrica con todos los ajustes que ello implica.

Las identidades trigonométricas a emplear son las del punto 5 de la actividad 4.2.3, específicamente la 5.1 y la 5.2, que ahora podemos escribir para referencia como:

T4.2 $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$

T4.3 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

T4.4 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$

Estas identidades trigonométricas se han clasificado como teorema de Pitágoras porque nacen directamente de dividir dicho teorema,

$c^2 = a^2 + b^2$, entre el cuadrado de la hipotenusa, el cateto adyacente o el opuesto, respectivamente. Desde las expresiones resultantes en los teoremas T4.2 a T4.4, al despejar la función trigonométrica adecuada, éstas permiten transformar sumas o diferencias de cuadrados a un solo elemento cuadrático, lo que facilita realizar cambios de variable en expresiones que cuenten con términos de la forma $a^2 + u^2$, $a^2 - u^2$ o $u^2 - a^2$, así como llevar la integral resultante a una forma trigonométrica. Para elegir la variable adecuada, solo tienes que observar que si en las expresiones previas a fuera 1 resultan $1 + u^2$, $1 - u^2$ o $u^2 - 1$; entonces, eliges la identidad que tenga esa posición para el 1, el signo entre los términos y listo, eliges la función trigonométrica que quede del otro lado de la igualdad.

Una vez que se ha hecho la sustitución, tendrás una integral trigonométrica, para la cual se debe aplicar la técnica para integrales trigonométricas.

Analiza el siguiente ejemplo.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}}$$

Resolución

La integral solicitada tiene un radical en el denominador con radicando $x^2 - 1$.

Se localiza la construcción geométrica que corresponda a la suma de cuadrados encontrada; en los teoremas T4.2 a T4.4, la posición del 1 y su signo corresponde al teorema T4.4, $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. En este caso, para la integral, la selección es $x = \sec z =$ hipotenusa/cateto opuesto, de $dx = \sec z \tan z\, dz$; al sustituir, resulta la figura 4.3.

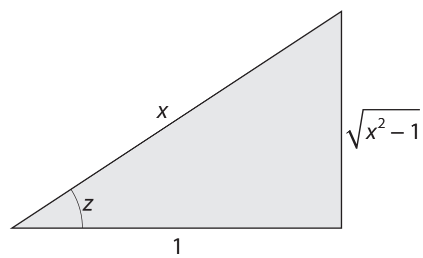


FIGURA 4.3 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\sqrt{x^2 - 1}$.

$$\int \frac{dx}{(x^2 - 1)^{3/2}} = \int \frac{\sec z \tan z\, dz}{(\sec^2 z - 1)^{3/2}} = \int \frac{\sec z \tan z\, dz}{(\tan^2 z)^{3/2}}$$

$$= \int \frac{\sec z\, dz}{\tan^2 z} = \int \frac{\cos^2 z\, dz}{\cos z \operatorname{sen}^2 z} = \int \frac{\cos z\, dz}{\operatorname{sen}^2 z}$$

$$= -\frac{1}{\operatorname{sen} z} + c = \underbrace{-\csc z + c}_{\text{calcular del triángulo}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} + c$$

De este ejemplo, se desprende el siguiente procedimiento.

Procedimiento 4.4

Método de integración por sustitución a variable trigonométrica

1. Si dentro de la integral por resolver se presenta una expresión de la forma $a^2 + u^2$, $a^2 - u^2$ o $u^2 - a^2$ se sugiere continuar con este procedimiento. Si no es el caso, es posible que la integral se resuelva mediante otra técnica.

2. Considerando temporalmente $a = 1$, compara la expresión presente con $1 + u^2$, $1 - u^2$ o $u^2 - 1$.

3. Por la posición y el signo del 1, elige el teorema adecuado, esto es:

a) Si elegiste $1 + u^2$, corresponde el T4.3 $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

b) Si elegiste $1 - u^2$, corresponde el T4.2 $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$.

c) Si elegiste $u^2 - 1$, corresponde el T4.4 $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

4. Factoriza a en su expresión original:

a) $a^2 + u^2 = a^2\left(1 + \left(\dfrac{u}{a}\right)^2\right)$

b) $a^2 - u^2 = a^2\left(1 - \left(\dfrac{u}{a}\right)^2\right)$

c) $u^2 - a^2 = a^2\left(\left(\dfrac{u}{a}\right)^2 - 1\right)$

5. De los pasos 3 y 4 se desprende la variable a función trigonométrica a sustituir.

a) $a^2 + u^2 \;\Rightarrow\; \tan z = \dfrac{u}{a}$

b) $a^2 - u^2 \;\Rightarrow\; \cos z = \dfrac{u}{a}$

c) $u^2 - a^2 \;\Rightarrow\; \sec z = \dfrac{u}{a}$

6. Calcula el diferencial correspondiente a la sustitución elegida.

7. Sustituye en la integral las expresiones resultantes del paso 5 y 6.

8. Resuelve la integral en la nueva variable, con el método de integrales trigonométricas.

9. Al concluir la resolución y volver a la variable original, traza el triángulo representativo de la situación:

a) $a^2 + u^2 \;\Rightarrow\; \tan z = \dfrac{u}{a}$, (véase figura 4.4).

u=cateto opuesto $\quad a$=cateto adyacente

b) $a^2 - u^2 \;\Rightarrow\; \cos z = \dfrac{u}{a}$, (véase figura 4.5).

a=hipotenusa $\quad u$=cateto adyacente

c) $u^2 - a^2 \;\Rightarrow\; \sec z = \dfrac{u}{a}$, (véase figura 4.6)

u=hipotenusa $\quad a$=cateto adyacente

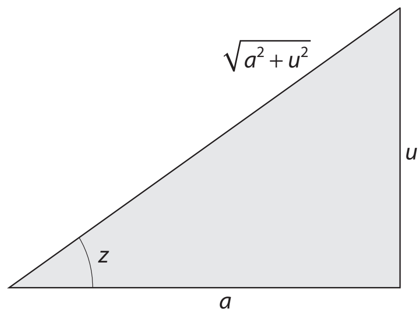


FIGURA 4.4 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\tan z = u/a$.

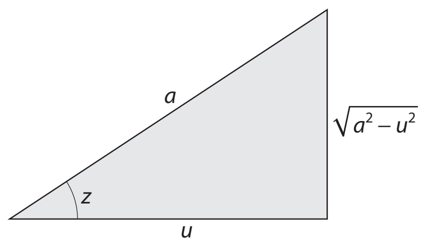


FIGURA 4.5 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\cos z = u/a$.

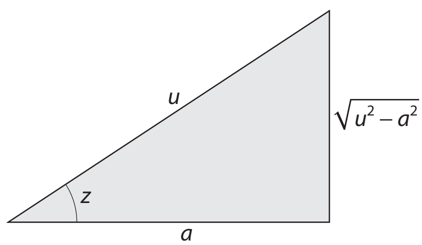


FIGURA 4.6 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\sec z = u/a$.

10. De la figura adecuada al punto 9, construye los elementos de su solución.

11. Simplifica, de ser necesario.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.4

Los siguientes ejercicios muestran la aplicación de este procedimiento 4.4.

Ejercicios 4.4

Resuelve los siguientes ejercicios:

4.4.1 $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}$

Resolución

Apliquemos el procedimiento 4.4 del método de integración por sustitución a variable trigonométrica.

1. Aparece el término $4x^2-9$, que es de la forma u^2-a^2, por lo que el procedimiento continúa.
2. Al considerar de manera temporal $a=1$, tenemos la expresión u^2-1.
3. Por la posición y el signo del 1 se elige c), $\tan^2 x=\sec^2 x-1$, teorema T4.4.
4. Factoriza a en su expresión original:

$$4x^2-9=9\left(\frac{4}{9}x^2-1\right)=9\left(\left(\frac{2}{3}x\right)^2-1\right)$$

5. $u^2-a^2 \;\Rightarrow\; \sec z=\dfrac{u}{a}$; esto $\sec z=\dfrac{2}{3}x$.
6. $\sec z=\dfrac{2}{3}x \therefore \sec z\tan z\,dz=\dfrac{2}{3}dx$.
7. $$\int\frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}}=\frac{3}{2}\int\frac{\sec z\tan z\,dz}{\sqrt{9(\sec^2 z-1)}}$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec z\tan z\,dz}{\sqrt{\tan^2 z}}=\frac{1}{2}\int\sec z\,dz$$
8. $$\frac{1}{2}\int\sec z\,dz=\frac{1}{2}\int\frac{\sec z(\tan z+\sec z)}{\tan z+\sec z}dz$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{\sec^2 z+\sec z\tan z}{\tan z+\sec z}dz=\frac{1}{2}\ln(\tan z+\sec z)+c$$

Donde se observa que el numerador es el diferencial del denominador y previamente se aplicó la sugerencia del inciso *ix* del procedimiento 4.2.

EJERCICIOS 4.4

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para plantear preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

9. De acuerdo con la sustitución $\sec z = \dfrac{2}{3}x$, se traza la figura 4.7.

10. De la figura 4.7 se construye: $\tan z = \dfrac{\sqrt{4x^2-9}}{3}$ y $\sec z = \dfrac{2}{3}x$.

$$\frac{1}{2}\ln(\tan z + \sec z) + c = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\sqrt{4x^2-9}}{3} + \frac{2x}{3}\right) + c$$

11. Que si se considera, simplifica en:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\ln\left(\sqrt{4x^2-9} + 2x\right) + c,$$

ya que la constante absorbe el $(-\ln 3)/2$, que resulta de factorizar el denominador.

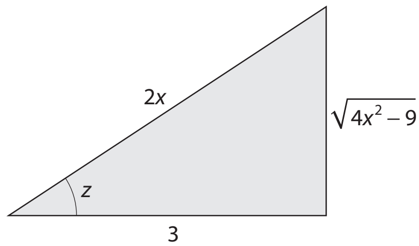


FIGURA 4.7 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\sec z = 2x/3$ del ejercicio 4.4.1.

4.4.2 $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$

Resolución

Resumiendo el procedimiento 4.4, la construcción sugerida por $\sqrt{x^2+1}$ y $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$ (teorema T4.3) con $x = \tan z$, se muestra en la figura 4.8.

De donde $\sec^2 z\,dz = dx$ y se aplica en la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\tan^2 z\sqrt{\tan^2 z+1}} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\tan^2 z \sec z}$$

$$= \int \frac{\sec z\,dz}{\tan^2 z} = \int \cot^2 z \sec z\,dz = \int \cot z \frac{\csc z}{\sec z}\sec z\,dz$$

$$= \int \cot z \csc z\,dz = -\csc z + c = -\frac{\sqrt{x^2+1}}{x} + c$$

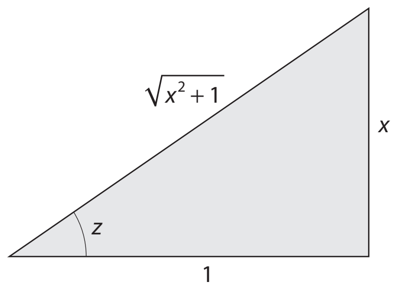


FIGURA 4.8 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\tan z = x$ del ejercicio 4.4.2.

4.4.3 $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Resolución

La integral presenta una forma $1-u^2 = 1-9x^2$; sin embargo, observa que con $v = 1-9x^2 \therefore dv = -18x\,dx$, de donde:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{18}\int \frac{-18x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{18}\int (1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}\left(-18x\,dx\right)$$

Una forma u^n con solución:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{9}\sqrt{1-9x^2} + c$$

Vemos que no fue necesaria la sustitución a variable trigonométrica.

4.4.4 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-9x^2}}$

Resolución

La integral es similar a la del ejercicio 4.4.3, pero ahora el numerador no corresponde con el diferencial. De nuevo, la integral presenta una forma $1-u^2 = 1-9x^2$, para la cual consideramos $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$ y $\cos z = 3x \therefore -\operatorname{sen} z\,dz = 3dx \Rightarrow$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = \frac{1}{27}\int \frac{\cos^2 z(-\operatorname{sen} z\,dz)}{\sqrt{1-\cos^2 z}} = -\frac{1}{27}\int \cos^2 z\,dz$$

$$= -\frac{1}{27}\int \frac{1}{2}\left(1+\cos 2z\right)dz = -\frac{1}{54}\left(z+\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2z\right)+c$$

(véase figura 4.9).

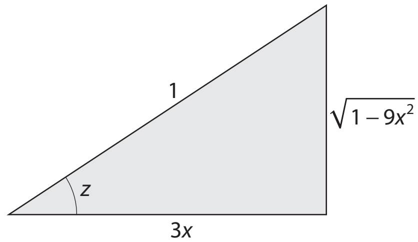


FIGURA 4.9 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\cos z = 3x$ del ejercicio 4.4.4.

Como $\cos z = 3x$, $z = \cos^{-1} 3x$; además, $\operatorname{sen} 2z = 2\operatorname{sen} z\cos z$, de la figura 4.9 se obtiene $\operatorname{sen} 2z = 2\frac{\sqrt{1-9x^2}}{1}3x = 6x\sqrt{1-9x^2}$ $\therefore$

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-9x^2}} = -\frac{1}{54}\left(\cos^{-1} 3x + 3x\sqrt{1-9x^2}\right)+c$$

4.4.5 $\int \sqrt{4x-x^2}\,dx$

Resolución

Al completar el cuadrado se tiene $4x-x^2 = -4+4x-x^2+4 = 4-(x-2)^2$ y la integral se escribe:

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = \int \sqrt{4-(x-2)^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-(\frac{x-2}{2})^2}\,dx$$

que corresponde al teorema $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$, para el cual $\cos z = \frac{x-2}{2}$ y derivando $-\operatorname{sen} z\,dz = \frac{dx}{2}$, sustituyendo:

$$\int \sqrt{4x-x^2}\,dx = 2\int \sqrt{1-\cos^2 z}\left(-2\operatorname{sen} z\,dz\right) = -4\int \operatorname{sen}^2 z\,dz$$

$$= -4\int \frac{1}{2}\left(1-\cos 2z\right)dz = -2\left(z-\frac{1}{2}\operatorname{sen} 2z\right)+c$$

$$= -2z + 2\cos z\operatorname{sen} z + c$$

$$= -2\cos^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{x-2}{2}\sqrt{4-(x-2)^2} + c$$

$$= -2\cos^{-1}\left(\frac{x-2}{2}\right) + \frac{1}{2}(x-2)\sqrt{4x-x^2} + c$$

Donde el término 2 cos z sen z se ha construido calculando los valores de las funciones trigonométricas de la figura 4.10 y simplificando.

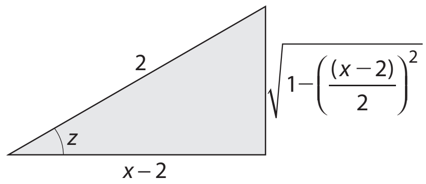


FIGURA 4.10 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\cos z = (x-2)/2$ del ejercicio 4.4.5.

4.4.6 $\int 4x\sqrt{4x^2-1}\,dx$

Resolución

Es verdad que la integral tiene un término cuadrático que invita a $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, pero el término fuera del radical contiene al diferencial del radicando, así con $u = 4x^2 - 1$, $du = 8x\,dx$ y:

$$\int 4x\sqrt{4x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{\frac{1}{2}}\,du = \frac{1}{3}u^{\frac{3}{2}} + c = \frac{1}{3}\left(4x^2-1\right)^{\frac{3}{2}} + c$$

en donde no fue necesaria la sustitución trigonométrica.

4.4.7 $\int \frac{\sqrt{4\theta^2-9}}{\theta^2}\,d\theta$

Resolución

La forma $4\theta^2 - 9$ es equiparable al teorema T4.4 o $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, de donde $\sec z = \frac{2}{3}\theta \therefore \sec z \tan z\,dz = \frac{2}{3}d\theta$ y al sustituir:

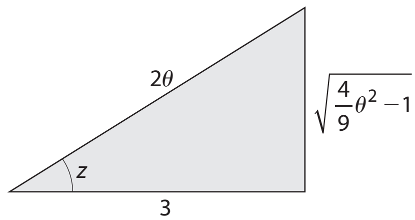


FIGURA 4.11 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\sec z = 2\theta/3$ del ejercicio 4.4.7.

$$\int \frac{\sqrt{4\theta^2-9}}{\theta^2}\,d\theta = \int \frac{\sqrt{9\sec^2 z - 9}}{\frac{9}{4}\sec^2 z}\,\frac{3}{2}\sec z \tan z\,dz = \frac{4}{9}\frac{3}{2}3\int \frac{\tan^2 z}{\sec z}dz$$

$$= 2\int \frac{\sec^2 z - 1}{\sec z}dz = 2\int (\sec z - \cos z)\,dz$$

$$= 2\int \frac{\sec z(\tan z + \sec z)}{\tan z + \sec z}dz - 2\,\mathrm{sen}\,z + c$$

$$= 2\ln(\tan z + \sec z) - 2\,\mathrm{sen}\,z + c \text{ (véase figura 4.11).}$$

$$= 2\ln\left(\frac{1}{3}\sqrt{\frac{4}{9}\theta^2-1} + \frac{2}{3}\theta\right) - 2\frac{1}{2\theta}\sqrt{\frac{4}{9}\theta^2-1} + c$$

$$= 2\ln\left(\frac{1}{9}\sqrt{4\theta^2-9} + \frac{2}{3}\theta\right) - \frac{1}{3\theta}\sqrt{4\theta^2-9} + c$$

4.4.8 $\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^4}\,dy$

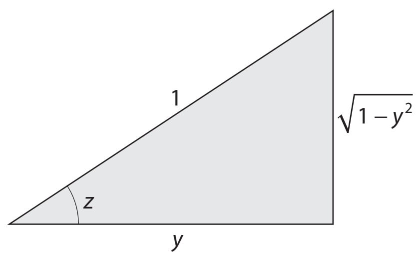


FIGURA 4.12 Triángulo rectángulo que satisface la relación $\cos z = y$ del ejercicio 4.4.8.

Resolución

$y = \cos z \therefore dy = -\mathrm{sen}\,z\,dz.$

Sustituyendo:

$$\int \frac{\sqrt{1-y^2}}{y^4}dy = \int \frac{\operatorname{sen} z}{\cos^4 y}(-\operatorname{sen} z\, dz) = -\int \frac{\operatorname{sen}^2 z}{\cos^4 z}dz$$

$$= -\int \tan^2 z \sec^2 z\, dz = -\frac{1}{3}\tan^3 z + c = -\frac{\left(1-y^2\right)^{\frac{3}{2}}}{3y^3} + c$$

(véase figura 4.12).

Actividad 4.2.5

Naturaleza de las fracciones parciales

Cuando realizas una suma entre fracciones, la fracción resultante posee en su denominador el rastro de las fracciones que intervinieron, ya que corresponde al mínimo común múltiplo (mcm) de los denominadores de las fracciones participantes.

Así, por ejemplo, si se desea recobrar los coeficientes que tenían originalmente estas fracciones para generar el resultado, se tendrá:

$$\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{101}{3\cdot 4\cdot 5}$$

En la fracción presentada no se ha desarrollado la suma de fracciones, de tal forma que al realizarla se encuentra $\frac{a(4)5+b(3)5+c(3)4}{3\cdot 4\cdot 5}$ $=\frac{101}{3\cdot 4\cdot 5}$, que por la igualdad de los denominadores corresponde a $a(4)5+b(3)5+c(3)4=101$. Esta expresión es una ecuación lineal que tiene infinitas soluciones; entonces, para conocer los valores que realizan la suma correcta tendrás muchas posibilidades. Por ejemplo, con $a=0$, $b=0$ resulta $c=101/12$, o bien $a=1$, $b=3$ obtienes $c=3$, entre otras infinitas posibilidades.

Sin embargo, si te pregunto cuál es la cifra representante de las centésimas en el número 0.123 podrás responder que “2” y ésta también es una suma de fracciones, ¿cierto?

En efecto:

$$\frac{a}{10}+\frac{b}{100}+\frac{c}{1000}=\frac{a(100)+b(10)+c}{1000}=0.123$$

¿Por qué si la igualdad es, en esencia, la misma ahora sí se puede responder?

La respuesta es: porque en realidad 0.123 es un polinomio de la forma:

$$1/10+2/100+3/1000=[1(100)+2(10)+3]/1000$$

y directamente se puede conocer cuáles son los valores de a, b y c. Además, sabes que todas las fracciones son propias porque su numerador nunca es mayor que el denominador, que los valores de a, b y c no son mayores que 9 y son enteros positivos. Pero, lo más importante es que el valor que le des a cada una no afecta a las demás.

ACTIVIDAD 4.2.5

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y respuestas a los siete cuestionamientos que implican la presentación de siete ejercicios resueltos según los puntos 6 y 7.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Recordar y enfatizar que los ejercicios que se propongan corresponden a fracciones propias; es decir, el grado del denominador siempre es mayor que el del numerador.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

Así, en los polinomios, si tienes $ax^2 + bx + c$, y se te pregunta cuáles son los valores de las variables para que el polinomio resultante sea $x^2 + 2x + 3$, no tiene ningún grado de dificultad, porque los coeficientes de un término no afectan a los otros. Esta propiedad, junto con la cualidad de las fracciones propias y los factores primos, es la esencia de la recuperación de los coeficientes de las fracciones que intervienen en una suma, si solo se conoce su resultado.

1. ¿Qué es una fracción propia?
2. ¿Qué son los factores primos?

Iniciemos de nuevo nuestro cuestionamiento. ¿Cuáles serán los valores de los coeficientes para que la siguiente igualdad sea verdadera?

$$\frac{a}{x+1} + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-1} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)(x-1)}$$

3. Resuelve la suma de fracciones planteada en el lado izquierdo de la expresión. ¿Qué resulta?
4. Desde luego, los denominadores son idénticos. ¿Qué puedes decir de los numeradores? ¿Resultó un polinomio cuadrático cuyos coeficientes dependen de a, b y c?
5. ¿Cómo deben ser los coeficientes de ambos polinomios y por qué? ¿Qué implican esas tres igualdades?
6. Resuelve el sistema de tres ecuaciones lineales con las tres incógnitas resultantes. ¿Qué obtuviste?
7. ¿Lo que encontraste quiere decir esto?

$$\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} = \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)(x-1)}$$

8. Entonces, si la fracción proviene de intentar resolver la integral:

$$\int \frac{x^2 + 2x + 3}{x(x+1)(x-1)} dx$$

¿Será lo mismo que se resuelva la siguiente integral? ¿Por qué?

$$\int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{3}{x} + \frac{3}{x-1} \right) dx$$

¡En eso consiste la técnica que estudiaremos enseguida y que se denomina: método de fracciones parciales!

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Actividad 4.2.6

Polinomios–funciones

En la actividad 4.2.5 se planteó el problema: ¿Cuáles serán los valores de los coeficientes para que la siguiente igualdad sea verdadera?

ACTIVIDAD 4.2.6

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y respuestas a los siete cuestionamientos que implican la presentación de siete ejercicios resueltos según los puntos 6 y 7.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Recordar y enfatizar que los ejercicios que se propongan corresponden a fracciones propias; es decir, el grado del denominador siempre es mayor que el del numerador.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

$$\frac{a}{x+1}+\frac{b}{x}+\frac{c}{x-1}=\frac{x^2+2x+3}{x(x+1)(x-1)}$$

Al seguir el razonamiento y realizar la suma de fracciones se llegó a la siguiente igualdad: $ax(x-1)+b(x+1)(x-1)+cx(x+1)=x^2+2x+3$. Después, realizaste los productos y la igualación de coeficientes te llevó a un sistema lineal que resolviste de manera satisfactoria para encontrar $a=1$, $b=3$ y $c=3$. ¿Estamos de acuerdo en todo?

¡Pero, un momento! Lo que tenemos es una igualdad entre polinomios y los polinomios son funciones ¿cierto? Entonces, si los polinomios son iguales, sus gráficas también lo son. ¿Y si evaluamos a ambos en algún punto en particular deben valer lo mismo?

1. Observa con atención la igualdad, toma un valor de x y evalúa sobre él. El valor que elijas es indistinto, obtendrás una ecuación con tres incógnitas. Simplemente, evalúa tres veces en diferentes puntos y te ahorras todas las multiplicaciones de polinomios.
2. Pero existen valores de x que simplifican en extremo el trabajo. En efecto, para el ejemplo mostrado son $x=0$, $x=1$ y $x=-1$. ¿Por qué?
3. Evalúa en $x=0$, $x=1$ y $x=-1$ la ecuación $ax(x-1)+b(x+1)(x-1)+cx(x+1)=x^2+2x+3$ y obtendrás de manera independiente en cada caso $b=-3$, $c=3$ y $a=1$. ¿Es correcto?
4. ¿Qué puedes concluir de este procedimiento?
5. No en todos los casos es posible obtener valores de x que den solución directa a algún coeficiente, pero por este método lograrás encontrar los más posibles y luego evaluar en otros valores para sustituir los coeficientes conocidos. ¡Resultan excelentes simplificaciones!
6. Propón a tus compañeros cuatro ejercicios similares al que se resolvió y entrega su resolución.
7. Plantea tres expresiones de sumas de fracciones en las que el numerador sea una constante y el denominador un polinomio de primer grado; realiza la suma y simplifica. Aplica la técnica discutida en esta actividad y muestra cómo se recuperan las fracciones parciales.

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador. Cualquier comentario o discusión se puede realizar con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

Actividad 4.2.7

Casos en las fracciones parciales

La localización de las fracciones parciales que pueden sustituir de manera adecuada el argumento de una integral depende prácticamente de una correcta factorización del denominador de la expresión.

En general, existen solo cuatro casos básicos que se pueden presentar y para los cuales se sugiere actuar de la siguiente forma:

1. Factorización que genera factores lineales diferentes.

Como los factores son de la forma $(x - r)$, se plantean tantas fracciones como factores diferentes haya. Por ejemplo, si la factorización de un polinomio resultó $(x - 4)(x + 2)(x - 1)$. Entonces, las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{x-4} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-1}$$

2. Factorización que genera factores lineales repetidos.

Esto quiere decir que si se encontró un factor lineal $(x - r)$ repetido n veces, aparece el término $(x - r)^n$, por lo que se plantean tantas fracciones como sea el valor de n, pero con potencias crecientes hasta dicho valor.

Por ejemplo, si se encontró $(2x - 1)(x + 3)^3$, el factor $(x + 3)$ está repetido tres veces, por lo que las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{2x+1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{(x+3)^2} + \frac{d}{(x+3)^3}$$

3. Factores cuadráticos irreductibles diferentes.

Para este caso, los factores son de la forma $a_1x^2 + b_1x + c_1$ irreductibles; es decir, no tienen raíces reales. Para esto, se plantea una fracción para cada factor y, en particular, sus **numeradores** son lineales de la forma $ax + b$, donde a y b son las incógnitas por localizar.

Por ejemplo, si se encuentran los factores $(x + 5)(x^2 + 4)(x^2 + x + 1)$, tiene dos factores cuadráticos irreductibles diferentes para los que se puede probar que no tienen raíces reales. Así, las fracciones propuestas serán:

$$\frac{a}{x+5} + \frac{bx+c}{x^2+4} + \frac{dx+e}{x^2+x+1}$$

4. Si los factores cuadráticos son repetidos, al igual que con los factores lineales múltiples, se plantean tantas fracciones como repetición del factor haya, pero con potencias crecientes hasta el valor de n. Por ejemplo, si se encuentra cuatro veces el factor irreductible $(x^2 + 1)$ se tendrá presente el factor $(x^2 + 1)^4$ y se proponen las siguientes fracciones:

ACTIVIDAD 4.2.7

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis de expresiones analíticas.
- Gusto por la reflexión.
- Respeto por el orden.
- Seguimiento de procedimiento.

Productos

- Ensayo con reflexiones sobre los cuatro casos de fracciones parciales y propuestas de cinco integrales por fracciones parciales en su formato original y con el planteamiento después de convertir el argumento a fracciones parciales.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Proponer que los cinco ejercicios propuestos comprendan, al menos, uno de cada tipo de caso y que existe una puntuación más alta si se resuelven las integrales.

$$\frac{ax+b}{x^2+1}+\frac{cx+d}{(x^2+1)^2}+\frac{ex+f}{(x^2+1)^3}+\frac{gx+h}{(x^2+1)^4}$$

Desde luego, todos los casos pueden coexistir de manera simultánea.

Desde aquí se infiere que el método de fracciones parciales se aplica en integrales de la forma $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ en las que $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y, en particular, el grado $p(x)$ es menor que el grado $q(x)$; si éste no es el caso se tendrá que realizar previamente la división de polinomios, con lo que se obtendrá $\int \left[c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}\right]dx$, en donde $c(x)$ es el cociente de la división y $r(x)$ su residuo. Una vez que la fracción se ha llevado a esta forma podemos estar seguros de que $r(x)/q(x)$ es una fracción propia, a la cual es posible aplicar la descomposición estudiada.

a) Propón a tus compañeros cinco ejemplos de este tipo de integrales, en los cuales se presenten los dos formatos: la integral con el cociente original $p(x)/q(x)$ y la integral con las fracciones parciales encontradas. No es obligatorio resolver las integrales.

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

❖ Integrales por fracciones parciales

Cuando en el integrando de una integral se presentan cocientes entre polinomios, se tiene la oportunidad de poder encontrar un conjunto de integrales más simples equivalentes a la integral bajo análisis. A esta técnica de integración se le denomina integración por fracciones parciales.

Cuando se encuentra un integrando de la forma $p(x)/q(x)$ donde ambos $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios y el grado de $p(x)$ es menor que el de $q(x)$ (si no fuera así, haz la división previamente), estás ante un posible caso de fracciones parciales. Las fracciones parciales son aquellas que debieron generar a $p(x)/q(x)$ al sumarse y tienen la cualidad de que sus denominadores son lineales o cuadrático irreductibles. Así, en general, las fracciones simples resultantes se integran con facilidad aplicando los teoremas T3.27, T3.28, T3.38 y T3.39.

T3.27 $\int u^n\,du=\frac{u^{n+1}}{n+1}+c;\ n\neq -1,\ n$ racional.

T3.28 $\int \frac{du}{u}=\ln u+c$

T3.38 $\int \frac{du}{1+u^2}=\tan^{-1}u+c$

T3.39 $\int -\frac{du}{1+u^2} = \operatorname{ctg}^{-1} u + c$

Procedimiento 4.5

Cálculo de los coeficientes de las fracciones por igualdad de polinomios

1. Sea la fracción propia $p(x)/q(x)$ que se ha descompuesto en sus propuestas de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)} + \frac{p_2(x)}{q_2(x)} + \cdots + \frac{p_n(x)}{q_n(x)} = \frac{p(x)}{q(x)}$$

   Realiza la suma e iguala los numeradores

$$p_1[q_2q_3 \cdots q_n] + p_2[q_1q_3 \cdots q_n] + \cdots + p_n[q_1q_3 \cdots q_{n-1}] = p(x)$$

2. Realiza todos los productos indicados.
3. Reduce y factoriza términos semejantes. Ambos lados de la ecuación representan al mismo polinomio $p(x)$.
4. Establece un sistema de ecuaciones con base en una ecuación por cada coeficiente de $p(x)$.
5. Resuelve el sistema de ecuaciones para encontrar los coeficientes de los $q_i(x)$ buscados.
6. Establece las fracciones parciales.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.5

Calcula las fracciones parciales de $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$

1. $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a}{x+1} + \frac{bx+c}{x^2+1}$
2. $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{a(x^2+1)+(bx+c)(x-1)}{(x-1)(x^2+1)} \Rightarrow$

   $a(x^2+1)+(bx+c)(x-1) = 2x+1$
3. $ax^2 + a + bx^2 + cx - bx - c = 2x+1$

   $(a+b)x^2 + (c-b)x + a - c = 2x+1$
4. Para $x^2 : a+b=0$, para $x : c-b=2$ y para las constantes $a-c=1$.
5. Trabajando por sustitución de $a+b=0 \therefore a=-b$ y de $c-b=2 \therefore c=2+b$, se sustituye en $a-c=1 \therefore -b-2-b=1$.

   Entonces $b=-3/2$, $a=3/2$ y $c=1/2$.
6. $\frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{\frac{3}{2}}{x+1} + \frac{-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}}{x^2+1}$

Procedimiento 4.6

Cálculo de los coeficientes por evaluación de polinomios

1. Sea la fracción propia $p(x)/q(x)$ que se ha descompuesto en sus propuestas de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$$

2. Escribe la igualdad de los numeradores. Observa que cada término tiene todos los factores, excepto su propio denominador.

$$p_1[q_2q_3\cdots q_n]+p_2[q_1q_3\cdots q_n]+...+p_n[q_1q_3\cdots q_{n-1}]=p(x)$$

3. Evalúa la expresión del paso 2 en tantos valores de x como coeficientes desconocidos haya. De preferencia utiliza los valores de x en los que los factores $q_i(x)$ se hacen cero y otros si le hacen falta. Obtendrás un sistema de ecuaciones lineales.
4. Resuelve el sistema lineal del paso 3.
5. Establece las fracciones parciales.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.6

Calcula las fracciones parciales de

$$\frac{4x^2-x+1}{(x+3)(x+2)(x-1)^2}$$

1. $\dfrac{4x^2-x+1}{(x+3)(x+2)(x-1)^2}=\dfrac{a}{x+3}+\dfrac{b}{x+2}+\dfrac{c}{x-1}+\dfrac{d}{(x-1)^2}$
2. $a(x+2)(x-1)^2+b(x+3)(x-1)^2+c(x+3)(x+2)(x-1)$
$+d(x+3)(x+2)=4x^2-x+1$
3. Evaluando para $x=-3$; luego, $a(-1)(-4)^2=36+3+1$ $\therefore a=-5/2$; para $x=-2 \therefore b=19/9$. Como puedes observar, hasta este punto, evaluar en esos valores que hacen cero a los denominadores permite evaluar directamente una incógnita. Sin embargo, con $x=1$ hay dos términos y solo se podrá encontrar el del exponente más alto: $d(4)(3)=4-1+1 \therefore d=1/3$.
4. Para encontrar la incógnita restante utiliza cualquier otro valor que no se haya usado, entre más simple mejor; por ejemplo, $x=0$; $2a+3b+6c+6d=1 \Rightarrow 2(-5/2)+3(19/9)$
$+6c+6(1/3)=1$. Finalmente $c=-7/18$.
5. $-\dfrac{5}{2(x+3)}+\dfrac{19}{9(x+2)}-\dfrac{7}{18(x-1)}+\dfrac{1}{3(x-1)^2}$

Procedimiento 4.7

Cálculo de los coeficientes por *método mixto*: coeficientes del polinomio y evaluación de polinomios.

1. Sea la fracción propia $p(x)/q(x)$ que se ha descompuesto en sus propuestas de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$$

2. Escribe la igualdad de los numeradores. Observa que cada término tiene todos los factores, excepto su propio denominador.

$$p_1[q_2q_3\cdots q_n]+p_2[q_1q_3\cdots q_n]+\cdots+p_n[q_1q_3\cdots q_{n-1}]=p(x)$$

3. Evalúa la expresión del paso 2 en tantos valores de x como coeficientes desconocidos haya y se puedan encontrar directamente mediante el procedimiento 4.6, utilizando los valores de x en los que los factores $q_i(x)$ se hacen cero y otros sí le hacen falta. Así, obtendrás un sistema de ecuaciones lineales en combinación con lo que encontrarás en el paso 4.
4. Realiza mentalmente los coeficientes de las potencias más altas o más bajas (o las que te interesen) e iguala al coeficiente del numerador original. Este paso se puede intercambiar en el orden con el 3, según convenga.
5. Resuelve el sistema de ecuaciones obtenido en el paso 4.
6. Establece las fracciones parciales.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.7

Calcula las fracciones parciales de:

$$\frac{4x^2+1}{(x+1)(x-2)(x^2+4)}$$

1. $\dfrac{p(x)}{q(x)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x-2}+\dfrac{cx+d}{x^2+4}$
2. $a(x-2)(x^2+4)+b(x+1)(x^2+4)$
$$+(cx+d)(x+1)(x-2)=4x^2+1$$
3. $x=-1$, $a=-1/5$; $x=2$, $b=17/192$
4. Para x^3, que es la potencia más alta de todos los productos y su coeficiente, es: $a+b+c=0$. De donde $c=107/960$. Por último, con $x=0$ que son los coeficientes de todas las constantes $-8a+4b-7d=1$, resulta $d=229/96$.
5. $\dfrac{p(x)}{q(x)}=-\dfrac{1}{5(x+1)}+\dfrac{17}{192(x-2)}+\dfrac{\frac{107}{960}x+\frac{229}{96}}{x^2+4}$

Procedimiento 4.8

Cálculo de los coeficientes en el límite

1. Sea la fracción propia $p(x)/q(x)$ que se ha descompuesto en sus propuestas de fracciones parciales de la forma:

$$\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}$$

2. Realiza mentalmente el proceso de multiplicar toda la expresión por el divisor de $p_1(x)$ (la primera fracción), de esto resulta:

$$\left(\frac{p_1(x)}{q_1(x)}+\frac{p_2(x)}{q_2(x)}+\cdots+\frac{p_n(x)}{q_n(x)}\right)q_1(x)=\frac{p(x)}{q(x)}q_1(x)$$

   Observa que $q_1(r)=0$, entonces en el límite cuando $x\to r$ todos los términos se hacen cero, a excepción de $p_1(r)=\dfrac{p(r)}{q(r)}q_1(r)$, donde en el lado derecho también aparece el $\lim\limits_{x\to r} q_1(x)/q_1(x)=1$. Evalúa directamente el cociente de la derecha y tendrás el coeficiente de la izquierda para cada caso. Repite este proceso para cada término.

3. Las incógnitas que no se puedan calcular en el límite, se localizan con alguno de los procedimientos 4.5, 4.6 o 4.7.
4. Establece las fracciones parciales.

Nota: Para los procedimientos 4.5 a 4.8, los valores de x que se pueden emplear pueden ser reales, imaginarios o complejos, con lo cual los procedimientos son más eficientes.

Ejemplo de aplicación del procedimiento 4.8

Calcula las fracciones parciales de:

$$\frac{3x^3-1}{(2x+1)(x-1)(x^2+1)}$$

1. $$\frac{3x^3-1}{(2x+1)(x-1)(x^2+1)}=\frac{a}{2x+1}+\frac{b}{x-1}+\frac{cx+d}{x^2+1}$$

2. Para $x\to -1/2$ que es la raíz del primer denominador:

$$\frac{3x^3-1}{\cancel{(2x+1)}(x-1)(x^2+1)}=\frac{a}{\cancel{2x+1}}$$

$$a=\frac{3(-1/2)^3-1}{(-1/2-1)(1/4+1)}=\frac{11}{15}$$

   Para $x\to 1$

$$\frac{3x^3-1}{(2x+1)\cancel{(x-1)}(x^2+1)}=\frac{b}{\cancel{x-1}}=\frac{1}{3}$$

Para $x \to i$, que es la raíz imaginaria de $x^2+1=0$ (si no tienes dominio en los números complejos aplica tu álgebra y cada vez que aparezca i^2 sustituye $i^2=-1$.

$$\frac{3x^3-1}{(2x+1)(x-1)\cancel{(x^2+1)}}=\frac{cx+d}{\cancel{x^2+1}}$$

$$\frac{3i^3-1}{(2i+1)(i-1)}=ci+d=\frac{3i(i^2)-1}{2i^2+i-2i-1}=\frac{-3i-1}{-2-i-1}=\frac{1+3i}{3+i}$$

$$=\frac{(1+3i)(3-i)}{(3+i)(3-i)}=\frac{3+9i-i-3i^2}{9+3i-3i-i^2}=\frac{3+8i+3}{9+1}$$

$$=\frac{3+8i+3}{9+1}=\frac{6}{10}+\frac{8}{10}i=ci+d$$

Al final, por igualdad de coeficientes $c=8/10=4/5$ y $d=6/10=3/5$.

3. Si no quieres utilizar el álgebra de los complejos, observa que c y d se encuentran evaluando en otros dos posibles valores de x, $x=0$ te da directamente d.

4. $\dfrac{11}{15(2x+1)}+\dfrac{1}{3(x-1)}+\dfrac{4x+3}{5(x^2+1)}$

Ejercicios 4.5

Resuelve los siguientes ejercicios:

4.4.1 $\displaystyle\int\frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)}$

Resolución

Al analizar el integrando se observa que es una fracción propia, que de acuerdo con la actividad 4.1.8 se escribe de la siguiente manera:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{2x+1}$$

que corresponde al caso de factores lineales diferentes y, al realizar la suma, la expresión resulta:

$$\frac{x}{(x+1)(2x+1)}=\frac{a}{x+1}+\frac{b}{2x+1}=\frac{a(2x+1)+b(x+1)}{(x+1)(2x+1)}$$

Al considerar la igualdad de denominadores, según el procedimiento 4.5, resulta la igualdad de numeradores.

$$a(2x+1)+b(x+1)=x$$
$$2ax+a+bx+b=(2a+b)x+(a+b)=x$$

Luego, se igualan los coeficientes

$$2a+b=1,\ \ a+b=0 \therefore a=-b\ \Rightarrow\ -2b+b=1$$

$b=-1$, $a=1$, por lo que la integral se escribe:

EJERCICIOS 4.5

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para plantear preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

$$\int \frac{x\,dx}{(x+1)(2x+1)} = \int\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{2x+1}\right)dx$$

$$= \ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(2x+1) + c = \ln\frac{x+1}{\sqrt{2x+1}} + c$$

Para simplificar se aplicaron las propiedades del logaritmo para potencias y diferencias.

4.4.2 $\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx$

Resolución

Se analiza el integrando y se observa que es una fracción impropia. Al realizar la división resulta el cociente $x^2 + x + 4$ con residuo $4x^2 + 16x - 8$, por lo que la integral se escribe:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \int\left(x^2 + x + 4 + \frac{4x^2 + 16x - 8}{x^3 - 4x}\right)dx$$

Analicemos la fracción:

$$\frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)(x-2)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+2} + \frac{c}{x-2}$$

Se aplica el procedimiento 4.8:

$$x \to 0,\ \frac{4x^2 + 16x - 8}{\cancel{x}(x+2)(x-2)} = \frac{a}{\cancel{x}} \therefore a = 2$$

$$x \to -2,\ \frac{4x^2 + 16x - 8}{x\cancel{(x+2)}(x-2)} = \frac{b}{\cancel{x+2}} \therefore b = -3$$

$$x \to 2,\ \frac{4x^2 + 16x - 8}{x(x+2)\cancel{(x-2)}} = \frac{c}{\cancel{x-2}} \therefore c = 5$$

De donde la integral a resolver es:

$$\int \frac{x^5 + x^4 - 8}{x^3 - 4x}dx = \int\left(x^2 + x + 4 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x+2} + \frac{5}{x-2}\right)dx$$

$$= \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 4x + 2\ln x - 3\ln(x+2) + 5\ln(x-2) + c$$

4.4.3 $\int \frac{x\,dx}{x^4 - 3x^2 + 2}$

Resolución

Al realizar la factorización del denominador se encuentra $(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+1)(x-1)$, de donde se proponen las fracciones parciales y resulta la igualdad de numeradores del procedimiento 4.6:

$$\frac{x}{x^4-3x^2+2}=\frac{a}{x-\sqrt{2}}+\frac{b}{x+\sqrt{2}}+\frac{c}{x-1}+\frac{d}{x+1}$$

$$a(x+\sqrt{2})(x+1)(x-1)+b(x-\sqrt{2})(x+1)(x-1)$$
$$+c(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x-1)+d(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})(x+1)=x$$

Evaluando para $-\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$, -1 y 1 resulta $a=b=1/2,\ c=d=-1/2$.

Se resuelve y simplifica para encontrar:

$$\int\left(\frac{1}{2(x+\sqrt{2})}+\frac{1}{2(x-\sqrt{2})}-\frac{1}{2(x-1)}-\frac{1}{2(x+1)}\right)dx$$

$$\int\frac{x\,dx}{x^4-3x^2+2}=\frac{1}{2}\ln\frac{x^2-2}{x^2-1}+c$$

4.4.4 $\int\frac{x\,dx}{x^3-1}$

Resolución

Las fracciones simples propuestas son:

$$\frac{a}{x-1}+\frac{bx+c}{x^2+x+1}=\frac{x}{x^3-1}$$

Y del procedimiento 4.7:

$$a(x^2+x+1)+(bx+c)(x-1)=x$$

Con $x=1,\ a=1/3$, para la potencia más alta x^2, los coeficientes son $a+b=0\ \therefore\ b=-1/3$ y para las constantes $a-c=0\ \therefore\ c=1/3$.

$$\int\frac{x\,dx}{x^3-1}=\frac{1}{3}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\frac{\ln(x-1)}{3}-\frac{1}{3}\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx$$

Veamos por separado la nueva integral:

$$\int\frac{x-1}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{2x-2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\int\frac{(2x+1)-2-1}{x^2+x+1}dx$$
$$=\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{x^2+x+1}dx-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)+1-\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{1}{2}\ln(x^2+x+1)-\frac{3}{2}\int\frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{2}\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+x+1) - \frac{3}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$$

Por último, se sustituye en la original:

$$\int \frac{x\,dx}{x^3-1} = \frac{\ln(x-1)}{3} - \frac{\ln(x^2+x+1)}{6} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right) + c$$

4.4.5 $\int \frac{x^2\,dx}{1-x^4}$

Resolución

Como $\frac{x^2}{1-x^4} = \frac{a}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x^2}$, al aplicar el procedimiento 4.8 resulta:

$x \to 1$, $a = 1/4$; $x \to -1$, $b = -1/4$ y para

$x \to i$, $\frac{i^2}{1-i^2} = ci + d = \frac{-1}{2}$ $\therefore$ $c = 0$, $d = -\frac{1}{2}$

$$\int \frac{x^2}{1-x^4}dx = \frac{1}{4}\int\left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} - \frac{2}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{4}(-\ln(1-x) - \ln(1+x) - 2\tan^{-1}x) + c$$

4.4.6 $\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$

Resolución

Las fracciones son:

$$\frac{x^2}{(x+2)^2(x+4)^2} = \frac{a}{x+2} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x+4} + \frac{d}{(x+4)^2}$$

Que del procedimiento 4.8 con $x \to -2$, $b = 1$ y $x \to -4$, $d = 4$, adicionalmente con $x = 0$, $0 = \frac{a}{2} + \frac{1}{4} + \frac{c}{4} + \frac{1}{4}$ $\therefore 2a + c = -2$.

Y de $x = -1$, $-4 = 3a + c$, después de resolver las simultáneas $2a + c = -2$, $-4 = 3a + c$, $a = -2$, $c = 2$.

Por último:

$$\int \frac{x^2\,dx}{(x+2)^2(x+4)^2} = -2\ln(x+2) - \frac{1}{x+2} + 2\ln(x+4) - \frac{4}{x+4} + c$$

$$= 2\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right) - \frac{1}{x+2} - \frac{4}{x+4} + c$$

4.4.7 $\int \frac{dx}{(1+x^2)^4}$

Resolución

El denominador contiene un factor término cuadrático que sugiere $\sec^2 x = 1+\tan^2 x$, de donde $x = \tan z$, $dx = \sec^2 z\,dz$.

O bien:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \int \frac{\sec^2 z\,dz}{\sec^8 z} = \int \cos^6 z\,dz$$

Esto se resuelve como integral trigonométrica, si se pretende aplicar fracciones parciales:

$$\frac{1}{(1+x^2)^4} = \frac{ax+b}{1+x^2} + \frac{cx+d}{(1+x^2)^2} + \frac{ex+f}{(1+x^2)^3} + \frac{gx+h}{(1+x^2)^4}$$

Para $x \to i$, $gi + h = 1 \therefore g = 0, h = 1$ se aplica el procedimiento 4.8, que indica que el cuarto término es el mismo que el integrando original. De manera directa, todos los demás términos son cero. Por último, se aplica el método correcto:

$$\int \frac{dx}{(1+x^2)^4} = \frac{x(15x^4 + 40x^2 + 33)}{48(1+x^2)^3} + \frac{5}{16}\tan^{-1}(x) + \mathrm{c}$$

4.4.8 $\int \frac{dx}{x(x^2+1)^2}$

Resolución

$$\frac{1}{x(1+x^2)^2} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{(1+x^2)} + \frac{dx+e}{(1+x^2)^2}$$

Se aplica el procedimiento 4.8: $x \to 0$, $a = 1$,

$$x \to i,\ \frac{1}{i} = di + e = \frac{i}{i^2} = -i \therefore e = 0, d = -1$$

$$x = 2i,\ \frac{1}{2i(1+4i^2)^2} = \frac{1}{2i} + \frac{2bi+c}{1+4i^2} - \frac{2i}{(1+4i^2)^2}$$

$$1 = (1+4i^2)^2 + (2bi+c)2i(1+4i^2) - 4i^2$$

$$1 = (1-4)^2 + (-4b+2ic)(1-4) + 4$$

$$-12 = -3(-4b+2ic) \therefore c = 0, b = -1$$

$$\int \frac{dx}{x(1+x^2)^2} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{(1+x^2)} - \frac{x}{(1+x^2)^2}\right)dx$$

$$= \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) + c$$

Actividad 4.2.8

¿Qué técnica de integración aplico?

¿Qué técnica de integración debo aplicar al tener la oportunidad de resolver una integral?

1. Primero es importante preguntarse cuál es el motivo que implica resolver la integral.
2. Si el objetivo de resolver la integral es parte de un proyecto de investigación en el cual lo que importa es el modelo que representa la antiderivada, emplea las tablas de integración, ya que en éstas se presenta una gama muy amplia de estructuras y lo único que habrás de hacer es comparar las estructuras y aplicarlas. Desde luego, en caso de que la estructura del integrando no esté presente en las tablas, tendrás que seleccionar la técnica de integración adecuada y resolverla de manera analítica. Un buen recurso es aplicar software de matemáticas que resuelva las integrales analíticamente como Wolfram Mathematica®, Derive®, Mathlab® y otros.
3. Si el objetivo de resolver la integral es practicar y adquirir experiencia en este tipo de concepto, ¡ánimo! Ten la paciencia para buscar y aplicar la técnica de integración adecuada. Sabes que siempre podrás comprobar si la antiderivada encontrada es correcta. ¡Simplemente deriva el resultado y encontrarás el integrando después de la simplificación necesaria! No se desecha la posibilidad de emplear tablas de integración, ya que reconocer las estructuras también requiere práctica.
4. Si el objetivo tiene un significado eminentemente práctico, lo que interesa es la rapidez y suele tratarse de integrales definidas que estudiaremos en el capítulo 5. Para ello, dispones de la integración numérica como una buena opción. ¡Claro que es mejor encontrar la antiderivada, pues tus resultados serán exactos! No olvides un recurso importante: el software matemático.
5. Cualquiera que sea el objetivo que tengas para resolver una integral, lo más importante es que has detectado una situación en la que el concepto de integración es útil, ¡adelante, las integrales están presentes en las cosas de todos los días! Si dispones de una herramienta para facilitarte el trabajo, no dudes en emplearla, ya sean tablas, integración numérica, programas computacionales de solución analítica o alguna técnica de integración específica.
   - Medita acerca de lo que te motivó a resolver integrales y lo que has encontrado alrededor de la integral hasta este momento. Discútelo con tus compañeros.

Comparte tus hallazgos y reflexiones con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

ACTIVIDAD 4.2.8

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Gusto por el análisis.
- Gusto por la reflexión.

Productos

- No requiere ningún producto. Es una actividad de reflexión individual y grupal.

Criterios de calidad

i. Manifestación de las propias ideas.
ii. Originalidad.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Se sugiere la reflexión grupal en clase.
- Prepárate para las preguntas: ¿Se aplican las integrales en la actividad profesional? ¿En qué las aplica un ingeniero en ________________ o un licenciado en ________________?
- Reflexiona de acuerdo con tu especialidad, analiza textos de tus futuras materias y localiza las integrales presentes.
- Se sugiere invitar a un análisis del software de matemáticas o de métodos numéricos disponibles en la institución. Revisen los comandos más útiles y resuelvan integrales mediante ellos.
- Propicia el espíritu investigador.

❖ Integrales mediante el uso de tablas

Las tablas de integrales son teoremas probados que enuncian antiderivadas para muchos tipos de estructuras del integrando. Suelen agruparse con base en un elemento característico del integrando; por ejemplo, las que contienen e^x, o las que incluyen $u^2 - a^2$, etcétera, de tal forma que es común que las antiderivadas de muchas de las integrales que se resuelven por las técnicas previas aparezcan en las tablas. Entonces, cuando se desea ser práctico y resolver la integral, ésta resulta ser la mejor técnica junto con el uso del software. Sin embargo, si tu integral no está presente en la tabla, es probable que las técnicas descritas previamente te ayuden a encontrar la solución. Para aplicar los teoremas de las tablas, no hay mejor recomendación que justamente la que se te da en el procedimiento 4.2 para el tema de sustitución: hay que elegir bien u, v, n, a, b o cualquier otro elemento que se especifique en la estructura elegida.

Debido a la propia simplificación, algunos elementos algebraicos desaparecen o se visualizan en apariencia de manera diferente. Para ello se deben emplear algunos procedimientos prácticos que permitan recobrar los elementos perdidos para completar de modo adecuado la estructura elegida y si ésta no está presente en nuestras tablas, quizá se trate de alguna integral que se pueda resolver por alguna de las técnicas ya descritas; recuerda las sugerencias del procedimiento 4.2.

El procedimiento resulta adecuado si después de la sustitución u, du la estructura de tu integral es idéntica a la presente en el teorema de la tabla (con excepción de las constantes factorizadas). Por último, se aplica la antiderivada señalada.

Aunque la emoción de resolver integrales nos lleve a resolver muchas integrales, debes recordar que en toda función puedes responder si su derivada existe o no y, en su caso, encontrarla; pero, a la inversa, **no toda expresión es integrable** por técnicas analíticas como las que hemos estudiado e incluso se les dan nombres como funciones especiales. En otros casos existen soluciones mediante una técnica adicional denominada método de series, al que nos acercaremos en el capítulo 7. Podemos estar seguros de que existen integrales que aún no podrás resolver o que no tienen solución analítica en funciones simples dentro de las que podemos ejemplificar entre una infinidad:

$$\int e^{x^2}\,dx,\ \int \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx,\ \int \operatorname{sen}\frac{1}{x}\,dx,\ \int \cos(e^x)\,dx$$

Ejercicios 4.6

Resuelve los siguientes ejercicios empleando las tablas de integración del anexo 1.

4.6.1 $\int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{4-r^2}}$

Resolución

En la tabla del anexo 1 se busca una estructura parecida que contenga $\sqrt{a^2-u^2}$ en el denominador, y se encuentra el teorema TA.17

$$\int \frac{u^2\,du}{\sqrt{a^2-u^2}} = -\frac{u}{2}\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c \text{ que resulta en:}$$

$$\int \frac{r^2\,dr}{\sqrt{4-r^2}} = -\frac{r}{2}\sqrt{4-r^2} + 2\operatorname{sen}^{-1}\frac{r}{2} + c$$

4.6.2 $\int \frac{dt}{5+4\operatorname{sen} 2t}$

Resolución

En la tabla del anexo 1 se busca una estructura parecida, y se localiza el teorema TA.96

$$\int \frac{du}{p+q\operatorname{sen} au} = \frac{2}{a\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\frac{p\tan ax/2+q}{\sqrt{p^2+q^2}} + c$$

y se aplica directo para obtener:

$$\int \frac{dt}{5+4\operatorname{sen} 2t} = -\frac{2}{2\sqrt{41}}\tan^{-1}\left[\frac{5}{\sqrt{41}}\tan t + \frac{4}{\sqrt{41}}\right] + c$$

4.6.3 $\int \frac{\tan^{-1} x}{x^2}\,dx$

Resolución

Se localiza el teorema TA.85

$$\int u^n \tan^{-1} u\,du = \frac{1}{n+1}\left[u^{n+1}\tan^{-1} u - \int \frac{u^{n+1}du}{1+u^2}\right]$$

y se aplica para obtener:

$$\int x^{-2}\tan^{-1} x\,dx = -\left[\frac{1}{x}\tan^{-1} x - \int \frac{x^{-1}\,dx}{1+x^2}\right] = -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \int \frac{dx}{x(1+x^2)}$$

$$= -\frac{\tan^{-1} x}{x} + \ln x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$$

4.6.4 $\int \operatorname{sen} 2x \cos 3x\,dx$

Resolución

Se localiza el teorema TA.57 y se aplica directo:

EJERCICIOS 4.6

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para plantear preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

$$\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = -\frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + c$$

$$\int \operatorname{sen} 2x \cos x 3x\, dx = -\frac{\cos 5x}{10} - \frac{\cos(-x)}{-2} + c = \frac{\cos x}{2} - \frac{\cos 5x}{10} + c$$

4.6.5 $\int p^2\sqrt{25-p^2}\,dp$

Resolución

Se localiza el teorema TA.13 y se aplica directo:

$$\int u^2\sqrt{a^2-u^2}\,du = \frac{u}{8}(2u^2-a^2)\sqrt{a^2-u^2} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + c$$

$$\int p^2\sqrt{25-p^2}\,dp = \frac{p}{8}(2p^2-25)\sqrt{25-p^2} + \frac{625}{8}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{p}{5}\right) + c$$

4.6.6 $\int \frac{\sqrt{9x^2+6x+5}}{3x+1}dx$

Resolución

$$\int \frac{\sqrt{9x^2+6x+5}}{3x+1}dx = \int \frac{\sqrt{9x^2+6x+1+4}}{3x+1}dx$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{(3x+1)^2+4}}{3x+1}3\,dx$$

Se localiza el teorema TA.4 y se aplica directo:

$$\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}du = \sqrt{u^2+a^2} - a\ln\left|\frac{a+\sqrt{u^2+a^2}}{u}\right| + c$$

$$\frac{1}{3}\int \frac{\sqrt{u^2+a^2}}{u}du = \frac{1}{3}\sqrt{9x^2+6x+5} - \frac{2}{3}\ln\left|\frac{2+\sqrt{9x^2+6x+5}}{3x+1}\right| + c$$

4.6.7 $\int 7\operatorname{sen}^2 3x \ln(\operatorname{sen} 3x)\cos 3x\, dx$

Resolución

Sea $u = \operatorname{sen} 3x$, $du = 3\cos 3x\, dx$

$$\int 7\operatorname{sen}^2 3x\ln(\operatorname{sen}3x)\cos 3x\,dx = \frac{7}{3}\int u^2\ln(u)\,du \Rightarrow$$

$$\int u^n \ln u\, du = \frac{u^{n+1}}{(n+1)^2}[(n+1)\ln u - 1] + c,\ n \neq -1$$

$$\frac{7}{3}\int u^2 \ln u\, du = \frac{7}{3}\frac{\operatorname{sen}^3 3x}{9}\big[3\ln\operatorname{sen}3x - 1\big] + c$$

$$\int 7\operatorname{sen}^2 3x\ln(\operatorname{sen}3x)\cos 3x\,dx = \frac{7}{9}\operatorname{sen}^3 3x\left[\ln\operatorname{sen}3x - \frac{1}{3}\right] + c$$

AUTOEVALUACIÓN 4.1-4.9

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la solución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre el dominio de los métodos de integración mediante la resolución de los diversos ejercicios de forma analítica y con uso de tablas.

Desempeños

- Observable en el producto.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la solución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear al menos una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

4.6.8 $\int \frac{2\,dx}{x\ln x(3+4\ln x)^2}$

Resolución

Sea $u = \ln x$, $du = dx / x$

$$\int \frac{2\,dx}{x\ln x(3+4\ln x)^2} = 2\int \frac{du}{u(3+4u)^2}$$

Lo anterior corresponde al teorema TA.35 con lo que se concluye fácilmente:

$$\int \frac{du}{u\left(a+bu\right)^2} = \frac{1}{a\left(a+bu\right)} - \frac{1}{a^2}\ln\left|\frac{a+bu}{u}\right| + c$$

4.6.9 $\int \frac{3e^{-x}\,dx}{e^{-2x}-4}$

Resolución

Sea $u = e^{-x}$, $du = -e^{-x}dx \Rightarrow \int \frac{3e^{-x}\,dx}{e^{-2x}-4} = -3\int \frac{du}{u^2-2^2}$

que corresponde al teorema TA.21:

$$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + c = -3\int \frac{du}{u^2-a^2} = -\frac{3}{4}\ln\left|\frac{e^{-x}-2}{e^{-x}+2}\right| + c$$

Autoevaluación 4.1

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.1.1 $\int t\ln(t+1)\,dt$

4.1.2 $\int \frac{\ln(2x)dx}{x^2}$

4.1.3 $\int \frac{xe^{2x}\,dx}{(2x+1)^2}$

4.1.4 $\int x\,\mathrm{sen}(2x)\,dx$

4.1.5 $\int \frac{\ln(\tan x)dx}{\mathrm{sen}\,x\cos x}$

Autoevaluación 4.2

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.2.1 $\int \frac{dx}{\cos x - \mathrm{sen}\,x}$

4.2.2 $\int \frac{x^3-1}{4x^3-x}dx$

AUTOEVALUACIÓN 4.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 4.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

4.2.3 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$

4.2.4 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

4.2.5 $\int \frac{x+1}{x^2+4x+3}\,dx$

Autoevaluación 4.3

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.3.1 $\int \frac{2x-3}{(x-1)^2}\,dx$

4.3.2 $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}\,dx$

4.3.3 $\int x3^x\,dx$

4.3.4 $\int \sqrt{1+\cos^2 x}\ \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx$

4.3.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$

AUTOEVALUACIÓN 4.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 4.4

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.4.1 $\int \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx$

4.4.2 $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$

4.4.3 $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x+\cos x)^2}$

4.4.4 $\int x^2\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$

4.4.5 $\int 2x^3 e^{x^4+1}\,dx$

AUTOEVALUACIÓN 4.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 4.5

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.5.1 $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}$

AUTOEVALUACIÓN 4.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

4.5.2 $\int \frac{\ln x\, dx}{x^3}$

4.5.3 $\int \frac{x^5\, dx}{\sqrt{a^3 - x^3}}$

4.5.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - 9)^3}}$

4.5.5 $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x\, dx}{\sqrt{(1 - x^2)^3}}$

Autoevaluación 4.6

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.6.1 $\int \frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} dx$

4.6.2 $\int \frac{dx}{\tan x \cos 2x}$

4.6.3 $\int 5 \operatorname{sen}^3 x e^{\operatorname{sen}^4 x - 3} \cos x\, dx$

4.6.4 $\int \left(\sqrt{7x} - \frac{4}{\sqrt{5x}} \right) dx$

4.6.5 $\int \frac{4x\, dx}{3x^2 - 8}$

AUTOEVALUACIÓN 4.6

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 4.7

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.7.1 $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1} x\, dx}{\sqrt{1 - x}}$

4.7.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x} + \sqrt[4]{x}}$

4.7.3 $\int \frac{\sqrt{(9 - x^2)^3}}{x^6} dx$

4.7.4 $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x\, dx}{1 + x^2}$

4.7.5 $\int \frac{x^9\, dx}{(x^4 - 1)^2}$

AUTOEVALUACIÓN 4.7

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 4.8

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.8.1 $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^4 x}$

4.8.2 $\int x(x^2-1)^2\,dx$

4.8.3 $\int \frac{x^4\,dx}{\sqrt{9-4x^2}}$

4.8.4 $\int \cos(\ln x)\,dx$

4.8.5 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}\,dx$

AUTOEVALUACIÓN 4.8

Evaluación por conocimiento y desempeño, actividad de entrenamiento individual y grupal.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 4.9

Resuelve las siguientes integrales aplicando el método adecuado y comprueba su resultado mediante tablas.

4.9.1 $\int x^2\sqrt{4-9x^2}\,dx$

4.9.2 $\int \frac{\tan^{-1}2x^2\,dx}{x^3(1+4x^4)}$

4.9.3 $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2}\,dx$

4.9.4 $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x}}{\operatorname{sen}^5 x}\,dx$

4.9.5 $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}\,dx$

AUTOEVALUACIÓN 4.9

Evaluación por conocimiento y desempeño, actividad de entrenamiento individual y grupal.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Solución a la autoevaluación 4.1

4.1.1 $\int t\ln(t+1)\,dt = \frac{1}{4}((2-t)t + 2(t^2-1)\ln(t+1)) + c$

4.1.2 $\int \frac{\ln(2x)dx}{x^2} = -\frac{1+\ln(2x)}{x} + c$

4.1.3 $\int \frac{xe^{2x}dx}{(2x+1)^2} = \frac{e^{2x}}{4(2x+1)} + c$

4.1.4 $\int x\operatorname{sen}(2x)\,dx = -\frac{1}{2}x\cos 2x + \frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x + c$

4.1.5 $\int \frac{\ln(\tan x)dx}{\operatorname{sen} x\cos x} = \frac{1}{2}\ln(\tan x)^2 + c$

Solución a la autoevaluación 4.2

4.2.1 $\int \frac{dx}{\cos x - \operatorname{sen} x} = \sqrt{2}\tan h^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1+\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right]\right) + c$

4.2.2 $\int \frac{x^3 - 1}{4x^3 - x}dx = \frac{x}{4} + \ln x - \frac{7}{16}\ln(2x-1) - \frac{9}{16}\ln(2x+1) + c$

4.2.3 $\int e^{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x} - 1) + c$

4.2.4 $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{9 - x^2}} = -\frac{1}{2}x\sqrt{9 - x^2} + \frac{9}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{3} + c$

4.2.5 $\int \frac{x+1}{x^2 + 4x + 3}dx = \ln(x+3) + c$

Solución a la autoevaluación 4.3

4.3.1 $\int \frac{2x - 3}{(x-1)^2}dx = \frac{1}{x-1} + 2\ln(x-1) + c$

4.3.2 $\int \frac{x-1}{x^2(x+1)}dx = \frac{1}{x} + 2\ln x - 2\ln(x+1) + c$

4.3.3 $\int x3^x\,dx = 3^x\left(-\frac{1}{\ln^2 3} + \frac{x}{\ln 3}\right) + c$

4.3.4 $\int \sqrt{1 + \cos^2 x}\ \operatorname{sen} 2x \cos 2x\,dx = -\frac{1}{10\sqrt{2}}\Big[2\cos 2x\sqrt{3 + \cos 2x}$

$+ 11(\sqrt{3} - \sqrt{3 + \cos 2x}) + \sqrt{3 + \cos 2x}\cos 4x\Big] + c$

4.3.5 $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 25}} = -\frac{1}{5}\tan^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{x^2 - 25}}\right) + c$

Solución a la autoevaluación 4.4

4.4.1 $\int \operatorname{sen}\sqrt[3]{x}\,dx = -3(x^{2/3} - 2)\cos(x^{1/3})\int + 6x^{1/3}\operatorname{sen}^{1/3} + c$

4.4.2 $\int \frac{1}{8}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4 dx$

$= \frac{1}{8}\left(x - \frac{16}{3(x+1)^3} + \frac{16}{(x+1)^2} - \frac{24}{(x+1)} - 8\ln(x+1)\right) + c$

4.4.3 $\int \frac{dx}{(\operatorname{sen} x + \cos x)^2} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x + \operatorname{sen} x} + c$

4.4.4 $\int x^2\left(x+\frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx=\frac{4x^{5/2}}{5}+\frac{x^4}{4}+c$

4.4.5 $\int 2x^3e^{x^4+1}\,dx=\frac{e^{x^4+1}}{2}+c$

Solución a la autoevaluación 4.5

4.5.1 $\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-x^2}}=-\frac{1}{3}\sqrt{4-x^2}(8+x^2)+c$

4.5.2 $\int \frac{\ln x\,dx}{x^3}=-\frac{1}{4x^2}-\frac{\ln x}{2x^2}+c$

4.5.3 $\int \frac{x^5\,dx}{\sqrt{a^3-x^3}}=-\frac{2}{9}\sqrt{a^3-x^3}(2a^3+x^3)+c$

4.5.4 $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2-9)^3}}=-\frac{x(x^2-9)}{9\sqrt{(x^2-9)^3}}+c$

4.5.5 $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}x\,dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=-\frac{(x^2-1)(2x\operatorname{sen}^{-1}x+\sqrt{1-x^2}\,\ln(x^2-1)}{2\sqrt{(1-x^2)^3}}+c$

Solución a la autoevaluación 4.6

4.6.1 $\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx=-\frac{7}{4(x-1)^2}-\frac{3}{2(x-1)}+\frac{\tan^{-1}x}{4}$

$$+\frac{5}{4}\ln(x-1)-\frac{5}{8}\ln(x^2+1)+c$$

4.6.2 $\int \frac{dx}{\tan x\cos 2x}=-\frac{1}{2}\ln\cos 2x+\ln\operatorname{sen}x+c$

4.6.3 $\int 5\operatorname{sen}^3 x e^{\operatorname{sen}^4 x-3}\cos x\,dx=\frac{5}{4}e^{\operatorname{sen}^4 x-3}+c$

4.6.4 $\int\left(\sqrt{7x}-\frac{4}{\sqrt{5x}}\right)dx=-\frac{8}{\sqrt{5}}\sqrt{x}+\frac{2\sqrt{7}}{3}x^{3/2}+c$

4.6.5 $\int \frac{4x\,dx}{3x^2-8}=\frac{2}{3}\ln[3x^2-8]+c$

Solución a la autoevaluación 4.7

4.7.1 $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}x\,dx}{\sqrt{1-x}}=-\frac{4\sqrt{1-x}\sqrt{1-x^2}}{x-1}-2\sqrt{1-x}\operatorname{sen}^{-1}x+c$

4.7.2 $\int \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}=-4\sqrt[4]{x}+2\sqrt{x}+4\ln(1+\sqrt[4]{x})+c$

4.7.3 $\int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6}dx = \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}(x^2-9)}{45x^5} + c$

4.7.4 $\int \frac{x^2 \tan^{-1} x\, dx}{1+x^2} = x\tan^{-1} x - \frac{(\tan^{-1} x)^2}{2} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c$

4.7.5 $\int \frac{x^9\, dx}{(x^4-1)^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{x^2}{4(x^4-1)} + \frac{3}{8}\ln(1-x^2) - \frac{3}{8}\ln(x^2+1) + c$

Solución a la autoevaluación 4.8

4.8.1 $\int \frac{dx}{1-\operatorname{sen}^4 x} = \frac{1}{4}(\sqrt{2}\tan^{-1}[\sqrt{2}\tan x] + 2\tan x) + c$

4.8.2 $\int x(x^2-1)^2\, dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + c$

4.8.3 $\int \frac{x^4\, dx}{\sqrt{9-4x^2}} = \sqrt{9-4x^2}\left(-\frac{27x}{128} - \frac{x^3}{16}\right) + \frac{243}{256}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{2x}{3}\right) + c$

4.8.4 $\int \cos(\ln x)\, dx = \frac{1}{2}x\cos\ln x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen}\ln x + c$

4.8.5 $\int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}}dx = 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2}}\right) + c$

Solución a la autoevaluación 4.9

4.9.1 $\int x^2\sqrt{4-9x^2}\, dx = x\sqrt{4-9x^2}\left(\frac{x^2}{4} - \frac{1}{18}\right) + \frac{2}{27}\operatorname{sen}^{-1}\frac{3x}{2} + c$

4.9.2 $\int \frac{\tan^{-1} 2x^2\, dx}{x^3(1+4x^4)} = -\frac{\tan^{-1} 2x^2}{2x^2} - \frac{1}{2}(\tan^{-1} 2x^2)^2$

$+ 2\ln x - \frac{1}{2}\ln(1+4x^4) + c$

4.9.3 $\int \frac{3x^2+1}{(x^2-1)^2}dx = -\frac{2x}{x^2-1} + \frac{1}{2}\ln(x-1) - \frac{1}{2}\ln(x+1) + c$

4.9.4 $\int \frac{\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x}}{\operatorname{sen}^5 x}dx = -\frac{2}{5}\cot x\csc^3 x\sqrt{\operatorname{sen}^3 2x} + c$

4.9.5 $\int \frac{3x^2+1}{(x-1)(x+2)(x-3)}dx = \frac{14}{5}\ln(x-3) - \frac{2}{3}\ln(x-1)$

$+ \frac{13}{15}\ln(x+2) + c$

Capítulo 5

Integral definida

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si interpreta y resuelve integrales definidas de manera numérica y analítica empleando los teoremas adecuados.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando la integración como herramienta fundamental.

Calendario del portafolio de evidencias

Fecha	Evidencia
	Actividad 5.1.1
	Actividad 5.1.2
	Aplicación 5.1.1
	Actividad 5.1.3
	Aplicación 5.1.2
	Actividad 5.2.1
	Actividad 5.2.2
	Aplicación 5.2.1
	Aplicación 5.2.2
	Actividad 5.2.3
	Ejercicios 5.1
	Autoevaluación 5.1
	Autoevaluación 5.2

Fecha	Evidencia
	Autoevaluación 5.3
	Autoevaluación 5.4
	Actividad 5.3.1
	Actividad 5.3.2
	Aplicación 5.3.1
	Actividad 5.3.3
	Aplicación 5.3.2
	Ejercicios 5.2
	Autoevaluación 5.5
	Autoevaluación 5.6
	Autoevaluación 5.7

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

El éxito depende no simplemente de hacer muy bien aquello que te gusta, sino de qué tanto empeño e interés le pongas a lo que no te gusta y debes hacer.

INTRODUCCIÓN

Ya desde la actividad 3.1.3 se definen las sumas de Riemann que, para una partición dada en un intervalo $[a, b]$, nos llevan a una suma que en el límite corresponde al número:

$$I = \lim_{\|P\| \to 0+} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Esta selección se muestra en la figura 5.1.

Por su importancia, el número I se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

Y se lee integral de f de x desde a hasta b.

Este número I, denominado integral definida entre a y b, es un número real asociado al área bajo la curva; sin embargo, **integral y área no son exactamente lo mismo**; la integral resulta ser una herramienta para calcular el área bajo la curva, existe de manera independiente, como objeto abstracto.

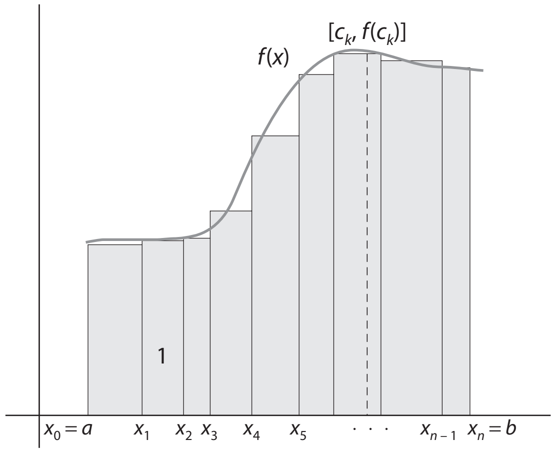


FIGURA 5.1 Selección de los puntos x_k y c_k para la suma I.

Sin embargo, decir que el número I está asociado al área bajo una curva no implica que sean lo mismo, de otra forma sería redundar en concepto. ¿En qué consiste esa diferencia?

5.1 SUMAS DE *RIEMANN*

Sea una función f continua en el intervalo $[a, b]$ y una partición P arbitraria del intervalo en n intervalos limitados por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n = b$ con la única condición de que: $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$; así, al conjunto $P = \{x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_{n-1}, x_n\}$ lo llamamos partición de $[a, b]$.

P define n subintervalos cerrados determinados por $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ en el que la longitud de cada subintervalo será $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, para los valores adecuados de $k = 1, 2, 3, ..., n$. Si en cada subintervalo se selecciona un punto c_k y se construye un rectángulo con el intervalo como base y de altura $f(c_k)$, el área del rectángulo será $f(c_k)\Delta x_k$. Está selección se muestra en la figura 5.1.

Como se tienen n rectángulos, se suman todas las áreas, si $f(c_k) < 0$ el producto $f(c_k)\Delta x_k < 0$. Luego, se suman todos los productos y se obtiene:

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

Esta suma, que depende de P y de las selecciones de los c_k, se denomina suma de *Riemann* para f en $[a, b]$.

La norma de una partición P se define como la **longitud del intervalo más largo de la partición**, la cual se escribe $\|P\|$.

Definición 5.1. La integral definida de una función en un intervalo $[a, b]$ es el número I que satisface la condición:

$$I = \lim_{\|P\|\to 0+} \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$$

para cualesquier elección de números c_k en las subdivisiones de la partición P.

El número I se representa por:

$$I = \int_a^b f(x)\,dx$$

y se lee integral de f de x desde a hasta b.

Cuando la selección de los c_k de cada intervalo corresponde al máximo de f en el intervalo, se dice que se tiene una suma superior de *Riemann* y se representa por U_p porque depende de la participación P. De igual forma, si la selección se hace sobre los mínimos de cada *subintervalo*, se obtiene una suma inferior de *Riemann*, escrita L_p. En el límite se tendrá que:

$$\lim_{\|P\|\to 0+} U_P = \lim_{\|P\|\to 0+} L_P = \int_a^b f(x)\,dx$$

Debido a que, en general:

$$U_P \le \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \le L_P$$

Una función para la que el límite existe se dice que es *Riemann* integrable o de manera más general **integrable** en $[a, b]$.

Actividad 5.1.1

¿Áreas con signo?

La definición previa de la integral definida empleada en el apartado 5.1 partió del concepto de área bajo la curva y depende de las alturas de los rectángulos que son valores de $f(x)$ para diversas x. Sin embargo, ¿qué pasa si la curva está bajo el eje x?

Observa la figura 5.2.

ACTIVIDAD 5.1.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con reflexiones y respuesta a cada una de las cinco situaciones propuestas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizar en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos observados en el entorno.
- Alentar a los estudiantes para proponer conjeturas acerca del tamaño de los incrementos de la variable en cada fenómeno.

En efecto, $f(x) < 0$ en las zonas marcadas como A y C, de donde el ¿área? de los rectángulos ¡será negativa! Y coincide con las superficies A y C. Pero, espera, una interpretación para la integral indica ¡área con signo!, ya que el área ¡siempre es positiva! En efecto, A, B, C y D son positivas, ya que representan un área entre curvas.

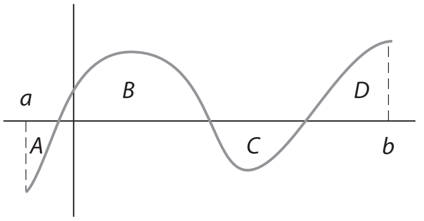


FIGURA 5.2

Así, el área entre la curva y el eje x es $A + B + C + D$, y al resolver la integral resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -A + B - C + D$$

Esta integral es un número que se obtiene por medio de las áreas con signo, pero **no es el área**. Desde luego, el área y la integral sí coincidirán en valor siempre que $f(x)$ sea positiva en todo el intervalo, y éste es el caso desde el que se inició el análisis.

1. ¿Cómo puedes verificar este resultado?
2. ¿Qué harás si se te pide calcular el área entre el eje x y la curva de la función $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$ en el intervalo $[-2, 5]$?
3. ¿Qué harás si tienes que calcular la integral de $f(x) = (x + 1)(x - 2)(x - 4)$ en el intervalo $[-2, 5]$?
4. ¿Los resultados coinciden con las apreciaciones previas?
5. Muestra, mediante cuatro ejemplos con gráficas desarrolladas en Winplot® o cualquier otro paquete gráfico, que el valor de la integral no coincide con el valor del área cuando la función tiene partes de su dominio con valor funcional negativo.

Después de haber notado que, a pesar de que área e integral no son lo mismo, sí es posible interpretarla como tal, cuando el problema lo amerite. Además, comprender las propiedades de la integral definida está relacionado con las propiedades de las áreas.

Actividad 5.1.2

Propiedades del área, herencia para la integral

Muchas propiedades del número denominado integral parten de las cualidades de las áreas por ser números con una relación muy estrecha:

1. ¿Cuál será el área entre un punto y el eje x? ¿Es posible trazar, al menos, un rectángulo

ACTIVIDAD 5.1.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la graficación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones y respuesta a cada una de las siete preguntas planteadas y cinco gráficas de la pregunta 7.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ___________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio a realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase pedir a los estudiantes que presenten sus gráficas ejemplo.
- Invitar a los alumnos a que calculen aproximadamente el área empleando particiones.

bajo el punto? Una conclusión importante de este análisis es que si una función tiene discontinuidades salvables, la integral existe. ¿Qué diferencia hay entre calcular una integral en (a, b) y en $[a, b]$?

2. El recorrido de la curva al calcular la integral se hizo de a hacia b. ¿Cambiará el resultado si el recorrido se hace en sentido contrario? ¿Cuál sería el signo de las bases de los rectángulos? ¿Qué signo tendrá la suma final?
3. Es posible que puedas resolver la integral desde a hacia b; pero, ¿cómo procederías? ¿La partirías en dos en el punto c? ¿Una desde a hacia c y otra desde c hasta b? ¿Y luego sumarías los resultados? ¿Es necesario que c esté entre a y b?
4. Si has calculado la integral para $f(x)$ entre a y b, ahora es necesario calcular la integral de $5f(x)$. ¿Será suficiente multiplicar por 5 la integral previamente obtenida? ¿Es correcto este resultado para cualquier valor constante k, sin importar su signo?
5. Si has calculado previamente las integrales de $f(x)$ y de $g(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y decides sumarlas después, ¿será lo mismo haber calculado la integral de $[f(x) + g(x)]$ en el mismo intervalo? ¿La respuesta que propones es válida también para la diferencia de las funciones, si decides restarlas en lugar de sumarlas?
6. Relaciona la expresión que identifica cada afirmación previa.

6.1 $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$

6.2 $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

6.3 $\int_a^a f(x) = 0$

6.4 $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

6.5 $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

7. Establece la relación que se discute en cada caso, del 6.1 al 6.5, e ilústrala mediante gráficas para destacar el motivo de tu selección.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Cualquier comentario o discusión se puede realizar con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

Aplicación 5.1.1

El concepto de integral definida tiene infinidad de aplicaciones y todas ellas están asociadas a la modelación de procesos de acumulación. ¿Qué se acumula? ¡Diferenciales!
Un ejemplo de lo anterior lo tenemos en el volumen de envases.

Como ya habrás observado, el proceso de integración no se encuentra restringido al cálculo de áreas, sino que se aplica de manera más completa en todos los procesos de acumulación, en los que la variación del fenómeno suele manifestarse de manera imperceptible. En un primer acercamiento, la integral definida se estructura bajo el análisis de superficies planas descritas en coordenadas cartesianas; sin embargo, la integral definida se puede aplicar de manera general al cálculo de superficies curvas, longitudes de arcos, volúmenes y a cualesquier situación análoga a las ya mencionadas.

1. En la figura 5.3 se muestran envases para reciclar de metal y cristal. ¿Podremos saber cuánto material emplea cada envase desde su diseño?

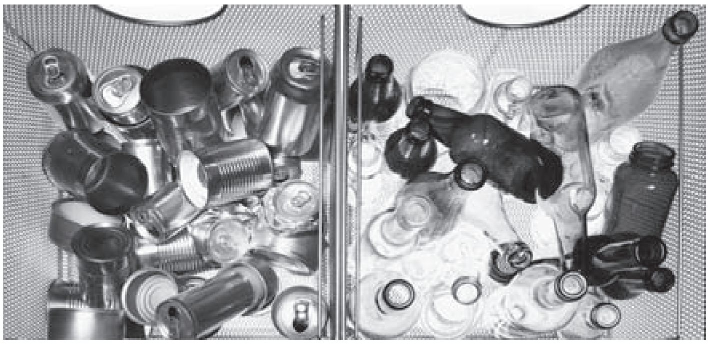


FIGURA 5.3 Envases de metal y vidrio.

2. En la figura 5.4, en tanto, se observa el diseño de un frasco para aceite. ¿Podremos saber desde su diseño cuál será el volumen de su contenido? ¿Cuánto plástico se empleará para su fabricación?

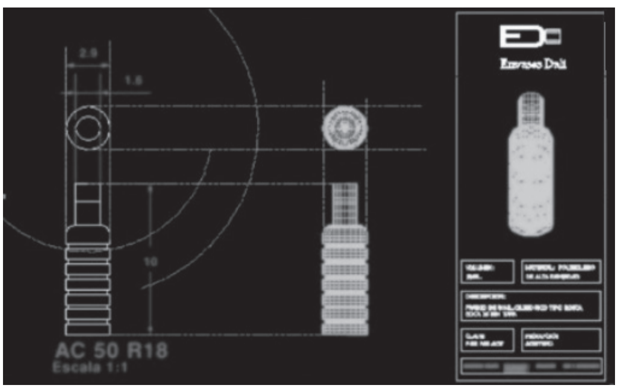


FIGURA 5.4 Diseño de un envase para aceite.

APLICACIÓN 5.1.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la observación de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de la ciencia y la tecnología.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Propuesta de conjeturas sobre diseño, fabricación y cálculo de envases y contenedores, así como de su relación con el proceso de integración definida.

Productos

- No es necesario.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación ocultos en los objetos estudiados.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas, de considerarse obligatorio aplicar los criterios de calidad de la Actividad 5.1.1.
- Discutir sobre la posible respuesta a: ¿Por qué la mayoría de los envases son sólidos de revolución?
- Propiciar el trabajo en equipo.

3. La figura 5.5 muestra un juego de contenedores de cristal. Son sólidos de revolución. ¿A qué se refiere este concepto?
4. ¿Es necesario que un envase sea un sólido de revolución para poder calcular su volumen mediante integrales? Observa la figura 5.6.
5. Otro tipo de envases son los realizados por termoformado. ¿A qué se refiere dicho proceso? Observa los envases de la figura 5.7. ¿Es posible calcular el volumen que encierran mediante integración?
6. Desde otro aspecto, ¿cómo son las máquinas que producen envases? ¿Para qué servirá la integral en el proceso de diseño y construcción de moldes? Observa la figura 5.8. Son moldes para hacer envases de cristal.

   Dos situaciones esenciales pueden ser resueltas mediante integración:

   a) ¿Cuánto material emplea cada envase?

   b) ¿Qué volumen puede contener el envase?

Cualquier comentario o discusión se puede realizar con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

FIGURA 5.5 Contenedores de cristal.

FIGURA 5.6 Envases de cristal: normalmente son fabricados en diferentes formas de acuerdo con la condición estética y utilitaria que el cliente requiera, ya que la mercadotecnia determina que un envase puede ser más atractivo y característico del producto en cuanto a su forma y color. ¿Recuerdas alguna bebida por la forma de su envase?, ¿o un perfume? Si bien la forma es un asunto de mercadotecnia, la fabricación y el volumen que contendrá, es un asunto de ingeniería.

FIGURA 5.7 Contenedores de plástico.

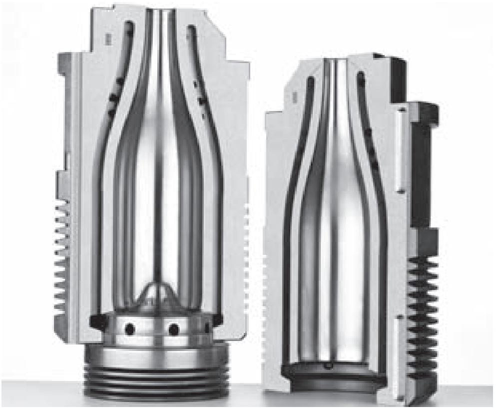


FIGURA 5.8 Moldes para envases de cristal.

Actividad 5.1.3

Muchas veces hemos escuchado afirmaciones como ésta: "El conductor llevó su auto a un promedio de 214 km/h y con ello recorrió los 1000 km de la carrera". ¿Qué significado tienen conceptos como velocidad y promedio? ¿Conoces algunos otros conceptos similares?

ACTIVIDAD 5.1.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Observación de los hechos cotidianos y propuesta de conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la graficación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones de la actividad y respuesta justificada a cada una de las siete preguntas planteadas y en específico a la siete planteadas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, gráficas, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ___________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En clase, pedir a los estudiantes que presenten gráficas ejemplo.
- Invitar a los alumnos a que calculen aproximadamente el promedio empleando particiones.

❖ Teorema del valor medio para integrales

En tus estudios previos, siempre se te asignó un promedio, el cual se calculó sumando las calificaciones y, al final, se dividió este resultado entre el número de éstas.

En general, cuando hay calificaciones repetidas es posible modificar el cálculo y hacerlo así:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} n_i c_i}{\sum_{i=1}^{N} n_i}$$

Donde c_i corresponde a cada una de las calificaciones y n_i al número de veces que se repite cada calificación, N es el número de calificaciones que se presentan y p será el promedio. La suma del denominador no será otra cosa más que el número de materias, ¿o no? Por lo común, esta expresión se denomina promedio ponderado.

Veamos la misma expresión, pero ahora los n_i serán números reales y no enteros, como en la fórmula. Analicemos de nuevo la expresión y reescribámosla teniendo en cuenta la notación de la figura 5.9.

De tal forma que ahora la expresión se ve así:

$$p = \frac{\sum_{i=1}^{N} d_i f_i(x)}{\sum_{i=1}^{N} d_i}$$

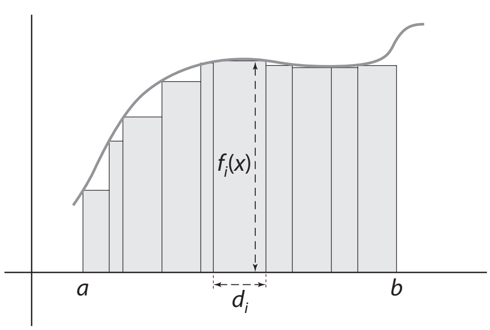


FIGURA 5.9 Análisis del promedio ponderado y su relación con la integral definida.

¿Qué significado le darías a esta expresión? Claro que también es un promedio, pero, ¿qué resultado encuentras?

Observa que la suma del denominador es la distancia entre a y b. ¿Por qué?

Ahora, la expresión se puede simplificar así:

$$p = \frac{1}{b-a}\sum_{i=1}^{N} d_i f_i(x)$$

¿Qué pasará si el número de rectángulos crece mientras el tamaño de sus bases disminuye?

Claro, eso ya lo hemos visto antes, aunque se escribió de otro modo. Si N crece sin límite, la sumatoria es el área bajo la curva. O sea que:

$$p = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Donde p sigue siendo un promedio, ve la expresión así:

$$p(b-a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

¿Te ayuda más si observas con detenimiento la figura 5.10?

1. ¿Qué área es obtenida por la integral?
2. ¿Qué área tiene el rectángulo que se trazó?
3. ¿Qué identifica la igualdad de la expresión entre el rectángulo y la integral?
4. ¿Por qué p sigue identificando un promedio?
5. ¿Existe algún valor de $f(x) = p$? ¿De manera general es único o pueden existir varios?
6. ¿Cómo debe ser el área que no tuvo en cuenta el rectángulo, respecto de la que tomó y no estaba bajo la curva?

El razonamiento seguido arroja el teorema conocido como teorema del valor medio para integrales.

7. Enúncialo como lo has entendido.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Aplicación 5.1.2

Aplicando el teorema del valor medio

Recuerda un viaje que hayas realizado en autobús o automóvil; cada instante y en cada punto del recorrido, el velocímetro indicaba la velocidad instantánea. ¿Cuál fue la velocidad prome-

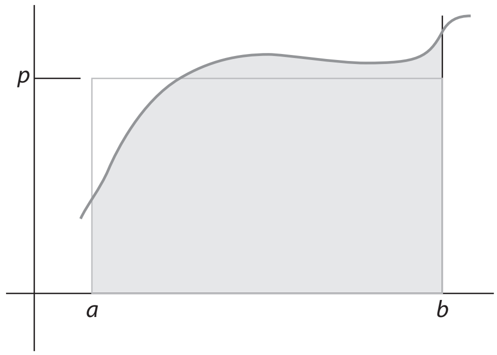


FIGURA 5.10 El promedio sobre una integral.

APLICACIÓN 5.1.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la observación de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de la ciencia en la conservación del ambiente.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Cálculo del promedio de la temperatura en la localidad y de los diferentes contaminantes atmosféricos en la Ciudad de México en diferentes tiempos.
- Comentarios sobre el calentamiento global y la conservación del medio ambiente.

Productos

- No es necesario.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los procesos de acumulación presentes en la contaminación.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- Discutir sobre las acciones del gobierno de la Ciudad de México para disminuir la contaminación.
- Opinión sobre el programa Hoy no circula.
- Propiciar el trabajo en equipo.

dio del recorrido si sabes que se recorrieron 80 km en un tiempo de 1.2 horas?

En este caso, sabes que la distancia recorrida, s, está en función de la velocidad y el tiempo empleados: $s = vt$, de manera diferencial, $ds = s'(t)dt$, de donde:

$$s = \int_0^T s'(t)\,dt$$

El automóvil ya se encargó de integrar por ti... ¿Por qué? Tienes que $s = 80$ km y por el teorema del valor medio:

$$\overline{v} = \frac{1}{T}\int_0^T s'(t)\,dt = \frac{80}{1.2} = 66.66\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$$

En este caso, no se buscó complicar las cosas. En realidad es algo que ya sabías, pero sirvió para mostrarte que las integrales se ocultan a nuestra vista ¡y que no tienes que resolverlas muchas veces! Solo saber que están ahí y que la naturaleza se encargó de hacerlo por ti (lo malo es que no siempre lo hace...; por ejemplo, en el siguiente caso).

Visita http://www.aire.df.gob.mx/default.php de la Dirección de monitoreo de la calidad del aire en la Ciudad de México y dentro de la legislación ambiental encontrarás que la norma NOM-020-SSA1-2014 establece que para el ozono se recomiendan concentraciones menores a 0.095 ppm para el promedio de 1 hora, y menores a 0.070 ppm para el promedio de 8 horas (máximo anual).

1. ¿Qué se puede decir del comportamiento promedio de la concentración de ozono el día de ayer en la zona centro de la Ciudad de México?

   O también:

2. ¿Cuál fue la temperatura promedio el día de ayer en tu ciudad? Puedes generar los datos para hoy y calcular lo que se pide para mañana.

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

5.2 TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO

Parte 1:

T5.1 Si f es continua en $[a, b]$, entonces $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ tiene una derivada en cada punto de $[a, b]$ y

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)$$

Parte 2:

T5.2 Si f es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ es una *antiderivada* cualquiera de $f(x)$ entonces:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Según el concepto de *antiderivada*, se puede entrever la estrecha relación que existe entre la derivada y la integral. ¿Qué puedes decir de esa relación?

Actividad 5.2.1

Teorema fundamental del cálculo

Al definir la *antiderivada* y emplear el mismo símbolo para la integral definida, ya se orienta la dirección hacia el mismo rumbo, pero falta el elemento formal que permita comprobarlo. A esto se le llama teorema fundamental del cálculo. Veámoslo en acción. Considera la figura 5.11.

En la figura 5.11 se observa un área delimitada por la función $f(x)$, el eje x y las rectas verticales a y x. Por la definición de la integral, esta área depende de dónde se coloque la recta x y, por tanto, si se llama $F(x)$ a esa área bajo la curva se tendrá:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Además, si se considera un pequeño incremento también se tendrá:

$$F(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)\,dt$$

La diferencia entre estas dos áreas es el pequeño rectángulo ubicado en x de altura $f(x)$ y ancho Δx, donde se desprende:

$$f(x)\Delta x \approx F(x + \Delta x) - F(x) \Rightarrow f(x) \approx \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x} \Rightarrow f(x) = F'(x)$$

1. Esta última expresión corresponde al teorema fundamental del cálculo. Exprésalo con tus propias palabras.

ACTIVIDAD 5.2.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de demostraciones.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.

Productos

- Ensayo con las reflexiones de la actividad y respuesta justificada a cada una de las cinco preguntas planteadas y muy en específico a la 5.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ___________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- En la clase, pedir a los estudiantes que presenten la demostración alterna encontrada.
- Comparar ambas demostraciones.

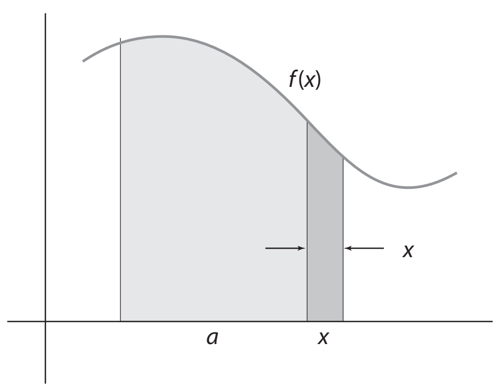


FIGURA 5.11 Motivación para la parte uno del teorema fundamental del cálculo.

Este teorema, T5.1, tiene una segunda parte muy importante:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx f(x_1^*)\Delta x_1 + f(x_2^*)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n^*)\Delta x_n$$

Para alguna x^* en la base de cada rectángulo considerado para aproximar la integral. Pero, precisamente de la discusión previa se tiene que:

$$f(x) \approx \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}; \quad f(x)\Delta x = F(x+\Delta x) - F(x)$$

Por lo que considerando los extremos de cada pequeño intervalo como $a = x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n = b$ y sustituyendo resulta la conclusión del teorema T5.2:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + \cdots + F(x_{n-1}) \\ - F(x_{n-2}) + F(x_n) + F(x_{n-1})$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -F(x_0) + F(x_n) = F(b) - F(a)$$

Como $F(x)$ es una *antiderivada* de $f(x)$, se concluye que el proceso de integrar de manera definida se convierte en un proceso de *antiderivación* y evaluación en los extremos del intervalo.

2. Enuncia este teorema tal y como lo has entendido.

3. ¿Para qué crees que sea útil?

4. ¿Por qué crees que a pesar de que la integral es un límite en la última expresión, éste ya no se indicó?

5. Localiza en otras fuentes una forma diferente de realizar la demostración del teorema fundamental del cálculo. Analiza sus diferencias y semejanzas con relación a la forma que se presentó en esta actividad.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Antes de que el propio Newton inventara el cálculo como tal, ya muchos otros pensadores habían desarrollado diversas tareas básicas del cálculo. Desde tiempo de los griegos, el problema de cálculo de áreas de figuras de formas irregulares acaparó la atención de los agrimensores y, desde luego, de los propios matemáticos de su tiempo. Así, el concepto de integral es en realidad antiguo, al igual que el de derivada como razón de cambio, por lo que la importancia histórica respecto del cálculo radica en la conexión de dos procesos disímbolos en apariencia, como son la derivación y la integración, así como en probar que éstos son procesos mutuamente inversos.

Actividad 5.2.2

El teorema fundamental del cálculo en acción

Cuando resuelves una integral definida, de acuerdo con el teorema fundamental, resulta:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Esta sustitución, anticipada como $F(x)\Big|_a^b$ y explicitada como $F(b) - F(a)$, debe ser atendida con cuidado en el proceso de cambio de variable, ya que los límites superior e inferior de la integral son $x = a$ y $x = b$. ¡Por eso debes asegurarte que la expresión de la *antiderivada* encontrada sea una función de x!

Por ejemplo, en la integral analizada en la actividad 4.1.1 se llegó al siguiente resultado:

$$\int \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2} = -\frac{3}{2(5+\operatorname{sen} x^2)} + c$$

Si deseas evaluarla en el intervalo $[0, \sqrt{\pi}]$, leído de manera coloquial desde $x = 0$ hasta $x = \sqrt{\pi}$, se escribe y desarrolla así:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x\cos x^2\,dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2} = -\frac{3}{2(5+\operatorname{sen} x^2)}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}} = -\frac{3}{2(5)} + \frac{3}{2(5)} = 0$$

Primero, observa que no es necesario escribir la constante de integración, ya que ambos términos de $F(b) - F(a)$ lo contienen y se elimina.

Sin embargo, retomando el análisis, en cierto momento del proceso se utilizó la sustitución $u = 5 + \operatorname{sen} x^2$ y se llegó a:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x\cos x^2 dx}{(5+\operatorname{sen} x^2)^2} = \dots = -\frac{3}{2u}\Bigg|_0^{\sqrt{\pi}}$$

¿Es esto correcto? ¿Aquí ya es posible evaluar la *antiderivada*?

En efecto, la expresión es incorrecta, ya que los límites de evaluación están definidos para x. ¡Y en la expresión de la derecha la variable es u! ¿Qué se debe hacer para que esto sea correcto?

En general, si al resolver una ecuación que en principio fue planteada en x y se tiene que cambiar de variable, ocurre esto:

T5.3
$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\,dx = \int_{u=g(a)}^{u=g(b)} f(u)\frac{du}{dx}dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

Donde $u = g(x)$ es el cambio de variable efectuado. Recuerda que a esto se le llama teorema del cambio de variable y al verificar en la integral que tomamos de ejemplo tendremos:

ACTIVIDAD 5.2.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las situaciones novedosas.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.
- Interés por el debate de ideas.

Productos

- Ensayo con las reflexiones a cada una de las tres primeras preguntas planteadas y respuesta comentada a las preguntas 4 y 5.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Para la integral impropia

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

revisar con cuidado la escritura de su expansión con límites. ¿Se debe poner M en ambos límites?

$$u = g(x) = 5 + \operatorname{sen} x^2 \Rightarrow g(a) = g(0) = 5 + \operatorname{sen}(0) = 5,\ g(b) = g(\sqrt{\pi})$$
$$= 5 + \operatorname{sen} \pi = 5$$

Por lo que en este caso, la integral se escribe de manera correcta así:

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} \frac{3x \cos x^2\, dx}{(5 + \operatorname{sen} x^2)^2} = \frac{3}{2}\int_5^5 u^{-2}\, du = 0$$

No hay necesidad de resolverla porque sabemos que cuando los límites de la integral son idénticos..., ¿qué ocurre?

1. En ocasiones $g(a)$ o $g(b)$ no existe, por lo que se podrían sustituir por sus límites laterales correspondientes. ¿En qué situaciones crees que pueda ocurrir esto? Traza un diagrama que ejemplifique tu afirmación.
2. A veces no vale la pena encontrar $g(a)$ y $g(b)$ si vuelves a la variable original y luego evalúas, pero anota esto de manera correcta en tus expresiones.
3. ¿Qué haces si te encuentras situaciones que den lugar a **integrales impropias**? Llamamos así a las integrales en las que uno o ambos límites crecen en forma indefinida, como en los siguientes casos:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx,\ \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx \quad \text{o} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

¡No hay problema!, para el primer caso se resuelve así:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_a^{M} f(x)\,dx = \lim_{M\to\infty} [F(x)]_a^M$$

¡Es lo mismo! Nada más cuida los límites laterales necesarios.

4. ¿Cómo escribirás la solución de los otros dos casos de integrales impropias mostrados en el punto tres?
5. Como ejemplo, ¿qué pasará si tienes lo siguiente?

$$\int_0^5 \frac{dx}{(x-2)^5}$$

¡El infinito anda oculto! Resuélvela.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Los procesos del límite son esenciales para poder conformar interpretaciones adecuadas de fenómenos acumulativos o simplemente de variación, por lo que descubrir en un proceso cómo se dan los incrementos y después llevar al límite esas propuestas representa una fuente inagotable de interpretaciones de la integral y, por tanto, de su aplicación.

Ver a la integral en acción es muy simple. Como hemos comentado antes, al analizar un instante de la situación bajo estudio, tal vez la visualización de los elementos diferenciales sea complicada debido a ínfima magnitud. En contraparte, si se analizan las consecuencias de cualesquier proceso acumulativo después de un tiempo prudente, éstas serán del todo visibles.

De la misma forma, y teniendo en cuenta que la acumulación representa una suma, siempre es posible aproximar de manera numérica el cálculo de la integral definida. Además, el teorema fundamental del cálculo en su primera parte aporta la potencia necesaria para que se convierta en un proceso analítico-algebraico, para después aplicarlo a situaciones específicas cuando se usa la segunda parte del mismo teorema.

Aplicación 5.2.1

Aplicando la integral en la probabilidad

Una aplicación muy importante que se da en muchas áreas del conocimiento se ubica en la probabilidad y la estadística. Por ejemplo, si realizas una encuesta acerca de las estaturas de los que fueron tus compañeros de grupo en el bachillerato y agrupas estos valores en clases, podrás obtener un histograma, que no es más que un gráfico de barras.

1. ¿Qué significa en el histograma el área de cada barra?

Aquí se desprende que el área de cada barra es proporcional a la cantidad de elementos con esa característica común llamada clase. Si esa área n se divide entre el número total de entrevistados N, la gráfica solo cambiará de escala, pero no cambiará su forma, ¿estás de acuerdo? Sin embargo, ahora su área será n/N y representará la proporción de la población que cumple con la característica de la clase. Por ejemplo, tomemos la estatura entre 155 y 160 cm; esa proporción se define como la probabilidad, p, de que en una selección al azar se encuentre a una persona con estatura en ese rango.

¿Qué pasará si la población es enorme? Más aún, si $N \to \infty$, habría tantos elementos en cada clase que resultará conveniente reducir el ancho de la clase y, en el límite, la clase es infinitesimal y el histograma representará una gráfica continua que podrá adquirir diferentes formas, dependiendo del fenómeno bajo estudio. Si n/N se define como la probabilidad de la clase, ¿ahora qué ocurrirá con este número? (Véase figura 5.12.)

APLICACIÓN 5.2.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la observación de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de los conceptos para resolver situaciones reales.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Respuestas y conjeturas meditadas para cada una de las nueve preguntas planteadas y de la investigación de la pregunta 10.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de la probabilidad.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de cinco personas.
- Discutir sobre el comportamiento de variables estadísticas.
- Cómo puedes responder a la pregunta: ¿Qué probabilidad hay de que el equipo A le gane al equipo B, si A es tu equipo favorito?
- Propiciar la reflexión en equipo y el debate de ideas.

Las clases estrictamente desaparecen porque son infinitesimales, pero al observar la figura 5.12 se desprende que la probabilidad de encontrar un objeto con la característica x dentro del intervalo $[a, b]$ resulta ser:

$$p(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Donde a $f(x)$ se le llama función de probabilidad y a la integral $F(x)$ se le denomina función de distribución de probabilidad.

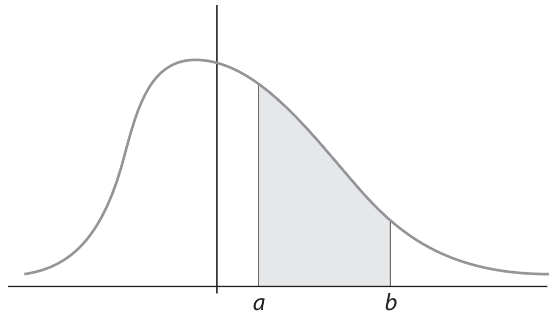


Figura 5.12 Ejemplo de una función de probabilidad.

2. En particular, el área total bajo la curva de una función de probabilidad siempre vale uno. ¿Por qué?

La figura 5.13 muestra, de manera esquemática, tres funciones de probabilidad; la curva a la izquierda representa a una variable como "la hora de llegada a clases", ya que la mayoría de los estudiantes llega muy cerca de la hora de inicio y pocos lo hacen después. La curva del centro ejemplifica fenómenos centrados alrededor de un valor, por ejemplo las estaturas de las personas y, finalmente, la de la derecha representa el comportamiento de una variable como el tiempo en que las personas pagan una deuda, ya que muy pocos lo hacen con mucha antelación, muchos más lo hacen conforme se acerca la fecha límite y, desde luego, otros lo hacen tarde. Estos comportamientos se observan porque en las partes más altas cada pequeño rectángulo que se trace en un intervalo representa un área que es equivalente a una probabilidad alta; si recordamos el punto de partida de la discusión, entonces representa a más personas u objetos en esa clase.

Un ejemplo muy concreto del uso de la probabilidad, como la que estamos estudiando, son las agencias de seguros que basan sus tarifas en este tipo de curvas. Así, si la probabilidad de que te puedas accidentar o morir es alta, te cobrarán mucho dinero, y poco en caso contrario.

3. ¿Por qué crees que para los seguros de mortandad las tarifas para las mujeres en comparación con las de los hombres de la misma edad son menores?

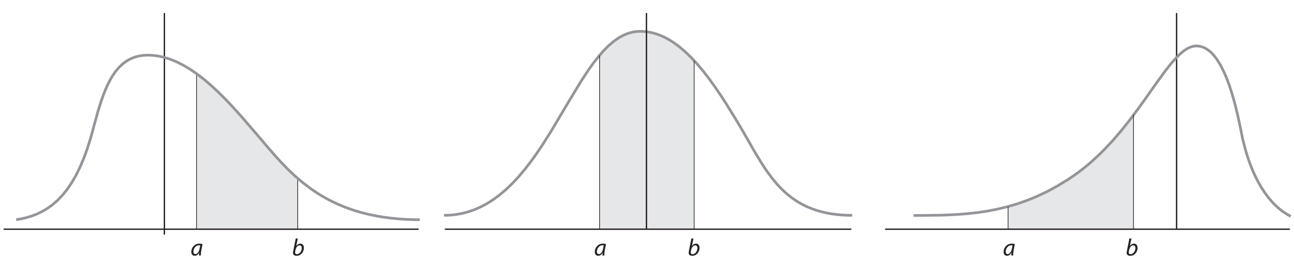


Figura 5.13 Tres ejemplos de funciones de probabilidad.

¿Cómo crees que se comporte la función de probabilidad para las siguientes variables? Explica en cada caso el porqué de tu propuesta.

4. La edad de fallecimiento.
5. La fecha de nacimiento.
6. Las calificaciones en matemáticas.
7. La edad para el matrimonio.
8. El salario que ganan las personas.
9. Que tu equipo preferido de futbol anote un gol a lo largo de cada partido.

Investiga:

10. ¿Qué significa una tabla normalizada de la distribución normal? Puedes consultarla en cualquier libro de probabilidad y estadística.

Comparte tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

Aplicación 5.2.2

¡La integral en acción!

Es importante saber que la integral definida, siempre que no se trate de una integral impropia, ¡siempre tiene solución! Entonces, ¿para qué se requiere la integral indefinida?

Como todo el lenguaje matemático, la integral forma parte de él y resulta ser una forma de expresar modelos que representan a nuestra realidad con el propósito de predecir, calcular y controlar.

Que error grave cometería un industrial si antes de iniciar la producción de cierto tipo de envase, como el que se comenta en la aplicación 5.1.1, no supiera con exactitud el volumen que debe contener el envase y la cantidad de los materiales que se empleará en la producción, datos que le permitirían conocer si es costeable en comparación con lo que ya existe en el mercado. De esta manera, la integral se aplica en la fase de diseño, evaluación y, finalmente, en la producción. Desde luego, estas integrales no necesariamente se resuelven de manera analítica.

Por ejemplo, no es un pasatiempo matemático inútil el estudio teórico de la vibración de una viga en voladizo, fenómeno que en su estudio aplica la integración en la generación de un modelo que lo represente, de tal forma que la integral indefinida permite expresar qué pasará en situaciones que el propio modelo delimite. Ese modelo, relativamente simple, que podrás encontrar en libros

APLICACIÓN 5.2.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la observación de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de los conceptos para resolver situaciones reales.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Reflexiones y conjeturas meditadas de acuerdo con el proceso de diseño, fabricación y operación de un avión.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de los modelos teóricos.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo en equipo de tres personas.
- Descarga la revista *Frontiers*, de la página de la compañía Boeing, y revisa cuántos temas interesantes relacionados con lo que estamos estudiando se presentan.
- ¿Se comportan igual las alas de un avión que las aspas de la hélice de un helicóptero?
- Propiciar la reflexión en equipo y la investigación de temas de interés.

FIGURA 5.14 Avión *Boeing*.

sobre el tema, resulta más complejo cuando nos acercamos a la realidad de una viga más compleja que soporta dicho fenómeno: las alas de los aviones (véase figura 5.14).

¿Crees que para que estos aviones se produjeran haya intervenido alguna integral?

Sugiere algunas que crees se aplicaron y comparte tus hallazgos con tus compañeros y con tu facilitador.

Hasta este acercamiento, las propiedades de la integral provienen básicamente de la definición de área; sin embargo, existen propiedades adicionales que se desprenden directamente de las cualidades de las funciones y otras desde el propio objeto matemático que se ha definido; por ello, un mejor manejo de la integración ocurre si esas propiedades se analizan.

❖ Propiedades de la integral definida

De las cualidades de la suma de *Riemann* se desprenden las siguientes propiedades para la integral definida:

T5.5 $$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$$

T5.6 $$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

T5.7 $$\int_a^a f(x) = 0$$

T5.8 $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

T5.9 $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Teorema del valor medio para integrales (analizado en la actividad 5.1.3):

T5.10 Si $f(x)$ es continua en $[a, b]$, entonces existe c en $[a, b]$, tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

Actividad 5.2.3

Propiedades adicionales de la integral definida

Al resolver una integral definida, debe quedar claro que se debe hacer de acuerdo con los diversos teoremas que hemos estudiado hasta este momento; pero, recordar algunas características de las funciones puede ayudarnos mucho más a mejorar nuestro rendimiento.

1.

T5.11 Si la función considerada en el integrando es par se cumple:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$$

Explica por qué.

T5.12 Si la función considerada en el integrando es impar se cumple:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

Explica por qué.

T5.13 Si la función considerada es periódica y se desea calcular:

$$\int_0^{nT+a} f(x)\,dx$$

donde T es la longitud del periodo de la función, se tiene que:

$$\int_0^{nT+a} f(x)\,dx = n\int_0^T f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

Explica por qué.

2. Indica la diferencia que hay entre:

ACTIVIDAD 5.2.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las situaciones novedosas.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.
- Interés por el debate de ideas.

Productos

- Ensayo con las reflexiones a cada una de las cuatro preguntas planteadas y respuesta justificada.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ___________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio en equipo de tres personas.
- Investigar en otras fuentes y proponer alguna otra propiedad de la integral definida que se haya encontrado.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

$$\int_a^b |f(x)|dx \text{ y } \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$

Traza un dibujo que permita observar tu afirmación.

3. Si $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in (a, b)$, indica la relación que se establece entre

$$\int_a^b f(x)dx \text{ y } \int_a^b g(x)dx$$

Explica por qué.

4. Explica con tus palabras y emplea gráficas para ilustrar los teoremas desde el T5.5 hasta el T5.9.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Ejercicios 5.1

5.1.1 Aproxima, mediante sumas, el valor $\int_1^2 (x^2 - 1)dx$.

Resolución

Considera $h = (b - a) / 10 = 0.1$ para aproximar la integral mediante 10 barras de igual ancho; luego:

$$\int_1^2 (x^2 - 1)dx \approx \sum_{i=1}^{10} f(x_i)h = h\sum_{i=1}^{10} f(x_i) = 0.1\sum_{i=1}^{10} f(x_i)$$
$$= 0.1(11.85) = 1.185.$$

Debido a que se tomó x_i como el extremo izquierdo del intervalo se tiene el valor de la sumatoria:

$$f(1) + f(1.1) + f(1.2) + \cdots + f(1.9) = (1 - 1) + (1.12 - 1)$$
$$+ (1.22 - 1) + \cdots + (1.92 - 1) = 11.85$$

Si se hubiera partido en 100 en lugar de 10 y al calcular en un software como Excel© se obtiene: 1.31835, que es una mejor aproximación, como se muestra en la figura 5.15.

Además, podemos visualizar la gráfica de la aproximación con el software Winplot®. Por su parte, en la figura 5.16 se observa la aproximación 1.185 para 10 intervalos, tomando el punto izquierdo para evaluar la altura del rectángulo; analiza las opciones que permite el menú. Después de definir tu función, selecciona el menú **Una>integración**. La figura 5.17 muestra la aproximación para 50 intervalos, tomando el punto medio para el cálculo.

La figura 5.18 corresponde al cuadro de resultados de Winplot® del menú **Una>integración**, en el que se observan diferentes selecciones para la posición del punto de evaluación y para la forma de la aproximación a la función mediante secantes (aproximación

EJERCICIOS 5.1

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

B101 | =0.01*SUMA(B1:B100

	A	B	C	D
1	1	0		
2	1.01	0.0201		
3	1.02	0.0404		
4	1.03	0.0609		
5	1.04	0.0816		
6	1.05	0.1025		
7	1.06	0.1236		
8	1.07	0.1449		
9	1.08	0.1664		
10	1.09	0.1881		
95	1.94	2.7636		
96	1.95	2.8025		
97	1.96	2.8416		
98	1.97	2.8809		
99	1.98	2.9204		
100	1.99	2.9601		
101		1.31835		
102				

FIGURA 5.15 Corrida en Excel del ejercicio 5.1.1.

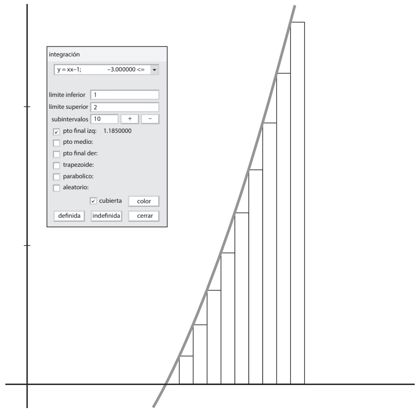


FIGURA 5.16 Aproximación en Winplot® para 10 intervalos, del ejercicio 5.1.1.

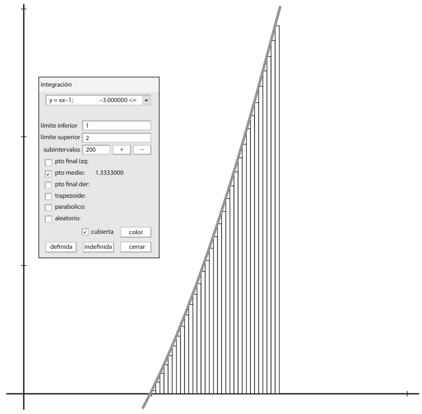


FIGURA 5.17 Aproximación en Winplot® para 50 intervalos, del ejercicio 5.1.1.

por trapecios) o parábolas. La aproximación tomando el punto izquierdo corresponde, en este caso, a una suma inferior de *Riemann*, mientras la selección del lado derecho es una suma superior de *Riemann*; el valor exacto de la integral analíticamente es $4/3$.

5.1.2 Calcula el valor aproximado $\ln 9$.

Resolución

Como $\displaystyle\int_1^9 \frac{du}{u} = \ln u\Big|_1^9 = \ln 9 - \ln 1 = \ln 9$

Al realizar el cálculo manual para $n = 10$, la suma da como resultado $\ln 9 \approx 2.6027193$.

Para mejorar la aproximación, nos apoyamos en la tecnología. Consideremos $h = 0.01$; es decir, $n = 800$ y calculamos la suma en Excel® para:

$$\int_1^9 \frac{du}{u} \approx 0.01\sum_1^{800} \frac{1}{u} = 0.01(220.167725) = 2.201677252$$

En la figura 5.19 se presenta un segmento de la tabla de Excel empleada, mientras que en la figura 5.20 se muestra la aproximación en Winplot® para 30 intervalos, en suma superior de *Riemann* de valor 2.4449 e inferior de 2.1749. El valor del $\ln 9 = 2.197224577$ según la calculadora. ¿Qué algoritmo crees que aplica tu calculadora para el cálculo del logaritmo natural?

5.1.3 Aproxima el valor de π empleando:

$$\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{u}{a} + c$$

Resolución

Como $\tan^{-1}(1) = \pi / 4$ (esto es 45°) $\tan^{-1}(0) = 0$, haciendo $a = 1$ se tiene:

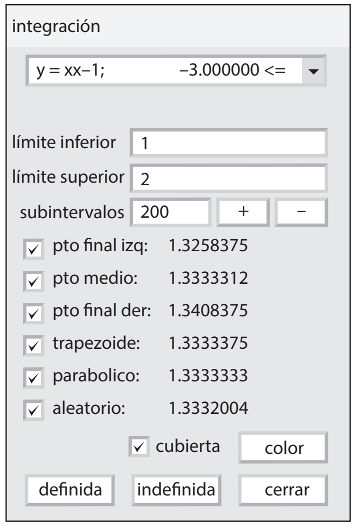


FIGURA 5.18 Aproximación numérica en Winplot® para 200 intervalos para el ejercicio 5.1.1.

B800 | =1/A800

	A	B	C
1	1	1	
2	1.01	0.99009901	
3	1.02	0.980392157	
4	1.03	0.970873786	
5	1.04	0.961538462	
6	1.05	0.952380952	
796	8.95	0.111731844	
797	8.96	0.111607143	
798	8.97	0.11148272	
799	8.98	0.111358575	
800	8.99	0.111234705	
801		2.201677252	
802			

FIGURA 5.19 Aproximación numérica en Excel para 800 intervalos para el ejercicio 5.1.2.

$$\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \tan^{-1} u \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4}$$

De donde:

$$\pi = 4\int_0^1 \frac{du}{1+u^2} \approx 4(0.005)\sum_{i=1}^{200} \frac{1}{1+u^2} = 3.14658848$$

El cual, como se observa, aún requiere valores menores de h para que la aproximación sea más justa. En la figura 5.21 se observa un segmento de la tabla en Excel empleada para calcular la integral con 1 000 intervalos, mientras la figura 5.22 muestra la aproximación con Winplot® en 50 intervalos, que aproxima a $(4)0.7853679 = 3.1414716$ por el método parabólico. ¿A qué crees que se deba la mayor exactitud de Winplot® con 50 intervalos, en comparación con los mil intervalos de Excel®?

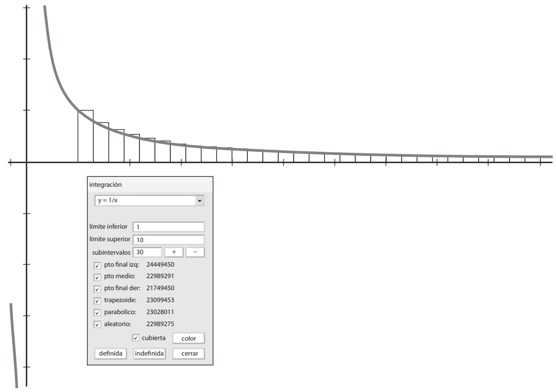
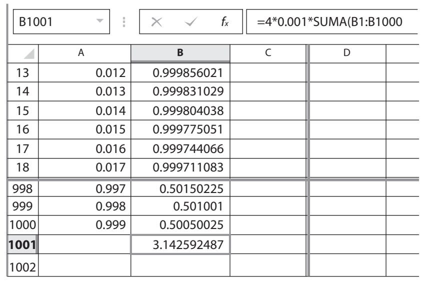


Figura 5.20 Aproximación numérica en Winplot® para 30 intervalos en suma superior para el ejercicio 5.1.2.

Además, al emplear directamente la tangente inversa en la calculadora, el cálculo resulta:

$$4(\tan^{-1}(1)) = 4(0.785398163) = 3.141592654$$

¿Qué algoritmo crees que emplea la calculadora que resultó más cercano al valor de π conocido?



B1001 =4*0.001*SUMA(B1:B1000

	A	B	C	D
13	0.012	0.999856021		
14	0.013	0.999831029		
15	0.014	0.999804038		
16	0.015	0.999775051		
17	0.016	0.999744066		
18	0.017	0.999711083		
998	0.997	0.50150225		
999	0.998	0.501001		
1000	0.999	0.50050025		
1001		3.142592487		
1002				

Figura 5.21 Aproximación numérica en Excel para 1 000 intervalos en suma superior para el ejercicio 5.1.3.

5.1.4 $\int_{-1}^{1} (1 + 2x - 3x^2 + x^3)\,dx.$

Resolución

$$\int_{-1}^{1} (1 + 2x - 3x^2 + x^3)\,dx = \left[x + x^2 - x^3 + \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{1}$$

$$= \left(1 + 1 - 1 + \frac{1}{4}\right) - \left(-1 + 1 + 1 + \frac{1}{4}\right) = 0$$

La *graficación* en Winplot® muestra que el área negativa es igual al área positiva, por eso la integral es cero. La figura 5.23 muestra este hecho.

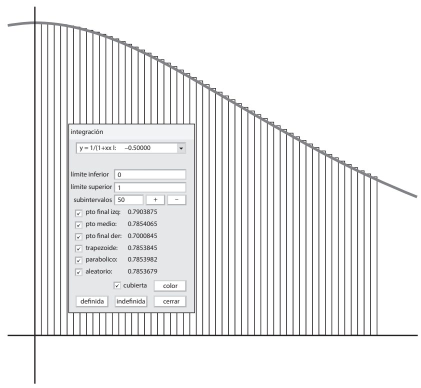


Figura 5.22 Aproximación numérica en Winplot® para 50 intervalos en suma superior para el ejercicio 5.1.3.

5.1.5 Calcula $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx.$

Resolución

Con $u = \operatorname{sen} 2x$ se tiene $du = 2\cos 2x\,dx$, de donde, al modificar los límites de integración de manera adecuada se tiene: $u_2 = \operatorname{sen} 2\pi = 0$; $u_1 = \operatorname{sen} 0 = 0$

$$\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^2 2x \cos 2x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^0 u^2\,du = 0$$

5.1.6 Calcula $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1-e^{-2x}}$.

Resolución

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-e^{-2x}} = \int_0^1 \frac{dx}{e^{-2x}(e^{2x}-1)} = \int_0^1 \frac{e^{2x}\,dx}{(e^{2x}-1)} = \frac{1}{2}\int_0^{e^2-1} \frac{du}{u}$$

$$u = e^{2x}-1, du = 2e^{2x}\,dx; u_1 = e^2-1, u_2 = e^0-1 = 0 = \ln u\Big|_0^{e^2-1}$$

$$= \ln(e^{2x}-1)\Big|_0^1 = \ln(e^2-1) - (\ln 0 \to -\infty) = +\infty$$

En realidad, debió ser notorio al inicio que $e^0 - 1 = 0$, de donde la función es asintótica y $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1}{1-e^{-2x}} \to \infty$, por lo que la integral es impropia y se debe escribir $\displaystyle\lim_{M\to 0} \int_M^1 \frac{dx}{1-e^{-2x}}$, que al final nos lleva al mismo resultado. En la figura 5.24 se muestra cómo el área crece sin límite a la izquierda.

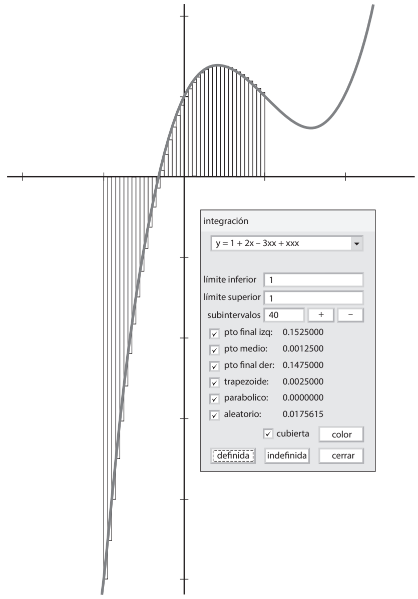


FIGURA 5.23 Aproximación numérica en Winplot® para 40 intervalos en aproximación parabólica es cero, ejercicio 5.1.4.

5.1.7 Calcula el promedio de $f(x) = \text{sen}(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Resolución

De acuerdo con el teorema del valor medio para integrales:

$$\bar{f}(x) = \frac{1}{\pi - 0}\int_0^{\pi} \text{sen}\, x\, dx = -\frac{\cos x}{\pi}\Big|_0^{\pi} = -\frac{(\cos\pi - \cos 0)}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

Los valores en que ocurre tal altura en la gráfica corresponden a $\text{sen}\, x = 2/\pi \therefore x = \text{sen}^{-1} 2/\pi$; o bien, $x = 0.690107 \approx 30.54°$ y $x = 2.4505226 \approx 149.46°$. La figura 5.25 muestra este promedio.

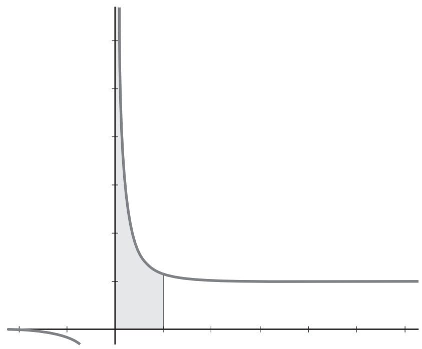


FIGURA 5.24 Crecimiento del área sin límite por la izquierda, ejercicio 5.1.6.

5.1.8 Calcula el promedio de $g(x) = (x-1)^2$ en el intervalo $[1, 4]$.

Resolución

De acuerdo con el teorema del valor medio, para integrales se tiene:

$$\bar{g}(x) = \frac{1}{4-1}\int_1^4 (x-1)^2\, dx = \frac{1}{3}\frac{(x-1)^3}{3}\Big|_1^4 = \frac{1}{9}(27-0) = 3$$

Véase figura 5.26.

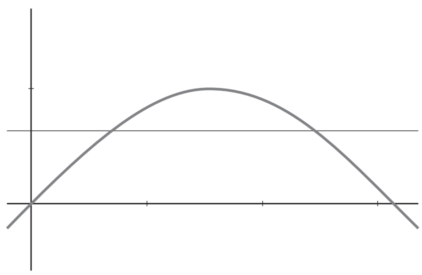


FIGURA 5.25 Valor medio para media onda del sen *x*, ejercicio 5.1.7.

5.1.9 Sea el área entre la recta $y = 1.1$ y la función $y = \sqrt[3]{x+1}$ en el intervalo $[1, 3]$, ¿cuál área es más grande, la que está por encima de la recta o la que está por debajo?

Resolución

De acuerdo con el teorema del valor medio se tiene:

$$\bar{y} = \frac{1}{3-1}\int_1^3 \sqrt[3]{x-1}\, dx = \frac{1}{2}\frac{3}{4}(x-1)^{\frac{4}{3}}\Big|_1^3 = \frac{3(2^{\frac{4}{3}})}{8} = 0.945$$

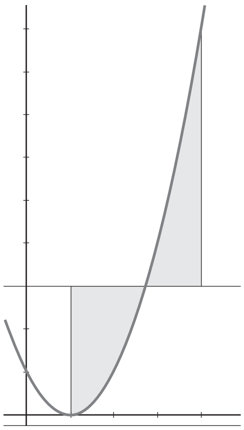


FIGURA 5.26 El teorema del valor medio también afirma que el área por debajo del promedio es igual a la que está por encima del mismo, dentro del intervalo estudiado, ejercicio 5.1.8.

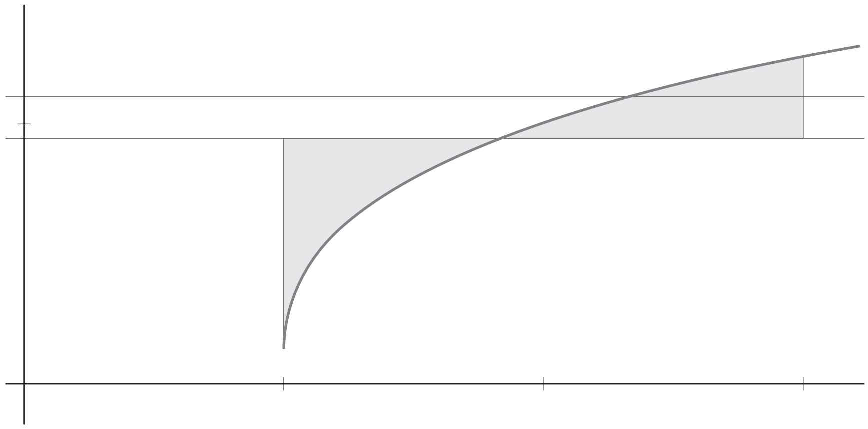


FIGURA 5.27 El área entre la recta media y la curva de la función definen áreas iguales entre ellas, por eso el área delimitada por una recta más arriba de la media determina áreas mayores por debajo de la misma, ejercicio 5.1.9.

Por lo que el área más grande está por debajo de la recta $y = 1.1$. La figura 5.27 muestra este hecho.

5.1.10 Muestra mediante una gráfica, qué identifica la $\int_{-3}^{2} x(\operatorname{sen} x - \cos 2x)\,dx$.

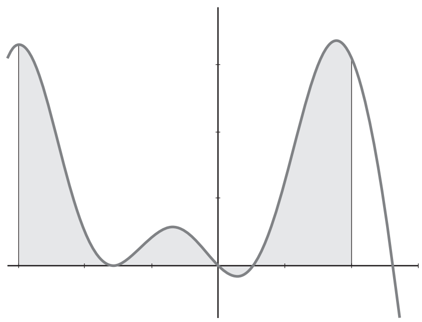


FIGURA 5.28 Suma de áreas con signo calculadas para el ejercicio 5.1.10 mediante la integral:

$$\int_{-3}^{2} x(\operatorname{sen} x - \cos 2x)\,dx = 5.59382$$

Resolución

Empleamos Winplot® para observar la gráfica y en ésta el trazo de una partición, por lo que la integral planteada representa la suma de las áreas con signo que corresponde a 5.59382, como muestra la figura 5.28.

Observa que el área delimitada entre el eje x y la curva se puede representar mediante la integral:

$$\int_{-3}^{2} \left| x(\operatorname{sen} x - \cos 2x) \right| dx$$

Esta integral, mostrada en la figura 5.29, tiene un valor de 5.7042; la diferencia entre las dos integrales corresponde al doble de la pequeña área negativa del intervalo [0, 0.5236] (¿por qué el doble?).

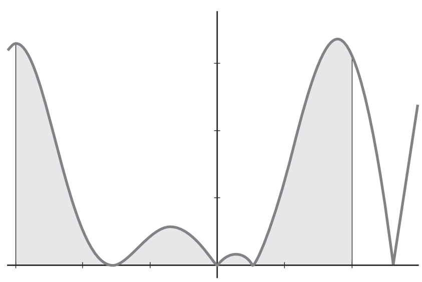


FIGURA 5.29 Suma de áreas con signo calculadas para el ejercicio 5.1.10 mediante la integral:

$$\int_{-3}^{2} \left| x(\operatorname{sen} x - \cos 2x) \right| dx = 5.7042$$

5.1.11 Del desarrollo de un experimento se obtuvo la tabla 5.1, si el resultado que se desea entregar corresponde a:

$$\int_{0}^{5} f(x)\,dx$$

Calcula la aproximación de la integral con los datos de la tabla 5.1.

TABLA 5.1 Tabla de experimento del ejercicio 5.1.11.

x	$f(x)$	x	$f(x)$
0.0000000	0.0000000	2.6000000	0.1221602
0.2000000	0.1444783	2.8000000	1.2336176
0.4000000	0.1229153	3.0000000	2.4571508
0.6000000	0.1213708	3.2000000	3.3649890
0.8000000	0.5972445	3.4000000	3.8247912
1.0000000	1.2576178	3.6000000	3.7831383
1.2000000	2.0033194	3.8000000	3.2798474
1.4000000	2.6987409	4.0000000	2.4452098
1.6000000	3.1965894	4.2000000	1.4796059
1.8000000	3.3670909	4.4000000	0.6182399
2.0000000	3.1258821	4.6000000	0.0866980
2.2000000	2.4548244	4.8000000	0.0550884
2.4000000	1.4111141	5.0000000	0.5992637

D27 =SUMA(D2:D26

	A	B	C	D
1	0	0		
2	0.2	0.1444783	0.2	0.02889566
3	0.4	0.1229153	0.2	0.02458306
4	0.6	0.1213708	0.2	0.02427416
5	0.8	0.5972445	0.2	0.1194489
6	1	1.2576178	0.2	0.25152356
7	1.2	2.0033194	0.2	0.40066388
8	1.4	2.6987409	0.2	0.53974818
9	1.6	3.1965894	0.2	0.63931788
10	1.8	3.3670909	0.2	0.67341818
11	2	3.1258821	0.2	0.62517642
12	2.2	2.4548244	0.2	0.49096488
13	2.4	1.4111141	0.2	0.28222282
14	2.6	0.1221602	0.2	0.02443204
15	2.8	1.2336176	0.2	0.24672352
16	3	2.4571508	0.2	0.49143016
17	3.2	3.364989	0.2	0.6729978
18	3.4	3.8247912	0.2	0.76495824
19	3.6	3.7831383	0.2	0.75662766
20	3.8	3.2798474	0.2	0.65596948
21	4	2.4452098	0.2	0.48904196
22	4.2	1.4796059	0.2	0.29592118
23	4.4	0.6182399	0.2	0.12364798
24	4.6	0.086698	0.2	0.0173396
25	4.8	0.0550884	0.2	0.01101768
26	5	0.5992637	0.2	0.11985274
27				8.77019762
28				

FIGURA 5.30 Imagen de la tabla de Excel calculando la integral del experimento del ejercicio 5.1.11.

Resolución

Al aplicar a los datos la suma de *Riemann*, tomamos el lado derecho de cada intervalo como x^* y se tiene:

$$\int_0^5 f(x)\,dx \approx \sum_2^{26} (x_i - x_{i-1}) f(x_i{}^*) = 8.77019762$$

Nota en la figura 5.30, que es un recorte de una tabla Excel, que la columna C identifica la diferencia entre las celdas correspondientes a las columnas B y A; y como los datos fueron tomados en idénticos intervalos. Esa diferencia tiene un valor constante de 0.2. La columna D fue calculada por el producto de las celdas correspondientes B y C; y, finalmente, la celda D27 calcula la suma de la columna D, desde la celda dos a la 26, que corresponde al valor aproximado de la integral deseada.

Autoevaluación 5.1

5.1.1 Resuelve: $\int_0^5 (5+3x)^{-1}\,dx$.

5.1.2 Aproxima la integral $\int_0^1 e^x\,dx$ mediante sumas.

5.1.3 Calcula el valor medio de la función $f(x) = e^x$ en el intervalo [0, 2].

AUTOEVALUACIÓN 5.1-5.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés por la abstracción.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre el dominio de la solución de integrales definidas de manera numérica, analítica, e incluso con uso de tablas de datos.

Desempeños

- Observable en el producto.

5.1.4 Aproxima la integral $\int_1^2 e^{x^2}\,dx$ mediante sumas.

5.1.5 Resuelve: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx$.

Autoevaluación 5.2

5.2.1 Calcula el valor medio de la función $y = ax^2$ en el intervalo $[a, b]$.

5.2.2 Resuelve $\int_{1/2}^{5/2} \frac{x\,dx}{1+x^2}$.

5.2.3 Mediante sumas, aproxima la integral $\int_1^3 \sqrt{1+e^{x^2}}\,dx$.

5.2.4 Aproxima la integral $\int_0^1 \frac{x^5}{7} - \frac{x^6}{6}\,dx$ mediante sumas.

5.2.5 Calcula el valor medio de la función $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x}$ en el intervalo [2, 4].

Autoevaluación 5.3

5.3.1 Aproxima la integral $\int_1^2 \frac{dx}{x}$ mediante sumas.

5.3.2 Calcula el valor medio de $f(x) = \tan x$ en el intervalo $[0, \pi/4]$.

5.3.3 Aproxima la integral $\int_1^2 \frac{\ln x\,dx}{x}$ mediante sumas.

5.3.4 Calcula el valor medio de la función $y = x^3$, en el intervalo $[-1, 1]$.

5.3.5 Aproxima, mediante sumas, el valor medio de la función $f(x) = 2\operatorname{sen} 2x \cos 3x$ en el intervalo $[-4\pi/3, 4\pi/3]$.

Autoevaluación 5.4

5.4.1 Resuelve $\int_1^2 xe^{x^2}\,dx$

5.4.2 Calcula el valor medio de $f(x) = x\cos x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

5.4.3 Calcula el valor medio de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}$ en el intervalo [2, 5].

5.4.4 Calcula $\int_2^3 \frac{x+1}{(x^2+4)(x+2)}\,dx$.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

AUTOEVALUACIÓN 5.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

5.4.5 Aproxima, mediante sumas, el valor medio de $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos 2x+\cos 3x}$ en el intervalo $[\pi/4, \pi/2]$.

Solución a la autoevaluación 5.1

5.1.1 $\displaystyle\int_0^5 (5+3x)^{-1}\,dx=\frac{1}{3}(\ln 20-\ln 5)=0.46209812$

5.1.2 $\displaystyle\int_0^1 e^x\,dx\approx 1.71828$

5.1.3 $\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^2 e^x\,dx=3.19453$

5.1.4 $\displaystyle\int_1^2 e^{x^2}\,dx\approx 14.989976$

5.1.5 $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (1+\operatorname{sen}^2 x)\,dx=\frac{3\pi}{2}$

Solución a la autoevaluación 5.2

5.2.1 $\displaystyle\frac{a}{b-a}\int_a^b x^2\,dx=\frac{a}{3}(a^2+ab+b^2)$

5.2.2 $\displaystyle\int_{1/2}^{5/2}\frac{x\,dx}{x^2+1}=0.8789289$

5.2.3 $\displaystyle\int_1^3\sqrt{1+e^{x^2}}\,dx\approx 34.38718$

5.2.4 $\displaystyle\int_0^1\frac{x^5}{7}-\frac{x^6}{6}\,dx\approx 0$

5.2.5 $\displaystyle\frac{1}{4-2}\int_2^4\frac{e^x\,dx}{1+2e^x}=0.48591$

Solución a la autoevaluación 5.3

5.3.1 $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x}\approx 0.693147$

5.3.2 $\displaystyle\frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/4}\tan x\,dx=\frac{2\ln 2}{\pi}=0.441271$

5.3.3 $\displaystyle\int_1^2\frac{\ln x\,dx}{x}\approx 0.240227$

AUTOEVALUACIÓN 5.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 5.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 5.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

5.3.4 $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$

5.3.5 $\dfrac{3}{8\pi}\displaystyle\int_{-4\pi/3}^{4\pi/3} 2\,\mathrm{sen}\,2x\cos 3x\,\mathrm{d}x \approx 0$

Solución a la autoevaluación 5.4

5.4.1 $\displaystyle\int_{1}^{2} xe^{x^2}\,dx = 25.9399$

5.4.2 $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{0}^{\pi} x\cos x\,dx = -\dfrac{\pi}{2}$

5.4.3 $\dfrac{1}{5-2}\displaystyle\int_{2}^{5}\dfrac{dx}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{2}{3}$

5.4.4 $\displaystyle\int_{2}^{3}\dfrac{x+1}{(x^2+4)(x+2)}\,dx = 0.0764746$

5.4.5 $\dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_{\pi/4}^{\pi/2}\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos 2x+\cos 3x}\,dx \approx -0.680325$

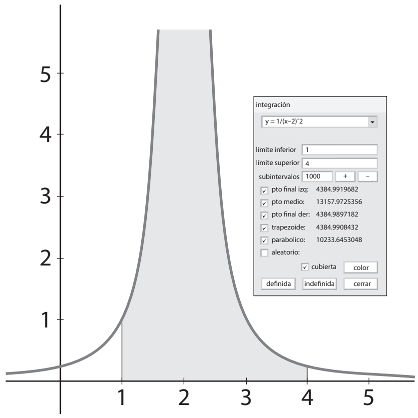


Figura 5.31 Gráfica y cálculo del área en [1, 4] con Winplot® para la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

5.3 Integral impropia

¿Tienes problemas en los límites de la integral? Pero, espera, me refiero a que no sepas qué poner como límites de la integral. En realidad, a veces las integrales nos imponen situaciones en las que los límites de integración no están muy claros. Observa, por ejemplo, la figura 5.31.

Aplicando el software Winplot® para el cálculo del área bajo la curva para la función $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$, en el [1, 4], equivalente a la integral:

$$\int_{-1}^{4}\frac{dx}{(x-2)^2}$$

se obtiene el detalle mostrado en el cuadro de la figura 5.32, donde se observa una gran discrepancia entre las diferentes sumas estimadas. ¿Está calculada el área bajo la curva de manera correcta? ¿Representa la figura 5.31 el área limitada por las rectas $x=-1$, $x=4$, $y=0$ y la función? Con mayor cuidado se observa que en la gráfica hay una asíntota vertical en $x=2$. ¿Es responsable la asíntota de la discrepancia tan grande entre las diferentes sumas de Riemann calculadas alrededor de $x=2$?

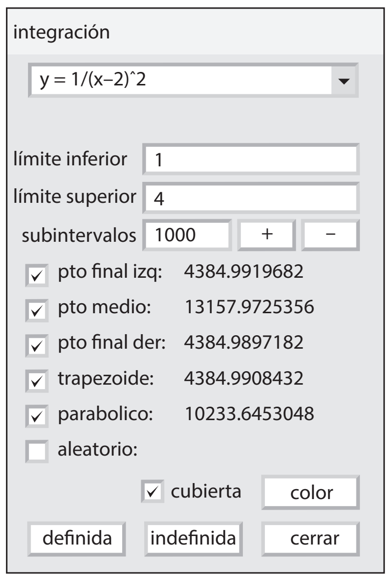


Figura 5.32 Detalle del cálculo del área en [1, 4] con Winplot® para la función de la figura 5.31 $f(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$.

Actividad 5.3.1

Problemas potenciales en el dominio de la función

De nuestro curso de cálculo diferencial, recordamos que el dominio de la función, de acuerdo con el criterio o regla de máximo dominio, queda definido por el conjunto de todos los valores posibles x, para los cuales la expresión tiene sentido; o bien, por las restricciones que el usuario o diseñador de la función le otorgue.

Así, la función:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2 - 4)^2}$$

define su dominio en todos los reales, con excepción de $\{-2, 2\}$.

Por otro lado, la función:

$$g(x) = \begin{cases} x;\ x < 1 \\ 2;\ x > 1 \end{cases}$$

queda definida bajo restricciones del usuario a todos los reales con excepción de $x = 1$.

Ambas funciones presentan discontinuidades, en los valores de x para los cuales no fueron definidos, como se muestra en sus gráficas respectivas (véase figuras 5.33 y 5.34).

De acuerdo con las aplicaciones de la integral:

1. ¿Cuál será el área bajo la curva en [0, 3] en ambas funciones?
2. ¿Se puede calcular? ¿Por qué?
3. ¿Qué problemas específicos presenta cada función en la región que se desea integrar?
4. ¿Qué significado le otorgas a los siguientes planteamientos y cuáles crees que son válidos para las funciones mostradas y por qué?

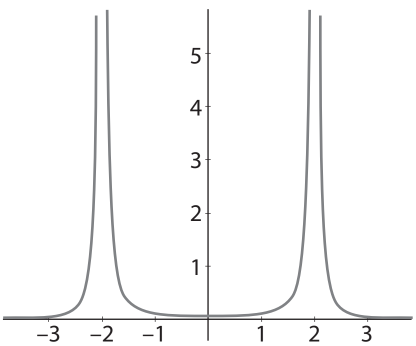


FIGURA 5.33 Gráfica de $f(x) = \frac{1}{(x^2-4)^2}$.

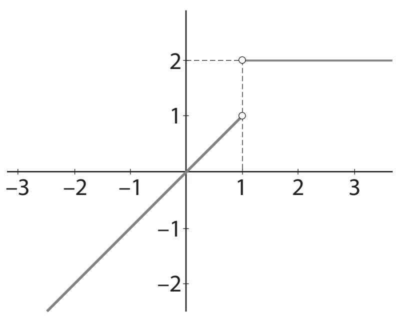


FIGURA 5.34 Gráfica de $g(x) = \begin{cases} x;\ x < 1 \\ 2;\ x > 1 \end{cases}$.

ACTIVIDAD 5.3.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las situaciones novedosas.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.
- Interés por el debate de ideas.

Productos

- Ensayo con las reflexiones a cada una de las cuatro preguntas planteadas y respuesta justificada.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Investigar en otras fuentes y proponer definiciones para convergencia y divergencia de una integral impropia.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

4.1 $\int_0^3 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$

4.2 $\int_0^2 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx + \int_2^3 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$

4.3 $\lim_{a\to 2^+} \int_0^a \frac{1}{(x^2-4)^2}dx + \lim_{a\to 2^-} \int_a^3 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$

4.4 $\int_0^3 g(x)\,dx$

4.5 $\int_0^1 x\,dx + 2\int_1^3 dx$

4.6 $\lim_{a\to 1^-} \int_0^a x\,dx + \lim_{a\to 1^+} \int_a^3 2\,dx$

5. Sabemos que las dos funciones presentan valores de x para los cuales la función no está definida dentro del intervalo de integración. ¿Crees que esto se corrige con los límites mostrados en los casos 4.3 y 4.6?

5. Resuelve las integrales con los límites mostrados en 4.3 y 4.6.

7. Una propiedad de la integral definida establecida en el teorema T5.7 señala que:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

7.1 ¿Cuánto vale el área bajo un solo punto?

7.2 Sea la función $f(x)=\frac{x-3}{x-3}$, traza su gráfica y calcula $\int_0^5 \frac{x-3}{x-3}dx$. ¿Qué tiene que ver esta integral con la pregunta anterior?

7.3 Sea ahora $f(x)=\frac{1}{|x-3|}$, traza su gráfica y calcula $\int_0^5 \frac{1}{|x-3|}dx$. ¿Se puede aplicar el mismo criterio que en el caso previo; es decir, se aplica la propiedad $\int_a^a f(x)\,dx = 0$? ¿Por qué sí o por qué no?

Una integral en la cual uno o ambos límites se comportan de manera asintótica en algún lugar del intervalo de integración, se denomina integral impropia de 2o. orden. De manera similar, si uno o ambos límites de integración se alejan al infinito, se dice que la integral es impropia de primer orden. En particular, si existen discontinuidades salvables o de salto (no asintóticas) dentro del intervalo de integración, se hablará simplemente de la integral de una función discontinua y ésta puede ser descompuesta en sumas de integrales definidas normales.

Se entiende, entonces, que la integral:

$$\int_0^3 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$$

es una integral impropia de segundo orden, está correctamente escrita y su significado con motivo de evaluación es:

$$\lim_{a\to 2^-}\int_0^a \frac{1}{(x^2-4)^2}dx + \lim_{a\to 2^+}\int_a^3 \frac{1}{(x^2-4)^2}dx$$

Sin que la presentación inicial cause confusión. Sin embargo, la integral puede o no existir. Esto depende de que los límites existan o no; es decir, si el resultado de ambas integrales es finito se dice que la integral converge y, en caso contrario, diremos que diverge.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Actividad 5.3.2

Cuando alguno de los límites de una integral no es un número

Hemos notado que una función definida a trozos en cierto intervalo puede o no contar con su integral, dependiendo de que sus discontinuidades no sean asintóticas, e incluso en esos casos aún podría contar con una integral definida finita, o mejor dicho, convergente.

ACTIVIDAD 5.3.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las situaciones novedosas.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.
- Interés por el debate de ideas.
- Interés por expresar las ideas de manera gráfica.

Productos

- Ensayo con las reflexiones a cada una de las seis preguntas planteadas y solución justificada de los ejercicios de la pregunta 5.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Investigar otros ejemplos de integrales doblemente impropias y proponerlos en clase.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

Una situación diferente se presenta en las asíntotas horizontales. Sabemos que en esta situación la curva se acerca cada vez más a una recta horizontal, de tal manera que si te alejas mucho del origen la curva se confunde realmente con ese tipo de recta.

Por ejemplo, observa la gráfica de la figura 5.35. ¿Se puede calcular el área bajo la curva en todo su dominio, si la función $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}-1$?

Para tal función, el área solicitada se escribirá: $\int_{-\infty}^{\infty}(e^{\frac{1}{x^2+1}}-1)\,dx$.

De acuerdo con el título en esta actividad, ∞ y $-\infty$ son las únicas ideas que se encuentran dentro de la recta de los reales ¡que no son números!

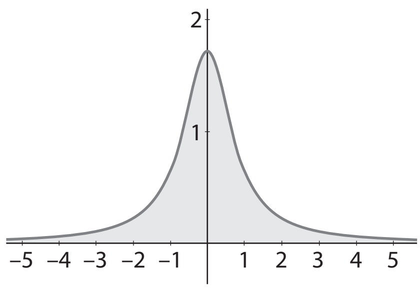


FIGURA 5.35 Gráfica de $f(x)=e^{\frac{1}{x^2+1}}-1$ de acuerdo con la regla de máximo dominio $x\in(-\infty,\infty)$.

Quizá por el título lograste imaginar una integral definida como:

$$\int_{t}^{\sqrt{t}} (2x+1)\,dx$$

1. ¿Son números sus límites de integración?

   La referencia no es a integrales con límites como la anterior, ya que aunque los límites de integración sean funciones, estos representan números de una forma más general.

   Por ejemplo, analiza los siguientes casos:

1.1 $\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$

1.2 $\int_{-\infty}^{-2} \frac{1}{x^2}\,dx$

1.3 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2-4)^2}\,dx$

1.4 $\int_{0}^{\infty} x\,dx$

1.5 $\int_{-\infty}^{\infty} x^3\,dx$

2. Grafica la función del integrando y señala qué área crees que representa la integral en cada caso.
3. Basándote en las ideas de indicar los límites de la integral como funciones límite, tal como se señaló en la actividad 5.3.1, expresa de nuevo las integrales indicadas en su forma de evaluación.

   En general, las integrales que se han presentado son integrales impropias y de nuevo es posible clasificarlas en integrales impropias de primer o segundo orden, dependiendo de si los límites son al infinito o en algún punto asintótico dentro de su dominio. La integral existirá o no, esto dependerá de la posible existencia de los límites calculados; es importante tener cuidado en integrales de la forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$$

   Pues, para éstas resulta conveniente, siempre que no haya discontinuidades asíntotas en el dominio, descomponer en dos integrales impropias de primer orden y algún valor específico a de la siguiente forma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{M\to-\infty}\int_{M}^{a} f(x)\,dx + \lim_{N\to+\infty}\int_{a}^{N} f(x)\,dx$$

Desde luego que la integral originalmente planteada converge solo si ambas integrales convergen. En caso contrario, se dice que la integral diverge.

4. Explica qué crees que sea la convergencia y la divergencia en este caso.

5. En los siguientes ejemplos, calcula y afirma si las integrales planteadas convergen o divergen:

5.1 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$, si $f(x)=\begin{cases} 0 & ;x\le -1 \\ |x| & ;-1<x<1 \\ 0 & ;x\ge 1\end{cases}$

5.2 $\int_{-\infty}^{1} e^{x}\,dx$

5.3 $\int_{-\infty}^{\infty} e^{|x|}dx$, partiendo del hecho que $e^{|x|}$ es una función par.

5.4 $\int_{4}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}dx$

5.5 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x}dx$

6. Observa que algunas integrales pueden ser doblemente impropias de primer o segundo orden. ¿Cuáles puedes citar dentro de los ejemplos 5.1 a 5.5?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Son muchas las aplicaciones para las integrales con límites al infinito. Algunos conceptos están asociados a la física y otros a diferentes aspectos de las matemáticas que en su momento se tendrán que analizar en cursos posteriores.

Aplicación 5.3.1

Nuevamente la probabilidad

Ya en la aplicación 5.2.1 nos acercamos a la probabilidad, un área de las matemáticas muy importante. Veamos ahora otros detalles.

1. ¿Qué es para ti la probabilidad?

La probabilidad valora la posible ocurrencia de eventos y, con base en esa posibilidad, le asigna un número a cada even-

APLICACIÓN 5.3.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la observación de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de los conceptos para resolver situaciones reales.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Reflexiones y conjeturas adecuadas al concepto de probabilidad de variable continua.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de la probabilidad.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- Revisa un libro de probabilidad y analiza cómo se aplica este concepto.
- ¿Cómo crees que se encuentra una función de probabilidad? Si es necesario, analiza nuevamente la aplicación 5.2.1.
- Propiciar la reflexión en equipo y la investigación de funciones de probabilidad de interés.

to x, dicho número se denomina la probabilidad del evento x y en notación de funciones lo escribiremos $p(x)$.

Si los eventos que pueden ocurrir en ciertas condiciones son finitos, se dice que la variable analizada es discreta y se tiene que si todos los posibles resultados del evento son $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$; entonces, la función de probabilidad presenta las siguientes condiciones:

i. $0 \leq p(xi) \leq 1$, para toda x_i , $1 \leq i \leq n$.

ii. $\sum_{i=1}^{n} p(x_i) = 1$

Observa que el punto i indica que cada evento tiene una probabilidad asignada y el punto ii establece que la probabilidad de que alguno de los eventos ocurra es la certeza denotada por 1. Una vez que el hecho ocurre, alguno de los x_i es el que se cumplió. Por ejemplo, si se lanza un dado, ¿cuál es la probabilidad de que caiga un 6? Observa que los eventos que pueden ocurrir son {1, 2, 3, 4, 5, 6} y puesto que no hay diferencia entre cada caso se tiene $p(1) = p(2) = \cdots = p(6) = 1/6$ (se cumplen los puntos i y ii) y la probabilidad solicitada es $p(6) = 1/6$.

Sin embargo, no son los casos discretos los que nos interesan por ahora, sino las variables continuas; por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de que la siguiente persona que veas tenga una estatura entre 1.75 y 1.80 m?

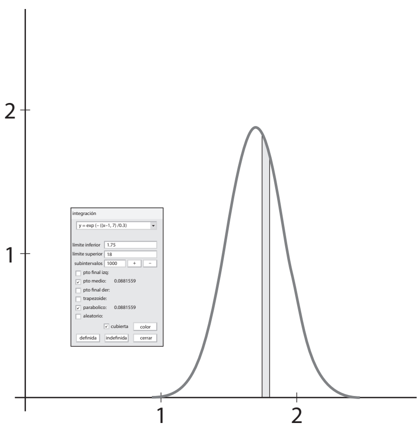


FIGURA 5.36 Gráfica de una función de probabilidad sobre la variable estatura con media en 1.70 metros. En la que se ha marcado $p(1.75 < x < 1.80) \approx 0.0882$.

En este caso, la estatura es una variable continua; es decir, la estatura puede tomar cualquier valor en cierto rango y la función de probabilidad será similar a la de la figura 5.36 con ecuación semejante a:

$$f(x) = \frac{1}{0.3\sqrt{\pi}} e^{\left(\frac{x-1.7}{0.3}\right)^2}$$

En el caso de una variable continua, la función de probabilidad satisface las siguientes condiciones:

i. $p(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0$

ii. $p(a < x < b) = \int_a^b f(x)\,dx$

iii. $p(-\infty < x < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

Observa que el punto i establece que la probabilidad de que el evento de una cantidad específica ocurra es cero; es decir, es improbable que la siguiente persona que te encuentres en tu camino mida *con exactitud* 1.75 m ($p(1.75) = 0$).

El punto ii identifica la probabilidad de que un objeto encontrado esté en cierto rango; por ejemplo, la probabilidad de que la persona que te encuentres mida entre 1.75 y 1.80 m será:

$$p(1.75 < x < 1.80) = \frac{1}{0.3\sqrt{\pi}} \int_{1.75}^{1.80} e^{\left(\frac{x-1.7}{0.3}\right)^2} dx \approx 0.0882$$

El punto iii establece que todos los valores posibles son la certeza expresada por 1.

Mediante software como Winplot®, plantea y responde:

2. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente persona que te encuentres sea más alta que tú?
3. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente persona que veas mida menos de 1.50 m o sea más alta que tú?
4. ¿Cuál es la probabilidad de que la siguiente persona que te encuentres mida lo mismo que tú?
5. Interpreta y calcula $p(x < 1.5) + p(1.8 < x)$.
6. Calcula las integrales que has planteado en cada punto mediante Winplot® o algún otro software matemático que conozcas.
7. Muestra, mediante Winplot® (o algún otro software matemático), que se cumple la condición iii: $p(-\infty < x < \infty) = 1$.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

No toda integral que se plantea con límites al infinito o con problemas en los mismos tiene una solución finita. En realidad, nos interesan sobre todo aquellos resultados que son finitos, pero tendremos que aprender a rechazar las situaciones que crecen sin límite.

Actividad 5.3.3

Integrales convergentes y divergentes

El concepto de convergencia es antagónico al de divergencia y son equivalentes a lograr un resultado finito o, en caso contrario, que la condición bajo estudio crece sin límite.

Considera la siguiente integral impropia de segundo orden:

$$\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 9}$$

Se observa que en $x = -3$ es una asíntota vertical. Si resolvemos la integral en la forma propuesta resulta:

$$\int_{-5}^{-3} \frac{dx}{x^2 - 9} = \frac{1}{6} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|_{-5}^{-3} = \frac{1}{6}\left(\lim_{x\to -3^-} \ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right| - \ln 4\right) = \infty$$

ACTIVIDAD 5.3.3

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por las situaciones novedosas.
- Gusto por la abstracción.
- Interés por la interpretación de conceptos abstractos.
- Interés por expresar las ideas de manera gráfica.

Productos

- Ensayo con las reflexiones a cada una de las cuatro preguntas planteadas y solución justificada de los ejercicios solicitados en las mismas.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en la redacción.
ii. Respuesta a todos y cada uno de los cuestionamientos.
iii. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
iv. Manifestación de las propias ideas y, en caso de definiciones de textos, cita de las fuentes.
v. Originalidad.
vi. Uso de dibujos, animaciones, esquemas o mapas conceptuales para clarificar las ideas.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Tener cuidado al colocar los límites de las integrales en el software gráfico, recuerden que $f(a) \to \infty$ o $a \to \infty$. ¿Cómo se aproximan?
- Propiciar el trabajo colaborativo.

La figura 5.37 muestra esta integral que no tiene un valor finito y, por tanto, se dice que es divergente.

Ahora, consideremos la misma función, pero modificando los límites de la integral.

$$\int_{-\infty}^{-5} \frac{dx}{x^2-9} = \lim_{M\to-\infty} \frac{1}{6}\ln\left|\frac{x-3}{x+3}\right|_{M}^{-5} = \frac{1}{6}\left(\ln 4 - \lim_{M\to-\infty} \ln\frac{M-3}{M+3}\right)$$

$$= \frac{\ln(4)}{6} = 0.23149$$

La integral mostrada en la figura 5.38 tiene un valor finito, por lo que la integral es convergente.

Observa ambas figuras, 5.37 y 5.38, y analiza el área que se pretende calcular. Observa los resultados arrojados por Winplot® y compáralos con los que se encuentran de manera analítica.

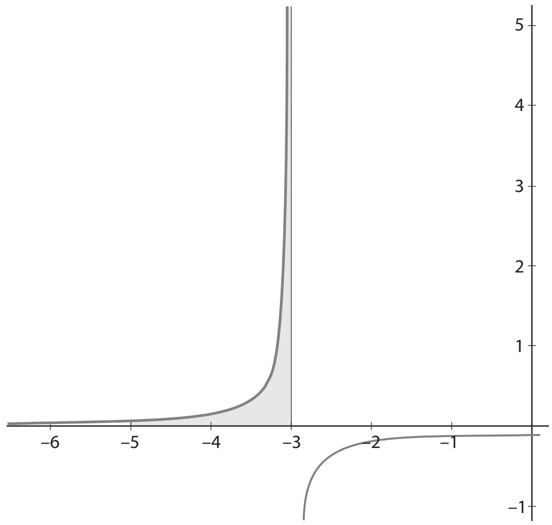


Figura 5.37 Gráfica de una integral divergente, el área cercana a −3 crece sin límite.

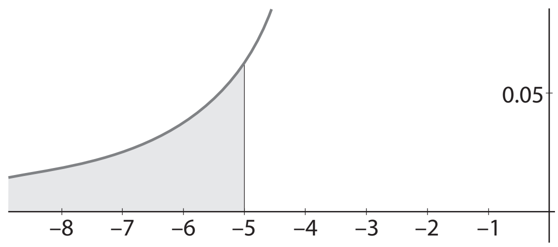


Figura 5.38 Gráfica de una integral convergente, el área del intervalo $(-\infty, -5)$.

Responde los siguientes requerimientos:

1. Plantea cinco integrales impropias divergentes y muestra su gráfica sombreada similar a la que aquí se presenta y que fue realizada en Winplot®.
2. Resuelve las integrales y muestra que, en efecto, son divergentes.
3. Plantea cinco integrales impropias convergentes y muestra su gráfica sombreada similar a la que aquí se presenta.
4. Resuelve las integrales y muestra que en efecto, son convergentes.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

Aplicación 5.3.2

Convergencia de series

Dentro de las aplicaciones previstas se encuentra el criterio de la integral previsto en el tema de series infinitas del capítulo 7. Adelantemos algunos puntos.

Un problema asociado a muchas situaciones matemáticas implica el cálculo de series infinitas (véase figura 5.39); por ejemplo, consideremos la siguiente suma:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20} = \sum_{n-1}^{10}\frac{1}{n} = \frac{55\,835\,135}{15\,519\,504} = 3.59773965714368$$

Conforme la cantidad de términos de la suma aumenta, no parece tan impresionante su crecimiento como muestran las siguientes sumas:

$$\sum_{n=1}^{1000}\frac{1}{n}=7.84547086055034$$

$$\sum_{n=1}^{10000}\frac{1}{n}=9.787606036044382$$

¡Ya se han sumado 10 000 términos y aún la cantidad no impresiona!

Entonces, ¿será una suma finita para cualquier cantidad de términos; es decir, **converge** la suma infinita?

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

Es muy divertido porque al sumar 100 000 términos con aritmética exacta, resultó en 71 páginas de dígitos, lo que en realidad es impresionante, pero es aproximadamente: 12.090146129863427.

Es impráctico seguir calculando, pero *en apariencia no crece* mucho. Se podrá pensar que esa suma parece ser finita, pero veamos esto con más cuidado:

De acuerdo con la figura 5.41, resulta evidente que el área bajo los rectángulos de la figura 5.40 siempre está por encima del área bajo la curva $f(x)=1/x$. Esta afirmación se escribe:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}-\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}>0$$

Pero observa la implicación de esto:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}>\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim_{N\to\infty}\ln x\Big|_{1}^{N}=\lim_{N\to\infty}\ln N-\ln 1=\infty$$

APLICACIÓN 5.3.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de los conceptos para resolver situaciones reales.
- Interés por las aplicaciones prácticas de los conceptos.

Desempeños

- Reflexiones y conjeturas adecuadas al concepto de sumas de infinitos términos denominadas series.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de la probabilidad.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- Analiza que nuestro sistema de numeración tiene muchas series, por ejemplo: $0.3+0.03+0.003+\cdots$ conoces el límite, de hecho todo número decimal periódico es una serie.
- La probabilidad también da series, por ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de que se lance una moneda mil veces y toda la sucesión sean caras? Aproxímala como una integral.
- Propiciar la reflexión en equipo.

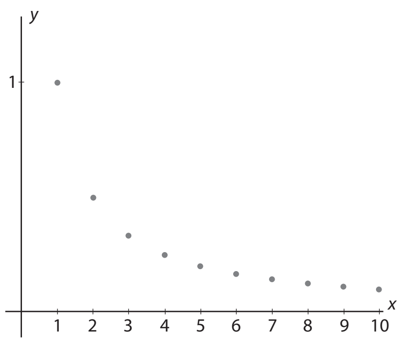


FIGURA 5.39 Puntos de la sucesión $\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}\dots\right\}$.

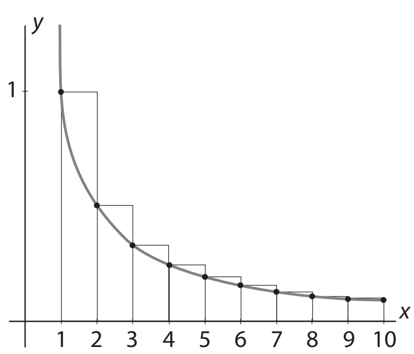


FIGURA 5.40 Área que representa a la suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$.

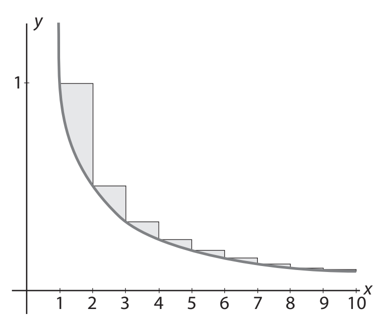


FIGURA 5.41 Área que representa a la diferencia $\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n}-\int_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}$.

Luego, la engañosa suma es divergente porque la integral menor que ella es divergente.

Este mismo procedimiento se aplica a muchas sucesiones y con ellas se muestra la convergencia o divergencia de algunas series infinitas.

Observa, por ejemplo, la siguiente integral impropia:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = -\lim_{M\to\infty} \frac{1}{x}\bigg|_1^M = -\lim_{M\to\infty} \frac{1}{M} + 1 = 1$$

Traza la gráfica de esa función y los rectángulos comenzando en cero bajo las alturas de $\{1, 1/4, 1/9, \ldots\}$ y observa que se cumple la siguiente desigualdad:

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 2$$

Cuando se han sumado 10 000 términos de esta suma el resultado es 1.64483407184805999, pero ahora sí estamos seguros de que esa suma nunca alcanzará 2.

¿Crees que converja la suma de los recíprocos de los cubos de los números enteros positivos? Comprueba tu conjetura.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

5.4 TÓPICOS ADICIONALES SOBRE INTEGRALES IMPROPIAS

Las integrales impropias no son en realidad una nueva forma de integrales, sino una extensión natural a las propiedades de la integral y un replanteamiento de nuestro concepto de área bajo la curva.

Sea el intervalo abierto (a, b), de manera formal escribir una integral con los límites en los extremos de ese intervalo resulta en la siguiente expresión:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Desde luego, en términos del dominio de la función, no es correcto escribir la expresión sin antes revisar nuestros conceptos.

De las propiedades de la integral definida sabemos que para un punto en el dominio de la función $f(x)$, se tiene $\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

Si se pudiera hacer una extensión del dominio de $f(x)$ para contener a sus extremos, sin obtener una integral impropia, se tendría que para $[a, b]$, la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ estaría definida de manera adecuada, pero como el área bajo un punto en el dominio es nula, entonces el área en el intervalo (a, b) es idéntica al área en $[a, b]$, por lo que nos permite hacer la siguiente definición sin considerar la posible extensión de dominio:

Definición 5.2. Sea el intervalo $[a, b)$, luego se entiende que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$; de igual manera, para $(a, b]$ se tiene $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$.

La definición previa es válida en funciones que son continuas en $[a, b)$ y $(a, b]$, respectivamente; sin embargo, esas definiciones se pueden generalizar aun a funciones discontinuas en los extremos.

Definición 5.3. Sea el intervalo $[a, b)$ en el cual $f(x)$ es continua, pero discontinua en b, luego la integral $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$, si el límite existe. De la misma manera, para $f(x)$ continua en $(a, b]$, pero discontinua en a, se tiene que $\int_a^b f(x)\,dx = \lim\limits_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx$, si dicho límite existe.

Las integrales de la definición 5.3 se denominan integrales impropias de primer orden, al igual que el siguiente caso:

Definición 5.4. Sea $f(x)$ una función discontinua en c dentro del intervalo (a, b) pero continua en todos los demás puntos de (a, b), se tiene que siempre que converjan las dos integrales impropias del lado derecho:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to c^-} \int_a^t f(x)\,dx + \lim_{t\to c^+} \int_t^b f(x)\,dx$$

En estas condiciones $\int_a^b f(x)\,dx$ es también una integral impropia, pero ahora de segundo orden.

Definición 5.5. Sea $f(x)$ una función continua en (a, b) pero discontinua en a y b, se sigue que para cualquier c en (a, b) se tiene la integral impropia de segundo orden:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^c f(x)\,dx + \lim_{r\to b^-} \int_c^r f(x)\,dx$$

La integral impropia de segundo orden converge solo si lo hacen las integrales impropias de primer orden del término derecho de la igualdad. Si no causa confusión es posible escribir esta integral así:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+}\left[\lim_{r\to b^-}\int_t^r f(x)dx\right] = \lim_{r\to b^-}\left[\lim_{r\to a^+}\int_t^r f(x)dx\right]$$

Otro caso de integrales impropias ocurre cuando el límite de la integración no es un número; es decir, uno o los dos límites de la integración tienden al infinito.

Definición 5.6. Sea $f(x)$ continua en el intervalo $[a,\infty)$, luego se sigue que $\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx$. De igual manera, para una función continua en $(-\infty, b]$ se tiene $\int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx$, dichas integrales impropias de primer orden se dice que convergen si existe el límite.

Definición 5.7. Sea $f(x)$ una función continua en $(-\infty,\infty)$, se sigue que para cualquier c en $(-\infty,\infty)$, se tiene la integral impropia de segundo orden:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{t\to-\infty}\int_t^c f(x)\,dx + \lim_{r\to\infty}\int_c^r f(x)\,dx$$

La integral impropia converge solo si lo hacen las integrales impropias de primer orden del término derecho de la igualdad.

De acuerdo con las definiciones vertidas, es posible obtener variantes de integrales impropias de segundo orden como la siguiente, para la cual debe quedar claro el esquema de solución mostrado:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2} = \int_1^2 \frac{dx}{(x^2-1)^2} + \int_2^\infty \frac{dx}{(x^2-1)^2}$$

Esta integral impropia de segundo orden es divergente ya que la primera integral lo es, sin importar el límite superior que se le imponga. De manera paralela, la segunda integral del lado derecho converge a 0.0586803 para el valor de 2 elegido como límite inferior, lo cual resulta irrelevante debido a la divergencia de la primera. Desde luego, la divergencia de la integral del lado izquierdo no cambia si se elige un número diferente de 2.

Ejercicios 5.2

Resuelve las siguientes integrales:

5.2.1 $\displaystyle\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^4+16}$

Resolución

$$\int_1^\infty \frac{x\,dx}{x^4+16} = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^M = \lim_{M\to\infty}\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{M^2}{4}\right)$$

EJERCICIOS 5.2

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el estudiante la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

$$-\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{8}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{8}\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=0.1657$$

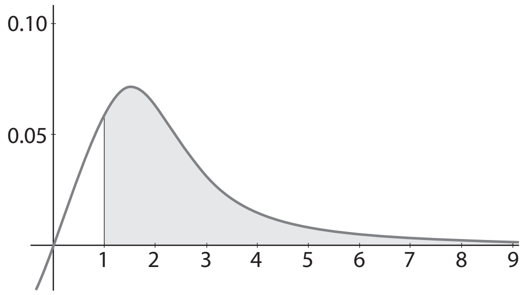


FIGURA 5.42 Área de la integral impropia convergente del ejercicio 5.2.1.

5.2.2 $\int_4^{\infty} x^{-\frac{7}{5}}dx$

Resolución

$$\int_4^{\infty} x^{-\frac{7}{5}}dx=-\frac{5}{2x^{\frac{2}{5}}}\Bigg|_4^{\infty}=\lim_{M\to\infty}-\frac{5}{2M^{2/5}}+\frac{5}{2(4^{2/5})}=1.4358729$$

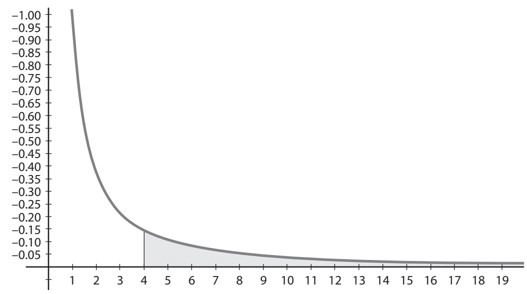


FIGURA 5.43 Área de la integral impropia convergente del ejercicio 5.2.2.

5.2.3 $\int_0^{8} f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} x & ;0<x<5 \\ 2 & ;5<x<8 \end{cases}$

Resolución

$$\int_0^{8} f(x)dx=\int_0^{5} x\,dx+\int_5^{8} 2\,dx=\lim_{x\to5^-}\frac{x^2}{2}-\lim_{x\to0^+}\frac{x^2}{2}+\lim_{x\to8^-}2x$$
$$-\lim_{x\to5^+}2x=\frac{25}{2}+16-10=18.5$$

Puesto que no hay asíntotas, es equivalente a resolver dos integrales como si los intervalos fueran cerrados, simplemente de manera equivalente:

$$\int_0^{8} f(x)dx=\int_0^{5} x\,dx+\int_5^{8} 2\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^8-2x\Big|_5^8=18.5$$

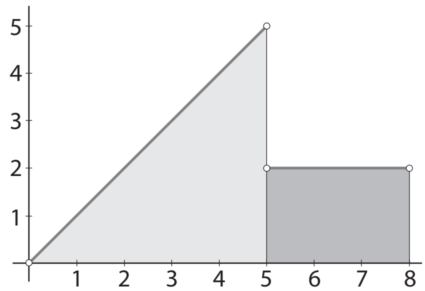


FIGURA 5.44 Área de la integral con discontinuidades del ejercicio 5.2.3.

5.2.4 $\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx$

Resolución

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}\,dx=-e^{-x}(1+x)\Big|_0^{\infty}=-\left(\lim_{M\to\infty}e^{-M}(1+M)-1\right)=1$$

Después de aplicar la Regla de L^Hôpital al límite indeterminado que resulta

$$\lim_{M\to\infty}e^{-M}(1+M)=\lim_{M\to\infty}\frac{(1+M)'}{(e^M)'}=\lim_{M\to\infty}\frac{1}{e^M}=0$$

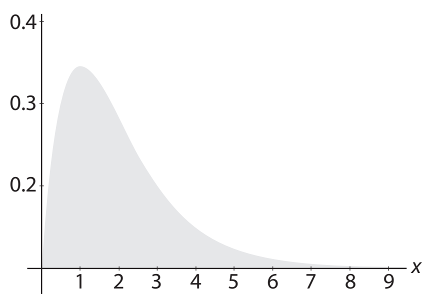


FIGURA 5.45 Área de la integral impropia convergente del ejercicio 5.2.4.

5.2.5 $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx$

Resolución

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{0} xe^{-x^2}\,dx+\int_0^{\infty} xe^{-x^2}\,dx=$$

$$\lim_{M\to-\infty}-\frac{e^{-x^2}}{2}\Bigg|_M^0-\lim_{M\to-\infty}\frac{e^{-x^2}}{2}\Bigg|_0^M=-\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=0$$

5.2.6 $\displaystyle\int_5^{\infty} \frac{dx}{x-5}$

Resolución

La integral diverge, como se puede observar:

$$\int_5^{\infty} \frac{dx}{x-5} = \ln(x-5)\Big|_5^{\infty} = \lim_{x\to\infty} \ln(x-5) - \lim_{x\to 5^+} \ln(x-5) = \infty$$

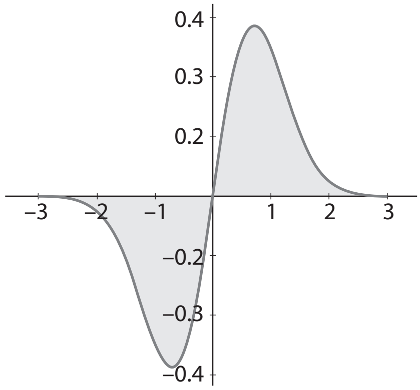


FIGURA 5.46 Área de la integral impropia convergente del ejercicio 5.2.5.

5.2.7 $\displaystyle\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}}$

Resolución

La integral diverge debido a que la primera integral lo hace, con un pequeño cambio de notación que ya es fácil comprender.

$$\int_3^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x-3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{2}(x-3)^{2/3} - \lim_{x\to 3^+} \frac{3}{2}(x-3)^{2/3} = \infty$$

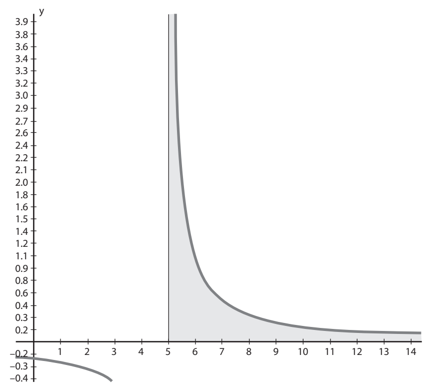


FIGURA 5.47 Área de la integral impropia divergente en ambos extremos del ejercicio 5.2.6.

5.2.8 $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} 3\,\mathrm{sen}\,x\,dx$

Resolución

La integral diverge debido a que el límite indicado no existe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} 3\ \mathrm{sen}\,x\,dx = 3\int_{-\infty}^{0} \mathrm{sen}\,x\,dx + 3\int_{0}^{\infty} \mathrm{sen}\,x\,dx$$

$$= -3\cos x\Big|_{-\infty}^{0} = 3 - 3\cos x\Big|_{0}^{\infty} = \nexists$$

Ya que $\lim\limits_{x\to\infty} \cos x$ no existe.

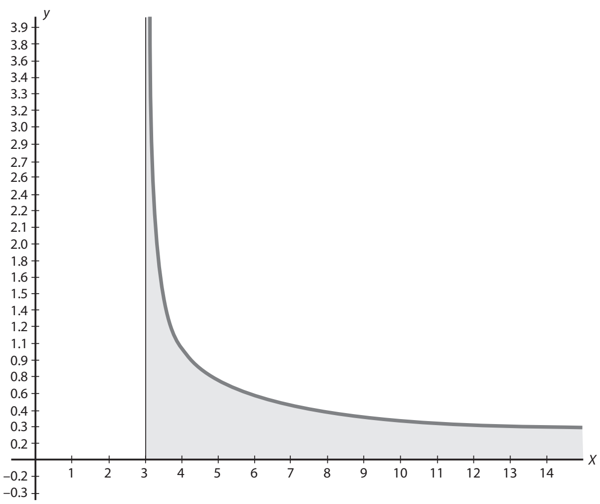


FIGURA 5.48 Área de la integral impropia divergente a la derecha, ejercicio 5.2.7.

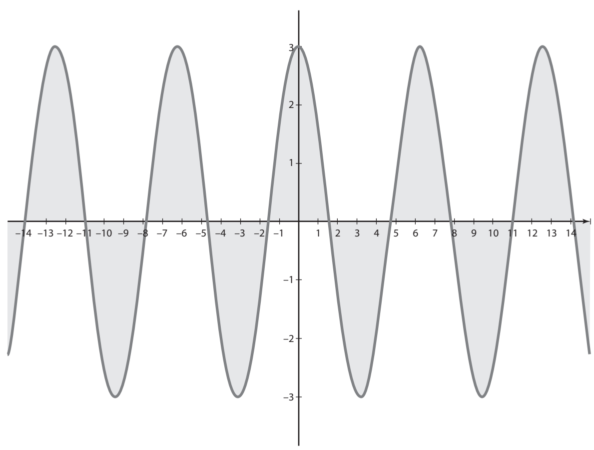


FIGURA 5.49 Área de la integral impropia divergente en ambos extremos, ejercicio 5.2.8. Es indeterminado en donde para la oscilación en el infinito, por eso el límite no se puede determinar.

5.2.9 Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en cierto intervalo (a, b), si se satisface que $0 \leq f(x) \leq g(x)$, se tiene que:

1. Si $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, luego $\int_a^b f(x)\,dx$ también lo hace.

2. Si $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, luego $\int_a^b g(x)\,dx$ también lo hace.

Utiliza los criterios previos para probar si $\int_3^{\infty} \frac{1}{\ln x}dx$ converge o diverge.

Resolución

En general $\ln(x) < x$, para $x \geq 3$, esto se puede saber porque $[\ln(x) - x]' = (1/x) - 1 < 0$ para $x \geq 3$, se tiene que sus recíprocos satisfacen: $\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$ luego al tomar $f(x) = \frac{1}{x}$ y $g(x) = \frac{1}{\ln x}$, se satisface la condición inicial y puesto que $\int_3^{\infty} \frac{1}{x}dx$ diverge, de acuerdo con la segunda conclusión se concluye que $\int_3^{\infty} \frac{1}{\ln x}dx$ también diverge.

5.2.10 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}$

Resolución

La función es par, por lo que se puede calcular la mitad derecha y multiplicar por dos. Además, la integral es dos veces impropia y su planteamiento será:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4} = 2\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4} = 2\left(\int_0^{2} \frac{dx}{x^2 - 4} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}\right)$$

$$= 2\left(\int_0^{2} \frac{dx}{x^2 - 4} + \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4}\right) = \frac{2}{4}\left(\ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|_0^2 + \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right|_2^{\infty}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\lim_{M\to 2^-} \ln\left|\frac{M-2}{M+2}\right| + \lim_{x\to\infty} \ln\left|\frac{x-2}{x+2}\right| - \lim_{N\to 2^+} \ln\left|\frac{N-2}{N+2}\right|\right)$$

Los límites de M y N son divergentes, y aunque se tiene la tentación de eliminarlos porque parecen ser iguales en el infinito, esto no es posible porque identifican que el área crece sin límite en cada caso. La integral **es divergente** (véase figura 5.50)**.**

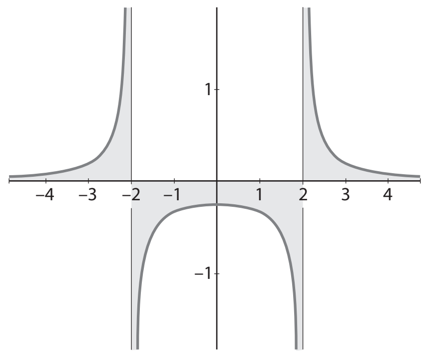


FIGURA 5.50 Área de la integral impropia divergente, ejercicio 5.2.10.

Autoevaluación 5.5

Resuelve las siguientes integrales:

5.5.1 $\int_{-\infty}^{4} \frac{x\,dx}{(x^2 + 9)^2}$

AUTOEVALUACIÓN 5.5-5.7

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la solución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre el dominio de los métodos de integración mediante la resolución de los diversos ejercicios de forma analítica y con el uso de tablas.

Desempeños

- Observable en el producto.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los cuestionamientos.

5.5.2 $\int_0^2 f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} x & ;0<x<1 \\ (x-1); & 1<x<2 \end{cases}$

5.5.3 $\int_0^\infty x^2 e^{-x}\,dx$

5.5.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1}dx$

5.5.5 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-4}dx$

Autoevaluación 5.6

5.6.1 $\int_{-5}^{5} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-25}}dx$

5.6.2 $\int_\pi^\infty x^2 \cos x\,dx$

5.6.3 Muestra si $\int_2^\infty \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ converge o diverge. (Sugerencia: compárala con $f(x)=\frac{1}{x}$).

5.6.4 $\int_0^2 f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} \frac{x}{x+1}; & 0<x<1 \\ \frac{x}{x-2}; & 1<x<2 \end{cases}$

5.6.5 $\int_0^{13.5} f(x)dx$ donde $f(x)=\begin{cases} x & ;0<x<1 \\ 2-x; & 1<x<2 \end{cases}$, si se sabe que $f(x)=f(x+2)$, esto significa que es periódica de periodo dos.

Autoevaluación 5.7

5.7.1 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\,dx$

5.7.2 $\int_\pi^\infty x^2 \operatorname{sen} 2x\,dx$

5.7.3 $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^6-8}}dx$

ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.

iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

AUTOEVALUACIÓN 5.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 5.6

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

5.7.4 $\int_{0}^{2} \ln x\, dx$

5.7.5 $\int_{0}^{5} \frac{dx}{x|\ln(x)|}$

Solución a la autoevaluación 5.5

5.5.1 $\int_{-\infty}^{4} \frac{x\, dx}{(x^2+9)^2} = -\frac{1}{50}$

5.5.2 $\int_{0}^{2} f(x)\, dx = 1$

5.5.3 $\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x}\, dx = 2$

5.5.4 $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{e^x+1} dx$. Diverge.

5.5.5 $\int_{-2}^{2} \frac{1}{x^2-4} dx$. Diverge.

Solución a la autoevaluación 5.6

5.6.1 $\int_{-5}^{5} \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-25}} dx = 0$

5.6.2 $\int_{\pi}^{\infty} x^2 \cos x\, dx$. Diverge.

5.6.3 $\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x} dx$ Diverge.

5.6.4 $\int_{0}^{2} f(x)\, dx$. Diverge.

5.6.5 $\int_{0}^{13.5} f(x)\, dx = 6.875$

Solución a la autoevaluación 5.7

5.7.1 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \tan x\, dx$. Diverge.

AUTOEVALUACIÓN 5.7

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

5.7.2 $\int_{\pi}^{\infty} x^2 \operatorname{sen} 2x\, dx$. Diverge.

5.7.3 $\int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{x^4}{\sqrt{x^6 - 8}}\, dx$. Diverge.

5.7.4 $\int_{0}^{2} \ln x\, dx = -0.613706$

5.7.5 $\int_{0}^{5} \frac{dx}{x\left|\ln(x)\right|}$. Diverge.

Capítulo 6

Aplicaciones de la integral

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si de manera adecuada abstrae del problema bajo estudio el comportamiento de la acumulación en una variable y propone soluciones fundamentadas con integrales definidas y sus propiedades.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando como herramienta fundamental la integración.

Calendario del portafolio de evidencias

Fecha	Evidencia
	Actividad 6.1.1
	Aplicación 6.1.1
	Actividad 6.2.1
	Actividad 6.3.1
	Actividad 6.4.1
	Aplicación 6.4.1
	Actividad 6.4.2
	Aplicación 6.5.1
	Aplicación 6.5.2
	Aplicación 6.6.1
	Aplicación 6.6.2
	Actividad 6.6.1
	Ejercicios 6.1

Fecha	Evidencia
	Autoevaluación 6.1
	Autoevaluación 6.2
	Autoevaluación 6.3
	Autoevaluación 6.4
	Autoevaluación 6.5

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

Lo que te hace diferente de los demás, no son rasgos extraordinarios, sino esas pequeñas cosas que sumas a tu personalidad y te hacen crecer todos los días.

6.1 APLICACIONES DE LA INTEGRAL

De los problemas típicos que pueden expresarse en forma directa mediante integrales, y que son complementarios al problema básico de área bajo la curva, destacan los siguientes:

- Área entre curvas
- Sólidos de revolución
- Longitud de curvas
- Centroides de figuras planas
- Momentos de inercia de cuerpos planos
- Aplicaciones diversas

El objetivo de este capítulo es estudiar cada una de esas aplicaciones, comenzando con la más común, que además es la que motivó los conceptos básicos de la integral: el área bajo la curva.

Actividad 6.1.1

Área entre la curva *y* el eje *x*

Calcular el área bajo la curva, o mejor dicho entre la curva y un eje, es el problema que dio origen al desarrollo del concepto de integral definida, por lo que queda poco que agregar al respecto.

Al calcular el área, siempre se deben tener presente tres aspectos importantes:

a) Las curvas delimitantes del área en realidad deben ser funciones de la variable de integración.

b) El área entre la función *y* el eje *x* debe estar delimitada entre dos rectas verticales que determinan el intervalo (a, b). A esta área se le denomina **área bajo la curva**. En contraparte, si el área se delimita entre la función y el eje *y*, se le denomina **área sobre la curva**, y de igual forma debe estar delimitada por dos rectas horizontales que definen el intervalo de integración.

c) Integral y área no son conceptos iguales, por lo que se debe recordar que una integral en realidad se puede interpretar como un área con signo.

Teniendo en cuenta lo anterior, es posible considerar que las superficies planas que delimitan un área, junto con un eje, pueden presentarse de tres maneras:

ACTIVIDAD 6.1.1

ACTIVIDAD PARA MEDITAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones nuevas.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre las seis preguntas, justificando sus respuestas y planteando ejemplos gráficos.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Planteamiento de gráficas para clarificar sus conclusiones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos gráficos.
- Discutir el tema en clase y concluir de manera adecuada.
- En el caso de la figura 6.4 detectar el conjunto de rectas mínimo que permite resolver el área mediante integrales tipo I y II. Proponer gráficos y realizar el mismo ejercicio.

i. La función propiamente dicha y dos rectas.

ii. La función que intercepta directamente al eje en uno de sus extremos o ambos.

iii. La función que cruza el eje. Y sus extremos están delimitados por rectas o tocan en forma directa al eje.

Identifica cada caso en la figura 6.1.

La forma de calcular el área en los casos i y ii que has identificado en la figura 6.1 es la misma y se calcula mediante la integral definida:

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

1. ¿Cómo calcularías el área si $f(y) < 0$ en (a, b)?

El área delimitada para el caso iii, identificado en la figura 6.1, posee un sector en el que la integral genera un signo negativo en su resultado.

2. ¿En qué intervalo ocurre eso?

3. ¿Cómo calcularías el área en el caso iii identificado en la figura 6.1?

4. ¿Cómo replantearías las integrales de los tres casos, si en lugar de calcular el área bajo la curva te solicitaran el área sobre la curva? Recuerda que se llama área sobre la curva a la delimitada por la función $f(y)$, el eje y y dos rectas horizontales $y = c$ y $y = d$. Dibuja las figuras correspondientes.

Discute con tus compañeros y tu facilitador los diferentes cuestionamientos planteados. Escribe en el ensayo tu análisis y conclusiones.

Cualquier comentario o discusión se puede realizar con tus compañeros o con tu facilitador por medio de los recursos en uso.

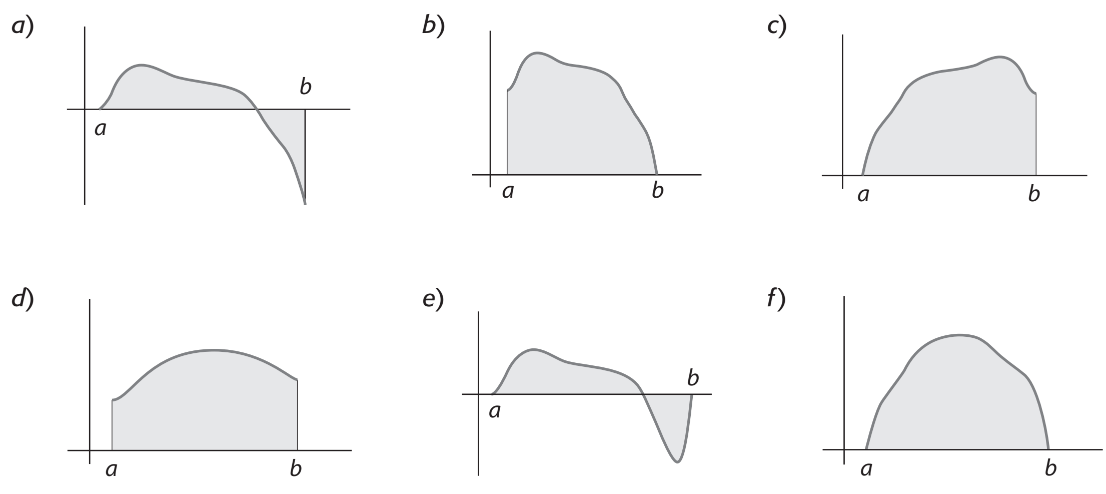


FIGURA 6.1 Área delimitada entre la función y el eje *x*.

La integral como concepto surge a partir del cálculo numérico, por lo que muchas de las integrales que se nos presentan en la vida cotidiana no son planteadas de manera analítica, ya que no se conoce la expresión analítica que las representa. Sin embargo, eso no las hace inútiles. ¡Al contrario! El potencial analítico de la integral se logra por la simplicidad del concepto. ¡No deja de ser una suma!

En la actualidad, con el uso de las computadoras, es posible resolver esas sumas de manera muy eficiente.

Aplicación 6.1.1

Integración numérica

Veamos una aplicación muy particular de la integral que presenta una visión bastante amplia, ya que permite resolver las integrales por medio del cálculo numérico, utilizando desde la calculadora más simple hasta la más sofisticada computadora.

En muchas situaciones en que se ha de resolver una integral definida no se cuenta con la expresión $f(x)$; en lugar de eso, se tienen datos en una tabla. O suele también ocurrir que no resulta simple obtener una *antiderivada* para $f(x)$ y aplicar de manera directa el teorema fundamental del cálculo. En estas situaciones, se aplica el cálculo numérico que fue lo que motivó la definición de integral.

Observa la gráfica de la figura 6.2 en la que en lugar de utilizar la suma de *Riemann* que aproxima la curva mediante rectángulos, se han aplicado trapecios:

1. ¿Cómo se aproxima mejor la superficie con rectángulos o con trapecios? ¿Por qué?

Por ejemplo, considera el tercer trapecio y calcula su área.

¿Es $A_3 = (x_3 - x_2)[f(x_3) + f(x_2)]/2$? ¿Por qué?

En la figura 6.2 se han tomado n trapecios y, por conveniencia, se hace que todos tengan la misma base. Si llamas h al valor de la base, ¿es cierto que $h = \dfrac{b-a}{n}$?

¿Se podrá representar el área de cualquier trapecio como $A_i = h[f(x_i) + f(x_{i-1})]/2$? ¿Por qué?

APLICACIÓN 6.1.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de los otros.
- Reflexión sobre la importancia de la tecnología.
- Interés por el uso eficiente de la tecnología.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder de manera adecuada las preguntas planteadas y los ejercicios.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza del proceso de aproximación numérica, su exactitud contra su rapidez.
ii. Elección adecuada de situaciones en que se requiere rapidez o exactitud.
iii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo; de considerarse obligatorio, aplicar los criterios de calidad de la Actividad 6.1.1.
- Para realizarse en equipos de tres personas.
- Revisar en textos de Análisis Numérico otros algoritmos de aproximación de integrales.

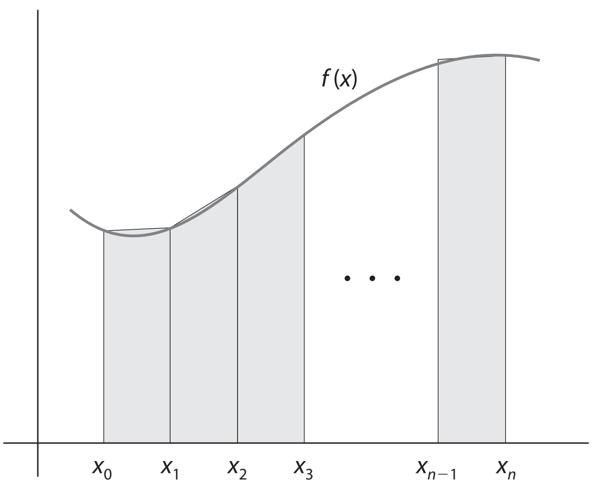


FIGURA 6.2 Aproximación de la integral mediante trapecios.

¿El área total es $A = A_1 + A_2 + A_3 + \cdots + A_n$?

Si sustituyes los valores de A_i encontrados previamente obtendrás:

$$A = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + \cdots + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)\right]$$

2. ¿Por qué todos los valores empleados quedaron multiplicados por dos, excepto el primero y el último?

Simplifica, asocia y sustituye; entonces, obtendrás:

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx A = \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

3. ¿Qué significa la expresión previa? ¿Cómo puedes aproximar con rapidez la integral en tu calculadora? ¿Lo puedes hacer en Excel®?

4. ¿De qué depende que el cálculo de la integral resulte más exacto?

5. Aproxima $\int_1^5 (x^2 - 1)\,dx$ mediante la aproximación del trapecio con $n = 5$, $n = 10$ y $n = 20$.

6. ¿Cuáles fueron tus resultados?

7. ¿Qué sugieres que se haga para mejorar la exactitud?

8. ¿Qué sugieres hacer en caso de que se pida rapidez?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

6.2 ÁREA ENTRE CURVAS

Como ya se dijo antes, y como conclusión a la actividad 6.1.1, sabemos que integral no es lo mismo que área, ya que el concepto de integral es en realidad mucho más amplio; tanto que se puede aplicar a infinidad de situaciones novedosas. Por otro lado, al realizar las correcciones necesarias respecto de los valores negativos que pueda tomar una función en un intervalo, comprobamos que la integral calcula de modo perfecto el área entre un eje y una curva dada.

Pero el concepto de área se puede ampliar a espacios delimitados entre diversas curvas en el plano. Estudiemos ahora esa generalización.

Actividad 6.2.1

Área entre curvas

El área bajo o sobre la curva es un caso particular del área entre curvas. En el caso que nos ocupa, la superficie plana se delimita por una curva cerrada y, por tanto, genera un área en su interior.

ACTIVIDAD 6.2.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones nuevas.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre las seis preguntas, justificando sus respuestas y planteando ejemplos gráficos.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Planteamiento de gráficas para clarificar sus conclusiones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos gráficos.
- Discutir el tema en clase y concluir de manera adecuada.
- En el caso de la figura 6.4 detectar el conjunto de rectas mínimo que permite resolver el área mediante integrales tipo I y II. Proponer gráficos y realizar el mismo ejercicio.

Para el cálculo de superficie entre curvas se consideran los siguientes casos generales, respecto de la forma en que conviene resolver el cuestionamiento:

1. Superficie tipo I, mostrada en la figura 6.3. Se delimita por curvas que son funciones de x, de donde el área se calcula considerando rectángulos de base infinitesimal dx cuya altura es $f(x) - g(x)$. Entonces, el área es: $A = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$. ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?
2. La superficie tipo II, mostrada en la figura 6.4, se delimita por curvas que son funciones de y. Su área se calcula considerando rectángulos de altura infinitesimal dy cuya base es $f(y) - g(y)$, Entonces, el área es: $A = \int_c^d [\ldots]dy$. ¿Cuál es el integrando?
3. La superficie tipo III, mostrada en la figura 6.5, no es del tipo I ni II, por lo que se debe segmentar, por lo común mediante rectas horizontales y verticales, hasta obtener segmentos de superficie que sean de tipo I o II, indistintamente. Se resuelve cada integral por separado y luego se suman sus áreas.

   En caso de que la curva que delimita a la superficie, se cortara a sí misma, como si tomara forma de un 8; se considera el área interior como las dos áreas limitadas dentro de cada "ojo del ocho". Si existe más de una intersección, se aplica el mismo razonamiento. Observa que los casos a y e de la figura 6.1 de la actividad 6.1.1 corresponden a esta situación.

4. Si la superficie tiene hoyos, ¿cómo calculas el área?

   No olvides tener cuidado con el signo de las integrales.

5. ¿Existen superficies que no sean planas? Da ejemplos.
6. ¿Por qué crees que todos los razonamientos de esta sección se refieren a superficies planas?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

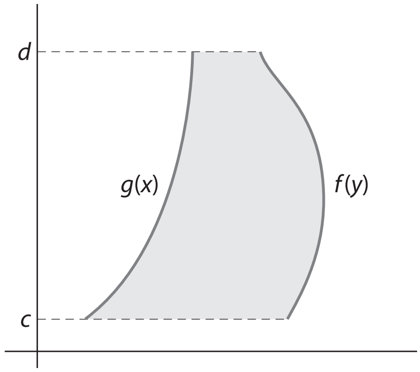


FIGURA 6.3 Área delimitada entre curvas tipo I.

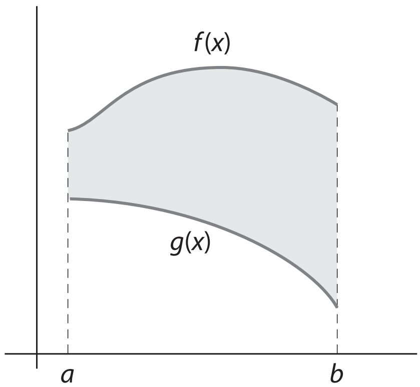


FIGURA 6.4 Área delimitada entre curvas tipo II.

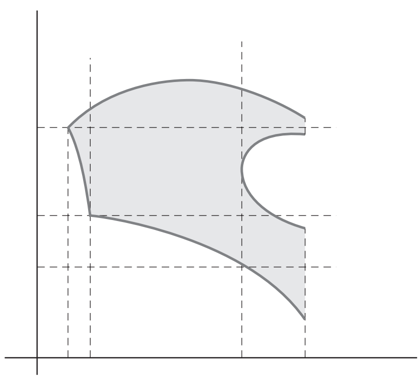


FIGURA 6.5 Área delimitada entre curvas tipo III. Elige tantas rectas horizontales y verticales como te convenga para dividirla en áreas de tipo I y II.

6.3 LONGITUD DE ARCO

La integral representa la acumulación de las pequeñas variaciones en una situación dada. Ahora, considera el experimento de recorrer una curva. ¿Qué acumulas en el recorrido?

Replantea las siguientes interrogantes: si tienes una curva, ¿cómo la mides?, ¿cuánto mide?, ¿qué son las pequeñas variaciones en ese caso?

Actividad 6.3.1

Longitud de una curva

Una curva por sí sola no tiene área, tiene longitud y ésta también se puede calcular como una integral. Sigue el presente razonamiento.

Traza una curva sobre el papel; por simplicidad, debes considerar primero una curva que corresponda a una función de x.

Delimita mediante dos rectas verticales el intervalo en el que te interesa conocer la longitud de la curva, también llamada longitud del arco.

Dibuja una secante entre dos puntos extremos del intervalo de interés.

1. Esa secante entre los dos puntos de intersección, ¿es una aproximación a la longitud del arco? ¿Qué debes hacer para que la aproximación mejore?

¡Muy bien! La situación límite que acabas de plantear te lleva al diagrama aproximado de la figura 6.6. ¿Estás de acuerdo?

Luego, dL es la hipotenusa del triángulo infinitesimal. ¿A qué es igual dL en términos de dx y dy?

De acuerdo con el teorema de Pitágoras, se tiene que $(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$, entonces se divide la expresión entre:

$$dx \Rightarrow \left(\frac{dL}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \quad \therefore\ dL = \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Por último, la suma de todos esos diferenciales es:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

Al sustituir las expresiones adecuadas en la estructura que se acaba de obtener y resolver la integral construida, obtienes la longitud del arco deseado.

2. Si el arco analizado no es una función de x sino de y, ¿cómo resuelves ese caso?
3. ¿Afecta a la expresión obtenida el hecho de que la curva corte a los ejes?
4. ¿Es posible que la integral resultante sea negativa? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 6.3.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones nuevas.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre las seis preguntas, justificando sus respuestas y planteando ejemplos gráficos.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Planteamiento de gráficas para clarificar sus conclusiones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- ¿Qué harás si la expresión de la curva está dada como una función implícita?
- ¿Cómo se calcula la longitud del arco de una circunferencia? Prueba la fórmula que conoces de la geometría.
- Aproximar la longitud de un arco trazado a mano, mediante la medición y suma de pequeños segmentos secante de recta.

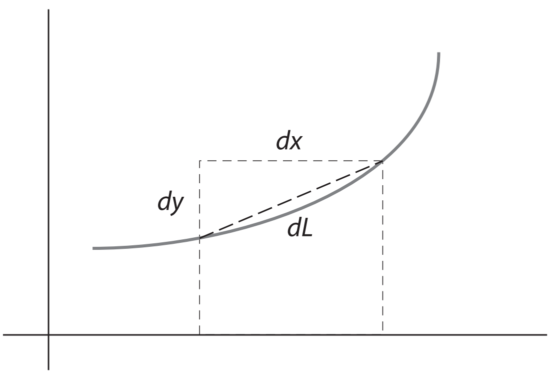


FIGURA 6.6 El diferencial de la longitud del arco dL.

5. ¿En qué situaciones o para qué crees que se pueda aplicar el cálculo de la longitud del arco?

Discute los diferentes cuestionamientos planteados con tus compañeros y con tu facilitador y redacta tu análisis y conclusiones en el ensayo.

6.4 VOLUMEN DE SÓLIDOS

Es verdad que el origen de la integración fue el concepto geométrico de área, pero hemos concluido que en realidad es posible emplearla en cualquier situación que se represente por el producto de dos cantidades. El volumen es uno de esos casos. Veamos los siguientes cuerpos geométricos y cómo la integral nos ayuda a calcularlo.

Actividad 6.4.1

Superficies y sólidos de revolución

Una superficie de revolución se genera cuando una curva se hace girar alrededor de un eje. En las figuras 6.7 y 6.8 se observan dos curvas que se han hecho girar sobre el eje y, mientras que en las figuras 6.9 y 6.10 se muestran las superficies generadas respectivamente.

La curva generatriz delimitará un área bajo o sobre ella, esto dependerá de la forma en que se haga girar; como consecuencia, si la superficie gira una vuelta completa se obtiene un sólido o volumen de revolución.

En las figuras 6.9 y 6.10 se observan las superficies de revolución generadas, mientras que en

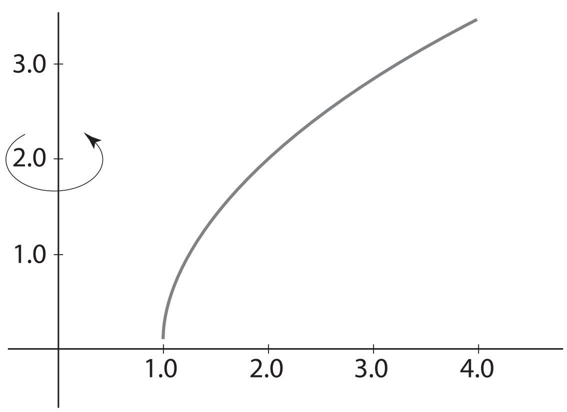


FIGURA 6.7 Función generatriz $f(x)=2\sqrt{x-1}$, $0<x<4$ de la superficie de revolución de la figura 6.9.

ACTIVIDAD 6.4.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones nuevas.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación y el trabajo manual.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre los métodos de discos y casquillos, respuestas a las preguntas y solución a los dos volúmenes solicitados.
- Desarrollo del experimento de la cartulina.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Evidencia de que se desarrolló el experimento de la cartulina.
iii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iv. Planteamiento de gráficos para clarificar sus conclusiones.
v. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
vi. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Reflexiones y ejemplos sobre la pregunta 5.
- Propuesta para la integral de la pregunta 5.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

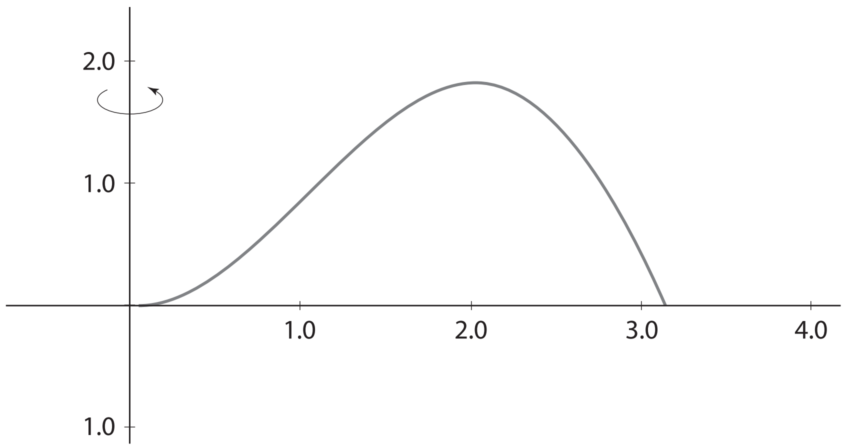


FIGURA 6.8 Función generatriz $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$ de la superficie de revolución de la figura 6.10.

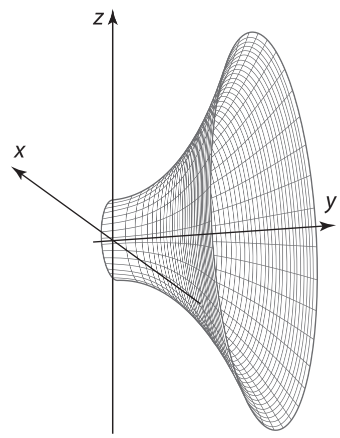


FIGURA 6.9 Superficie de revolución con función generatriz $f(x) = 2\sqrt{x-1}$, $0 < x < 4$.

la 6.7 y 6.8 se ven las curvas y el área considerada para la generación de los sólidos de revolución.

Una esfera, una copa, una dona, algunas lámparas, las piezas mecánicas hechas en torno, entre otros, son sólidos de revolución.

Veamos otros ejemplos de sólidos de revolución. Para ello, realiza lo siguiente:

Toma un alambre recto de unos 30 cm, que sea tan grueso que no se te doble.

Dobla un pedazo de cartulina a la mitad y mete el alambre justo en el doblez, cuidando que una de sus puntas sobresalga aproximadamente 10 centímetros.

Pega las dos partes de la cartulina de tal forma que el alambre quede atrapado en el doblez.

Recorta la curva que quieras sobre la cartulina, de modo que el alambre no se desprenda.

Tendrás algo como lo mostrado en la figura 6.11.

Gira rápido entre tus manos la figura obtenida. Debido a la rapidez del giro, verás el sólido de revolución generado.

Es posible calcular el volumen de un sólido de revolución mediante alguna de las siguientes formas dependiendo de las características de la superficie y del eje sobre el que se gire.

La figura 6.12 permite ver que al girar un pequeño rectángulo representativo sobre el eje y se formará por éste un “disco”. ¿Estás de acuerdo?

En el segundo caso, identificado por la figura 6.13, al girar el pequeño elemento rectangular sobre el eje y una vuelta completa se formará un tubo o cilindro hueco. ¿Es correcto?

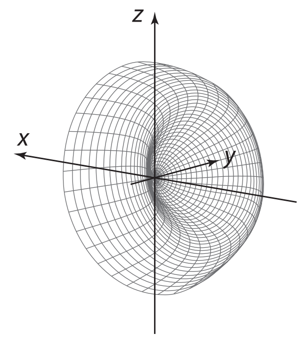


FIGURA 6.10 Superficie de revolución con función generatriz $f(x) = x \operatorname{sen} x$, $0 < x < \pi$.

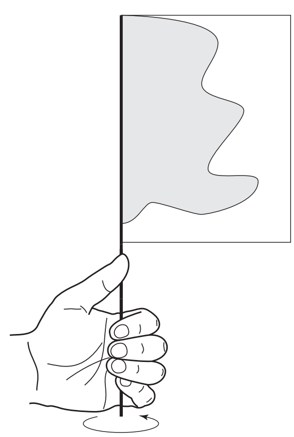


FIGURA 6.11 La ilusión óptica de observar un sólido de revolución al girar la superficie generatriz definida por el perfil recortado.

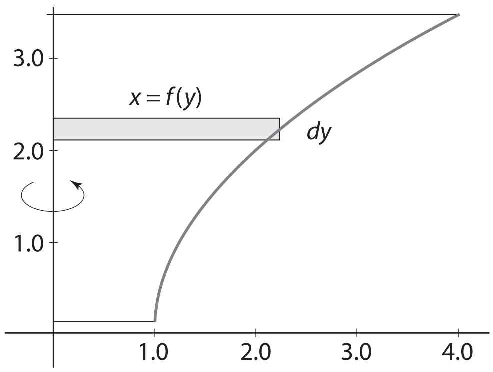


FIGURA 6.12 Generación de un disco de espesor diferencial al girar un rectángulo generatriz diferencial sobre el eje *y*.

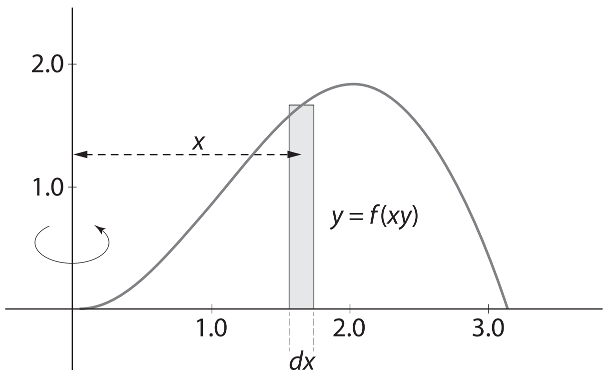


FIGURA 6.13 Generación de un cilindro hueco o casquillo de espesor diferencial, al girar un rectángulo generatriz diferencial sobre el eje *y*.

Si observas con cuidado, tanto el método de discos como el de casquillos se pueden aplicar en giros sobre el eje x, haciendo los ajustes adecuados de las variables.

❖ Método de discos

Si por las características del problema decides utilizar el método de discos, considera el siguiente análisis:

¿Cuál es el radio del disco?, ¿y cuál es su espesor?

El radio es $r = x = f(y)$ y el espesor es dy. Por tanto, por geometría sabemos que el volumen de un cilindro es $V = \pi r^2$ y resulta que el volumen diferencial del pequeño disco que se forma y el volumen total generado son:

$$dV = \pi \cdot [f(y)]^2 dy \Rightarrow V = \pi \int_a^b [f(y)]^2\, dy$$

Selecciona a y b de manera adecuada y listo, a resolver la integral obtenida.

1. Calcula el volumen generado en la figura 6.12. Considera $a = 0$ y $b = 3.5$.

❖ Método de cilindros o casquillos

Si las características del problema te piden emplear el método de cilindros, el análisis se realiza considerando las tres preguntas base:

i. ¿Cuál es el espesor del tubo?

ii. ¿Cuál es la altura del casquillo?

iii. ¿Cuál es el radio del cilindro?

El espesor es dx; la altura del cilindro es $y = f(x)$ y el radio es $r = x$.

Como el cilindro es muy delgado, se puede abrir de manera vertical y extender como una hoja de papel para formar un rectángulo. ¿Cuáles son las dimensiones de ese rectángulo?

¡En efecto! El rectángulo tiene de alto $y = f(x)$ y su ancho es el perímetro de un círculo de diámetro $2x$; o sea, $2\pi x$. El espesor de la hoja es dx.

La lámina generada, al extenderla es como una hoja de papel cuyo volumen se calcula igual que se haría con un prisma rectangular o paralelepípedo, $V = Ah$, donde A es el área de la base y h es la altura; por tanto, el volumen diferencial de la hoja es:

$$dV = (2\pi x)\, f(x)dx$$

Por último, al seleccionar de manera adecuada los extremos del intervalo de integración, el volumen total será:

$$V = 2\pi\int_a^b xf(x)\,dx$$

2. Calcula el volumen generado en la figura 6.13.
3. ¿Qué método te gustó más y por qué?
4. ¿Cambiará en algo el proceso si se gira sobre el eje x? Expresa las relaciones resultantes en ese caso.
5. Si la superficie generatriz es cerrada y no toca ningún eje, ¿se forma un sólido de revolución al girar sobre alguno de ellos? Da tres ejemplos.

APLICACIÓN 6.4.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre los costos de la tecnología.
- Interés por el uso eficiente de la tecnología.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder de manera adecuada las preguntas planteadas y los ejercicios.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza del proceso de integración en el método de rebanadas.
ii. Elección adecuada de los parámetros a una situación de diseño.
iii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas, de considerarse obligatorio aplicar los criterios de calidad de la Actividad 6.1.1.
- Realizar al menos una de las opciones de ejercicio en clase, para análisis y discusión del tema.
- Proponer otras formas para el terreno y plantear las integrales.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

Aplicación 6.4.1

Sólidos de sección de forma fija y método de rebanadas

Considera una superficie plana sobre la cual se eleva un sólido de sección de forma fija y conocida. Por ejemplo, el pan de caja es uno de estos sólidos en el que la superficie es un rectángulo y se elevan las rebanadas del pan de sección cuadrada. Otro ejemplo es un medio cono cortado sobre el diámetro de su base y llegando hasta el vértice. En este caso, la superficie es un triángulo isósceles y se elevan sobre la superficie rebanadas con sección que es medio círculo, cuyo radio crece desde cero en el vértice y hasta el radio de la base, según se muestra en la figura 6.14.

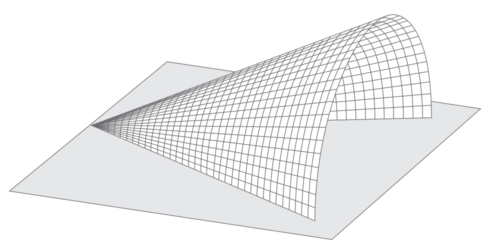


FIGURA 6.14 Medio cono como un volumen generado sobre un triángulo con rebanadas elevándose con forma semicircular.

Otro ejemplo de volumen es el de la figura 6.16, que se genera sobre la región plana de la figura 6.15, limitada por $y = x^2/4$ y $y = \sqrt{x}$ sobre el cual se elevan triángulos equiláteros alineados con el eje y.

El volumen se calcula considerando el volumen diferencial de una rebanada de espesor dx por el área de la rebanada; es decir, $dV = Adx$, en donde el área A varía con respecto a la posición x. Por último, el volumen total del sólido es:

$$\int_a^b A(x)\,dx$$

Lo anterior se puede reconocer como el volumen de un prisma o cilindro con área variable en cada pequeña rebanada.

Para ejemplificar este método, vamos a resolver este último caso.

Un salón de usos múltiples se construye bajo una estructura compuesta de triángulos equiláteros elevados de manera vertical que sostiene la techumbre sobre el terreno, el cual tiene la forma planteada en la figura 6.15, bajo una escala 1:10. El edificio se verá como muestra la figura 6.16. Los especialistas en aire acondicionado estiman que el costo por hora de enfriamiento del salón por metro cúbico de aire será de \$0.3. Si un evento dura una hora y el equipo se debe encender al menos 30 minutos antes, ¿cuál será el costo del enfriamiento en el evento?

Paso 1: Delimitar la superficie donde se levantarán las rebanadas.

La superficie está delimitada en su parte superior $y = \sqrt{x}$; por abajo, por $y = x^2/4$, y por el intervalo $x \in (0, 2.52)$, donde este último fue encontrado intersecando ambas curvas. La figura 6.17 muestra esta delimitación.

Paso 2: Establecer la base de una rebanada genérica en la posición x. La figura 6.17 muestra la base de la rebanada genérica en la posición x con espesor dx y largo de la base $h = \sqrt{x} - x^2/4$.

Paso 3: Calcular el área genérica de la sección de la rebanada. Puesto que el enunciado marca que se elevan triángulos equiláteros, estos quedarán como se muestra en la figura 6.18.

Paso 4: Plantear la integral del volumen total:

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b h\left(\frac{h\sqrt{3}}{2}\right)\frac{1}{2}dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2.52} (\sqrt{x} - x^2/4)^2\,dx$$

Paso 5: Resolver la integral.

$$V = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^{2.52} (\sqrt{x} - x^2/4)^2\,dx = 0.353502\ \text{m}^3$$

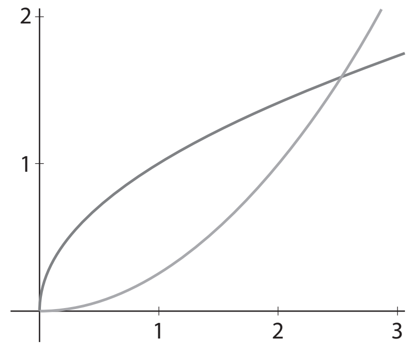


FIGURA 6.15 Superficie limitada por $y = x^2/4$ y $y = \sqrt{x}$.

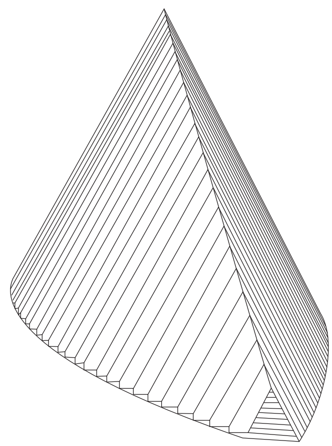


FIGURA 6.16 Volumen generado sobre la superficie limitada por $y = x^2/4$ y $y = \sqrt{x}$, sobre el cual se elevan triángulos equiláteros.

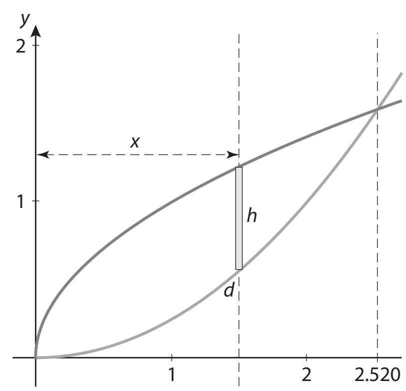


FIGURA 6.17 Superficie plana sobre la cual se elevan triángulos equiláteros, que delimita el volumen por abajo, escala 1:10 m/m.

Paso 6: Interpretar.

Consideremos la escala 1:10. El volumen total del aire será 1 000 V, el tiempo de trabajo del equipo es 90 minutos, por lo que el costo de enfriamiento en el evento será:

$$\text{Costo} = 1\,000(0.353502)90(0.3) = \$9\,544.55$$

1. Resuelve el ejemplo anterior sabiendo que en el proyecto arquitectónico se decidió elevar cuadrados en lugar de triángulos equiláteros.
2. Otra propuesta arquitectónica diferente sugiere mayor estética si sobre el terreno se elevan semicírculos. ¿Cómo cambia el resultado al cálculo del costo de enfriamiento por hora?
3. Plantea el mismo problema, pero considerando que el edificio tuviera la forma del medio cono de la figura 6.14. Sugiere las ecuaciones y dimensiones que consideres prudentes de acuerdo con el planteamiento.

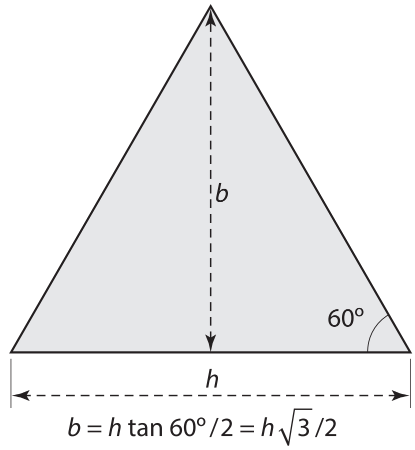


FIGURA 6.18 **Sección genérica de los triángulos que se elevan sobre la superficie, calculado en relación con su base *h*.**

Actividad 6.4.2

Método de discos en volúmenes de revolución

Considera la superficie generatriz de la figura 6.19 que gira alrededor de la recta eje $y = -1$, delimitada por el eje y, la recta $y = 2$ y la parábola $y = 4 - x^2$.

En la figura 6.19 se han trazado los auxiliares gráficos que identifican a la barra diferencial de ancho dx y altura h, que al girar sobre la línea etiquetada como eje, genera un disco de radio R pero con un hoyo de radio r, figura geométrica a la que llamamos arandela. En términos comunes, ésta es un disco de radio mayor R al que se le resta otro disco de radio menor r. De tal forma que el volumen se evalúa, como se indica en la actividad 6.4.1, aplicando la propiedad aditiva de la integral.

Igual que antes, el volumen del disco es $V = \pi(\text{radio})^2$ espesor, y debido a que se trata de dos discos tendremos que restar el volumen del menor al mayor, esto de acuerdo con la figura 6.19:

$$dV = \pi R^2\,dx - \pi r^2\,dx = \pi(R^2 - r^2)dx \therefore V = \int_a^b \pi(R^2 - r^2)\,dx$$

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} ([1 + f(x)]^2 - [1+2]^2)\,dx = \pi \int_0^{\sqrt{2}} ([5 - x^2]^2 - 9)\,dx$$

Después de resolver la integral, resulta $V = 45.02$.

En este ejercicio hemos analizado la posibilidad de que el eje de giro no corresponda directamente al eje coordenado, por lo que la ecuación del cálculo de volumen debe

ACTIVIDAD 6.4.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones nuevas.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por los desarrollos analíticos.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre los métodos de arandelas y respuestas a las cuatro preguntas, con la solución a los dos casos solicitados en la pregunta cuatro.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Evidencia de que se desarrolló el experimento de la cartulina.
iii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iv. Planteamiento de gráficos para clarificar sus conclusiones.
v. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
vi. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐

corregirse como se mostró y, por otro lado, cuando el disco no está completo y presenta un hueco con respecto al eje de giro, se denomina método de arandelas, que es una variante del método de discos. Por lo que el método de arandelas es una simple aplicación del método de discos junto con la propiedad aditiva de la integral, que en este caso se aplicó como una resta porque la arandela tiene un vacío en su centro.

Reflexiona sobre los siguientes casos:

1. ¿Puede el eje de giro atravesar la superficie generatriz? ¿Por qué?
2. ¿Puede una superficie abierta al infinito generar un volumen de revolución? ¿Por qué?
3. Si un cometa fuera esférico, ¿cómo crees que sería su cauda y por qué?
4. Una esfera de 10 cm de diámetro se ata al extremo de una cuerda de un metro y se hace girar rápidamente, lo que ocasiona que la cuerda se tense. La ilusión óptica te hace ver un sólido de revolución llamado toroide o simplemente toro. ¡Es una dona! Plantea cómo calcular su volumen empleando el método de casquillo y el de arandelas. Resuelve ambos casos.

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate con tu facilitador.

▸ Fecha de entrega: ______________________
▸ Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Reflexiones y ejemplos sobre la pregunta 4.
- Propuesta para la integral de la pregunta 4.
- Propiciar el trabajo colaborativo.

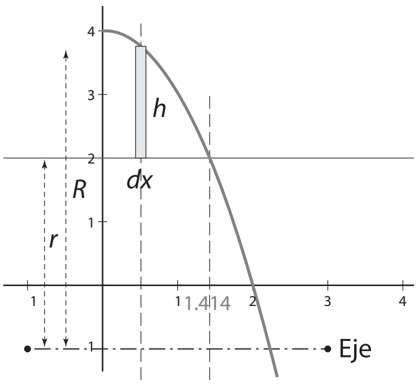


FIGURA 6.19 Superficie generatriz que rota sobre un eje $y = -1$, en donde se indica el área diferencial de ancho dx y alto h.

6.5 CENTROIDES Y MOMENTOS

En los cuerpos físicos ocurren muchos fenómenos asociados a su geometría entre los que destaca la ocurrencia de la masa y el peso; y, por tanto, los efectos de la atracción gravitatoria, entre muchos otros. Estudiemos ahora dos conceptos físicos necesarios para el estudio de cantidades físicas.

Aplicación 6.5.1

Centroides

Debido al principio físico de la palanca, el momento o torque T de una fuerza respecto de un punto se define como el producto de la distancia comprendida entre la fuerza al punto r y la magnitud de la fuerza F, $T = rF$, siempre que F y r sean perpendiculares. El torque resulta ser la medida de la tendencia de giro del cuerpo sobre el eje, el cual podrá ocurrir dependiendo de si el eje opone o no la suficiente resistencia para que el giro ocurra.

Como un caso de aplicación, considera una placa plana de cualquier material; córtala en pequeños rectángulos de

APLICACIÓN 6.5.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Interés sobre nuevos conceptos.
- Interés por la experimentación.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder en forma adecuada las preguntas planteadas y realización animosa de los experimentos.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza del centroide y el centro de gravedad.

peso dw. Cada uno de ellos provocará un pequeño momento $dT = rdw$ respecto de un eje elegido, de donde el momento total será:

$$T = \int_A rdw$$

En la integral se indica que se realiza sobre toda el área (véase figura 6.20).

En particular, si los ejes seleccionados son el x o el y, y además el material de la placa y el espesor son homogéneos, el peso será proporcional al área y los momentos se pueden expresar en función de las coordenadas y y x, respectivamente. Así, omitiendo la constante de proporcionalidad, el momento total sobre el eje x y y son, respectivamente:

$$M_x = \int_A y\,dA; \quad M_y = \int_A x\,dA$$

Un par de preguntas que resultan fundamentales en la física son: ¿Existirá algún valor de x en el que se pueda concentrar toda la masa de la placa y provoque el mismo momento total? ¿Se podrá dar una condición similar en y?

Supóngase que esos valores existen, y considerando todo el peso de la placa concentrado en ese punto a una distancia $\bar{x}$ y $\bar{y}$ de cada eje respectivamente, se cumple:

$$\bar{x}, \bar{y} \Rightarrow \quad \bar{x}A = \int_A x\,dA, \quad \bar{y}A = \int_A y\,dA$$

O bien:

$$\bar{x} = \frac{\int_A x\,dA}{\int_A dA}; \quad \bar{y} = \frac{\int_A y\,dA}{\int_A dA}$$

Estas coordenadas $\bar{x}$ y $\bar{y}$ definen el *centroide* de la superficie en condiciones de homogeneidad de la distribución de masa, y corresponde además al centro de masa o centro de gravedad de la placa.

1. Reflexiona: ¿Son estas definiciones, aplicaciones especiales del valor medio para integrales? ¿Por qué?

Como ejemplo, considera una placa homogénea en espesor y densidad de masa, cuya superficie queda delimitada en el primer cuadrante por encima de la recta $y = x$ y debajo de la parábola $y = 4 - x^2$, como se muestra en la figura 6.21.

La superficie es del tipo I, por lo que después de calcular la intersección entre las dos curvas se obtiene x =1.5616 y al considerar el elemento diferencial de área de la figura 6.22 se tienen las integrales:

ii. Evidencia de que se realizaron los experimentos por comentarios informados.
iii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas; de considerarse obligatorio, aplicar los criterios de calidad de la Actividad 6.1.1.
- Realizar la actividad en la clase, revisar en varios ejemplos la naturaleza de los valores del centroide de elemento diferencial.
- Si no se cumple la condición de homogeneidad, ¿qué ocurre con el centroide y el centro de gravedad?

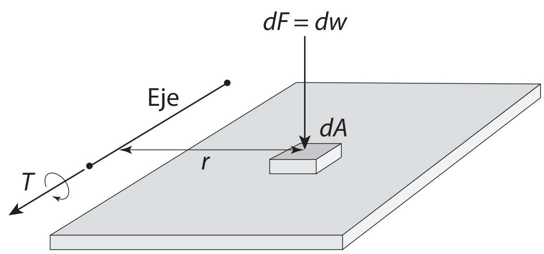


FIGURA 6.20 Momento o torque de un elemento diferencial de peso *dw* respecto de un eje, del cual está a una distancia *r*.

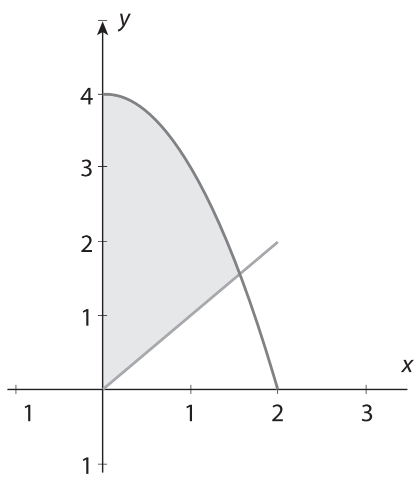


FIGURA 6.21 Superficie limitada por $y = 4 - x^2$, $y = x$ y el eje y.

$$A = \int dA = \int_0^{1.562} h\,dx = \int_0^{1.562} (4 - x^2 - x)\,dx = 3.76$$

Para M_x y M_y es necesario localizar la ubicación del *centroide* de la barra diferencial que en la figura 6.22 se ha etiquetado como (X_0, Y_0), y que corresponde a $X_0 = x$; mientras que para $Y_0 = (y_1 + y_2)/2$ (el promedio de los límites verticales de la barra diferencial), y en este caso $Y_0 = (4 - x^2 + x)/2$, de donde los momentos resultan:

$$M_y = \int X_0\,dA = \int_0^{1.5616} x(4 - x^2 - x)\,dx = 2.12113$$

$$M_x = \int Y_0\,dA = \int_0^{1.5616} \frac{1}{2}(4 - x^2 + x)(4 - x^2 - x)dx = 7.70928$$

Por último:

$\bar{x} = 2.12113 / 3.76 = 0.5641$

$\bar{y} = 7.70928 / 3.76 = 2.05$

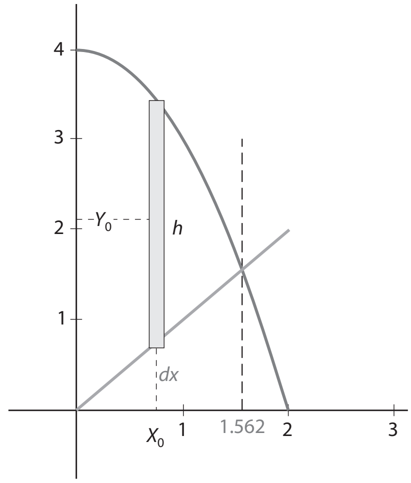


FIGURA 6.22 Superficie limitada por $y = 4 - x^2$, $y = x$ y el eje y, en el cual se trazó el elemento diferencial de área con coordenadas en su *centroide* (X_0, Y_0).

2. Si cortas en un cartón rígido la superficie estudiada en este ejercicio y ubicas las coordenadas encontradas en éste (0.564, 2.05), podrás observar que al colocar la punta de tu lápiz bajo el punto, el cartón se mantiene en equilibrio. También puedes realizar el siguiente experimento.

¿Quieres ver físicamente el *centroide* o centro de gravedad de una figura plana?

Realiza el siguiente proceso:

i. Recorta la figura deseada en un cartón tan grueso que no se doble.

ii. Con una aguja pasa un hilo cerca de la orilla de la figura y amárralo.

iii. Sostén el hilo y deja que la figura cuelgue libremente del hilo. Con una regla, prolonga la recta definida por el hilo y trázala sobre el cartón.

iv. Repite el mismo procedimiento con otro punto que no esté sobre la recta trazada.

v. Las rectas trazadas se cortan en un punto, que es el *centroide*.

vi. Para probarlo sostén la figura con la punta de un lápiz ubicada en ese punto. Si lo hiciste de manera correcta el cartón se mantendrá en equilibrio horizontalmente.

3. ¿Por qué se puede encontrar el centroide mediante el proceso descrito?

4. ¿En dónde quedaron las integrales en el proceso?

5. ¿En dónde está el centro de gravedad de una escoba de tal forma que apoyada en ese punto se equilibre horizontalmente? Ponla encima de un dedo de cada mano apoyada en los extremos del palo de la escoba, muévelos rápidamente hacia el centro del palo ¡no se va a caer! Cuando juntes tus manos ¡ahí está el centro de gravedad! ¿Por qué funciona esto? ¿En dónde están las integrales?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate con tu facilitador.

Aplicación 6.5.2

Momentos de inercia

En el contexto de la dinámica de los cuerpos rígidos, la inercia es una medida de la resistencia que opone un cuerpo a que se produzca un cambio en su estado de reposo o de movimiento. A mayor inercia, mayor es la resistencia al cambio; de tal forma que si se aplica la misma fuerza a dos cuerpos, el de mayor inercia sufrirá el menor cambio en su estado de movimiento, o dicho de forma coloquial "reaccionará en forma más lenta". Para el movimiento de traslación, la inercia es equivalente a la masa, pero para el movimiento de rotación depende del **momento de inercia**.

En el caso de un sólido plano, el momento de inercia se mide respecto del punto en que se coloca el eje de rotación (cualquiera que se quiera) y se define para un punto de materia como $I_{\text{eje}} = r^2m$, donde r es la distancia del punto materia hasta el eje de rotación.

Para poder considerar un cuerpo completo, se tiene que $dI_{\text{eje}} = r^2dm$, donde r se refiere a cada punto material.

APLICACIÓN 6.5.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Interés sobre nuevos conceptos.
- Gusto por hacer conjeturas sobre conceptos y realizar evidencias que las apoyen.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder de manera adecuada las preguntas planteadas y realización adecuada de los ejercicios.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza del momento de inercia.
ii. Evidencia de que se realizaron las evidencias que apoyan las conjeturas.
iii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas; de considerarse obligatorio, aplicar los criterios de calidad de la Actividad 6.1.1.
- Realizar la actividad en la clase, revisar en varios ejemplos la naturaleza de los valores de los momentos de inercia.
- Investigar qué es el radio de giro de una superficie.

Cuando la rotación se considera sobre un punto, se define el momento polar de la misma manera, solo que ahora r es la distancia de cada punto material al punto de rotación, de ahí el nombre de momento polar de inercia.

Para un punto en el plano xy, el momento polar de inercia en el origen se escribe I_0 y corresponde a I_z en el origen, las expresiones resultantes son:

$$I_{\text{eje}} = \int_M r^2 dm \quad e \quad I_{z/p} = \int_M r^2 dm$$

La integral se hace sobre todo el cuerpo de masa M y z identifica que el cuerpo se pretende hacer girar sobre un eje perpendicular a la superficie y que pasa por p. Si el cuerpo es homogéneo, el peso se distribuye de manera igualitaria a lo largo del cuerpo y la masa dependerá del volumen y su densidad específica ρ. A su vez, si el cuerpo es de espesor constante t, el volumen dependerá de t y del área, por lo que al final se puede escribir:

$$I_{z/p} = t\rho \int_A (x^2 + y^2)dA$$

Donde r se sustituyó con respecto al teorema de Pitágoras. Si resuelves las integrales de manera adecuada, podrás identificar en dónde conviene colocar el eje sobre un cuerpo que va a girar.

Por último, si solo interesa el momento de inercia del área, no se considera el espesor de la placa ni la densidad, y obtenemos las expresiones:

$$I_x = \int_A y^2\, dA \quad I_y = \int_A x^2\, dA \quad I_0 = \int_A (x^2 + y^2)\, dA$$

Por las propiedades de la integral se demuestra:

$$I_0 = \int_A (x^2 + y^2)\, dA = \int_A x^2\, dA + \int_A y^2\, dA = I_y + I_x$$

Como ejemplo, calculemos los tres momentos de inercia para la región limitada por el eje y, la recta $y = 4$, y por encima de la parábola $y = x^2$.

La figura 6.23 muestra la región delimitada en la que se ha trazado un rectángulo diferencial representativo que mantiene una distancia horizontal **constante** hasta el eje y. Así, es posible calcular I_y:

$$I_y = \int_A x^2\, dA = \int_0^2 x^2\, h\, dx = \int_0^2 x^2(4 - x^2)\, dx = 4.26667$$

La figura 6.24 muestra la región delimitada, donde se ha trazado un rectángulo diferencial representativo que mantiene una distancia vertical **constante** hasta el eje x. Así, es posible calcular I_x:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_0^4 y^2 h\, dy = \int_0^4 y^2 \sqrt{y}\, dy = 36.5714$$

Por último: $I_0 = I_y + I_x = 36.5714 + 4.26667 = 40.8381$

Reflexionemos acerca de la expresión del momento de inercia:

1. ¿Qué llanta tendrá un momento de inercia mayor, la de un automóvil o la de un autobús? Explica por qué.
2. ¿Por qué se pone el eje en el centro del círculo y no en otro lugar? Explica tu conjetura y observa que se cumple al calcular el momento polar en el centro de un círculo y, de nuevo, en un punto diferente.

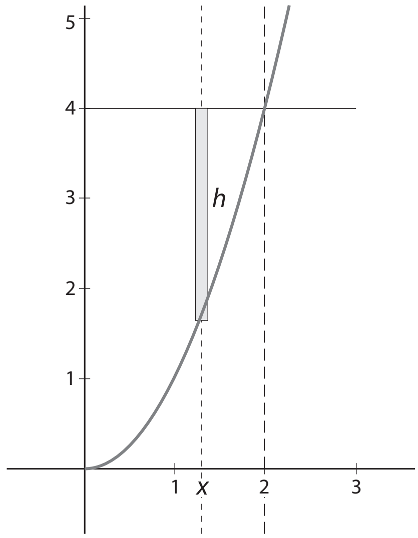


FIGURA 6.23 Superficie limitada por $y = 4$, $y = x^2$ y el eje y, en la que se trazó un elemento diferencial vertical.

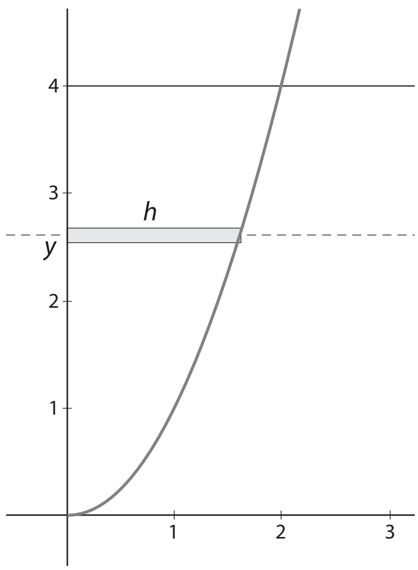


FIGURA 6.24 Superficie limitada por $y = 4$, $y = x^2$ y el eje y, en el cual se trazó un elemento diferencial horizontal.

3. La mayoría de los objetos que se hacen girar sobre un eje son circulares, una excepción son las levas. ¿Por qué crees que sea así? Muestra que tu conjetura es válida si calculas el momento polar para una elipse.
4. ¿Por qué crees que deben balancearse dinámicamente las llantas de los autos?
5. ¿Afectará a su momento de inercia el conjunto de los hoyos de los rines de las llantas de los autos?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate en tu facilitador.

6.6 OTRAS APLICACIONES DE LA INTEGRAL

Las aplicaciones de la integral son muy amplias, por lo que en este apartado solo se presentan algunas de las más comunes. Con este estudio se amplía el panorama para que en nuestra visión de la naturaleza observemos, en los actos que nos rodean todos los días, que la acumulación es un hecho cotidiano.

Aplicación 6.6.1

Área de superficies de revolución

Así como un sólido de revolución tiene un volumen, su superficie cuenta con un área que también puede ser calculada mediante integración. Para tal cálculo, consideremos la figura 6.25 que comienza el análisis en la curva generatriz.

Al girar una vuelta completa, esta secante diferencial genera un cono truncado, como se muestra en la figura 6.26, el cual, por su

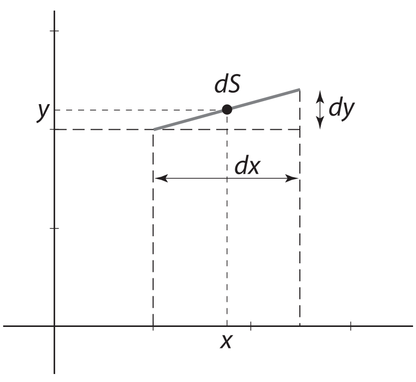


FIGURA 6.25 Una pequeña secante diferencial linealiza a la curva generatriz en la vecindad del punto (x, y).

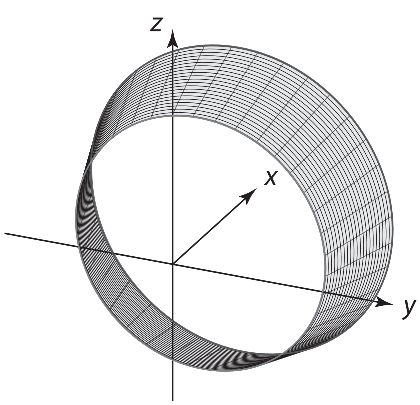


FIGURA 6.26 Lámina cónica truncada, diferencial ubicada en (x, y).

APLICACIÓN 6.6.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Interés sobre nuevos conceptos.
- Interés por los desarrollos analíticos.
- Gusto por participar en clase.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder de manera adecuada las preguntas planteadas en la clase.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de las áreas de sólidos de revolución.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Realizar la actividad en la clase, revisar en varios ejemplos el cálculo del área de la superficie.
- ¿Qué es una superficie de curvatura doble?
- ¿Existen sólidos que no sean generados por revolución de una generatriz? Da algunos ejemplos localizados en el entorno.

pequeña altura, es muy semejante a un cilindro recto de radio y, cuya superficie se puede calcular aplicando la geometría elemental:

$$dA = 2\pi y dL = 2\pi y\sqrt{dx^2 + dy^2} = 2\pi y\sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}dx$$

$$dA = 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}dx \Rightarrow A = \int_S 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

En caso de la rotación sobre el eje y, se intercambian los papeles de x y y en la ecuación obtenida.

Ejemplo:

Una cubierta para lámpara se va a producir en serie con policarbonato de espesor 1 mm, si su forma se obtiene desde la curva $y = 20\sqrt{4 - x/10}$.

Donde x y y están en centímetros y $0 \leq x \leq 39$ y la curva gira sobre el eje x.

Resolución

Como la lámina es muy delgada, se considera equivalente calcular su área y multiplicar por su espesor. La figura 6.27 muestra la curva, en la que se ha seleccionado el elemento diferencial del arco dS, mientras la figura 6.28 muestra la forma de la cubierta de la lámpara obtenida.

Se sigue que $y' = -\dfrac{1}{\sqrt{4 - x/10}}$

$$A = \int_S 2\pi y\sqrt{1 + (y')^2}\, dx = 2\pi\int_0^{39} 20\sqrt{4 - \frac{x}{10}}\sqrt{1 + \frac{10}{40 - x}}dx$$

$$= \frac{40\pi}{\sqrt{10}}\int_0^{39}\sqrt{40 - x}\sqrt{1 + \frac{10}{40 - x}}dx = \frac{40\pi}{\sqrt{10}}\int_0^{39}\sqrt{50 - x}dx$$

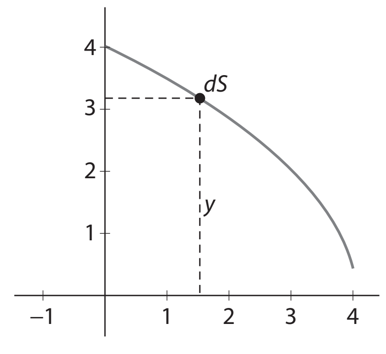


FIGURA 6.27 Curva generatriz $y = 20\sqrt{4 - x/10}$ de la cubierta de la lámpara con elemento diferencial dS seleccionado en (x, y).

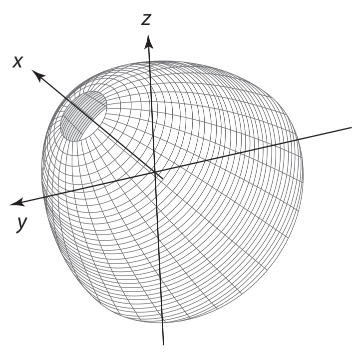


FIGURA 6.28 Cubierta de lámpara con generatriz $y = 20\sqrt{4 - x/10}$ y espesor 1 mm, emplea 839.991 cm^3 de policarbonato $x \in (0, 39)$.

APLICACIÓN 6.6.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Gusto por la abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Interés sobre nuevos conceptos.
- Interés por los desarrollos analíticos.
- Gusto por participar en clase.

Desempeños

- Manifestación de la comprensión del tema, al responder de manera adecuada las preguntas planteadas en la clase.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza de la fuerza sobre placas sumergidas vertical u horizontalmente.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Realizar la actividad en la clase, revisar en varios ejemplos el cálculo de la presión sobre una superficie plana y colocada verticalmente.
- Investigar cómo se calcula la fuerza por presión en una superficie curva sumergida.
- ¿Qué ocurre en la atmósfera con las superficies?
- ¿El viento se puede considerar como el resultado de una fuerza por presión en la inmersión en el fluido atmosférico? ¿Por qué?

Finalmente, el área es 8.3991 cm^2 y el volumen ocupado de policarbonato es 839.991 cm^3.

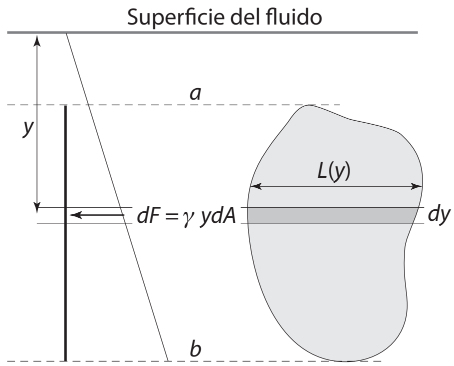


FIGURA 6.29 **Fuerza sobre una franja horizontal a profundidad y de una placa vertical sumergida en un fluido.**

Aplicación 6.6.2

Presión en un fluido sobre superficies planas verticales

Una placa plana colocada horizontalmente bajo un fluido soporta una presión, p, correspondiente al peso del líquido sobre ésta distribuido sobre su área; es decir, si W es el peso total del líquido sobre la placa, V el volumen del mismo, γ el peso específico en kg/m^3 y A el área de la placa sumergida.

$$p = \frac{W}{A} = \frac{\gamma V}{A} = \frac{\gamma h A}{A} = \gamma h \frac{\text{kg}}{\text{m}^2}$$

Sin embargo, una situación muy diferente ocurre si la placa plana sumergida está colocada en forma vertical. Considera la figura 6.29, en la que observamos la placa de perfil y de frente.

Sea y la profundidad bajo el líquido de una franja de altura dy, luego la fuerza ejercida por el fluido encima de ese nivel será:

$$dF = \gamma y dA = \gamma y L(y) dy \Rightarrow F = \gamma \int_a^b y L(y)\, dy$$

Nota que los límites de la integral están invertidos del sistema convencional, para evitar el signo menos previo a la integral.

Ejemplo:

Una placa rectangular de altura 2 m y base 3 m se sumerge verticalmente hasta que su base toca el fondo de una alberca, cuyo espejo de agua está 5 m por arriba. ¿Cuál será la presión soportada por la placa? Se sabe que $\gamma = 9.8$ kN/m^3.

Resolución

De acuerdo con la figura 6.29, en esta situación específica $a = -2$ y $b = -5$, por tanto:

$$F = \gamma \int_a^b y L(y)\, dy = 9.8 \int_{-2}^{-5} y(3)\, dy = \frac{9.8(3)}{2} y^2 \Big|_{-2}^{-5} = 308.7\,\text{N}$$

Actividad 6.6.1

Discute con tus compañeros acerca de cada uno de los siguientes seis tópicos. Prepara un ensayo al respecto y describe las características generales de las aplicaciones de la integral.

1. Es bello mirar una tarde de lluvia mientras te resguardas bajo un techo, cuando se trata de la primera lluvia

ACTIVIDAD 6.6.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis de situaciones reales.
- Gusto por debatir conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la abstracción.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre los seis tópicos descritos.

Criterios de calidad

i. Claridad y congruencia en sus respuestas.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Planteamiento de gráficos para clarificar sus conclusiones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo “no, sí, nunca, siempre, etc.”.
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: cuatro cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

del año y la tierra la espera ansiosa. Cada gota es una pequeñísima cantidad de agua, pero con miles de gotas se conforman los charcos, arroyos y ríos. ¿Ves en este fenómeno un proceso de acumulación? ¿Cuáles serían los diferenciales? ¿El proceso de acumulación inicia desde cero? ¿Es diferente medir el agua que cae en un minuto, una hora, un día? Traza una curva que muestre este proceso de acumulación; explica su significado. Lo que has descrito es una función. ¿Cuál será su derivada? ¿Qué significado tiene ésta?

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Aceptar la propuesta de otros temas de acumulación que sean del interés del estudiante.
- Proponer la exposición de las conclusiones a varios equipos en la clase.
- Proponer una exposición sobre aplicaciones de la integral al final del curso.

2. Observa tu lapicero o bolígrafo. ¿Tiene todavía alguna cantidad de grafito o de tinta −según sea el caso−? Escribe una letra y di si la cantidad de tinta disminuyó. ¿Las pérdidas también se acumulan? ¿Cuál será la variable que controla este proceso? ¿Crees que la cantidad consumida sea la misma para cada milímetro de trazo que hagas? ¿Cómo representarías este fenómeno con una gráfica?

3. La electricidad que se consume en tu casa se mide y con ello se calcula lo que tendrá que pagar tu familia. ¿El consumo eléctrico se acumula? ¿Cómo se mide y cuáles son sus unidades? ¿Cuáles son los electrodomésticos que más energía consumen? ¿Cuándo se dice que hay fugas de energía? ¿Cómo puedes disminuir el consumo? ¿Cómo será la curva del consumo? ¿Cuál será la gráfica de su derivada y qué significa? ¿La curva de la cantidad que se debe pagar es similar a la del consumo? ¿Qué diferencias o semejanzas tienen?

4. El consumo del gas combustible en tu hogar suele partir de un tanque lleno. ¿Cómo será la gráfica de la cantidad de gas contenida en el tanque en cada instante? ¿Cómo será la curva del gasto de gas? ¿Cómo se comporta la presión interna del tanque en este proceso? ¿Qué significado tendrá el área bajo la curva de cada una de estas gráficas?

5. Los envases comerciales para líquidos tienen formas muy variadas. Toma uno de ellos y analiza. ¿Cómo puedes estar seguro de la cantidad de líquido que lo llena? Si el fabricante anota en el envase el contenido total, ¿hasta dónde se debe encontrar la superficie del líquido? Anota sobre el envase una escala que permita saber su contenido con divisiones cada cinco mililitros. ¿La separación entre las líneas es fija? ¿Por qué? Haz una gráfica que represente la altura de la superficie del líquido a partir de la base del envase y en el otro eje el volumen contenido. ¿Qué representa el área bajo la curva? Describe cómo hiciste todo el proceso. ¿Puedes diseñar un envase para el cual el volumen crezca de manera proporcional respecto al nivel del líquido? ¿Cómo sería ese envase si se te pide que la altura máxima del líquido sea la misma que el envase original? ¿Cómo se comporta la curva en este caso? ¿Cómo es la curva que representa la cantidad de líquido agregada por mm de altura?

6. Los proveedores de servicios de internet afirman que trabaja a 15 Mbs u otro valor, pero esta velocidad depende de muchos factores. ¿Es éste un valor promedio o un valor máximo? ¿Por qué? Si la transmisión de datos se considera continuo, describe una curva que represente una sesión típica. ¿Cómo se comporta la curva de acumulación de información recibida en tu estación de trabajo? ¿Cómo es la curva derivada? ¿Qué representa esta curva? Si en realidad los servicios trabajaran a la velocidad anunciada, ¿cómo deberían ser las gráficas resultantes? Si quisieras elegir entre varios prestadores de este servicio y tuvieras la oportunidad de hacer algunas pruebas, ¿qué pruebas realizarías? Desde luego, el factor económico pesa. ¿Cómo afecta esta variable a la decisión?

Comenta tus hallazgos con tus compañeros y, si tienes dudas, apóyate con tu facilitador.

Ejercicios 6.1

6.1.1 Calcula el área bajo la curva $f(x) = e^x$, en [1, 2].

Resolución

El área corresponde a:

$$\int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e \approx 4.67077$$

El área está dada en unidades cuadradas que no se indicaron desde el inicio.

6.1.2 Calcula el área entre $f(x) = x^3$ y el eje x en el intervalo $[-3, 3]$.

Resolución

La función es impar y cruza el eje en el origen. Luego, el área se compone de dos segmentos, uno positivo y uno negativo. Lo solicitado es:

$$A = -\int_{-3}^{0} x^3\,dx + \int_0^3 x^3\,dx = 2\int_0^3 x^3\,dx = 2\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^3 = \frac{81}{2} = 40.5$$

El área está dada en unidades cuadradas, pero no se indicaron desde el enunciado.

6.1.3 Encuentra el área entre la curva $f(x) = 3\,\text{sen}\,2x\sqrt{2 - \cos 2x}$ y el eje x en $[-\pi/2, 0]$.

Resolución

Observa la gráfica en la figura 6.30, donde se muestra que $f(-\pi/2) = f(0) = 0$ y no hay más ceros. Luego, el área solicitada es:

EJERCICIOS 6.1

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Interés por el trabajo en equipo.
- Interés por la abstracción.
- Gusto por los desarrollos algebraicos.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice y plantee sus dudas.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Conjeturas adecuadas sobre variantes en los ejercicios.
iii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

$$A=-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\underbrace{3\operatorname{sen}2x\sqrt{2-\cos 2x}}\,dx=-\frac{3}{2}\int_{3}^{1}\sqrt{u}\,du=\frac{3}{2}\,\frac{3u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_{1}^{3}$$

$$u=2-\cos 2x;\; du=2\operatorname{sen}2x\,dx$$

$$u_1=2-\cos(-\pi)=3,\; u_2=2-\cos 0=1$$

$$A=\sqrt{27}-1\approx 4.19615 \text{ (unidades cuadradas)}$$

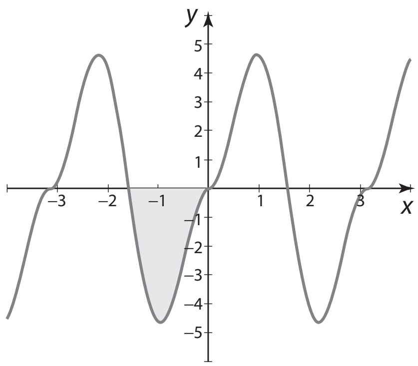


FIGURA 6.30 Área solicitada en la integral del ejercicio 6.1.3.

6.1.4 Encuentra el área de la región limitada por las curvas $4x^2+y=4$ y $x^4-y=1$.

Resolución

Al resolver simultáneamente las ecuaciones presentadas, se localizan los puntos de intersección (véase figura 6.31); así, si ambas se suman, se obtiene $x^4+4x^2-5=0$, que es una *bicuadrática* con solución en $x^2=-5$ y $x^2=1$, de donde el único caso viable es el segundo que resulta: $x=-1$, $x=1$. Además, $x^4+1<4-4x^2$ en $(-1, 1)$ de donde:

$$A=\int_{-1}^{1}(4-4x^2)-(x^4-1)\,dx=\int_{-1}^{1}(5-4x^2-x^4)\,dx$$

$$=5x-\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}=10-\frac{8}{3}-\frac{2}{5}=6.9\overline{3} \text{ (unidades cuadradas)}$$

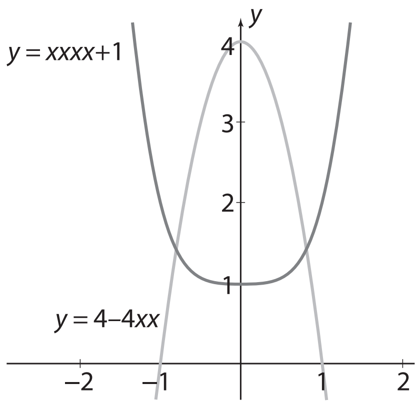


FIGURA 6.31 Área solicitada en la integral del ejercicio 6.1.4.

6.1.5 Encuentra el área limitada por el eje y y las curvas $y=\sqrt{x}+1$ $y=3-x$ y $x=2\sqrt{y}$.

Resolución

La región se ve limitada según se muestra en la figura 6.32, donde las coordenadas de las intersecciones son: (0, 1) entre $y=\sqrt{x}+1$, con el eje y, $y=\sqrt{x}+1$, con la recta $3-x=\sqrt{x}+1$; $(2-x)^2=x$; $4-5x+x^2=0$; $x=4$, $x=1$; o bien, (1, 2); $y=x^2/4$, con el eje y es (0, 0). Por último, entre esta parábola y la recta se tiene $x^2/4=3-x$; $x^2+4x-12=(x+6)(x-2)=0$, donde $x=2$ es útil y el punto de intersección es (2, 1). Por el tipo de superficie generada es necesario trazar la recta auxiliar $x=1$, de donde se obtiene:

$$A=\int_{0}^{1}(\sqrt{x}+1)-\left(\frac{x^2}{4}\right)dx+\int_{1}^{2}(3-x)-\left(\frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$=\left[\frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}+x-\frac{x^3}{12}\right]_0^1+\left[3x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{12}\right]_1^2$$

$$A=\frac{2}{3}+1-\frac{1}{12}+\left(6-2-\frac{8}{12}\right)-\left(3-\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\right)=$$

2.5 (unidades cuadradas)

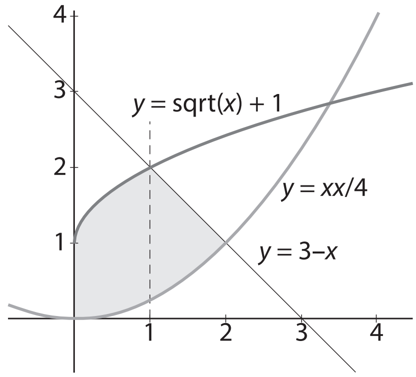


FIGURA 6.32 Área solicitada en la integral del ejercicio 6.1.5.

6.1.6 Sobre la parábola $x = y^2$ se construye un sólido elevando rectángulos cuya sección tiene base sobre la parábola y su altura es igual a la mitad de su base. ¿Cuál será el volumen del sólido si se limita por el plano $x = 5$?

Resolución

Al aplicar el método de rebanadas, una de estas rebanadas tiene el siguiente volumen diferencial:

$$dV = (\textit{ancho } \square)(\textit{alto } \square)(\textit{espesor de la rebanada})$$

$$dV = (2y)(y)dx = 2y^2dx = 2xdx$$

Luego, el volumen solicitado es:

$$V = \int_0^5 2x\,dx = x^2\Big|_0^5 = 25$$

(unidades cúbicas, aunque no se indicaron desde el enunciado).

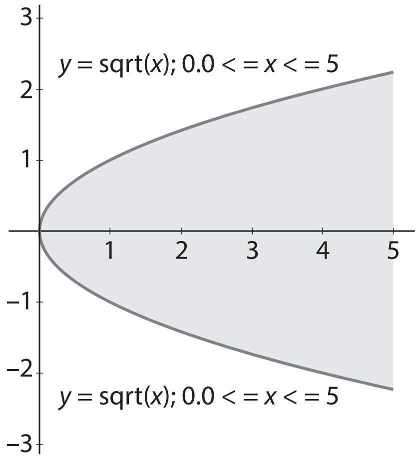


FIGURA 6.33 Superficie sobre la que se elevan los rectángulos paralelos al eje y, para el ejercicio 6.1.6.

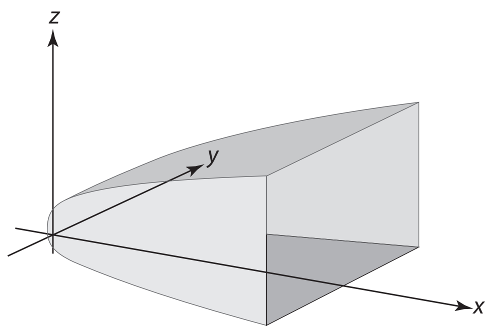


FIGURA 6.34 Sólido de sección de forma fija para el ejercicio 6.1.6.

6.1.7 La base de un sólido es la región entre la curva $y = 2\sqrt{\operatorname{sen} x}$, en el intervalo $[0, \pi]$ en el eje x. Si la sección perpendicular al plano xy está formada por triángulos equiláteros cuya base va del eje x a la curva, es decir, paralelos al eje y, ¿cuál es el volumen del sólido?

Resolución

En la figura 6.35 se muestra la superficie base en la que se ha trazado, sobrepuesto, el triángulo de la sección correspondiente que se eleva en esa posición, para determinar sus dimensiones.

Con los datos obtenidos se tiene:

$$dV = (\text{área } \triangle)(\text{espesor de la rebanada}) = \frac{y(y \operatorname{sen} 60^\circ)}{2}dx$$

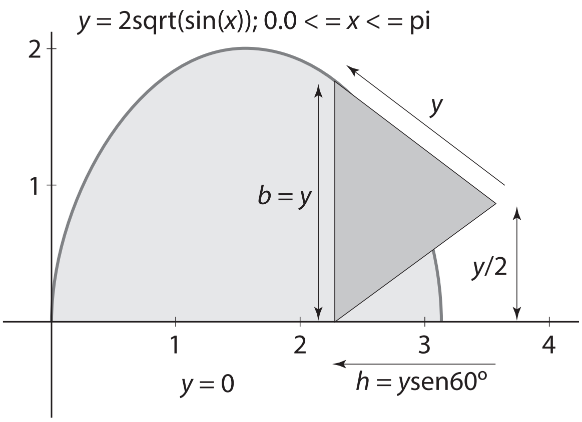


FIGURA 6.35 Área delimitada sobre la cual emergen los triángulos equiláteros verticales del ejercicio 6.1.7.

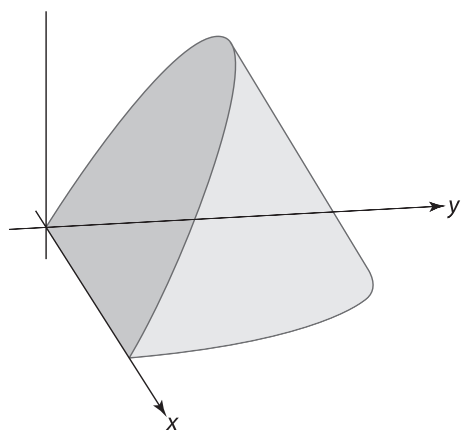


FIGURA 6.36 Volumen generado por la sección conocida del ejercicio 6.1.7.

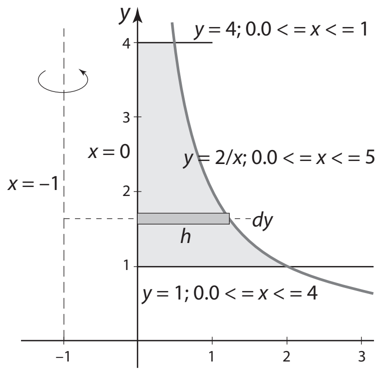


FIGURA 6.37 Región generatriz del sólido de revolución de la figura 6.38, ejercicio 6.1.8.

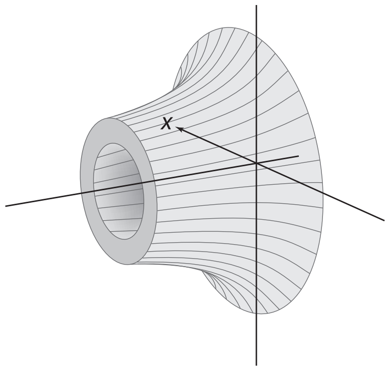


FIGURA 6.38 Sólido de revolución, ejercicio 6.1.8.

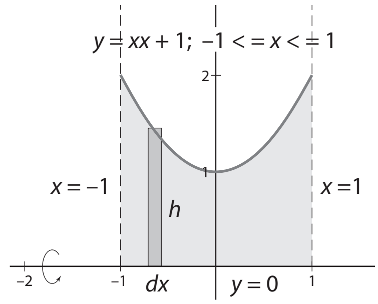


FIGURA 6.39 Región generatriz del sólido de revolución de la figura 6.40, ejercicio 6.1.9.

$$V = \int_0^\pi \frac{y^2 \operatorname{sen} 60^{\circ}}{2} dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi y^2\, dx = \frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^\pi (2\sqrt{\operatorname{sen} x})^2 dx$$

$$= \sqrt{3}\int_0^\pi \operatorname{sen} x\, dx = -\sqrt{3}\cos x\Big|_0^\pi = 2\sqrt{3} \quad \text{(unidades cúbicas).}$$

6.1.8 Un sólido se forma al hacer girar alrededor del eje y la hipérbola $x = 2/y$ limitada por las rectas $y = 1$ y $y = 4$. Calcula el volumen del sólido.

Resolución

Al observar la figura 6.37, se puede ver un trazo adecuado de un rectángulo diferencial para este caso, donde:

$dV =$ (área de la arandela)(espesor)

$$= \pi\left[\left(1 + \frac{2}{y}\right)^2 - 1\right]dy = \pi\left[\frac{4}{y} + \frac{4}{y^2}\right]dy \Rightarrow$$

$$V = 4\pi\int_1^4 \left(\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y}\right)dy = 4\pi\left(\ln y - \frac{1}{y}\right)_1^4 = 26.8455 \quad \text{(unidades cúbicas)}$$

6.1.9 Si la parábola $f(x) = x^2 + 1$ se hace girar sobre el eje x, limitada por las rectas $x = -1$ y $x = 1$, ¿cuál será el volumen del sólido?

Resolución

En la figura 6.39 se observa cómo se forma un disco con el rectángulo señalado, para el cual:

$$dV = \text{(área del disco) (espesor)} = (\pi y^2)dx = \pi(x^2 + 1)^2 dx$$

De donde al ser una función par:

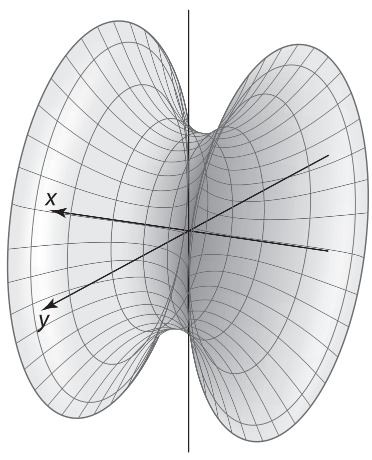


FIGURA 6.40 Sólido de revolución, ejercicio 6.1.9.

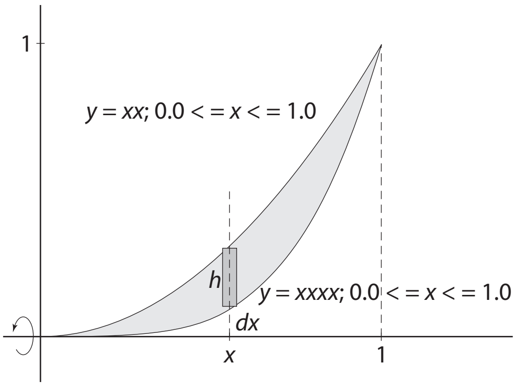


FIGURA 6.41 Región generatriz del sólido de revolución de la figura 6.42, ejercicio 6.1.10.

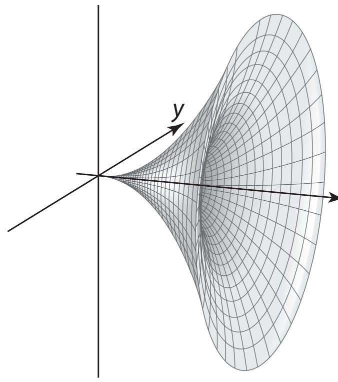


FIGURA 6.42 Sólido de revolución del ejercicio 6.1.10.

$$V = \int_{-1}^{1} \pi(x^2+1)^2 dx = 2\pi \int_{0}^{1} (x^4+2x^2+1)dx$$

$$= 2\pi\left(\frac{x^5}{5}+\frac{2x^3}{3}+x\right)_0^1 = 2\pi\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{3}+1\right) = \frac{56\pi}{15}$$

(unidades cúbicas).

6.1.10 La región limitada por la *función* $y = x^4$ y la parábola $y = x^2$. Se hace girar sobre el eje x. ¿Cuál es el volumen limitado por el sólido?

Resolución

Considera la figura 6.41, en la que al girar se forma una arandela cuyo volumen diferencial será:

$$dV = (\text{área} \bigcirc \text{ mayor} - \text{área} \bigcirc \text{ menor})(\text{espesor})$$

$$dV = (\pi x^2 - \pi x^4)dx$$

Como las curvas se intersecan en el punto (1, 1) ⇒

$$V = \pi\int_0^1 (x^2 - x^4)dx = \pi\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^5}{5}\right)_0^1 = \pi\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) = \frac{2\pi}{15}$$

(unidades cúbicas).

La figura 6.42 muestra el sólido de revolución generado.

6.1.11 La región limitada por las curvas $y = x^2$, $y = -x^4$ y la recta $x = 1$ se hace girar sobre el eje y. ¿Cuál es el volumen del sólido generado?

Resolución

Al considerar el área diferencial mostrada en la figura 6.43 y girarla sobre el eje y se forma un tubo que se puede extender como una lámina. Las dimensiones de esta lámina son:

$$dV = (\text{alto } \square)(\text{largo } \square)\text{espesor} = (x^2 + x^4)(2\pi x)dx$$

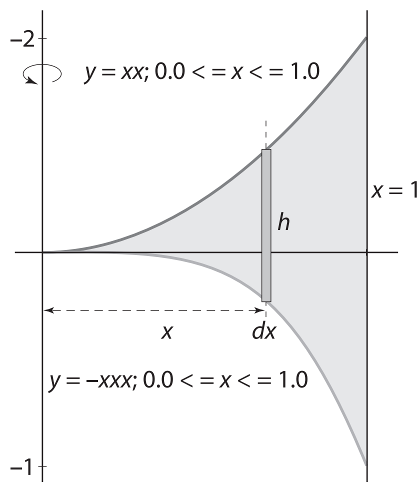


FIGURA 6.43 Región generatriz del sólido de revolución de la figura 6.44, ejercicio 6.1.11.

De donde, al integrar, se obtiene:

$$V = 2\pi\int_0^1 (x^3 + x^5)dx = 2\pi\left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{6}\right)_0^1 = \frac{5\pi}{6} \text{ (unidades cúbicas)}$$

El volumen encontrado es el correspondiente al sólido de la figura 6.44.

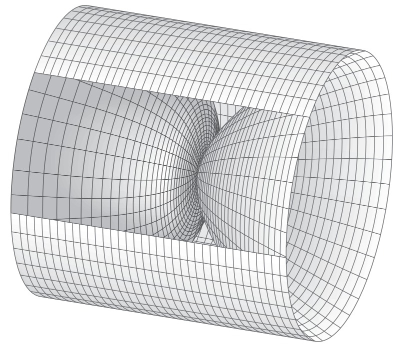


FIGURA 6.44 Sólido de revolución del ejercicio 6.1.11. En este caso, se ha dejado sin concluir el giro para poder ver su interior.

6.1.12 Calcula la longitud de la curva $y = (x^2 + 2)^{3/2}/3$ desde $x = -1$ hasta $x = 4$.

Resolución

Derivando se tiene $y' = x\sqrt{x^2+2}$ y luego:

$$L = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1+(x\sqrt{x^2+2})^2}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{4} \sqrt{1+x^2(x^2+2)}\,dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1+x^4+2x^2}\,dx$$

$$= \int_{-1}^{4} \sqrt{(1+x^2)^2}\,dx = \int_{-1}^{4} \left(1+x^2\right)dx = \left(x+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{4} = \frac{80}{3}$$

6.1.13 Se hace girar la curva $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$, $0.1 \leq x \leq 1.9$ sobre el eje x. Calcula el área de la superficie generada.

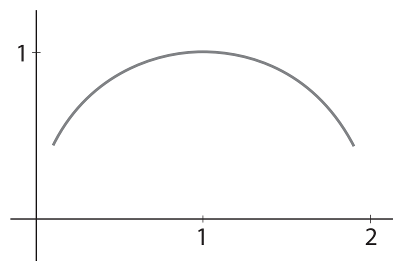


FIGURA 6.45 Arco generatriz de la superficie de revolución de la figura 6.46, ejercicio 6.1.13.

Resolución

Se tiene $f'(x) = \dfrac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$; luego:

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{0.1}^{1.9} \sqrt{2x-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{0.1}^{1.9} \sqrt{2x-x^2}\sqrt{1+\left(\frac{1-2x+x^2}{2x-x^2}\right)}\,dx =$$

$$2\pi\int_{0.1}^{1.9} \sqrt{(2x-x^2)+1-2x+x^2}\,dx = 2\pi\int_{0.1}^{1.9} dx =$$

3.6π (unidades cuadradas)

En las figuras 6.45 y 6.46 se observa la curva generatriz y la superficie generada, respectivamente.

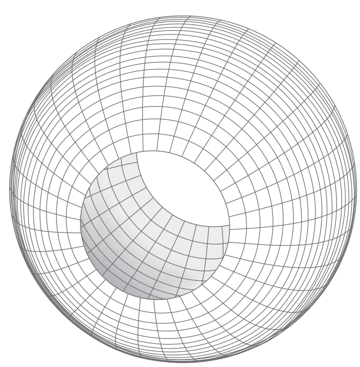


FIGURA 6.46 Superficie de revolución del ejercicio 6.1.13.

6.1.14 Calcula el centro de masa del área bajo la curva de $f(x) = 9 - x^2$, en la región en que $f(x) > 0$.

Resolución

Para el área infinitesimal elegida en la figura 6.47 se cumple:

$$A=\int_{-3}^{3}(9-x^2)\,dx=2\int_{0}^{3}(9-x^2)\,dx=2\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)_0^3=36$$

$$\int_A y_m\,dA=\int_{-3}^{3}\frac{1}{2}[f(x)]\underbrace{[f(x)]dx}_{dA}=\frac{1}{2}\int_{-3}^{3}\underbrace{[9-x^2]^2}_{\text{función par}}dx$$

$$=\int_0^3(81-18x^2+x^4)\,dx=\left(81x-6x^3+\frac{x^5}{5}\right)_0^3=129.6$$

$$\int_A x_m\,dA=\int_{-3}^{3}x[f(x)]dx=\int_{-3}^{3}\underbrace{x[9-x^2]}_{\text{función impar}}dx=0$$

Por último:

$$\bar{y}=\frac{\int_A y_m\,dA}{A}=\frac{129.6}{36}=3.6;\ \bar{x}=\frac{\int_A x_m\,dA}{A}=0$$

Las coordenadas del centro de gravedad son (0, 3.6).

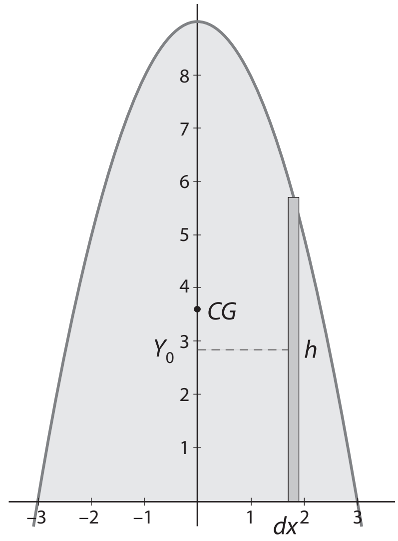


FIGURA 6.47 Barra diferencial, modelo y localización del centro de gravedad CG después de la integración, para el ejercicio 6.1.14.

6.1.15 Calcula el centroide de la región limitada por un cuarto de círculo.

Resolución

Considera el área diferencial mostrada en la figura 6.48, la cual está limitada a la derecha por el círculo $x^2+y^2=R^2$. Por geometría, sabemos que el área del cuarto de círculo es $A=\pi R^2/4$, entonces:

$$M_y=\int_A x_m\,dA=\int_0^R\frac{1}{2}\sqrt{R^2-y^2}\,\underbrace{(\sqrt{R^2-y^2}\,dy)}_{dA}$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^R(R^2-y^2)dy=\frac{1}{2}\left(R^2y-\frac{y^3}{3}\right)_0^R=\frac{R^3}{3}$$

Ahora:

$$\bar{x}=\frac{\int_A x_m\,dA}{A}=\frac{\frac{R^3}{3}}{\frac{R^2\pi}{4}}=\frac{4R}{3\pi}$$

Por simetría de la figura tenemos:

$$\bar{y}=\frac{4R}{3\pi}$$

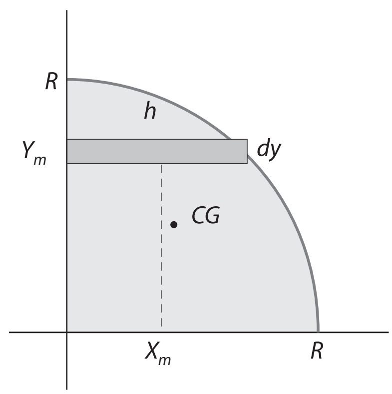


FIGURA 6.48 Barra diferencial modelo y localización del centro de gravedad CG en un cuarto de círculo para el ejercicio 6.1.15.

6.1.16 Una función tiene $f''(x)=3x+2$ segunda derivada. Si pasa por los puntos (2, 1) y (4, −1), ¿cuál es la función?

Resolución

Integrando obtendremos:

$$f'(x) = \int (3x+2)\,dx = \frac{3x^2}{2} + 2x + a$$

$$f(x) = \int \left(\frac{3x^2}{2} + 2x + a \right) dx = \frac{x^3}{2} + x^2 + ax + b$$

Evaluando en los puntos:

$$f(2) = 1 = 4 + 4 + 2a + b \therefore 2a + b = -7$$

$$f(4) = -1 = 32 + 16 + 4a + b \therefore 4a + b = -47$$

Resuelto el sistema lineal, resulta $a = -20$ y, finalmente:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} + x^2 - 20x + 33$$

6.1.17 Un polinomio cúbico pasa por el punto $(3, 4)$ y tiene valores extremos en $x = 2$ y $x = -3$. ¿Cuál es el polinomio?

Resolución

Puesto que los valores extremos son los máximos y mínimos de la función, y en esos valores la primera derivada vale cero, se concluye que el polinomio debe tener la forma $p'(x) = k(x-2)(x+3)$; entonces:

$$p(x) = \int k(x-2)(x+3)\,dx = k\int (x^2 + x - 6)\,dx$$

$$p(x) = k\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x \right) + c$$

$$p(3) = k\left(9 + \frac{9}{2} - 18 \right) + c = 4 \therefore c = 4 + \frac{9}{2}k$$

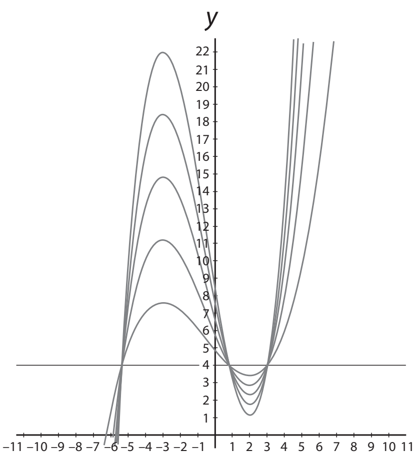


FIGURA 6.49 Familia de polinomios. Solución al ejercicio 6.1.17.

Lo que indica que existen muchos polinomios que cubren las condiciones impuestas.

6.1.18 Un móvil se mueve sobre una línea recta y parte del punto $x = 5$ con una velocidad de 4 m/s y aceleración variable según $(2t + 1)$ m/s^2. ¿Cuál es su posición cuando $t = 3$ s?

Resolución

De acuerdo con los datos, la aceleración es:

$$x''(t) = \frac{dv}{dt} = 2t + 1$$

O bien:

$$dv = (2t+1)dt$$

Integrando en ambos lados de la expresión tenemos:

$$\int_4^v dv = \int_0^3 (2t+1)\,dt \Rightarrow v\Big|_3^v = t^2 + t\Big|_0^t \therefore v - 3 = t^2 + t$$

Observa la forma de encontrar la constante de integración, que también pudo ser calculada después de integrar y sustituir la condición inicial. Al integrar de nuevo:

$$v = \frac{dx}{dt} = t^2 + t + 3 \Rightarrow \int_5^x dx = \int_0^3 (t^2 + t + 3)dt$$

$$x\Big|_5^x = \frac{t^3}{3} + \frac{t^2}{2} + 3t\Big|_0^3 \Rightarrow x - 5 = 9 + \frac{9}{2} + 9 \therefore x = 27.5 \text{ m}$$

6.1.19 Un cuerpo se libera desde una altura h con velocidad inicial cero. ¿Cuál es su posición en el tiempo t?

Resolución

Por la física se sabe que un cuerpo que parte del reposo en caída libre tiene una aceleración constante e igual a $g = -9.81 \text{ m/s}^2$, donde el signo identifica su orientación hacia el centro de la Tierra. Se tiene que:

$$y''(t) = \frac{dv}{dt} = -g \therefore dv = -gdt \Rightarrow \int_0^v dv = \int_0^t -g\,dt,\, v = -gt$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -gt \therefore dy = -gtdt \Rightarrow \int_h^y dy = \int_0^t -gt\,dt$$

Finalmente, la posición es:

$$y - h = -\frac{gt^2}{2} \Rightarrow y = h - \frac{gt^2}{2}$$

Una conclusión importante es el tiempo en el que el cuerpo llega al piso; es decir:

$$y = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2h/g}$$

Además, la velocidad alcanzada un instante antes de chocar en el piso es: $v = -gt = -\sqrt{2gh}$ donde el signo negativo indica que se dirige hacia abajo. Visto a la inversa, ésta es la velocidad con que se debe lanzar un móvil hacia arriba para que alcance una altura h; es decir, $v_0 = \sqrt{2gh}$, y tardará $t = \sqrt{2h/g}$ segundos en alcanzar esa altura.

6.1.20 Un móvil se lanza verticalmente con velocidad inicial v_0 desde una posición vertical y_0. ¿Cuál será su posición en el tiempo t?

Resolución

Por la física, sabemos que la aceleración vertical es constante e igual a $-g$, entonces se tiene que:

$$a = \frac{dv}{dt} = -g \Rightarrow dv = -gdt \therefore \int_{v_0}^{v} dv = -g\int_0^t dt,\ v - v_0 = -gt$$

$$v = v_0 - gt,\ v = \frac{dy}{dt} = v_0 - gt \therefore dy = (v_0 - gt)dt$$

Integrando de nuevo:

$$\int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t (v_0 - gt)\,dt, y - y_0 = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Que es la fórmula que conoces de la física:

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{gt^2}{2}$$

Es importante destacar que v_0 y y_0 son las constantes de integración del proceso. Observa, además, que este resultado es más general que el obtenido en el ejercicio 6.1.19.

6.1.21 Calcula el momento polar de inercia para una placa circular respecto a su centro.

Resolución

Considera la figura 6.50 en la que se ha seleccionado un elemento diferencial de área que mantiene constante su distancia al eje y:

$$I_x = \int_A y^2\, dA = \int_A y^2\left(\sqrt{R^2 - y^2} - (-\sqrt{R^2 - y^2})\right)dy$$

Ya que se han tomado los dos semicírculos como las funciones limitantes derecha e izquierda, respectivamente.

$$I_x = 2\int_{-R}^{R} y^2\sqrt{R^2 - y^2}\,dy = 2\left(\frac{\pi R^4}{8}\right) = \frac{\pi R^4}{4}$$

Observa que por simetría:

$$I_y = 2\int_{-R}^{R} x^2\sqrt{R^2 - x^2}\,dx = 2\left(\frac{\pi R^4}{8}\right) = \frac{\pi R^4}{4}$$

Por último, se concluye que:

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{\pi R^4}{4} + \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{2}$$

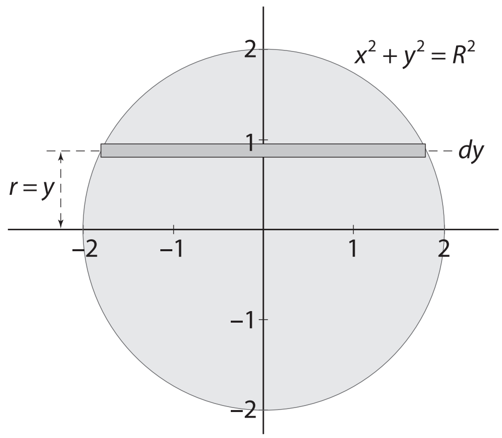


FIGURA 6.50 Elemento diferencial de área genérico para el cálculo del momento de inercia del ejercicio 6.1.21.

6.1.22 Calcula el momento polar de inercia para un cuadrado respecto a uno de sus vértices.

Resolución

Sea un cuadrado de lado L, si se toma una franja diferencial representativa vertical tendrá ancho diferencial dx y altura en todo el cuadrado L, mientras se encuentra a una distancia x constante desde el eje y; esto es $x = 0$, se tiene:

$$I_y = \int_A x^2\,dA = \int_A x^2 L\,dx = L\int_0^L x^2\,dx = L\frac{x^3}{3}\bigg|_0^L = \frac{1}{3}L^4$$

Por simetría $I_x = I_y \Rightarrow I_0 = I_x + I_y = \dfrac{2}{3}L^4$.

6.1.23 Calcula el momento polar de inercia en el punto sobre el eje y, a la altura de la intersección de las curvas que limitan a la región con el eje, definidas por $y = 4 - x^2$ y $y = x$.

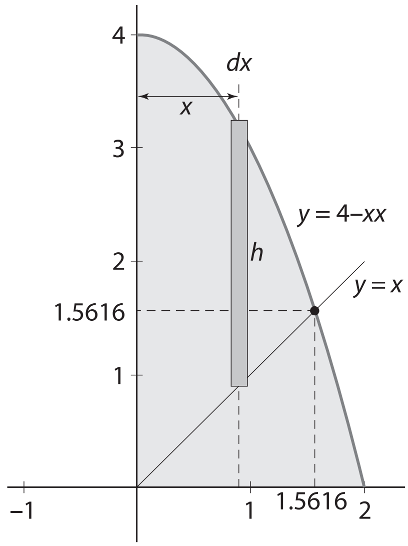


FIGURA 6.51 Elemento diferencial de área genérico vertical para el cálculo del momento de inercia del ejercicio 6.1.23.

Resolución

Considera la gráfica de la figura 6.51, en la que se muestra una franja genérica vertical a una distancia constante x del eje $y = x = 0$; entonces:

$$I_y = \int_A x^2\,dA = \int_0^{1.5616} x^2(4 - x^2 - x)\,dx = 1.73351$$

De la misma manera, en la figura 6.52 se representa una franja genérica horizontal a una distancia constante y del eje x, que cambia de límites cuando se pasa después de la altura 1.5616, por lo que resulta:

$$\begin{aligned} I_{y=1.5616} &= \int_A y^2\,dA \\ &= \int_0^{1.5616} (1.5616 - y)^2 x\,dy + \int_{1.5616}^{4} (y - 1.5616)^2 x\,dy \\ &= \int_0^{1.5616} (1.5616 - y)^2 y\,dy + \int_{1.5616}^{4} (1.5616 - y)^2 (4 - y)\,dy \end{aligned}$$

$$I_{y=1.5616} = 3.4416$$

Por último, sumando los resultados, después de notar que los ejes $x = 0$ y $y = 1.5616$ pasan por el punto p solicitado:

$$I_{z/(0,1.5616)} = I_x + I_{y=1.5616} = 5.17511$$

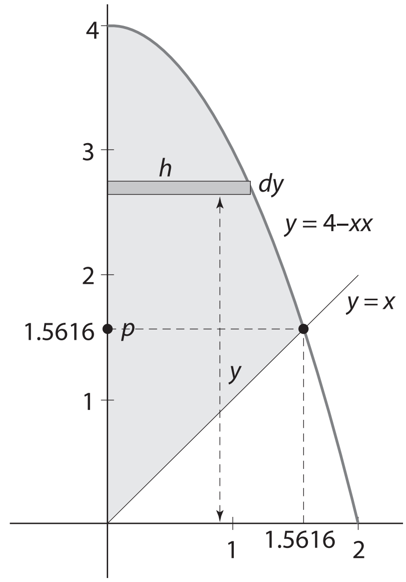


FIGURA 6.52 Elemento diferencial de área genérico horizontal para el cálculo del momento de inercia del ejercicio 6.1.23.

6.1.24 Un camino entre dos ciudades bordea un río; según la fotografía aérea, éste tiene la forma aproximada de una cúbica de ecuación $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 2$, con x medida en kilómetros (km). Si la primera ciudad se ubica en $x = -1$ y la segunda en $x = 4$, ¿cuántos kilómetros de fibra óptica se requerirán aproximadamente, si se desea comunicar a las ciudades con tres líneas siguiendo el camino?

Resolución

La figura 6.53 muestra la forma del camino. El cálculo de la longitud del camino es:

$$L = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx = \int_{-1}^{4} \sqrt{1 + [3x^2 - 8x + 3]^2}\,dx$$

Con la tabla de datos obtenida al evaluar la función y aplicando la integración numérica presentada en la aplicación 6.1.1, se tendrá que emplear la evaluación del integrando como $f(x)$ en la expresión:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{f(a)+f(b)}{2}+\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right)$$

Sin embargo, en este caso, es más fácil aplicar la definición de $(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ obtenida en la actividad 6.3.1 y sumar empleando Excel®. Así, se obtiene la tabla de la figura 6.54 en la que se lee la aproximación $L = 26.62$ km; este mismo resultado es el obtenido en Winplot®. Al final, la cantidad de fibra óptica requerida será 79.86 km.

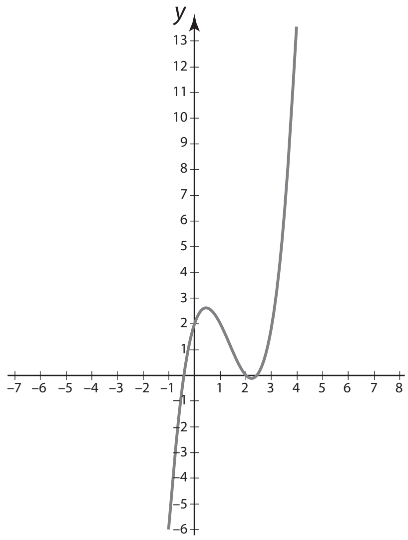


Figura 6.53

6.1.25 Calcula el área sobre la curva de $f(x) = x^3/6,\ 0 \leq x \leq 2$.

Resolución

El área solicitada se muestra en la figura 6.55 y sabiendo que $f(0) = 0, f(2) = 4/3$ corresponde a:

$$A = \int_0^{4/3} \sqrt[3]{6y}\, dy = \sqrt[3]{6}\,\frac{3}{4} y^{4/3}\Big|_0^{4/3} = 2$$

6.1.26 Una lámina rectangular del techo de una alberca se sumerge por accidente hasta el fondo de la fosa de clavados de un centro deportivo y queda recargada verticalmente sobre la pared bajo el trampolín. Si la profundidad de la fosa es de 11 m y la lámina mide verticalmente 4 m y su base es de 2 m, ¿qué fuerza mantiene vertical a la placa contra el muro?

C44 =RAIZ((A43−A44^2+(B43−B44)^2)

	A	B	C	D	E
1	1	−6			
2	−0.9	−4.669	1.334751288		
3	−0.8	−3.472	1.201169846		
4	−0.7	−2.403	1.073667081		
5	−0.6	−1.456	0.952265194		
6	−0.5	−0.625	0.836995221		
7	−0.4	0.096	0.727901779		
8	−0.3	0.713	0.625051198		
44	3.3	4.277	0.874734817		
45	3.4	5.264	0.992052922		
46	3.5	6.375	1.115491372		
47	3.6	8.993	1.24502249		
48	3.7	10.512	1.380626307		
49	3.8	12.179	1.5228808		
50	3.9	14	1.669996707		
51	4		1.823743677		
52			26.62475775		
53					

Figura 6.54 Imagen de la tabla de evaluación de $(dL)^2 = (dx)^2 + (dy)^2$ del ejercicio 6.1.24.

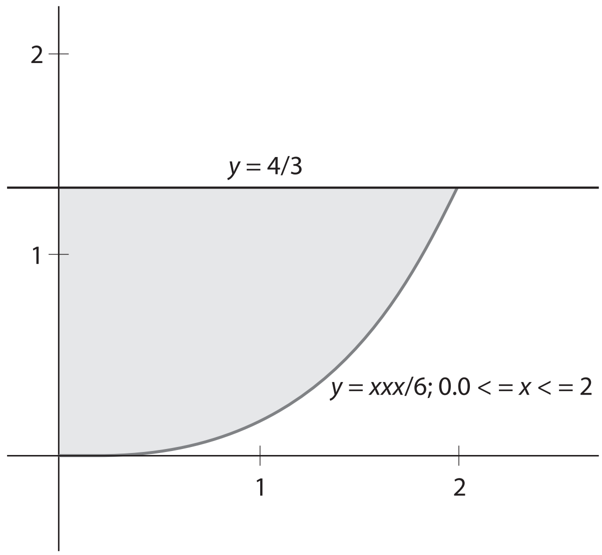


Figura 6.55 Área delimitada para el ejercicio 6.1.25.

Resolución

Por el principio de presión dentro de fluidos, sabemos que:

$$F = \gamma\int_a^b yL(y)\,dy = 9.81\int_7^{11} y(2)\,dy = 705.6\,\text{N}$$

6.1.27 En una presa de 100 m de profundidad se pretende colocar una compuerta de lámina en forma de parábola $y = 1 - x^2/4$. ¿A qué profundidad máxima deberá ser ubicada sin que falle, si se sabe que la compuerta no podrá soportar más de 80 kN? ¿Será conveniente colocarla?

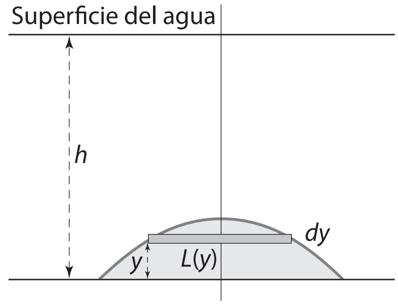


FIGURA 6.56 Posición de la compuerta del ejercicio 6.1.27.

Resolución

Por el principio de presión dentro de fluidos sabemos que:

$$F = \gamma\int_a^b yL(y)\,dy \therefore\ 80\,\text{kN} > F \text{ sea } Y = h - y$$

De donde la ecuación de la compuerta será de acuerdo con la figura 6.55: $h - Y = 1 - x^2/4$ y $x = L(Y) = \pm 2\sqrt{Y - h + 1} \Rightarrow$

$$80\text{ kN} > 9.81(2)\int_{h-1} Y(2\sqrt{Y-h+1})\,dY$$

Hacemos el cambio de variable :

$$u^2 = Y - h + 1 \therefore Y = u^2 + h - 1,\ dY = 2u\,du$$

Si $Y = h, u = 1; Y = h - 1, u = 0$, por lo que se sigue:

$$\frac{80\,000}{9.81(8)} > \int_0^1 \left(u^4 + (h-1)u^2\right)du = \frac{1}{5} + \frac{h-1}{3} \Rightarrow$$

$$1019.17 > \frac{h-1}{3} \therefore h < 3\,048.51\text{ m}$$

La compuerta está sobrada y podría soportar profundidades cercanas a los 3000 m como se encontró.

Autoevaluación 6.1

Resuelve los siguientes ejercicios:

6.1.1 Determina el área entre las curvas $y = x^2 + 5$, $y = x^3$, y las rectas $x = 0$ y $x = 2$.

6.1.2 Calcula la longitud del arco de la parábola $y^2 = 2x$ desde el origen hasta el punto en que $x = a$.

6.1.3 Determina el área entre las curvas $y = 5 - x^2$ y $y = x^2 - 8$.

6.1.4 Calcula la longitud del arco de la curva $y = \ln x$ desde $x = \sqrt{3}$ a $x = \sqrt{8}$.

AUTOEVALUACIÓN 6.1-6.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés por la abstracción.
- Interés por la solución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre el dominio de los métodos de integración mediante la resolución de los diversos ejercicios de forma analítica y con el uso de tablas.

Desempeños

- Observable en el producto.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear al menos una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

6.1.5 Dos cilindros rectos de igual radio se intersecan de tal forma que sus ejes se cruzan formando un ángulo recto. Calcula el volumen de la intersección.

6.1.6 Calcula la probabilidad de que en un pastel se encuentren más de 80 g de pasas, si se sabe que el valor esperado de pasas en un pastel es de 90 g y la distribución de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es $p(a \leq x \leq b) = \int_a^b \frac{e^{-x/90}}{90}$.

6.1.7 Una placa cuadrada de lado L se sumerge verticalmente 60% de su altura en un estanque con un líquido de densidad 14.3 $\mathrm{N/m^3}$. ¿Cuál es la fuerza del fluido sobre la placa?

Autoevaluación 6.2

Resuelve los siguientes ejercicios:

6.2.1 Determina el área del segmento de la parábola $y = x^2$ cortado por la recta $y = 2x + 3$.

6.2.2 Una figura limitada por los arcos $y = x^2$ y $y^2 = x$ gira alrededor del eje y. Calcula el volumen del cuerpo generado.

6.2.3 Calcula el área bajo la parábola cúbica $y = x^3 - 4x + 5$, limitada por las rectas $x = 3$ y $x = 5$.

6.2.4 Encuentra $y = f(x)$, si $f''(x) = x^{-3/2}, f'(4) = 2, f(0) = 0$.

6.2.5 Calcula el área limitada por las funciones $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$; $g(x) = \frac{x^2}{2}$.

6.2.6 En un experimento se encontró que la función de densidad de probabilidad para la fracción de alumnos de un grupo que obtienen una calificación aprobatoria en la asignatura A está definida por la expresión:

$$p(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq 0.5 \\ k(1 - x^2), 0.5 < x \leq 1 \\ 0, \text{si } x \notin [0, 1] \end{cases}$$

¿Cuál es el valor de k? ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre un grupo de 15 alumnos en los que más de 60% haya acreditado la asignatura A?

6.2.7 Una placa circular de radio 1 m se sumerge 80% de su diámetro verticalmente dentro de un tanque con aceite de peso específico 8.7 $\mathrm{N/m^3}$. ¿Cuál será la fuerza del fluido que recibe?

Autoevaluación 6.3

Resuelve los siguientes ejercicios:

6.3.1 ¿Con qué velocidad inicial debe ser lanzado un objeto desde el suelo hacia arriba verticalmente, para alcanzar una altura máxima de 550 metros?

AUTOEVALUACIÓN 6.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 6.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 6.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

6.3.2 Calcula el área limitada por las dos ramas de $(y - x)^2 = x^5$ y la recta $x = 4$.

6.3.3 Calcula el área limitada por el eje y y las curvas $y = \tan x$; $y = (2/3)\cos x$.

6.3.4 Calcula la longitud del arco de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ en $[0, 1/2]$.

6.3.5 Calcula el área limitada por $y = 2x^2e^x$ y $y = -x^3e^x$.

6.3.6 Calcula la probabilidad aproximada de que la siguiente persona que veas mida entre 1.70 y 1.75 m, si se sabe que la probabilidad de la estatura en la región está calculada con $\mu = 1.67$ y $s = 0.1$ por:

$$p(a \le z \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dz$$

6.3.7 Un envase contiene leche con peso específico de 7.9 $\mathrm{N/m^3}$. Si el envase colocado de manera vertical mide $8 \times 8 \times 20\ \mathrm{cm^3}$, ¿cuál es la presión interior sobre las paredes del envase?

Autoevaluación 6.4

Resuelve los siguientes ejercicios:

6.4.1 Calcula el área de la figura limitada por $y = \ln x/(4x)$, $y = x \ln x$.

6.4.2 Sobre el eje x se hace girar la superficie limitada por $x = 0$, $x = 1$ y $y = \operatorname{sen}^{-1} x$. Calcula el volumen generado.

6.4.3 Calcula el área de la superficie de revolución formada al girar la parábola $y^2 = 8x$, desde su vértice hasta $x = 6$, alrededor del x.

6.4.4 Una función $y = f(x)$ tiene una segunda derivada $f''(x) = 6(x - 1)$. Encuentra la función si su gráfica pasa por el punto (2, 1) y en ese punto es tangente a la recta $3x - y - 5 = 0$.

6.4.5 El área limitada en el primer cuadrante para $y = xe^x$; $x = 1$ y $y = 0$ gira sobre el eje x. Calcula el volumen del sólido generado.

6.4.6 Calcula la probabilidad aproximada de que la siguiente persona que entre al supermercado pese más de 95 kg, si se sabe que la probabilidad del peso en las personas adultas en la región está calculada con $\mu = 98$ kg y $\sigma = 1.2$ kg por:

$$p(a \le z \le b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{(z-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,dz$$

6.4.7 Los cables eléctricos que se colocan entre las torres de transmisión tienen la forma de una curva llamada catenaria, cuya ecuación $y = a\cosh\frac{x}{a}$, donde a se denomina flecha y corresponde a la parte más baja del cable. Cuando las torres están a la misma altura se ubica al centro de la separación de las mismas. ¿Cuál será la lon-

AUTOEVALUACIÓN 6.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

gitud de un cable cuya flecha máxima es 12 m? ¿A qué distancia se encuentran las torres si éstas miden 40 m de alto? Si es necesario $\operatorname{sen} h = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cos h = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Autoevaluación 6.5

6.5.1 Muestra si $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,dx$ converge o diverge. (Sugerencia: compárala con $f(x) = \dfrac{1}{x}$).

6.5.2 Calcula el volumen generado por la región del intervalo $[4, \infty)$ de la $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ cuando se hace girar alrededor del eje y.

6.5.3 Calcula el volumen generado por la región del intervalo $[3, \infty)$ de la función $f(x) = 1/x$ cuando se hace girar alrededor del eje x.

6.5.4 Calcula la probabilidad de que la siguiente botella de tu bebida favorita tenga más de 2 ml de exceso, si se sabe que el valor esperado de exceso del valor nominal es 1.2 ml y la distribución de densidad de probabilidad de esta variable aleatoria es

$$p(a \le x \le b) = \int_a^b \frac{e^{-x/1.2}}{1.2}\,dx$$

6.5.5 Una lata de refresco está llena 95% de la altura de su diámetro. Si está recostada sobre su altura, ¿cuál es la fuerza del líquido sobre la tapa? Las medidas de la lata son 7 cm de diámetro y 14.3 cm de altura, con un líquido de peso específico de 9.7 N/m^3.

6.5.6 Los cables de una línea de transmisión cuelgan libremente sobre su propio peso. La flecha máxima se encuentra a 10 m del extremo más bajo y es de 15 m. La otra torre está a 60 m de la primera. ¿Cuánto mide el cable?

6.5.7 El análisis financiero de una compañía predice que sus ganancias por sus inversiones crecerán a razón de $5t/(4t^2 + 4t + 1)$ millones de pesos por año si sus inversiones actuales son de 124 millones. ¿Cuál es el pronóstico de sus ganancias durante los siguientes cinco años si no retiran su capital?

Solución a la autoevaluación 6.1

6.1.1 $\displaystyle\int_0^2 (x^2 + 5 - x^3)\,dx = \frac{26}{3}$

6.1.2 $\displaystyle\int_0^{\sqrt{2a}} \sqrt{1+y^2}\,dy = \frac{\sqrt{2a}}{2}\sqrt{2a+1} + \frac{1}{2}\ln(\sqrt{2a} + \sqrt{2a+1})$

AUTOEVALUACIÓN 6.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

En realidad son dos arcos, el inferior y el superior, por lo que también se podrá considerar el doble de lo mostrado como una respuesta correcta, ya que en la integral resuelta únicamente se consideró el arco superior de la parábola.

6.1.3 $\int_{-2}^{2}(-x^2-(x^2-8))\,dx=\dfrac{64}{3}$

6.1.4 $\int_{\sqrt{3}}^{\sqrt{8}}\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}\,dx=1.202732554$

6.1.5 $8\int_{0}^{R}(R^2-x^2)dx=\dfrac{16R^3}{3}$

6.1.6 $p(80\le x)=\int_{80}^{\infty}\dfrac{e^{-x/90}}{90}dx=0.4111$

6.1.7 $F=2.574L^3$ N

Solución a la autoevaluación 6.2

6.2.1 $\int_{-1}^{3}(2x+3-x^2)\,dx=\dfrac{32}{3}$

6.2.2 $2\pi\int_{0}^{1}x(\sqrt{x}-x^2)\,dx=\dfrac{3\pi}{10}$

6.2.3 $\int_{3}^{5}(x^3-4x+5)\,dx=114$

6.2.4 $f(x)=-4\sqrt{x}+3x$

6.2.5 $\int_{-1}^{1}\left(\dfrac{1}{x^2+1}-\dfrac{x^2}{2}\right)dx=1.2374629934$

6.2.6 $k=2.4$

$$p(x>0.6)=0.5+2.4\int_{0.5}^{0.6}(1-x^2)dx=0.6672$$

6.2.7 $F=8.7\int_{0}^{1.6}2h\sqrt{1-(0.6-h)^2}\,dh=10.3157$ N

Solución a la autoevaluación 6.3

6.3.1 $v(0)=103.82$ m/s

6.3.2 $\int_{0}^{4}(x+\sqrt{x^5})-(x-\sqrt{x^5})dx=73.142857$

6.3.3 $\int_0^{\pi/6} (\tan x - \frac{2}{3}\cos x)\,dx = 0.189492$

6.3.4 $\int_0^{1/2} \sqrt{1+(D_x \ln(1-x^2))^2}\,dx = 0.598612$

6.3.5 $\int_{-2}^{0} (2x^2e^x + x^3e^x)\,dx = 0.436035$

6.3.6 $p(1.7 \le z \le 1.75) \approx 0.170233$

6.3.7 $F = 7.9\int_0^{0.2} y(0.08)dy = 0.01264\,\text{N}$

Solución a la autoevaluación 6.4

6.4.1 $\int_{1/2}^{1} \left(\frac{\ln x}{4x} - x\ln x\right)dx = 0.0408$

6.4.2 $2\pi\int_0^{\pi/2} y(1-\text{sen}\,y)\,dy = \pi\int_0^1 (\text{sen}^{-1}x)^2\,dx = 1.4684$

6.4.3 $2\pi\int_0^6 \sqrt{8x}\sqrt{1+\left(\frac{4}{\sqrt{8x}}\right)^2}\,dx = \frac{224\pi}{3}$

6.4.4 $f(x) = (x-1)^3$

6.4.5 $\pi\int_0^1 (xe^x)^2\,dx = 5.018$

6.4.6 $p(z \ge 95) = 0.99379$

6.4.7 La ecuación es $f(x) = 12\cos h(x/12)$, $40 = 12\cos h(x/12)\therefore$ $x = 12\cos h^{-1}(40/12) = 22.4858$, de donde la separación de las torres es 44.97m y la longitud es:

$$L = \int_{-22.4858}^{22.4858} \sqrt{1+\left(\text{sen}\,h\left[\frac{x}{12}\right]\right)^2}\,dx = 76.3149\,\text{m}$$

Solución a la autoevaluación 6.5

6.5.1 $\int_2^{\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx$ Diverge

6.5.2 $\int_4^{\infty} \frac{(2\pi x)}{x^3}dx = \frac{\pi}{2}$

6.5.3 $\pi \int_{3}^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \frac{\pi}{3}$

6.5.4 $p(x > 2) = 0.188876$

6.5.5 $F = (10^{-6})9.7 \int_{0}^{6.65} 2h\sqrt{3.5^2 - (3.15 - h)^2}\, dh = 0.00117688\,\mathrm{N}$

6.5.6 $L = \int_{-10}^{50} \sqrt{1 + \left(\operatorname{sen} h\left[\frac{x}{15}\right]\right)^2}\, dx = 220.727\ \mathrm{m}$

6.5.7 Su capital será de 125.86101 millones de pesos.

CAPÍTULO 7

SUCESIONES Y SERIES

ELEMENTO DE LA COMPETENCIA DISCIPLINAR

El alumno es competente si detecta adecuadamente la presencia de sucesiones o series en procesos reales, las interpreta y prueba su convergencia o divergencia y adicionalmente calcula en forma correcta la serie de Maclaurin y de Taylor para funciones.

COMPETENCIA DISCIPLINAR DEL CURSO

El alumno es competente si analiza, abstrae y propone solución a situaciones que involucren acumulación como efecto del cambio de una sola variable, empleando como herramienta fundamental la integración.

CALENDARIO DEL PORTAFOLIO DE EVIDENCIAS

Fecha	Evidencia
	Actividad 7.1.1
	Actividad 7.2.1
	Aplicación 7.2.1
	Aplicación 7.2.2
	Actividad 7.4.1
	Aplicación 7.4.1
	Actividad 7.5.1
	Aplicación 7.6.1
	Aplicación 7.6.2
	Actividad 7.6.2
	Ejercicios 7.1
	Autoevaluación 7.1
	Autoevaluación 7.2

Fecha	Evidencia
	Autoevaluación 7.3
	Autoevaluación 7.4
	Autoevaluación 7.5
	Autoevaluación 7.6

Fecha	Evidencia
Otras evidencias	

Pensar que las cosas tienen un orden preestablecido es una limitante que te impide vislumbrar nuevos horizontes más prometedores.

7.1 SUCESIONES Y SERIES

Al llegar a un estadio de futbol a comprar boletos para un partido, o incluso para asistir a cualquier espectáculo público, no es extraño enfrentar las molestas y largas filas; sin embargo, a pesar de lo tedioso que éstas resultan, es innegable que representan una situación social convencional de orden, ya que se considera correcto que quien llega antes debe ser atendido primero.

Así, "$a_1a_2a_3\ldots a_n$" puede ser una forma de representar a los integrantes de la fila, en donde a_1 es la primera persona y a_i corresponde a la persona que ocupa la posición i-ésima en la fila. El último elemento, por supuesto, corresponde a a_n, de donde se concluye que la fila tiene una longitud de n elementos.

Por otro lado, la fila no solo se puede estructurar en forma física. Por ejemplo, al ingresar a algunos bancos debes tomar una ficha, mediante la cual se te asigna un número para ser atendido cuando llegue tu turno; pero, a pesar de ello, aunque la comodidad del cliente mejora, virtualmente la fila aún existe.

Entendemos que la fila "$a_1a_2a_3\ldots a_n$" implica la atención de los clientes en "sucesión"; es decir, uno tras otro y en riguroso orden, de tal forma que en determinado momento siempre es posible saber quién es el siguiente por atender, si sabes qué número de ficha tiene quien es atendido en este momento. Esta forma de orden funciona siempre y cuando a cada persona que llegue a la fila se le asigne el siguiente número ordinal disponible.

Actividad 7.1.1

Como parte de nuestras actividades cotidianas, realizamos sucesiones de actos de manera permanente; por ejemplo, siempre damos un paso tras otro, por lo que resulta imposible dar el sexto paso antes de dar el quinto, y así de modo sucesivo. Cabe destacar que no llevamos un registro exacto de cada uno de nuestros pasos para recuperar lo que ocurrió en determinado instante, pero aun así la sucesión de pasos se realiza en perfecto orden. Ese orden es determinado por los números naturales, por eso es posible expresar la sucesión de los mismos mediante una expresión como "$a_1a_2a_3\ldots a_n$", vista con anterioridad, mediante la cual resulta claro que a_7 fue realizado antes de a_{10} y que entre ellos hay otros dos elementos.

Existen muchos tipos de objetos que pueden formar parte de una sucesión, pero lo que caracteriza a ésta, además de los objetos que la forman, es el orden entre sus elementos.

ACTIVIDAD 7.1.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Interés por el análisis del fenómeno de las colas en los procesos.
- Observación de los hechos cotidianos como sucesiones.
- Interés por formar conjeturas sobre conceptos nuevos.
- Gusto por la experimentación.

Productos

- Ensayo con las reflexiones sobre los tres experimentos definidos y respuesta adecuada a las preguntas correspondientes.

Criterios de calidad

i. Mostrar que los experimentos en verdad se realizaron.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Planteamiento de gráficas para clarificar sus conclusiones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos observados en el entorno.
- Alentar a los estudiantes para proponer conjeturas sobre qué es la convergencia y qué es la divergencia.
- Proponer ejemplos y significado de subsucesiones.

Considera los siguientes casos:

1. Se lanza una moneda de manera sucesiva en repetidas ocasiones y se anota la cara obtenida; así, en los primeros casos resulta lo siguiente (A = "águila y S = "sello"):

$AASASSSASSASASAASSASSSSAASASASASSS\ldots$

1.1. ¿Cuántos elementos tiene la sucesión?

1.2. ¿Cuál es el primer elemento?

1.3. ¿Cuál es el último elemento?

1.4. ¿Existe forma de saber cuál es el siguiente elemento de la sucesión?

1.5. Si se hace una nueva sucesión tomando solo la información de los lanzamientos de posición par, ¿qué sucesión se forma? Esto puede ser de interés porque dos personas podrían haber hecho los lanzamientos de manera alternada y se quiere obtener la sucesión de lanzamientos de la segunda persona.

1.6. ¿La sucesión es finita o infinita?

2. Dos niños juegan a "atrapa el número". En este juego, un niño trata de adivinar un número (entre 0 y 100) pensado por el otro niño. El ganador es aquél que acierta al número con la menor cantidad de intentos. El juego comienza con la definición del número por adivinar y los intentos sucesivos del otro niño por acertar; cada vez que el niño que adivina responde con un intento más, el otro le indica si el número emitido es menor o mayor que el que se trata de adivinar y se pasa a la siguiente propuesta, hasta que se acierta.

2.1. ¿La sucesión de propuestas es finita o infinita?

2.2. Describe una estrategia que consideres ganadora en este juego.

2.3. ¿Cuántos pasos como máximo crees que puede durar tu estrategia hasta acertar? ¿Por qué?

2.4. ¿Por qué afirmas que tu estrategia siempre **converge** al resultado esperado?

2.5. Practica el juego con uno de tus hermanos, primos, sobrinos o quien quieras. Explica la estrategia que tu contrincante aplica en el juego. ¿Su estrategia converge o diverge?

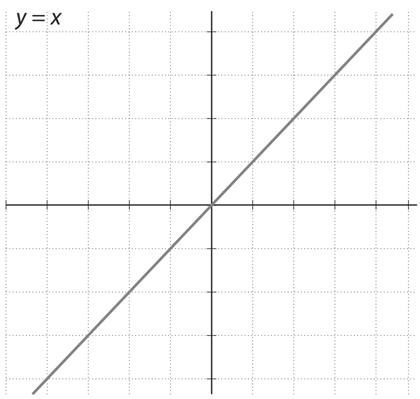


FIGURA 7.1 La función $f(x) = x$.

3. Dobla una hoja de papel por el centro y pártela, de tal forma que ahora tengas dos hojas. Ahora, junta las dos hojas, dóblalas a la mitad y corta. De nuevo junta, dobla y vuelve a cortar, y así de manera sucesiva.

3.1. ¿Cuál es la sucesión del número de hojas (pequeñas hojas) presentes en cada fase del proceso?

3.2. ¿El experimento es finito o infinito?

3.3. ¿Cómo se comporta la sucesión de áreas de cada nueva mitad de hoja que se genera? ¿Es convergente o **divergente**?

4. Suponiendo que el área total de la hoja original sea 1, realiza el siguiente experimento:

4.1. Pega en algún lugar una hoja completa.

4.2. Parte a la mitad otra hoja y pega una de las mitades obtenidas junto a la hoja que ya pegaste en el paso previo.

4.3. Divide en dos partes la mitad que no pegaste y pega una mitad junto a las que ya pegaste.

4.4. Continúa tantas veces como quieras partiendo a la mitad y pegando una de éstas, y así de manera sucesiva.

5. Cada vez que pegabas un pedazo más, el área de papel pegado crecía. ¿Cómo es la sucesión de áreas que se da en este experimento?

6. ¿Es convergente o divergente esa sucesión de áreas? ¿Por qué?

7. ¿Cuántos pasos se pueden realizar en el experimento? ¿Por qué?

7.2 SUCESIONES

Las sucesiones de números son una función con dominio en los números naturales y *contradominio* en el conjunto de objetos que en realidad forman la sucesión. Así, la imagen de cada natural i es el elemento correspondiente a_i de la sucesión; en particular, cuando los elementos de la sucesión son números, es común expresar a la sucesión mediante una regla de correspondencia.

Por ejemplo, los números naturales son a su vez una sucesión: {1, 2, 3, 4, 5, …} y escrita como función se define como: $f(n) = n$. En las figuras 7.1 y 7.2 se muestra la diferencia entre la sucesión y la función $f(x) = x$.

Al observar la figura 7.1 es posible inferir a partir de la gráfica que $f(x) = x$ es una función continua con dominio en todos los reales. Por su parte, $f(n)$ es una **función discreta** con dominio en los números naturales.

Compara de la misma forma la función $f(x) = (x^2 - 1)/x$ con la sucesión $f(n) = (n^2 - 1)/n$ mostrada en la figura 7.3.

En general, toda sucesión $f(n)$ tiene asociada una función de variable real $f(x)$ de la cual se pueden inferir muchas de sus propiedades. Su diferencia esencial es el dominio.

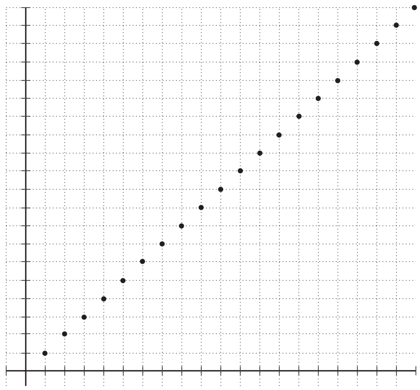


FIGURA 7.2 La función $f(n) = n$.

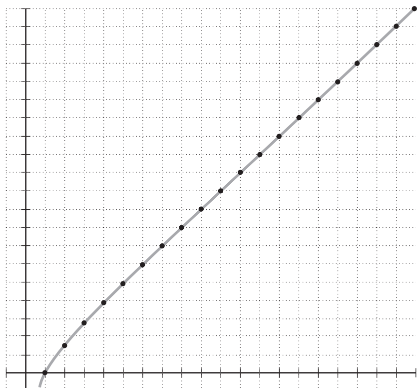


FIGURA 7.3 La función $f(x) = \dfrac{(x^2 - 1)}{x}$ continua y la discreta $f(n) = (n^2 - 1)/n$.

Actividad 7.2.1

En la figura 7.4, del inciso a hasta el i, se presentan gráficas de diferentes sucesiones; algunas son convergentes, otras divergentes y quizá algunas sean **alternantes**. Coloca una X dentro del parén-

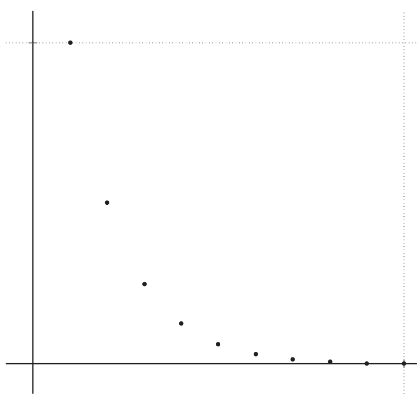


Figura 7.4 *a*) Convergente ( ), Divergente ( ) Alternante ( ), $f(n)$ ( )

tesis de cada gráfica, según creas si la sucesión es convergente, divergente o alternante.

1. De las ecuaciones 1.1 a 1.7, selecciona la que consideras es la regla de correspondencia de cada sucesión colocando en el paréntesis el numeral correspondiente:

1.1. $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{n}$

1.2. $f(n) = \operatorname{sen}\left(\dfrac{n}{10}\right)$

1.3. $f(n) = \dfrac{n^2+1}{n^2} + (-1)^n$

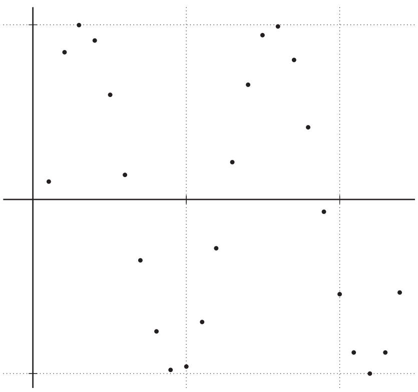
1.4. $f(n) = e^{-n}$

1.5. $f(n) = \ln(ne^n)$

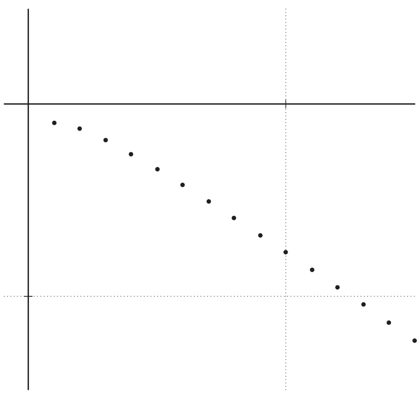
1.6. $f(n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$

1.7. $f(n) = \dfrac{1}{n}$

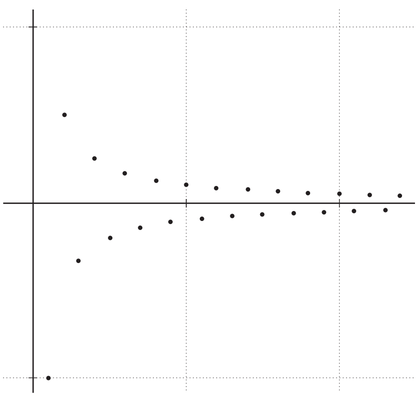
2. De acuerdo con tus respuestas, ¿qué definición propones para una sucesión convergente, sucesión divergente y sucesión alternante?



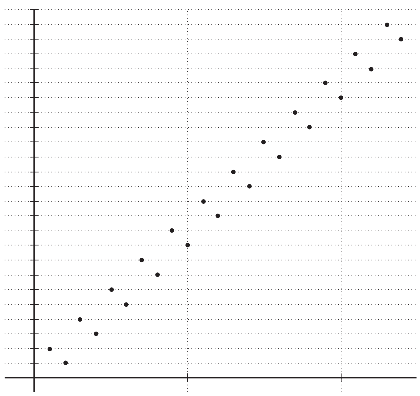
b) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



c) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



d) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



e) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )

FIGURA 7.4 (*continuación*).

ACTIVIDAD 7.2.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Flexibilidad para identificar situaciones discretas y obtener conclusiones de sus situaciones continuas asociadas.

Productos

- Clasificación adecuada de los ejemplos de sucesiones y propuesta en lenguaje natural para los nuevos conceptos señalados en las tres preguntas finales de la actividad.

Criterios de calidad

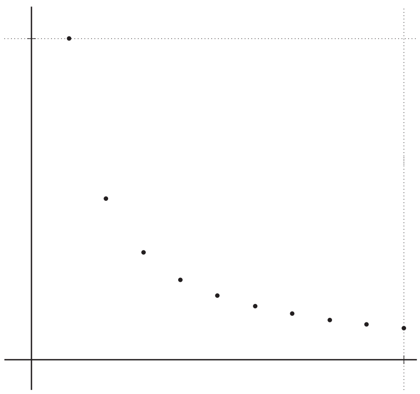
i. Análisis y clasificación de cada sucesión en las tres clases.
ii. Selección adecuada de la relación gráfica-regla de correspondencia con base en la experiencia sobre funciones continuas.
iii. Planteamiento de posibles nuevas sucesiones o gráficas de las mismas para clarificar ideas o plantear nuevas situaciones.
iv. En ningún caso es considerada como correcta una respuesta simple del tipo "no, sí, nunca, siempre, etc.".
v. Reporte de las fuentes empleadas.

Características del producto

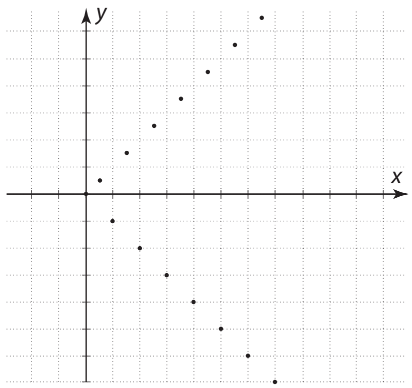
- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

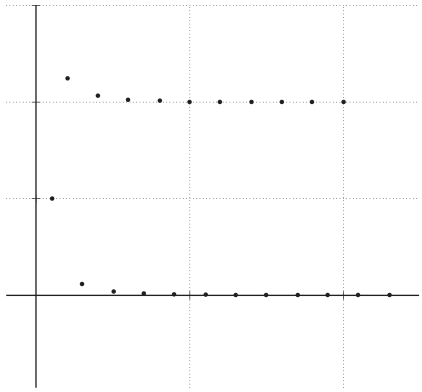
- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos observados en la bibliografía.
- Es muy importante que los estudiantes propongan situaciones reales que muestren la naturaleza de la convergencia y divergencia.



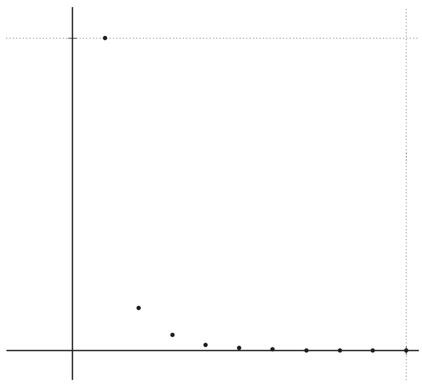
f) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



g) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



h) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )



i) Convergente ( ), Divergente ( )
Alternante ( ), $f(n)$ ( )

FIGURA 7.4 (*continuación*) Sucesiones para la actividad 7.2.1.

3. De acuerdo con tus definiciones, ¿es posible que una sucesión sea convergente y divergente a la vez?
4. ¿Puede una sucesión ser divergente y alternante a la vez?

Aplicación 7.2.1

Las sucesiones están presentes en todas las actividades humanas, mucho más ahora con el auge de las tecnologías de la información. Día tras día, segundo a segundo, cadenas interminables de bits viajan codificando nuestros mensajes a lo largo y ancho del espacio, convertidos en ondas electromagnéticas. Esas cadenas de datos, como muestra la figura 7.5, poseen significados asociados al orden específico en que los pulsos son enviados, y para que puedan ser decodificados y convertidos en la información adecuada recuperando sus significados, deben ser interpretados en el mismo orden en que fueron enviados.

En el caso de las computadoras, los archivos están almacenados en un disco duro y son recuperados de manera ordenada por el procesador de la computadora; lo mismo sucede con un CD o el internet. De igual forma ocurre con tus mensajes hablados o escritos en tu celular, en los programas de televisión o en la grabación musical de un CD, entre muchos otros casos.

FIGURA 7.5 Sucesión de unos y ceros como representación de "bits", la unidad base de la información.

Las sucesiones magnifican nuestra concepción del orden, y si éste cambia, también modificamos sus significados. Imagina la melodía que más te gusta; ésta es una secuencia de sonidos y silencios bien estructurada; y ese orden es lo que hace que te fascine. Si las notas cambian de orden, si las palabras se permu-

APLICACIÓN 7.2.1

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Abstracción de situaciones reales.
- Respeto por las ideas de otros.
- Reflexión sobre la importancia de la ciencia y la tecnología.
- Interés por la codificación y decodificación de mensajes.

Desempeños

- Localización de procesos que son esencialmente sucesiones e interpretación de la importancia que tiene el concepto de orden en ellos.

tan, si los silencios se olvidan, entonces habrás perdido tu música o, tal vez, compuesto otra diferente.

Va a ser muy interesante que describas al menos tres aplicaciones más de sucesiones que hayas percibido a tu alrededor.

Aplicación 7.2.2

Desde luego, graficar una sucesión representada también por $f(n) = \{a_n\}$ es un problema mucho más simple que graficar una función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$. De hecho, conocida la gráfica de la función asociada $f(x)$, simplemente seleccionamos aquellos puntos que corresponden a valores enteros de la variable x; para ello, aprovechamos software como Winplot® para realizar las gráficas. La figura 7.6 muestra la función $f(n) = 1/n$ o simplemente $\{1/n\}$ trazada con Winplot®.

Supón que solo deseamos graficar los puntos de la sucesión $a_n = n^2/(n^2 - 13)$ y no la función asociada, para lo cual realizamos los siguientes pasos:

1. Iniciamos Winplot® y seleccionamos la opción Ventana y ahí **2-dim**.
2. Al concluir el paso 1, aparece la ventana gráfica, de donde se selecciona la opción **Ecua** (véase figura 7.7).
3. Del menú **Ecua**, de la figura 7.7, seleccionamos **Puntos** y aparece el submenú del tipo de punto, en el cual se elige **Lista…**, por lo que despliega el menú **puntos [*nombre*],** como se muestra en la figura 7.8, en la cual ahora marca • en **lista** y un nombre para la variable entera. En la pantalla se seleccionó **P**. Además, anotamos los límites de la lista, que en el ejemplo se escribió de 1 hasta 20. Ahora, se escribe p, que indica que la sucesión se grafica para $x = p$; mientras en y escribimos la expresión del término n-ésimo en función de p o de la variable que hayamos seleccionado. Para generar la sucesión $\{1/n\}$ con veinte términos, se seleccionó como se observa en la figura 7.8.
4. Damos clic en dibujar y obtendremos la gráfica de la sucesión.

   En la figura 7.9 se observa una nueva selección para la sucesión $\{n^2/(n^2 - 13)\}$ para que compares con la anterior. Nota las diferencias y analiza la gráfica resultante en la figura 7.10.

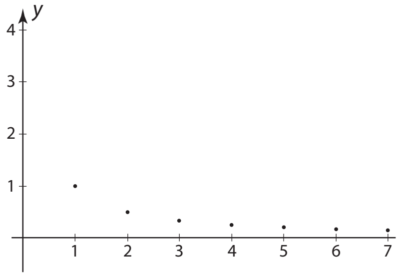


FIGURA 7.6 Sucesión $\{1/n\}$ trazada con Winplot®.

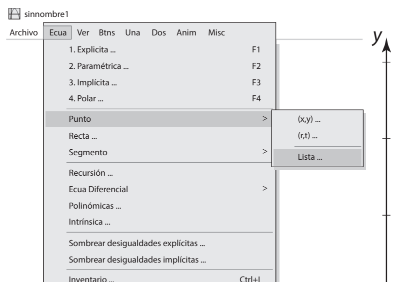


FIGURA 7.7 Menú **Ecua** y la opción **Punto>Lista...**

- Proponer una conjetura de cómo se codifican los mensajes y qué tienen que ver con esto las sucesiones.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Conjeturas adecuadas sobre la naturaleza del orden.
ii. Originalidad en la propuesta de ejemplos.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.

Peanut software gratuito. Versiones actualizadas en http://math.exeter.edu/rparris

APLICACIÓN 7.2.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Interés por las aplicaciones tecnológicas.
- Flexibilidad para experimentar con las funciones del software.
- Interés por la práctica.

Desempeños

- Aplicación correcta de las funciones de Winplot® para graficar adecuadamente las sucesiones.

Productos

- No son necesarios.

FIGURA 7.8 Ventana "**puntos**".

FIGURA 7.9 Ventana **puntos** con selección de vista de componentes.

Criterios de calidad

i. Gráficas correctas para cada sucesión.
ii. Propuesta de nuevos ejemplos de práctica.
iii. Observaciones sobre la visualización de la convergencia o divergencia de las sucesiones.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.

El menú del inventario permite ver la tabla o borrar las acciones no deseadas, así como regresar a cualquier punto de la secuencia y modificar la información.

5. Realiza la gráfica de las siguientes sucesiones:

5.1 $\{\ln(n)/n\}$

5.2 $\{(1+1/n)^{1/n}\}$

5.3 $\{(-1)^n n/(n^2-1),\ n>4\}$

5.4 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n>2;\ n_1 = 1,\ n_2 = 1$

5.5 $a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ n>2;\ n_1 = \dfrac{1}{3},\ n_2 = \dfrac{1}{2}$

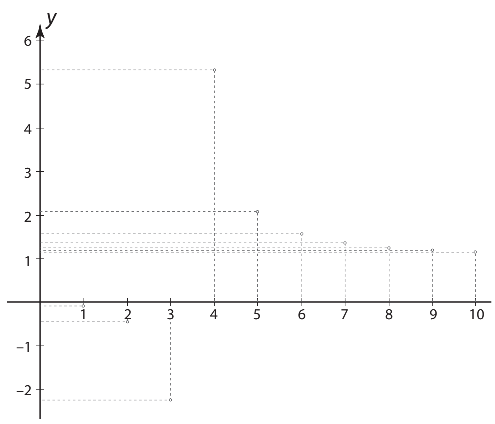


FIGURA 7.10 Diez términos de la sucesión $\{n^2/(n^2 - 13)\}$ con selección de vista de componentes.

7.3 DEFINICIÓN DE SUCESIÓN

Un conjunto ordenado de objetos corresponde a una sucesión. En particular, una sucesión numérica constituye un conjunto ordenado de números y puesto que el orden de los términos de la sucesión está regido por los números naturales, también es común afirmar que una sucesión es una función con dominio en los naturales (o en los enteros positivos y el cero) y contradominio en los objetos que se ordenan.

La forma típica de observar una sucesión es su lista ordenada de términos: $\{a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n, \ldots\}$, en la que cada término se nombra con base en su ordinal. Así, por ejemplo, se dice que a_3 es el tercer término. El término a_n es denominado "término n-ésimo".

Como todo conjunto, se dice que la sucesión está en forma **extensiva** si se listan sus primeros términos separados por comas y seguidos por puntos suspensivos, o un subconjunto de ellos con puntos suspensivos en ambos lados, los cuales indican que para la sucesión, la información de los elementos listados permite determinar cuáles son los términos sucesivos.

Por ejemplo $\{1, 3, 5, \ldots\}$ está en forma extensiva y se supone que esa información es suficiente para comprender que el siguiente término es 7 y no hay términos previos al 1; es decir, se trata de la sucesión de los impares. De igual forma, el conjunto $\{-100, -99, -98, \ldots, 98, 99, 100\}$ es una *subsucesión* de los enteros (positivos y negativos) que corresponde a los enteros entre -100 y 100. El concepto *subsucesión* proviene de la definición de sucesión, que es una función sobre los enteros y, por tanto, contiene infinitos términos, de donde una *subsucesión* sigue siendo un conjunto ordenado, pero no contiene a todos los términos de la sucesión, y puede tener un número finito o infinito de ellos.

La información mejora si escribimos la forma de calcular el término n-ésimo; por ejemplo, en el caso previo $\{1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, \ldots\}$, $a_n = 2n - 1$ es el n-ésimo término y si se quiere calcular un término, por ejemplo, el noveno, simplemente se evalúa para el n adecuado, así:

$$a_{n=9} = a_9 = 2(9) - 1 = 17$$

Puesto que a_n guarda la información básica de la sucesión, entonces la expresamos en forma **comprensiva**; esto es, simplemente indicando la fórmula para su término n-ésimo, así: a_n o bien $\{a_n\}_{n=k}^{\infty}$ indicando el punto de inicio k, en caso de que la sucesión no inicie desde el término con $n = 1$. En ocasiones, es útil iniciar una sucesión desde cero, a pesar de que cero no es un ordinal, o incluso en los enteros negativos. Puesto que, en general, los enteros son un conjunto ordenado, se espera que esto no cause confusión, porque se considera algo abusivo escribir sucesiones de la forma: $\{\ldots, a_{-n}, \ldots, a_{-3}, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\}$. Como ejemplo, ya se mostró el que corresponde a: $\{n\}_{n=-100}^{100}$ o simplemente $\{n\}_{-100}^{100}$.

Desde este enfoque, los siguientes son ejemplos de sucesiones o *subsucesiones* expresadas en sus dos formatos:

1. $\{2n\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$
2. $\{2n\}_{n=3}^{\infty} = \{6, 8, 10, \ldots\}$
3. $\{2n\}_{-\infty}^{\infty} = \{\ldots, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$
4. $\{2n - 1\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$
5. $\{\cos n\pi\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\} = \{(-1)^n\}$
6. $\{5n - 3\}_{n=2}^{100} = \{7, 12, 17, \ldots, 497\}$

No hay ninguna regla que indique cuántos términos hay que colocar en la forma extensiva, solo considera que se debe listar un número suficiente de términos, de tal forma que permitan inferir, sin ambigüedad, cuáles son los siguientes. Si no hay indicación del punto de inicio de la sucesión, siempre se supondrá que es $n = 1$, a menos que en algún problema específico se indique algo diferente.

Puesto que una sucesión numérica (también puede haber no numéricas), es una función de los enteros a los reales, entonces toda sucesión tiene una gráfica. Sin embargo, a diferencia de las funciones en los números reales que pueden tener gráficas continuas en intervalos, las sucesiones tienen gráficas que son puntos aislados, en específico, uno para cada número entero para la cual esté definida.

De lo anterior se desprende que una sucesión es una función discontinua en cada uno de los puntos de su dominio y que, por tanto, no son diferenciables, y su integral en cualquier intervalo es cero debido al teorema T5.7.

Las gráficas de los incisos a-f de la figura 7.11 corresponden a las sucesiones listadas en este mismo apartado.

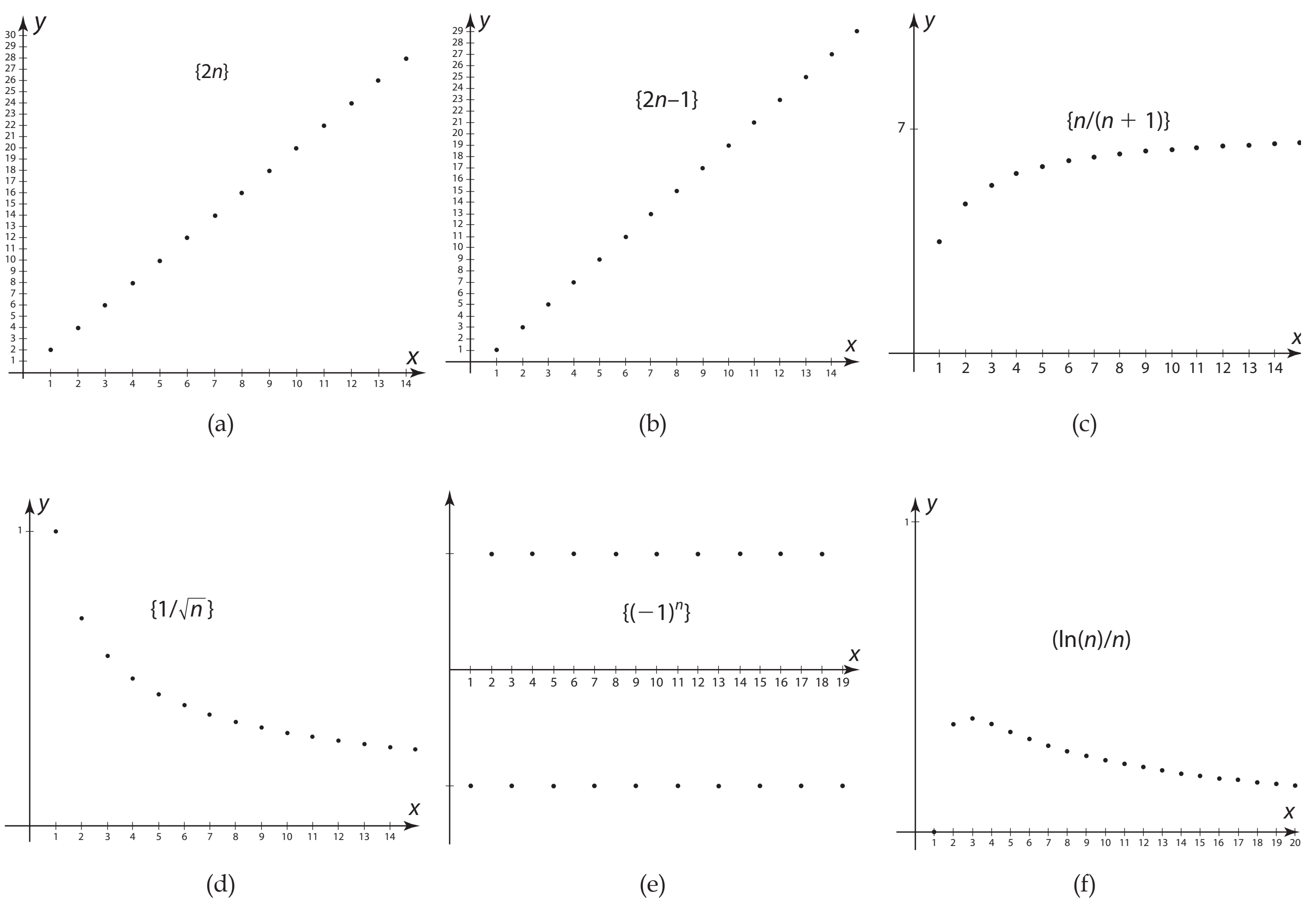


FIGURA 7.11 Gráficas de las sucesiones del apartado 7.3.

Tipos de sucesiones

Cuando en una sucesión se definen sus términos mediante alguna expresión que involucra términos previos, se dice que es una ***sucesión recurrente*** o que existe una fórmula de **recurrencia** para la sucesión. Por ejemplo, si se define $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ y $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, la sucesión formada es la siguiente $\{1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots\}$. Ahora bien, si la definición de la sucesión recurrente es $c_1 = 1$, $c_2 = 2$, $c_n = c_{n-1} + 2c_{n-2}$, entonces la sucesión formada será $\{1, 2, 5, 12, 29, \ldots\}$. Desde luego, observa que es posible aplicar la fórmula de recurrencia una vez que son conocidos los términos a los que hace referencia. Así, si se supone la relación recurrente $b_n = b_{n-5}$ esta expresión no se puede aplicar si no se conocen los cinco términos previos al término deseado, por lo que está incompleta, corrigiendo esto se puede tener, por ejemplo, la siguiente definición recurrente: $b_1 = 1$, $b_2 = 3$, $b_3 = -1$, $b_4 = 2$, $b_5 = 4$, $b_n = b_{n-5}$, que corresponde a la siguiente sucesión $\{1, 3, -1, 2, 4, 1, 3, -1, 2, 4, \ldots\}$. En general, las sucesiones recurrentes están fuera de nuestro interés en este momento, por lo que las omitiremos por el resto del análisis.

Si se construye un subconjunto Q de una sucesión S obtenida eligiendo términos de dicha S, sin perder su orden (posición relativa), entonces se dice que Q es una ***subsucesión*** de S. Por ejemplo, si se tiene la sucesión $\{n\}$, resulta que $\{2n\}$ es una *subsucesión* de $\{n\}$, ya que se forma a partir del segundo término, uno sí y otro no:

$$Q = \{\cancel{1}, 2, \cancel{3}, 4, \cancel{5}, 6, \cancel{7}, 8, \cancel{9}, \ldots\} = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$$

Observa que en esa *subsucesión* Q, su término n-ésimo se define con base en su propio nuevo orden $Q = \{2n\}$.

De forma similar, $P = \{1, 5, 9, 13, 17, \ldots, 4n - 3, \ldots\}$ es una *subsucesión* de $\{n\}$ y también de $\{2n - 1\}$. Sin embargo $\{1, 3, 2, 5, 4, \ldots\}$ no es *subsucesión* de $\{n\}$ porque ha perdido el orden, como tampoco lo es $\{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \ldots\}$, porque no puede ser obtenida eliminando términos de $\{n\}$.

Se tiene una **sucesión de términos positivos** si todo $a_i > 0$; y es de términos no negativos si todo $a_i \geq 0$. Si se satisface que todo $a_i \leq 0$ se dice que es de términos no positivos y, finalmente, será de términos negativos si todo $a_i < 0$; en particular, si dentro de la misma sucesión existen términos positivos y términos negativos de manera alternada se dice que es **alternante**.

Una sucesión es **creciente** si se satisface que para todo valor de n en la cual esté definida $a_n \leq a_{n+1}$. Y será **decreciente** si $a_n \geq a_{n+1}$. Se dice que una sucesión es **monótona** si es creciente o decreciente.

Las sucesiones (*a*), (*b*), (*c*) de la figura 7.11 son crecientes y monótonas; por su parte, la (d) es decreciente y también monótona. Por último, la (*e*) es alternante y la (*f*) no es ninguna de las anteriores.

Una sucesión es ***acotada superiormente*** si existe un número U tal que para toda n, $a_n \leq U$ y ***acotada inferiormente*** si existe un número L tal que $L \leq a_n$; si ambos, L y U existen, entonces $L \leq a_n \leq U$ y se dice que la sucesión $\{a_n\}$ es ***acotada***.

En la figura 7.11, las sucesiones (a) y (b) no son acotadas, mientras las (c) a la (f) sí son acotadas.

❖ Convergencia de una sucesión

Si conforme n crece, los términos de la sucesión $\{a_n\}$ se "parecen cada vez más" a un número fijo L, se dice que la sucesión converge a ese número L o simplemente que es ***convergente***. Para demostrar la convergencia se satisface que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

En caso de que tal límite no exista o sea infinito, se dice que la sucesión es ***divergente***.

Puesto que el único **punto de acumulación** que posee una sucesión se encuentra en el infinito, el único límite que se puede calcular para la misma es cuando $n \to \infty$; por tanto, si se calcula el límite, es posible omitir esta indicación y debe quedar claro que en este caso es idéntico escribir:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L \quad \text{o} \quad \lim a_n = L$$

Como $\lim(2n)$ no existe, entonces $\{2n\}$ es divergente, pero $\{1/n\}$ converge a cero como lo muestra $\lim(1/n) = 0$; de la misma forma, $\lim \cos(n\pi)$ no existe; esta sucesión alternante es divergente.

T7.1 Teorema de las sucesiones monótonas: Toda sucesión acotada y monótona es convergente.

Como $\{n/(n+1)]\}$ satisface $1/2 < n/(n+1) < 1$, la sucesión es acotada, además es monótona ya que $a_n = n/(n+1) \leq (n+1)/(n+2) = a_{n+1}$ es creciente; por tanto, es convergente, como se muestra en la figura 7.11(c) y:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = 1$$

La sucesión $\{1/n\}$ es acotada $0 < 1/n \leq 1$, y además monótona por ser decreciente:

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} = a_n$$

de donde es convergente, ya que $\lim(1/n) = 0$, tal como se muestra en la figura 7.6.

La sucesión $\{\cos(n\pi)\}$ diverge, pues a pesar de ser acotada en $[-1, 1]$ no es monótona y, como ya se mostró, su límite no existe.

7.4 ACERCAMIENTO A LAS SERIES

Las sucesiones son funciones con dominio en los naturales, pero por su importancia, y para diferenciarlas de las funciones en los números reales, en lugar de escribir $f(n)$ convenimos en que escribir la expresión de su regla de correspondencia o término n-ésimo $\{a_n\}$ será nuestra forma de reconocerlas. Por ejemplo $\{n\}$ corresponde a la sucesión $\{1, 2, 3, 4, \ldots\}$; $\{n^2\}$ a $\{1, 4, 9, 16, \ldots\}$; como se observa, solo vamos a emplear a la propia sucesión de manera explícita (o forma extensiva) cuando no sea posible escribirla en forma comprensiva mediante una fórmula.

De acuerdo con determinadas situaciones, en ocasiones, los términos de una sucesión se deben sumar, veamos como ejemplo el siguiente caso.

Considera la tasa bancaria de interés por el dinero ahorrado a plazo. Supongamos que el banco te paga 1% mensual por cierta cantidad depositada; al concluir el mes, no retiras capital ni interés, por lo que la nueva cantidad capitalizada se vuelve a invertir y corre de nuevo un ciclo de inversión, y el proceso continua de manera repetitiva.

Veamos cómo se expresa la situación:

1. Al inicio del primer mes, depositas al banco P pesos a un plazo de un mes, por lo que al finalizar el mes el banco te paga Pi, donde i es la tasa de interés, en nuestro caso 1 por ciento. Una vez capitalizado tu dinero, tu nuevo capital es:
$$P_1 = P + P_i = P(i + 1)$$
2. Al inicio del segundo mes queda depositado de manera automática P_1. Cuando termina el mes recibes $P_1 i$ y tu nuevo capital es:
$$P_2 = P_1 + P_{1i} = P_1(i + 1) = P(i + 1)^2$$
3. Al inicio del tercer mes, las cosas son similares: depositas P_2. Cuando termina el mes, recibes $P_2 i$ y tu nuevo capital es:
$$P_3 = P_2 + P_{2i} = P_2\,(i + 1) = P(i + 1)^3$$
4. Al continuar de la misma manera, parece que las cosas siguen así, de manera que cuando ha finalizado el mes n, la cantidad depositada que cobrarías es:
$$P_n = P(i+1)^n$$

Así, si tu depósito inicial fue de \$10 000 y han transcurrido 10 meses con $i = 1\%$; la suma acumulada es tu capital actual:

$$P_{10} = 10\,000(1 + 0.01)^{10} = \$11\,046.22$$

El proceso analizado, denominado interés compuesto, no difiere mucho del caso simple en el que una llave gotea en una cubeta y, a pesar de la pequeña cantidad que representa una gota, al día siguiente encontraremos que la cubeta se derrama por la cantidad de agua acumulada.

En este caso, si cada gota tiene un pequeño volumen δ constante, la sucesión de gotas será $\{\delta\}$, ya que todas las gotas son iguales se tiene la sucesión $\{\delta, \delta, \delta, ...\}$; cuando han caído n gotas, su acumulación es $V_n = \delta + \delta + \delta + \cdots + \delta = n\delta$ de donde entendemos que si n es suficientemente grande, el volumen acumulado será muy grande, a pesar de lo pequeño que pueda ser δ.

Por su descripción, se entiende que ambos procesos representan la suma de los términos de una sucesión. Dichas sumas son parciales porque es fácil observar que estos procesos estudiados pueden continuar de manera indefinida. Cuando nos preguntamos: "si n crece de modo indefinido, ¿qué pasará?". Estamos formulando una condición límite para la suma que puede ser expresada así en cada caso:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(i+1\right)^n = \infty \qquad \lim_{n\to\infty} n\delta = \infty$$

En ambas situaciones se observa que las sumas son infinitas, ya que en el caso del dinero, si no hay retiros, el capital depositado crece de manera indefinida, al igual que el volumen de agua que se derrama por el goteo.

Entonces, ¿se concluye que la **suma de todos** los términos de una sucesión es infinita? Si ese fuera el caso, la pregunta es ociosa y, por tanto, carente de sentido. Antes de obtener una conclusión al respecto, analicemos el siguiente caso en la actividad 7.4.1.

Actividad 7.4.1

Considera el siguiente experimento.

i. Toma una hoja de papel y traza una línea que la divida en dos, colorea una de las mitades.

ii. Sobre la parte no coloreada traza una línea que la divida en dos y de nuevo colorea una de las mitades.

iii. Continua así de modo sucesivo, repitiendo el paso 2 un número suficiente de veces.

Ahora que has realizado el experimento, responde los siguientes cuestionamientos:

1. Considera el área de la hoja como la unidad. Expresa los términos de la sucesión.
2. Conforme coloreas las partes de la hoja, ¿el área crece? Expresa el valor del área coloreada en cada paso.
3. ¿Puedes expresar una fórmula para la sucesión de áreas totales coloreadas en cada paso?
4. ¿El área total coloreada puede ser mayor que la hoja? ¿Por qué?

ACTIVIDAD 7.4.1

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Flexibilidad para identificar situaciones discretas con variaciones.
- Gusto por la observación en la experimentación.

Productos

- Descripción detallada de la realización del experimento solicitado, análisis de los pasos, respuesta a los cuestionamientos y planteamiento de las conclusiones.

Criterios de calidad

i. Descripción detallada de los pasos del experimento y de las conjeturas que implica.
ii. Respuesta adecuada a cada uno de los cuestionamientos.
iii. Conclusiones adecuadas.
iv. Creatividad en la propuesta de nuevos experimentos.
v. Uso de tablas, gráficas, animaciones, etc.; para clarificar los conceptos.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos reales u observados en la bibliografía.
- Es muy importante que los estudiantes propongan situaciones reales que muestren la naturaleza intuitiva de la convergencia y divergencia de las series.
- Sugerir la lectura de paradojas como la de Aquiles y la tortuga o similares de la matemática griega.

5. ¿La suma de **todos los términos** de la sucesión es finita o infinita? ¿Puedes resolver el límite que esta operación implica?
6. ¿Puedes proponer un experimento similar?

Resulta claro que, después de realizada la actividad, no toda suma de los términos de una sucesión implica un resultado infinito. Cuando esa suma posee un resultado, a éste lo llamamos límite o **suma de la serie**. El objetivo de este apartado es estudiar si existen otras series, como la del ejemplo, que tengan una suma finita. En general, a este tipo de sumas las llamamos **series**, por la propia notación, aun sin saber si la suma existe o no.

Aplicación 7.4.1

Es natural encontrar infinidad de sucesiones en nuestra vida diaria, cada una presente como una cadena de hechos a veces imperceptibles. Vale la pena destacar que el hecho de considerar la sucesión de las pequeñas variaciones que hemos logrado analizar mediante la derivada de una función, nos lleva a pensar en los cambios que suceden en la naturaleza o en los cuerpos que se encuentran en ésta. Por ejemplo, analiza el siguiente conjunto de observaciones:

1. Coloca un vaso lleno de agua en el congelador.
   - 1.1. ¿El agua del vaso tarda en congelarse el mismo tiempo si haces el experimento en junio que en enero?
   - 1.2. ¿Por qué crees que ocurre esa variación?
   - 1.3. Si, de manera sucesiva, medimos en diferentes instantes regulares de tiempo la temperatura del agua, de las figuras 7.12 o 7.13, ¿cuál gráfica crees que se aproxime más a la realidad? Si crees que no sea alguna de éstas, dibuja la que consideras apropiada. Explica por qué crees que sea así.
   - 1.4. Supongamos que puedes dejar el vaso de agua de manera indefinida en el congelador. Sabemos que el congelamiento se da por intercambio de energía y que el agua cede parte de su energía, por ello baja su temperatura y, al final, al seguir cediendo energía se congela. ¿Será la misma energía la que cede en el primer minuto, que en el minuto 20 después de iniciado el enfriamiento?
   - 1.5. Considera la energía que se cede cada minuto si se suma. ¿Nos da el total de la energía que perdió el agua?

APLICACIÓN 7.4.1

ACTIVIDAD PARA MEDITAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- ▶ Interés por la abstracción de situaciones reales.
- ▶ Flexibilidad para estudiar un fenómeno como continuo o discreto, de acuerdo con la información que se puede tener de éste.

Desempeños

- ▶ Aplicación correcta del concepto de sucesión, términos de la sucesión y de serie como suma de los términos de la sucesión.

Productos

- ▶ No son necesarios.

Criterios de calidad

- i. Preguntas realizadas en clase acerca de la toma de datos y su interpretación como sucesiones.
- ii. Conjeturas adecuadas sobre las condiciones de la convergencia de la suma de los términos de la sucesión.
- iii. Observaciones sobre la visualización de la convergencia o divergencia de las series.

Características del producto

- ▶ Extensión: una cuartilla.
- ▶ Individual ☐ Equipo ☐
- ▶ Fecha de entrega: ____________________
- ▶ Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- ▶ Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- ▶ Ampliar el debate sobre el uso de las matemáticas de acuerdo con la información del último párrafo de la actividad.

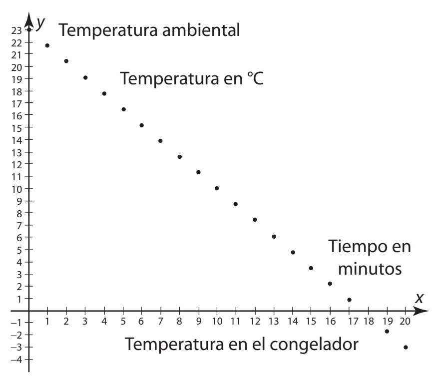


FIGURA 7.12 Una conjetura sobre disminución de la temperatura del agua en el congelador.

1.6. Desde luego, la respuesta previa es afirmativa, entonces la energía total cedida es una suma $e_1 + e_2 + e_3 + \cdots = E$. ¿Es una serie?

2. Cuando un bloque de madera se deja caer desde algún lugar alto sobre un depósito de agua, primero se sumerge y luego vuelve a la superficie y oscila hacia arriba y hacia abajo cierto tiempo. De la física, sabemos que la ley de la conservación de la energía enuncia que $EC_1 + EP_1 = EC_2 + EP_2$; entonces, una vez que el bloque cae en el agua, intercambia su energía cinética, $EC = mv^2/2$, con energía potencial, $EP = mgh$, y cede parte de su energía al agua. Por ello, al final termina por oscilar cada vez más de forma imperceptible.

2.1 Explica el fenómeno como una sucesión.

2.2 Explica el fenómeno como una serie. Toma como ejemplo el caso previo, ya que la cantidad $EC + EP$ es finita.

3. Propón otro ejemplo de un fenómeno que consideras se pueda explicar como una serie.

Observa que en estos ejemplos se ha experimentado con la condición natural de que podemos tomar mediciones de un fenómeno en ciertos intervalos de tiempo, las cuales, aunque provengan de un fenómeno continuo, son por su propia naturaleza una sucesión. La decisión de estudiar el fenómeno como continuo o discreto, muchas veces es parte de tu toma de decisiones.

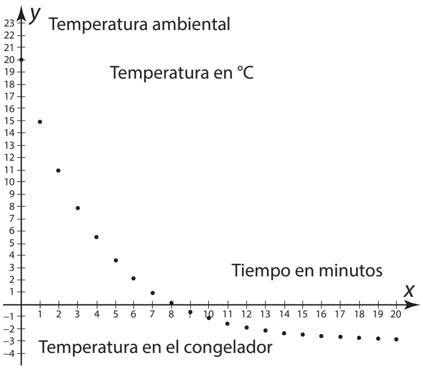


FIGURA 7.13 Otra conjetura diferente sobre disminución de la temperatura del agua en el congelador. ¿Cuál gráfica crees se asemeja más a las mediciones sobre el fenómeno de enfriamiento?

7.5 SERIES

Definición 7.1 La suma de los términos de una sucesión $\{a_n\}$ arroja una expresión de la forma: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$ que llamamos **serie infinita,** o simplemente serie, y que podemos escribir como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ o } \sum a_n$$

Mientras no exista confusión, los límites pueden ser evitados, pero si son diferentes a los establecidos, lo correcto será emplear de manera adecuada la primera opción. Debe observarse que la variable n, presente en la expresión y denominada **índice**, es una variable que solo indica la posición del ordinal y, aunque es común escribirla siempre como n, resulta indistinto sustituirla con cualquier otra literal alfabéticamente cerca de la n; por ejemplo, se entiende que las siguientes sucesiones son la misma: $\{1/n\}$, $\{1/k\}$ o $\{1/m\}$.

Además, los límites de la suma en la notación sigma (Σ) dependen de los valores iniciales y del uso del índice; por ejemplo, los siguientes casos tienen **corrimiento de índice** y, sin embargo, tienen el mismo significado. Lo cual se puede verificar si se sustituye de manera secuencial el valor del índice señalado:

$$\sum_{n=1}^{20} a_n = \sum_{n=0}^{19} a_{n+1} = \sum_{n=-1}^{18} a_{n+2} = \sum_{n=10}^{29} a_{n-9} = a_1 + a_2 + \cdots + a_{20}$$

Solo recuerda que el corrimiento de índice implica sustituir el índice n por $n + k$, por lo que la suma no se altera si corriges los límites inferior y superior simplemente restándoles el valor de k, que se sumó al índice n original, es decir:

T7.2 $$\sum_{n=i}^{N} a_n = \sum_{n=i-k}^{N-k} a_{n+k} = a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_N$$

Otras propiedades de las sumas que se deben tener presentes son:

T7.3 Si k es una constante que no depende del índice n:

$$\sum k a_n = k \sum a_n$$

T7.4 Siempre que $1 < K < M$, y k sea entero:

$$\sum_{n=1}^{M} a_n = \sum_{n=1}^{k} a_n + \sum_{n=k+1}^{M} a_n$$

T7.5 $$\sum (a_n + b_n) = \left(\sum a_n\right) + \left(\sum b_n\right)$$

Para estudiar la serie $\sum a_n$, se analiza la sucesión de sumas parciales que se genera al sumar un término a la vez:

$$S_1 = a_1$$
$$S_2 = a_1 + a_2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

Si la sucesión $\{S_n\}$ converge se tendrá:

$$\text{lím}(S_n) = \text{lím} \sum a_n = S$$

Luego, S es la suma de la serie. Si dicho límite no existe o es infinito, se dice que la serie $\sum a_n$ diverge, o que es divergente.

❖ Serie aritmética y serie geométrica

Un ejemplo muy simple de serie, y que ya estudiamos antes, se denomina ***serie aritmética***. En ella se parte de $a_n = k$, donde k es cualquier número, después cada nuevo término se genera sumando k al previo, así la sucesión de las sumas S_n resulta ser $\{nk\}$ y la serie: $k + 2k + 3k + 4k + \ldots + nk + \ldots = k(1 + 2 + 3 + \ldots + n + \ldots)$

En particular, la n-ésima suma parcial es:

$$S_n = \frac{k(n+1)n}{2}$$

Resulta simple observar que este resultado se cumple para cualquier valor de k y que $S_n \to \infty$, sin importar el valor de k, por lo que la serie es divergente.

Otro ejemplo de serie muy útil es la llamada ***serie geométrica,*** la cual se construye partiendo de $a_1 = a$, y después se calcula el término siguiente multiplicando el previo por una constante r; la sucesión resulta $\{ar^{n-1}\}$ y la serie:

$$a + ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + \ldots$$
$$a(1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1} + \ldots)$$

O bien: $\sum ar^{n-1} = a\sum r^{n-1}$

Como la suma de la serie en realidad no depende de a, para su estudio consideramos $a = 1$ y calculamos su suma parcial S_n:

$$S_n = 1 + r + r^2 + r^3 + \cdots + r^{n-1}$$
$$rS_n = r + r^2 + r^3 + \cdots + r^n$$

Al restar estas dos expresiones resulta:

$$(1 - r)S_n = 1 - r^n$$

$$S_n = \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow \text{lím } S_n = \begin{cases} \infty & ; si\ r \geq 1 \\ \dfrac{1}{1-r} & ; si\ r < 1, \text{ pues } r^n \to 0 \end{cases}$$

De acuerdo con este resultado, observa la conclusión del siguiente caso, en el que $r = 1/2$:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \cdots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

Ahora, si no consideramos el primer elemento se tiene $\left(1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{2^{n-1}} + \cdots\right) - 1 = 2 - 1$, que es la respuesta esperada en la actividad 7.4.1.

Otra serie interesante que nos puede auxiliar en varias situaciones es la denominada ***serie telescópica***. De manera general, una serie telescópica se estructura así:

$$\sum (a_n - a_{n+1})$$

Cuya expansión resulta:

$$S_n = (a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \cdots + (a_n - a_{n+1}) = a_1 - a_{n+1}$$
$$\sum (a_n - a_{n+1}) = \text{lím}(a_1 - a_{n+1})$$

Un ejemplo típico de esta serie es:

$$\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

La serie telescópica converge o diverge según lo haga el $\lim(a_1 - a_{n+1})$.

Otra serie muy útil es la **serie armónica** definida por:

$$H = \sum \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots$$

Curiosamente, la importancia de esta serie se da porque es divergente.

Llamamos **serie p** a la serie de la forma: $\sum \frac{1}{n^p}$. De esta serie **p** se sabe que es convergente si $p > 1$ y divergente si $p \leq 1$.

❖ Convergencia y divergencia de series

En el empleo de las series es muy importante determinar si la suma existe o no; es decir, si son convergentes o divergentes, y para ello empleamos una serie de teoremas y técnicas que al basarse en el conocimiento de algunas series, como las ya presentadas, permiten determinar la convergencia o divergencia de otras.

T7.6 Si la serie $\sum a_n$ es convergente, entonces $\lim a_n \to 0$.

El teorema T7.6 indica que una condición necesaria, pero NO SUFICIENTE, para que una serie converja es que sus términos sean cada vez más pequeños, de modo que cada vez aporten menos a la suma, pero que a la vez decrezcan con suficiente rapidez y no ocurra como la serie armónica, que a pesar de cumplir esa condición diverge. Observa que si solo sabemos que $\lim a_n \to 0$ **aún no podemos afirmar que la serie converja**.

Sin embargo, a la inversa, si sabemos que $\lim a_n \neq 0$ **ya podemos afirmar que la serie diverge**. A esta afirmación se le suele llamar **prueba de la divergencia**.

Por ejemplo:

$$\sum \frac{3n^2}{2n^2+1}$$

Diverge ya que $\lim a_n = 3/2 \neq 0$. Sin embargo, no podemos afirmar nada para $\sum \frac{1}{n^2}$, aunque en este caso $\lim a_n = 0$.

Criterio por comparación. Esta prueba emplea dos series, una que se sabe converge o diverge, y una segunda de la que se desea conocer la convergencia.

T7.7 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos:

- Sí $\sum b_n$ converge y $b_n \leq a_n$ para todo n, luego $\sum b_n$ también converge.
- Sí $\sum a_n$ diverge y $a_n \leq b_n$ para todo n, luego $\sum b_n$ también diverge.

El teorema resulta evidente, pues afirma que si se conoce la convergencia de $\sum a_n$ y cada término de $\sum b_n$ es más pequeño con su correspondiente de $\sum a_n$ uno a uno, con más seguridad se puede afirmar la convergencia de la segunda serie.

La segunda parte afirma con precisión lo contrario, ya que si se sabe que $\sum a_n$ diverge y los términos de la segunda serie son más grandes que los de ésta, uno a uno, en definitiva $\sum b_n$ crece más rápido y, por tanto, es divergente. La forma de aplicar este teorema depende de la elección correcta de la serie $\sum a_n$.

Por ejemplo, para probar la divergencia o convergencia de $\sum \frac{1}{n^2+1}$ se emplea el hecho de que se parece mucho a una serie p con $p = 2$, que es convergente. En efecto, es notorio que $1/(n^2 + 1) \leq 1/n^2$ para cualquier valor de n, entonces $\sum \frac{1}{n^2+1}$ converge.

Criterio por comparación al límite. Esta prueba emplea también dos series, una cuya convergencia (o divergencia) es conocida y otra que se investiga.

T7.8 Si $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son dos series de términos positivos y si:

$$\text{lím}\,\frac{a_n}{b_n} = c$$

Donde c es un número finito y positivo, entonces ambas series convergen o ambas divergen.

En este teorema se emplea el hecho de que el comportamiento de ambas series conforme n crece es similar en proporción a la constante c. Luego, si una converge la otra lo hace de manera proporcional con c. Al igual que el criterio previo, el arte de la prueba estriba en seleccionar de manera adecuada la serie que nos auxilie.

Utilicemos el ejemplo:

$$\sum 3/(n^2+5)$$

Se desea saber la convergencia de $\sum 3/(n^2+5)$ y para ello empleamos de nuevo $\sum 1/n^2$, que se sabe es convergente por ser una serie p con $p = 2$; entonces:

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n^2+5}} = \lim \frac{n^2+5}{3n^2} = \lim \left(\frac{1}{3} + \frac{5}{3n^2} \right) = \frac{1}{3}$$

Como sabemos que una de éstas converge, la otra también lo hace.

Criterio de la serie alternante. Este criterio se basa en el hecho de que los términos que se suman se ven disminuidos por los que se restan, lo cual acelera la convergencia. Además, la suma oscila alrededor del punto de convergencia que está necesariamente entre 0 y a_1.

T7.9 Si $\sum (-1)^{n-1} a_n$ es una serie alternante con $a_n > 0$, además $a_{n+1} \leq a_n$, para toda n y $\lim a_n = 0$, entonces la serie converge.

Observa que el criterio señala que la serie, sin considerar el signo, cumple el criterio del límite en cero del término n-ésimo y que siempre es decreciente.

Considera como ejemplo la serie $\sum (-1)^{n-1} / (n+4)$.

Excluyendo los signos, como señala el teorema T7.9:

$$a_n = 1/(n+4) > 0$$

Además, $1/(n+5) < 1\ (n+4)$ que corresponde a $a_{n+1} \leq a_n$ y, aunado a esto: $\lim l/(n+4) = 0$. Como se cumplen todos los requisitos del teorema T7.9, la serie es convergente y, más aún, su suma S está en $0 < S < 1/5$.

Convergencia absoluta. Dada cualquier serie $\sum a_n$ de términos no necesariamente positivos, se puede escribir una nueva serie:

$$\sum |a_n| = |a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots$$

Si la nueva serie $\sum |a_n|$ es convergente, se dice que la serie original $\sum a_n$ es absolutamente convergente. En caso de que $\sum a_n$ sea convergente y $\sum |a_n|$ no lo sea, se dice que la serie $\sum a_n$ es condicionalmente convergente.

T7.10 Si una serie es absolutamente convergente, entonces es convergente.

El teorema es útil para evitar los signos que impiden aplicar otros criterios en algunas series no necesariamente alternantes.

Por desgracia, si la serie diverge absolutamente, no nos dice nada de la convergencia de la serie original y solo nos invita a intentar probar de otra manera.

Criterio de la razón. Dada una serie $\sum a_n$ de términos no necesariamente positivos, es posible probar la convergencia absoluta sin emplear otra serie más que la que se dispone para la posible convergencia:

T7.11 Si $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, entonces la serie es absolutamente convergente y, por tanto, convergente. Por otro lado, si $\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L > 1$ (o ∞), la serie $\sum a_n$ diverge.

Observa, en particular, el caso de indecisión que se da si $L = 1$. De ocurrir esto, se tendrá que utilizar alguna otra prueba para justificar o no la convergencia. Aún con este punto de indecisión, el criterio de la razón es de las pruebas de convergencia más importantes.

Por ejemplo, considera la serie:

$$\sum \frac{(-1)^n}{n!}$$

Al aplicar el criterio de la razón, resulta que es convergente, ya que:

$$\lim\left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{(-1)^n}{n!}}\right| = \lim \frac{n!}{(n+1)!} = \lim \frac{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}}{\cancel{1\cdot 2\cdot 3\cdot \cdots \cdot n}\cdot (n+1)}$$
$$= \lim \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

Criterio de la raíz. Cuando se da una serie cuyo término n-ésimo depende de n potencias enteras positivas, el siguiente teorema es útil.

T7.12 Dada una serie $\sum a_n$ de términos no necesariamente positivos, se satisface o no la convergencia de acuerdo con:

- Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L < 1$, entonces $\sum a_n$ es absolutamente convergente y, por tanto, convergente.
- Si $\lim \sqrt[n]{|a_n|} = L > 1$ o ∞, entonces la serie $\sum a_n$ es divergente.

De nuevo, toma nota de la indecisión en el 1.

Consideremos como ejemplo la serie:

$$\sum \frac{(-1)^n}{(1+n)^n}$$

Esta serie implica potencias n-ésimas. Luego, por el criterio de la raíz, resulta que es convergente como se muestra:

$$\lim \sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{(1+n)^n}\right|} = \lim \frac{1}{1+n} = 0 < 1$$

7.6 Algo más sobre series

No siempre donde hay una sucesión existe una serie, ya que la serie, al ser una suma, debe tener un resultado finito, pero no todas las sumas son finitas, tal como se mostró en la sección anterior. Por ese motivo, de manera informal se llama serie a toda suma de una sucesión escrita como:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Sin embargo, solo estaremos seguros de que hablamos de una serie cuando se muestre que existe un resultado finito L, de tal forma que se cumpla:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$$

Por tal motivo, gran parte del esfuerzo de la teoría que estudia a las series se concentra en comprobar cuando una serie converge; es decir, es una serie con resultado L. Sin embargo, las sumas parciales de la forma:

$$\sum_{n=1}^{M} a_n$$

para algún M conocido y finito son importantes, porque nos muestran el resultado de la acumulación de la sucesión y dicho resultado también es significativo en muchas situaciones.

Por ejemplo, al recordar la cantidad que se tiene en el banco para el depósito, discutido en el apartado "Acercamiento a las series", nos lleva a la expresión $P_n = P(i + 1)^n$, la cual siempre resulta útil para calcular la cantidad depositada en cualquier periodo. De hecho, de nada sirve el cálculo de esta suma cuando n es muy grande, pues solo suele ser útil para valores pequeños del índice.

Actividad 7.6.1

Cuenta la historia que el gran Gauss, "Príncipe de las matemáticas", no era necesariamente dócil en la primaria, así que un día, en castigo, el maestro le impuso la pena de calcular la suma de los números del 1 al 1 000, esperando con esa actividad deshacerse del niño latoso por un buen tiempo; pero, ¡sorpresa, no fue así! No había pasado más de 10 minutos cuando el niño encontró el resultado y esto enloqueció aún más al profesor.

Dicen que así razonó el niño prodigio:

i. Acomodó una lista parcial de los números así: 1, 2, 3, …, 997, 998, 999, 1 000.

ii. Observó que $1 + 999 = 1000$, $2 + 998 = 1000 \ldots 499 + 501 = 1000$ y sobran el 1 000 y el 500, pero $1000/2 = 500$.

ACTIVIDAD 7.6.1

Evaluación por producto.

Actitudes

- Creatividad en la forma de realizar sumas.
- Interés por las historias anecdóticas de los genios.
- Gusto por la cultura en general.

Desempeños

- Comentarios sobre anécdotas semejantes de los grandes genios de la historia.

Productos

- Prueba de que la expresión de la suma propuesta se cumple de manera general y que se demuestra por inducción.

Criterios de calidad

i. Muestra de la comprensión de que probar que una serie es convergente no implica que has encontrado su suma.
ii. Muestra de la comprensión que aun las series divergentes son útiles en sus sumas parciales.
iii. Respuesta creativa a la pregunta: ¿sabes sumar?

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse de manera individual.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos de "formas de sumar".
- Es conocido el teorema que establece que si un número en su expansión decimal es periódico, luego es racional; con esto como base y con la información del tema actual, encuentren los enteros p/q, que son el racional de los siguientes casos: $0.\overline{3}$, $0.\overline{1743}$, $0.\overline{20011}$ y otros.

iii. ¿Cuantos miles hay por aquí?

$$\begin{aligned}499(1\,000) + 1\,000 + 1\,000/2 &= (499 + 1 + 1/2)1\,000\\ &= 1\,001(1\,000)/2 = 1\,001\,000/2 = 500\,500.\end{aligned}$$

Bueno, por si al maestro se le ocurría otro castigo igual, observó que esta expresión se cumple para cualquier cantidad de n números sucesivos que se quiera sumar:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gauss, de niño, encontró la suma de una sucesión, aunque esa suma es divergente, ¿estás de acuerdo?

1. ¿Puedes probar que tenía razón, sin importar que n sea par o impar?
2. Investiga sobre la demostración por inducción, ya que falta probar que dicha fórmula es válida para todo valor de n.

Aplicación 7.6.1

Las series no solo están limitadas a sumas de números, también se pueden considerar para una sucesión de funciones asignadas para cada valor del índice. Sus aplicaciones son amplias, pero por ahora solo consideremos algunas preguntas básicas:

1. ¿Sabes cómo se puede calcular e^x sin emplear la tecla marcada por dicha función en tu calculadora? En todo nuestro trabajo escolar, la función $f(x) = e^x$ tiene que calcularse para muchos valores; pero, ¿cómo se calcula en realidad?
2. Considera la sucesión:

$$\left\{1, x, \frac{x^2}{2}, \frac{x^3}{6}, \frac{x^4}{24}, \frac{x^5}{120}, \ldots, \frac{x^n}{n!}, \ldots\right\}$$

Toma $x = 1$ y suma al menos seis términos. Ahora, en la tecla correspondiente de tu calculadora calcula e^1. ¿Qué tan cerca están esos valores?

3. Observa la figura 7.14 en la que se grafican de manera sucesiva las primeras sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

En la figura 7.15 se muestra la suma con siete términos, ésta es la suma parcial $\sum_{n=0}^{6} \frac{x^n}{n!}$; compárala con la curva $f(x) = e^x$ de la figura 7.16.

Trázalas con un graficador como Winplot® y sobrepón una gráfica sobre la otra. Marca la región en la que coinciden y observa cómo cada vez que se incrementa

APLICACIÓN 7.6.1

Actividad para reflexionar y comentar con compañeros y facilitador.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Flexibilidad para estudiar nuevas propuestas.
- Gusto por las interpretaciones gráficas.
- Gusto por el análisis.

Desempeños

- Aplicación correcta del concepto de sucesión en la construcción de series de potencias y el análisis de su convergencia mediante gráficas.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Preguntas realizadas en clase acerca del trazo de las gráficas de los términos de la sucesión de sumas parciales.
ii. Conjeturas adecuadas sobre las condiciones de la convergencia de la suma de los términos de la sucesión.
iii. Observaciones sobre la visualización de la convergencia o divergencia de las series.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- Ampliar el análisis llevando a clase algunas series de Fourier resueltas para observar su convergencia de manera gráfica.

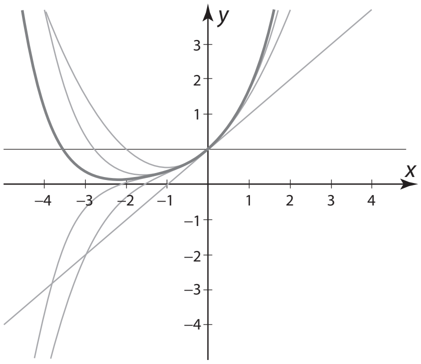


FIGURA 7.14 Las primeras siete sumas parciales de la serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

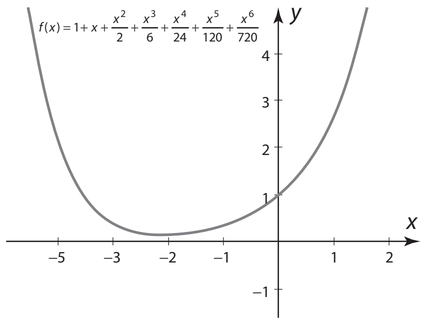


FIGURA 7.15 Gráfica de $\sum_{n=0}^{6} \frac{x^n}{n!}$

$f(x)=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^5}{120}+\frac{x^6}{720}$.

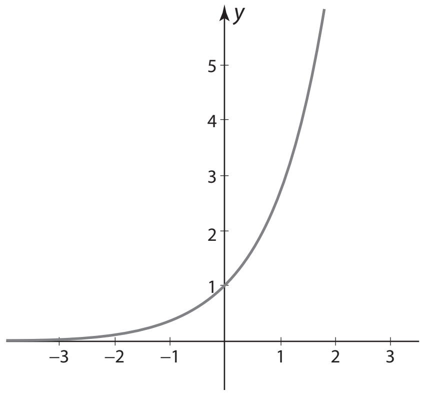


FIGURA 7.16 Gráfica de e^x.

un término a la suma parcial, la convergencia cubre una región mayor. Grafica la suma parcial con dos términos adicionales. ¿Mejora la convergencia? ¿A qué crees que se deba eso?

4. Ahora, considera la sucesión:

$$\left\{1,\ x-2,\ \frac{(x-2)^2}{2},\ \frac{(x-2)^3}{3},\ \ldots,\ \frac{(x-2)^n}{n!},\ \ldots\right\}$$

Así como para la función $f(x) = e^x$, haz la gráfica de la séptima suma parcial y compárala con las gráficas previas. ¿Qué tienen de semejanza? ¿En qué son diferentes?

5. Repite el proceso con el valor de a que consideres conveniente en la sucesión:

$$\left\{1,\ x-a,\ \frac{(x-a)^2}{2},\ \frac{(x-a)^3}{3},\ \ldots,\ \frac{(x-a)^n}{n!},\ \ldots\right\}$$

Haz la gráfica de la séptima suma parcial y compárala con las gráficas previas. ¿En qué son semejantes? ¿En qué son diferentes?

6. De acuerdo con los resultados, ¿qué puedes concluir?

Comparte tus conclusiones con tus compañeros y si tienes dudas consulta a tu facilitador.

❖ Series de potencias

A la serie que tiene la forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots$$

donde x es una variable y $\{c_0, c_1, c_2, c_3, \ldots\}$ son constantes, llamadas **coeficientes de la serie**, la llamamos ***serie de potencias***.

Una serie de potencias es una función $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$, que como toda serie puede ser convergente, o bien divergente.

El conjunto de valores de x para los cuales la serie de potencias converge corresponde al dominio de la función; dicho dominio de la función suele ser un intervalo, si nos colocamos en su punto medio x_0 y a partir de ahí medimos la distancia a los extremos del intervalo, a esa distancia la llamamos radio de convergencia a partir del punto x_0.

En esencia, una serie de potencias $f(x)$ es muy similar a un polinomio, claro que su diferencia estriba en el número de términos que la componen, por lo que podemos considerar sus derivadas sucesivas al aplicar nuestras fórmulas conocidas; así de manera formal:

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots$$

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{d}{dx}(x^n) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n n x^{n-1}$$

$$= c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \cdots$$

Otra forma de escribir una serie de potencias es:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + c_3(x - x_0)^3 + \cdots$$

En este caso, decimos que la serie de potencias está centrada en x_0 o que se desarrolla alrededor de x_0. Recuerda el tema de transformaciones sobre las gráficas; la sustitución de x por $(x - x_0)$ nos indica un simple desplazamiento a x_0. Desde este mismo punto de vista, se puede decir que la serie $\sum c_n x_n$ está centrada en el origen.

Como puedes observar, las sumas parciales de una serie de potencias son polinomios de grado finito; entonces, conforme el grado crece, si la serie es convergente, el límite indica que al final la serie converge a una gráfica que representa a la función $f(x)$; el dominio de dicha función queda determinado por el radio de convergencia y en dicha región se asegura la estabilidad de la función; fuera de ese dominio, la serie diverge, lo que indica que las sumas parciales no se estabilizan en ningún tipo de curva. Por ejemplo, considera la serie alternante:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n + 1)!}$$

Observa varias de sus sumas parciales en la figura 7.17. Según la figura, las gráficas de las sumas parciales se estabilizan cada vez más en una vecindad del origen de radio cada vez mayor. Por ejemplo, la gráfica marcada S_5 tiene una diferencia muy pequeña con la marcada para la suma S_4 en el intervalo $[-3, 3]$, ratificando que conforme se incrementa la cantidad de términos, la zona en que se estabilizan las últimas curvas es cada vez más grande, pero nunca se podrá rebasar su radio de convergencia. Fuera de la zona de convergencia, en este caso las curvas sucesivas se comportarían como ocurre fuera del intervalo $[-3, 3]$.

En este ejemplo, compara la gráfica de S_5 con la de la función sen(x) y observa que parece que $S_n \to \operatorname{sen}(x)$, como se muestra en la figura 7.18, donde se ve la curva de sen(x) desprendiéndose por encima de S_5, aproximadamente fuera del intervalo $(-\pi, \pi)$. Si se continúan sumando más términos, este intervalo de coincidencia sigue creciendo.

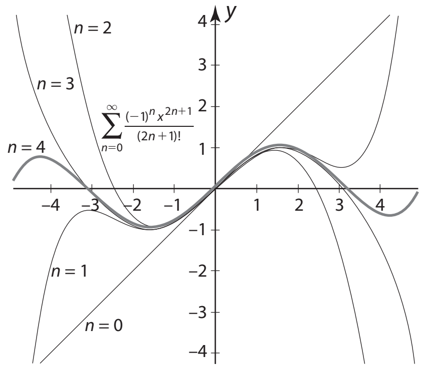


FIGURA 7.17 Gráficas de las primeras cinco sumas parciales de la serie de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

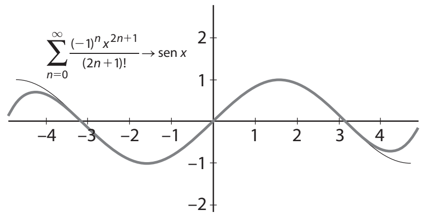


FIGURA 7.18 Gráfica que muestra la posible convergencia de la serie de potencias: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \to \operatorname{sen} x$.

❖ Convergencia de la serie de potencias

Debido a las características de la serie de potencias, la forma más adecuada de intentar probar su convergencia es aplicando el ***criterio de la razón***, del teorema T7.11.

Como ejemplo, considera la serie previa y calcula su dominio, o más en específico, su radio de convergencia.

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, al emplear el criterio de la razón tenemos:

$$\lim \left| \frac{\dfrac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{[2(n+1)+1]!}}{\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim \left| \frac{\dfrac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}}{\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}} \right| = \lim \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} \left| \frac{x^{2n+3}}{x^{2n+1}} \right|$$

$$= \lim \frac{\left| x^2 \right|}{(2n+2)(2n+3)}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n+2)(2n+3)} = 0 < 1$$

Como en la desigualdad resultante el límite no depende de x, se concluye que la serie es convergente en todos los reales. Además, ya que la serie está centrada en el origen, su radio de convergencia es infinito, lo que implica que las gráficas de las sumas parciales convergen a una gráfica estable en el límite.

En general, después de este proceso es posible que el límite del criterio de la razón arroje una expresión que dependa de x, digamos $g(x)$, pero como el criterio de la razón establece que el límite encontrado debe ser menor que uno, entonces se resuelve $g(x) < 1$, cuya solución corresponderá al dominio de convergencia de la serie.

❖ Series de *Maclaurin* y *Taylor*

Considera la serie de potencias:

$$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$$

Calcula sus derivadas sucesivas evaluándolas en el origen, lo cual se resume en la tabla 7.1.

TABLA 7.1 Derivadas sucesivas de una serie de potencias evaluadas en el cero.

n	$g^{(n)}(x)$	$g^{(n)}(0)$
	$g(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$	c_0
	$g'(x) = c_1 + 2c_2x + 3c_3x^2 + 4c_4x^3 + \ldots$	c_1
	$g''(x) = 2c_2 + 2 \cdot 3c_3x + 3 \cdot 4c_4x^2 + 4 \cdot 5c_5x^3 + \ldots$	$2c_2$
	$g'''(x) = 2 \cdot 3c_3 + 2 \cdot 3 \cdot 4c_4x + 3 \cdot 4 \cdot 5c_5x^2 + \ldots$	$2 \cdot 3c_2 = 3!c_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$g^{(n)}(x) = 2 \cdot 3\ldots(n-1)nc_n + 2 \cdot 3\ldots(n-1)n(n+1)c_{n+1}x + \ldots$	$2 \cdot 3\ldots(n-1)nc_n = n!c_n$

Ahora, considera que se tiene una función conocida $f(x)$, que no es un polinomio necesariamente, y queremos conocer los valores de las constantes c_i, de tal manera que:

$$f^{(n)}(x) = g^{(n)}(x) = (c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots)^{(n)},\ x \approx 0$$

Es decir, se requiere que $f(x)$ y $g(x)$ coincidan en todas sus derivadas alrededor del origen, esto significa que $f(x) = g(x)$ siempre que $x \approx 0$ (x esté muy cercano al cero), entonces cada derivada sucesiva de f debe coincidir con la de g; esto es, $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esta información se resume en la tabla 7.2, así se tiene:

TABLA 7.2 Cálculo de los coeficientes de una serie de potencias.

n	$g^{(n)}(0)$	Cálculo de c_n con $f^{(n)}(0) = g^{(n)}(0)$
	c_0	$c_0 = f(0)$
	c_1	$c_1 = f'(0)$
	$2c_2$	$c_2 = f''(0)/2$
	$2 \cdot 3c_3 = 3!c_3$	$c_3 = f'''(0)/3!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$2 \cdot 3\ldots(n-1)nc_n = n!c_n$	$c_n = f^{(n)}(0)/n!$

Tomando los resultados de la tabla 7.2 y reconstruyendo la serie encontrada, se tiene:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f'''(0)x^3}{3!} + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!} + \cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n-1)}(0)x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}$$

Que se denomina **serie de *Maclaurin*** de $f(x)$.

En particular, si en lugar de calcular alrededor del origen, se calcula alrededor de x_0, simplemente se hace una traslación del eje x, de tal forma que ahora el origen coincida con $x = x_0$, lo que equivale a sustituir x por $x - x_0$ en la expresión de la función y resulta:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)^2}{2!} + \frac{f'''(x_0)(x - x_0)^3}{3!}$$

$$+ \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{(n-1)}(x_0)(x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!}$$

La nueva serie encontrada se denomina **serie de Taylor** alrededor de x_0.

Las series de Taylor y *Maclaurin* en realidad tienen el mismo uso; sin embargo, ambas son necesarias por condiciones de convergencia, ya que la convergencia más rápida se da en el punto en el que se calcula la serie; por ello, si los puntos de interés están fuera del origen llevamos allá la serie y empleamos la serie de Taylor. Por otro lado, si el problema se desarrolla en algún lugar muy cercano al origen, lo más conveniente es emplear la serie de *Maclaurin*.

Por ejemplo:

Calcula la serie de *Maclaurin* de $f(x) = e^x$.

Calculando las derivadas sucesivas, como se realizó en la tabla 7.2, se obtiene:

$$f(x) = e^x = f'(x) = f''(x) = f'''(x) = \cdots = f^{(n)}(x)$$

De donde al evaluar en cero resulta:

$$f(0) = e^0 = 1 = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$$

Sustituyendo en la estructura de la serie de Maclaurin se tiene:

$$f(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Aquí se ha utilizado la definición $0! = 1$, ya que el primer término de la serie corresponde a $n = 0$; además, al emplear el criterio de la razón se prueba muy fácil que el radio de convergencia son todos los reales. Observa la afirmación ¡e^x es un polinomio infinito!

Por último, podemos escribir el resultado en notación sigma:

$$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Donde ambas series son equivalentes por el corrimiento de índice. En caso de que no exista confusión, se puede emplear cualquiera de éstas.

Es momento de regresar a la aplicación 7.6.1. Ahora, ya puedes justificar cómo e^x se te brinda en la calculadora y extender el comentario a $\ln(x)$, $\text{sen}(x)$, $\cos(x)$, etcétera.

Por último, debe quedar claro el porqué se justifica la aproximación que observaste en las gráficas de las figuras 7.15, 7.16 y, después, en la 7.18, en cuyo caso se puede calcular y mostrar que la serie de *Maclaurin* de $\text{sen}(x)$ corresponde con exactitud a la serie analizada.

Aplicación 7.6.2

Generando nuevas series

Debido a que las series de potencias resultan ser funciones muy especiales, por sus condiciones de convergencia, poseen todos los atributos de las mismas. Así, es factible hacer sustituciones en sus argumentos, derivarlas, desplazarlas o integrarlas, entre otras operaciones disponibles.

Por ejemplo, se obtuvo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Donde, sustituyendo x por $-2x$ obtenemos:

$$e^{-2x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!}$$

Otra sustitución puede ser:

$$e^{x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x^2)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}$$

Esta secuencia te invita a tener cuidado al derivar, ya que es posible que aparezcan términos extraños que debes prever.

$$\frac{d}{dx} e^{x^2} = 2xe^{x^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right) = \frac{d}{dx}\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{dx} \frac{x^{2n}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2nx^{2n-1}}{n!} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n-1}}{(n-1)!}$$

APLICACIÓN 7.6.2

ACTIVIDAD PARA REFLEXIONAR Y COMENTAR CON COMPAÑEROS Y FACILITADOR.

Actitudes

- Interés por la abstracción.
- Flexibilidad para estudiar nuevas propuestas.
- Gusto por las interpretaciones gráficas.
- Gusto por el análisis.
- Interés por los desarrollos algebraicos novedosos.

Desempeños

- Aplicación correcta del concepto de series y las modificaciones necesarias para generar nuevas series, cálculo e interpretación adecuada del radio de convergencia.

Productos

- No son necesarios.

Criterios de calidad

i. Preguntas realizadas en clase alrededor de las operaciones posibles en series para generar nuevas.
ii. Consideraciones algebraicas adecuadas para evitar la aparición de términos extraños.
iii. Observaciones sobre la visualización de la convergencia o divergencia de las series.

Características del producto

- Extensión: una cuartilla.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto optativo para realizarse en equipo de tres personas.
- Discutir que los términos extraños surgen cuando la fórmula del término *n*-ésimo aplica operaciones que hacen desaparecer algún término y en la expresión algebraica aparece de manera inconsistente.

Considera una situación más importante: si sabemos que $(\text{sen}\, x)' = \cos x$ y además $\text{sen}\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, se tiene que:

$$\cos x = \frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Comparte con tus compañeros los siguientes análisis, genera la serie y calcula el radio de convergencia para:

1. $\text{sen}\,(2x+1)$
2. $x \cos(2x)$
3. $\frac{e^{-2x}}{x}$
4. $e^{\frac{-(x-\mu)^2}{\sigma}}$
5. $\text{sen}\,\frac{1}{x}$
6. $\frac{\cos x - \text{sen}\, 2x}{x}$

Actividad 7.6.2

Integración por series

En ocasiones, surge la necesidad de resolver integrales de funciones que no tienen una antiderivada localizable por las técnicas de integración comunes, como las que se analizan en el capítulo 4 y en las cuales se puede aplicar el análisis de las series de Maclaurin o de Taylor, como en el siguiente ejemplo:

$$\int e^{x^2}\,dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{x^{2n}}{n!}\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)n!}$$

Cuando la función es expresada como una serie de potencias, la integración de la función es posible integrando su serie, siempre que x esté dentro del radio de convergencia.

Resuelve las siguientes integrales. Si es necesario, encuentra la serie de Maclaurin o de Taylor necesaria, así como el radio de convergencia de la serie encontrada.

1. $\int \frac{e^x}{x}\,dx$
2. $\int \sqrt{x}e^{2x}\,dx$

ACTIVIDAD 7.6.2

EVALUACIÓN POR PRODUCTO.

Actitudes

- Creatividad en la generación de nuevas series.
- Interés por los desarrollos algebraicos novedosos.
- Gusto por la abstracción.

Desempeños

- Planteamiento y desarrollo correcto de cada una de las seis integrales solicitadas, así como cálculo adecuado del radio de convergencia correspondiente.

Productos

- Ensayo con el análisis y resolución de las seis integrales solicitadas, así como cálculo correcto de sus radios de convergencia.

Criterios de calidad

i. Muestra de la comprensión de que probar que una serie es convergente no implica que se ha encontrado su suma.
ii. Aproximación de sumas seleccionando la cantidad adecuada de términos en la suma parcial.
iii. Reporte de las fuentes empleadas.
iv. Desarrollo correcto del proceso algebraico.

Características del producto

- Extensión: dos cuartillas.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Producto obligatorio para realizarse en equipo de tres personas.
- Pedir a los estudiantes que propongan nuevos ejemplos de integrales por series.
- Una función cualquiera se puede aproximar en la vecindad de un punto, por la suma parcial de los primeros n términos; n se selecciona de acuerdo con la exactitud deseada.

3. $\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx$

4. $\int_1^{\pi} \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}dx$

5. $\int \frac{\ln(x-1)}{(x-1)^2}dx$

Ejercicios 7.1

En los ejercicios 7.1.1 a 7.1.5.

Lista los primeros cinco términos de las sucesiones indicadas:

7.1.1 $\left\{\frac{2^n}{n}\right\}$

Resolución

Al sustituir $n = 1, 2, \ldots, 5$ en la expresión de a_n:

$$\left\{2, \frac{4}{2}, \frac{8}{3}, \frac{16}{4}, \frac{32}{5}, \ldots\right\}$$

7.1.2 $\left\{\frac{(-3)^{n-1}}{n+2}\right\}$

Resolución

Al sustituir $n = 1, 2, \ldots, 5$ en la expresión de a_n:

$$\left\{\frac{1}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{9}{5}, -\frac{27}{6}, \frac{81}{7}, \ldots\right\}$$

7.1.3 $\left\{(5n-3)^{\frac{1}{n}}\right\}$

Resolución

Al sustituir $n = 1, 2, \ldots, 5$ en la expresión de a_n:

$$\left\{2, \sqrt[2]{7}, \sqrt[3]{12}, \sqrt[4]{17}, \sqrt[5]{22}, \ldots\right\}$$

7.1.4 $\left\{\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{n}\right)\right\}$

EJERCICIOS 7.1

ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés por la abstracción.
- Interés por la investigación.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante intente la solución de los ejercicios antes de ver su resolución. Aun así, puesto que algún ejercicio puede representar una situación novedosa, se incluye la resolución para que el lector la estudie, la analice con cuidado y plantee sus dudas en la clase al facilitador o con sus compañeros de equipo.

Desempeños

- Participación en la clase.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los ejercicios.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios tomados de otras fuentes.

Características del producto

- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ____________________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños.
- Planear al menos una sesión en la clase para preguntas sobre los ejercicios.
- Propiciar el aprendizaje colaborativo.

Resolución

Al sustituir $n = 1, 2, \ldots, 5$ en la expresión de a_n:

$$\left\{\operatorname{sen}(3\pi), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{3}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right), \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{5}\right), \ldots\right\}$$

7.1.5 $\left\{\dfrac{(2n)!}{n^2}\right\}$

Resolución

Al sustituir $n = 1, 2, \ldots, 5$ en la expresión de a_n:

$$\left\{\frac{2!}{1}, \frac{4!}{4}, \frac{6!}{9}, \frac{8!}{16}, \frac{10!}{25}, \ldots\right\}$$

En los ejercicios 7.1.6 a 7.1.10.

Encuentra una fórmula para el término a_n de las sucesiones listadas en forma extensiva:

7.1.6 $\{1, 0, 1, 0, \ldots\}$

Resolución

Se espera tu creatividad al responder a cuestionamientos de este tipo, ya que siempre existen infinitas maneras de resolver ejercicios como éste. Para ello, considera las siguientes propuestas de respuesta:

1. $a_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{2}$
2. $a_n = \dfrac{5(1+(-1)^{n+1})}{10}$
3. $a_n = \left|\cos[(n-1)\pi / 2]\right|$
4. $a_n = \dfrac{1-\cos(n\pi)}{2}$
5. $a_n = \left|\operatorname{sen}(n\pi / 2)\right|$

Como puedes notar, los casos 1 y 2 son idénticos y resultan de multiplicar por un factor unitario, en este caso $1 = 5/5 = k/k$, lo cual te indica las infinitas formas que se pueden construir con una expresión ya encontrada, por lo que no debe quedar duda de que existen infinitas maneras en todos los casos.

7.1.7 $\left\{\dfrac{2}{1}, \dfrac{3}{6}, \dfrac{4}{11}, \dfrac{5}{16}, \dfrac{6}{21}, \ldots\right\}$

Resolución

En caso de cocientes, se sugiere analizar la sucesión de denominadores por separado de la sucesión de numeradores, en general de los diferentes factores que se observen en la expresión.

Para la sucesión {2, 3, 4, 5, 6, …} del numerador se tiene $\{n + 1\}$, mientras que para el denominador {1, 6, 11, 16, 21, …} se observa que los elementos aumentan de 5 en 5, lo que resulta $\{5n - 4\}$; entonces:

$$a_n = \frac{n+1}{5n-4}$$

7.1.8 $\left\{-\frac{3}{1}, 0, -\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{16}, 0, \ldots\right\}$

Resolución

Para el numerador $\{-3, 0, -3, 0, \ldots\}$ usando la respuesta del ejercicio 7.1.6, se tiene $\{-3(1 +(-1)^{n+1}) / 2\}$, mientras que para el denominador {1, ?, 4, ?, 16, ?, …}, donde se colocó "?" en los elementos pares, ya que no importa el valor que se tenga ahí porque va a ser multiplicado por cero del numerador. Por tanto, se puede completar como {1, 2, 4, 8, 16, …}, que corresponde a $\{2^{(n-1)}\}$ y resulta:

$$a_n = \frac{-\dfrac{3(1+(-1)^{n+1})}{2}}{2^{n-1}} = \frac{3((-1)^n - 1)}{2^n}$$

7.1.9 {2, 5, 4, 10, 6, 15, 8, 20, 10, …}

Resolución

Si analizas con cuidado, puedes concluir que se observan dos *subsucesiones*: la primera es {2, 4, 6, 8, 10, …} y corresponde a los términos impares, mientras que para los términos pares se tiene {5, 10, 15, 20, …}; si no fuera por su posición, las sucesiones tendrían los términos $\{2n\}$ y $\{5n\}$, pero como no están en sus lugares correspondientes, en realidad tenemos: {2, ?, 4, ?, 6, ?, 8, ?, 10, …}, que siguiendo lo sugerido en el ejercicio 7.1.8 se puede completar como: {2, 0(3), 4, 0(5), 6, 0(7), 8, 0(9), 10, …}.

Por otro lado, la otra parte también se puede presentar así:

$$\left\{\frac{0\cdot 5}{2}, \frac{2\cdot 5}{2}, \frac{0\cdot 3\cdot 5}{2}, \frac{4\cdot 5}{2}, \frac{0\cdot 5\cdot 5}{2}, \frac{6\cdot 5}{2}, \frac{0\cdot 7\cdot 5}{2}, \frac{8\cdot 5}{2}, \ldots\right\}$$

Ahora, podemos sumar término a término las sucesiones encontradas y obtendremos la sucesión solicitada, con la estructura que emplea la respuesta del ejercicio 7.1.1:

$$\{2, 0, 4, 0, 6, 0, 8, 0, 10, \ldots\} = \left\{\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}\right](n+1)\right\}$$

Para la otra *subsucesión* que incluye $\{0, 1, 0, 1, \ldots\} = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$ se hace lo mismo, considerando que tiene factores constantes:

$$\left\{\frac{0\cdot 5}{2}, \frac{2\cdot 5}{2}, \frac{0\cdot 3\cdot 5}{2}, \frac{4\cdot 5}{2}, \frac{0\cdot 5\cdot 5}{2}, \frac{6\cdot 5}{2}, \ldots\right\} = n\,\frac{5}{2}\,\frac{(1+(-1)^n)}{2}$$

Al final, se suman ambas sucesiones y se tiene la respuesta deseada:

$$\left\{\frac{[(1+(-1)^{n+1})](n+1)}{2} + \frac{5n(1+(-1)^n)}{4}\right\}$$

7.1.10 $\left\{-1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{24}, -\dfrac{1}{120}, \ldots\right\}$

Resolución

Como $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120, \ldots$ y la sucesión es alternante se tiene:

$$\left\{\frac{(-1)^n}{n!}\right\}$$

En los ejercicios 7.1.11 a 7.1.15.

Utilizando Winplot® u otro software y una escala adecuada, encuentra la gráfica de las sucesiones mostradas.

7.1.11 $\left\{3\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}$

Resolución

Véase figura 7.19.

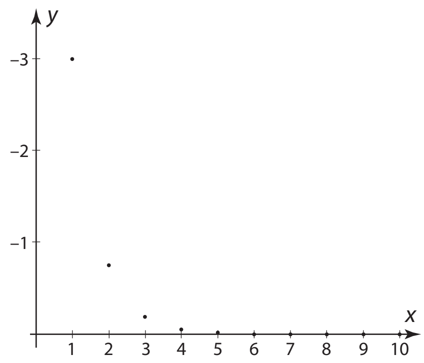


FIGURA 7.19 Respuesta al ejercicio 7.1.11.

7.1.12 $\left\{\dfrac{-2}{\sqrt{(n+2)\left(n-\dfrac{5}{2}\right)}}\right\}$

Resolución

Observa que $n \neq \{1, 2\}$; ya que dichos valores no están en el dominio de la sucesión, su gráfica se observa en la figura 7.20.

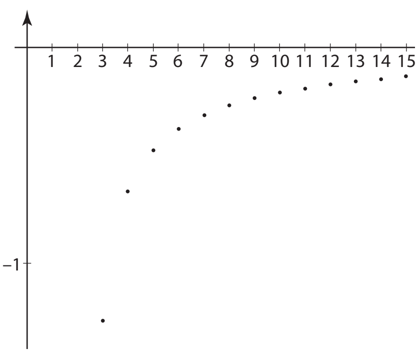


FIGURA 7.20 Respuesta al ejercicio 7.1.12.

7.1.13 $\left\{\dfrac{3n^2-1}{2n^2+3}\right\}$

Resolución

Véase figura 7.21.

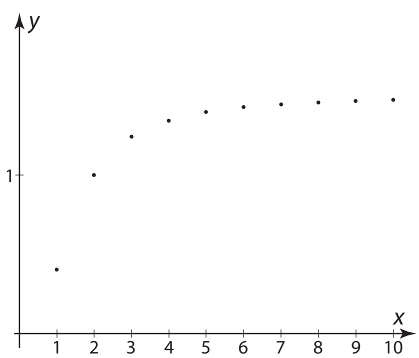


FIGURA 7.21 Respuesta al ejercicio 7.1.13.

7.1.14 $\left\{\dfrac{\text{sen}^2(3n\pi/2)}{3n\pi/2}\right\}$

Resolución

Véase figura 7.22.

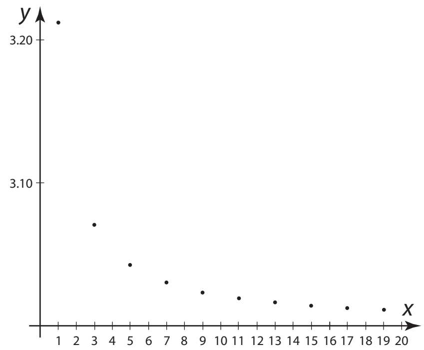


FIGURA 7.22 Respuesta al ejercicio 7.1.14.

7.1.15 $\left\{\left(-\dfrac{10}{n}\right)^n\right\}$

Resolución

Véase figura 7.23.

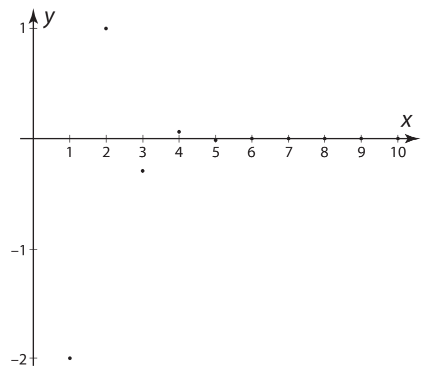


FIGURA 7.23 Respuesta al ejercicio 7.1.15.

En los ejercicios 7.1.16 a 7.1.20.

Indica si la sucesión dada es creciente, decreciente, monótona, alternante, acotada o ninguna de éstas. Justifica tu respuesta y comprueba la convergencia o divergencia de la sucesión:

7.1.16 $\left\{\dfrac{n}{n+5}\right\}$

Resolución

Considera la comparación entre a_{n+1} y a_n; como se desconoce el signo de la comparación éste se ha escrito como "?", todos los términos son positivos, así que la desigualdad no se altera con las operaciones:

$$a_{n+1} \,?\, a_n$$

$$\frac{n+1}{n+6} \,?\, \frac{n}{n+5}$$

$$(n+5)(n+1) \,?\, n(n+6)$$

$$n^2+6n+5 \,?\, n^2+6n$$

$$5 \,?\, 0,\ \text{como } 5>0 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$$

Al final, la expresión "5?0" permite afirmar que la relación es del tipo >, de donde se desprende que la sucesión es creciente y, por tanto, monótona; puesto que:

$$\text{lím}\,\frac{n}{n+5} = \text{lím}\,\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n}{n}+\frac{5}{n}} = \text{lím}\,\frac{1}{1+\frac{5}{n}} = 1$$

La sucesión es acotada por [1/6, 1]; al ser creciente, su menor elemento es a_1 y converge a 1.

7.1.17 $\left\{\dfrac{(-1)^n}{3^n+1}\right\}$

Resolución

La sucesión es alternante, por lo que no puede ser creciente ni decreciente, como:

$$\text{lím}\,\frac{(-1)^n}{3^n+1}=0$$

La sucesión converge a 0. Además, es acotada, ya que sus términos absolutos son decrecientes y sus dos primeros términos son los mayores; así, $a_1 = -1/4$ y $a_2 = 1/10$ la acotan en $[-1/4, 1/10]$.

7.1.18 $\{\cos(n\pi/2)\}$

Resolución

Puesto que $\{\cos(n\pi/2)\}$ corresponde a $\{\cos 90^\circ, \cos 180^\circ, \cos 270^\circ, \cos 360^\circ, \ldots\}$, resulta, por su periodicidad equivalente a $\{0, -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, \ldots\}$; así, concluimos, por observación, que la sucesión es acotada en $[-1, 1]$ y divergente.

7.1.19 $\left\{\dfrac{n}{\ln(n+1)}\right\}$

Resolución

Como: $\text{lím}\,\dfrac{n}{ln(n+1)}=\text{lím}\,\dfrac{1}{\dfrac{1}{n+1}}=\text{lím}(n+1)=\infty$ resuelto con ayuda de la regla de L'Hôpital, la sucesión es divergente al infinito; se remarca esto último porque para ello la sucesión debe ser creciente y no acotada para un valor suficientemente grande de n.

7.1.20 $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^2\right\}$

Resolución

Ya que se desconoce la relación entre a_{n+1} y a_n, escribimos su relación desconocida como $a_{n+1}\ ?\ a_n$ Como la serie es de términos positivos, no se altera con las operaciones efectuadas, de donde:

$$a_{n+1}\ ?\ a_n$$

$$\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2\ ?\ \left(1-\frac{1}{n}\right)^2$$

$$\left(\frac{n+1-1}{n+1}\right)^2\ ?\ \left(\frac{n-1}{n}\right)^2$$

$$n^4\ ?(n-1)^2(n+1)^2=(n^2-1)^2=n^4-2n^2+1$$

$$0\ ?-2n^2+1$$

Como $0 > -2n^2 + 1$, la sucesión es creciente (por tanto, es monótona); además, es acotada por [0, 1] y convergente con $\text{lím}\left(1-\frac{1}{n}\right)^2 = 1.$

En los ejercicios 7.1.21 a 7.1.25.

Calcula los primeros cinco términos de la sucesión de sumas parciales.

7.1.21 $\sum \frac{n}{n+5}$

Resolución

$$S_1 = \frac{1}{6}$$

$$S_2 = \frac{1}{6} + \frac{2}{7}$$

$$S_3 = \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8}$$

$$S_4 = \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9}$$

$$S_5 = \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} + \frac{5}{10}$$

7.1.22 $\sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{3^n + 1}$

Resolución

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 - \frac{1}{4}$$

$$S_3 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10}$$

$$S_4 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{28}$$

$$S_5 = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} - \frac{1}{28} + \frac{1}{82}$$

7.1.23 $\sum \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

Resolución

$$S_1 = 0$$

$$S_2 = 0 - 1 = -1$$

$S_3 = 0 - 1 + 0 = -1$

$S_4 = 0 - 1 + 0 + 1 = 0$

$S_5 = 0 - 1 + 0 + 1 + 0 = 0$

7.1.24 $\sum \frac{n}{\ln(n+1)}$

Resolución

$S_1 = \frac{1}{\ln 2}$

$S_2 = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3}$

$S_3 = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4}$

$S_4 = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} + \frac{4}{\ln 5}$

$S_5 = \frac{1}{\ln 2} + \frac{2}{\ln 3} + \frac{3}{\ln 4} + \frac{4}{\ln 5} + \frac{5}{\ln 6}$

7.1.25 $\sum \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2$

Resolución

$S_1 = 0$

$S_2 = \frac{1}{4}$

$S_3 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9}$

$S_4 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} + \frac{9}{16}$

$S_5 = \frac{1}{4} + \frac{4}{9} + \frac{9}{16} + \frac{16}{25}$

En los ejercicios 7.1.26 a 7.1.31.

Calcula la convergencia o divergencia. En caso de convergencia, calcula el valor de la suma:

7.1.26 $\sum \frac{2}{n}$

Resolución

La serie corresponde a $2H$, el doble de la serie armónica, y puesto que H es divergente, también lo es $2H$.

7.1.27 $\sum\limits_{n=0} \dfrac{1}{3^n}$

Resolución

La serie que se presenta es una serie geométrica con $r = 1/3 < 1$, que es convergente. Su suma es $S = 1/(1 - 1/3) = 3/2$.

7.1.28 $\sum \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

Resolución

Puesto que $\text{lím} \cos(n\pi/2)$ no existe, la serie es divergente.

7.1.29 $\sum \dfrac{n}{\ln(n+1)}$

Resolución

Como $\text{lím}\, \dfrac{n}{\ln(n+1)} = \infty$, la serie es divergente.

7.1.30 $\sum\limits_{n=0} \left(\dfrac{4}{5}\right)^n$

Resolución

Ésta es una serie geométrica con $r = 4/5 < 1$; por tanto, es convergente y su suma es $S = 1/(1 - 4/5) = 5$.

7.1.31 $\sum \left(\dfrac{3n}{2n-1} - \dfrac{3n+3}{2n+1}\right)$

Resolución

Observa que si en el término $3n/(2n - 1)$ se sustituye n por $n + 1$ resulta:

$$3(n + 1)/[2(n + 1) - 1] = (3n + 3)/(2n + 1)$$

Por lo que se tiene $\sum (a_n - a_{n+1})$, una serie telescópica y, por tanto, convergente, para la cual su suma es:

$$S = \text{lím}(a_1 - a_{n+1}) = \text{lím}\left[3 - \frac{3n+3}{2n+1}\right] = 3 - \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

En los ejercicios 7.1.32 a 7.1.37.

Prueba si las siguientes series son convergentes o divergentes:

7.1.32 $\sum \dfrac{3}{n^2+5}$

Resolución

Considera la serie $\sum 1/n^2$, que es una serie p, con $p = 2$ y, por tanto, convergente; se tiene que $3\sum 1/n^2 = \sum 3/n^2$ es convergente. Por último, como $3/(n^2 + 5) < 3/n^2$ para toda n se demuestra que se cumple el criterio de comparación T7.7 y la serie bajo prueba es convergente.

7.1.33 $\sum\limits_{n=3} \frac{1}{n-2}$

Resolución

Sea la serie armónica $H = \sum 1/n$ que sabemos es divergente, por el criterio de comparación al límite T7.8 se tiene:

$$\text{lím} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-2}} = \text{lím} \frac{n-2}{n} = \text{lím}\left(1 - \frac{2}{\text{n}}\right) = 1 > 0$$

Por lo que ambas series divergen, y en particular la que tenemos bajo prueba. Nota que la serie en prueba carece de sus dos primeros elementos, que es una suma finita, lo cual no contradice el resultado encontrado.

7.1.34 $\sum \frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}$

Resolución

Considera de nuevo la serie armónica, que sabemos es divergente, y aplica el criterio de comparación al límite T7.8; entonces:

$$\text{lím} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}} = \text{lím} \frac{\sqrt{(n+1)(n+2)}}{n} = \text{lím} \frac{\sqrt{n^2 + 3n + 2}}{\sqrt{n^2}}$$

$$= \text{lím}\sqrt{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 1 > 0$$

Se concluye que ambas series son divergentes.

7.1.35 $\sum \frac{n^2}{n!}$

Resolución

Considera el criterio de la razón T7.11. Como la serie es de términos positivos, el valor absoluto de la prueba es irrelevante, entonces se tiene:

$$\lim\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim\frac{\dfrac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\dfrac{n^2}{n!}} = \lim\frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)!} = \lim\frac{(n+1)^2}{n^2(n+1)}$$

$$= \lim\frac{n+1}{n^2} = \lim\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right) = 0 < 1$$

De donde se sigue que la serie es convergente.

7.1.36 $\displaystyle\sum_{n=1}\frac{3^n}{2^n-1}$

Resolución

Considera la serie $\sum 3^n / 2^n = \sum (3/2)^n$, que es una serie geométrica con $r = 3/2 > 1$, y por tanto divergente. Por el criterio de comparación en el límite T7.8, se tiene:

$$\lim\frac{\dfrac{3^n}{2^n}}{\dfrac{3^n}{2^n-1}} = \lim\frac{3^n(2^n-1)}{3^n 2^n} = \lim\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1 > 0$$

Se concluye que ambas divergen.

7.1.37 $\displaystyle\sum\left(\frac{(-1)^n n}{(n+1)3^n}\right)$

Resolución

Como la serie es alternante, aplicamos el criterio correspondiente a este tipo de serie T7.9, el cual pide que $\lim|a_n| = 0$; en efecto, se tiene:

$$\lim\frac{n}{(n+1)3^n} = \lim\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)3^n} = 0$$

Además, se satisface $|a_{n+1}| < |a_n|$, como se muestra en seguida, por lo que la serie alternante bajo estudio converge. Para probar que $|a_{n+1}| < |a_n|$, considera la relación incógnita $|a_{n+1}| \mathrel{?} |a_n|$, para la cual se satisface:

$$|a_{n+1}| \mathrel{?} |a_n|$$

$$\frac{n+1}{(n+2)3^{n+1}} \mathrel{?} \frac{n}{(n+1)3^n}$$

$$(n+1)^2 \mathrel{?} 3n(n+2)$$

$$n^2 + 2n + 1 \mathrel{?} 3n^2 + 6n$$

$$1 \;?\; 2n^2 + 4n$$
$$1 < 2n^2 + 4n$$
$$|a_{n+1}| < |a_n|$$

En los ejercicios 7.1.38 a 7.1.40.

Encuentra una representación en serie de potencia para las siguientes funciones y calcula el intervalo de convergencia:

7.1.38 $f(x) = \dfrac{1}{1-2x}$

Resolución

Como la serie geométrica tiene como suma $S = 1/(1-r)$, al hacer $r = 2x$, la función corresponde al resultado de una serie geométrica con tal r; luego, expresándola de acuerdo con el desarrollo se tiene:

$$f(x) = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots + 2^{n-1}x^{n-1} + \cdots$$

Al aplicar el criterio de la razón T7.11, se tiene:

$$\text{lím}\left|\frac{2^n x^n}{2^{n-1}x^{n-1}}\right| = \lim_{n\to\infty} 2|x| < 1 \Rightarrow |x| < \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$$

Éste corresponde con el intervalo de convergencia; de igual forma, como la serie está centrada en el origen, el radio de convergencia es $1/2$. Una alternativa más de solución es calcular su serie de Maclaurin.

7.1.39 $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$

Resolución

Consideremos de nuevo la serie geométrica como modelo, por lo que resulta:

$$f(x) = \frac{x}{x+2} = x\left(\frac{1}{x+2}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1+\frac{x}{2}}\right) = \frac{x}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{x}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{x}{2}\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{8} + \ldots\right)$$

$$= \frac{x}{2} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8} - \ldots + \frac{(-1)^{n+1}x^n}{2^n} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}x^n}{2^n}$$

Respecto a su intervalo de convergencia, de nuevo, por el criterio de la razón T7.11, se tiene:

$$\text{lím}\left|\frac{\dfrac{(-1)^n x^{n+1}}{2^{n+1}}}{\dfrac{(-1)^{n+1} x^n}{2^n}}\right| = \text{lím}\left(\frac{|x|}{2}\right) < 1 \Rightarrow |x| < 2 \Rightarrow -2 < x < 2$$

7.1.40 $\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{x^2}{2+3x}\right)$

Resolución

Partiendo de la misma idea de la serie geométrica, se tiene:

$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2+3x}\right) = \frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\left(\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{2}x\right)}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{4}x^2 - \frac{27}{8}x^3 + \frac{81}{16}x^4 - \ldots\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\frac{x^2}{2}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}3^{n-1}}{2^{n-1}}\,x^{n-1} = \frac{d}{dx}\sum_{n=1}\frac{(-1)^{n+1}3^{n-1}}{2^n}\,x^{n+1}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2+3x}\right) = \sum_{n=1}(n+1)\frac{(-1)^{n+1}3^{n-1}}{2^n}\,x^n$$

Por último, el intervalo de convergencia calculado por el criterio de la razón T7.11 resulta:

$$\text{lím}\left|\frac{(n+2)\dfrac{3^n}{2^{n+1}}\,x^{n+1}}{(n+1)\dfrac{3^{n-1}}{2^n}\,x^n}\right| = \text{lím}\left(\frac{(n+2)3|x|}{(n+1)2}\right) = \text{lím}\,\frac{\left(1+\dfrac{2}{n}\right)3|x|}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)2}$$

$$= \frac{3}{2}|x| < 1 \Rightarrow -\frac{2}{3} < x < \frac{2}{3}$$

En los ejercicios 7.1.41 a 7.1.45.

Calcular la serie de Taylor o Maclaurin solicitada.

7.1.41 Calcula la serie de Maclaurin para $f(x) = \cos x$.

Resolución

De acuerdo con la definición, se requiere calcular las derivadas de $f(x) = \cos x$, lo que se muestra en la tabla 7.3.

TABLA 7.3 Cálculo de los coeficientes de la serie de potencias de $f(x) = \cos x$.

n	$f^{(n)}(x)$	$f^{(n)}(0)$
0	$\cos x$	1
1	$-\text{sen}\, x$	0
2	$-\cos x$	-1
3	$\text{sen}\, x$	0
4	… se repite en ciclos	

Al construir la serie resulta:

$$f(x) = \cos x = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$$

$$\cos x = \frac{1}{0!} + 0x - \frac{1}{2!}x^2 + 0x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + 0x^5 - \frac{1}{6!}x^6 + \ldots$$

$$= \frac{1}{0!} - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \cdots = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

Y se prueba muy fácil que su intervalo de convergencia es todo $\mathbb{R}$.

7.1.42 Emplea el resultado del ejercicio 7.1.40 para calcular la serie para $f(x) = x \cos x^2$.

Resolución

Como:

$$\cos x = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow x \cos x^2 = x \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (x^2)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{4n+1}}{(2n)!}$$

7.1.43 Encuentra la serie de Maclaurin para la función $f(x) = \text{sen}\, x/x^2$.

Resolución

Como $(\cos x)' = -\text{sen}\, x$ se tiene del ejercicio 7.1.40:

$$\text{sen}\, x = -\frac{d}{dx} \cos x = -\frac{d}{dx} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1} \frac{2n(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{(2n)!}$$

$$= \sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1} x^{2n-1}}{2n-1!} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

que converge para todo $\mathbb{R}$.

Ahora, la serie solicitada, que también converge en todo $\mathbb{R}$ es:

$$\frac{\text{sen}\, x}{x^2} = \frac{1}{x^2} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+1-2}}{(2n+1)!}$$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x^2} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{(2n+1)!}$$

7.1.44 Calcula la serie de Taylor para $f(x) = e^{2x}$, alrededor de $x = 3$.

Resolución

Sabemos que la serie de Maclaurin para $e^x = \sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}$ y la serie de Taylor establece:

$$f(x) = \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Además, las derivadas $(e^x)^{(n)} = e^x$, resulta que $f^{(n)}(3) = e^3$, por lo que, alrededor de 3:

$$e^x = \sum_{n=0} \frac{e^3}{n!}(x-3)^n = e^3 \sum_{n=0} \frac{(x-3)^n}{n!}$$

Al final, la serie solicitada convergente para todo $\mathbb{R}$ es:

$$e^{2x} = \sum_{n=0} \frac{e^6}{n!}[2(x-3)]^n = e^6 \sum_{n=0} \frac{2^n (x-3)^n}{n!}$$

Nota que $(e^{2x})^{(n)} = 2^n e^{2x}$, luego $f^{(n)}(3) = 2^n e^6$, por lo que se llega al mismo resultado si se aplica directamente la expresión de la serie de Taylor.

7.1.45 Calcula la serie de Taylor alrededor de $x = 2$ para la función $f(x) = 1/(2 + x)$.

Resolución

Toma la serie geométrica como modelo, entonces:

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2-(-x)} = \frac{1}{2-(-(x-2+2))} = \frac{1}{4-(-(x-2))}$$

$$= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\dfrac{-(x-2)}{4}} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{x-2}{4} + \frac{(x-2)^2}{4^2} - \frac{(x-2)^3}{4^3} + \ldots\right)$$

$$f(x) = \frac{1}{2+x} = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n (x-2)^n}{4^{n+1}}$$

En los ejercicios 7.1.46 a 7.1.49.

Resuelve las integrales propuestas.

7.1.46 $\int \frac{2e^x}{x^3} dx$

Resolución

$$\int \frac{2e^x}{x^3}dx = 2\int \frac{1}{x^3}\sum_{n=0} \frac{x^n}{n!}dx = \sum_{n=0} \frac{2}{n!}\int x^{n-3}dx$$

$$= 2\left(\int\left(\frac{x^{-3}}{0!}+\frac{x^{-2}}{1!}+\frac{x^{-1}}{2!}+\frac{1}{3!}\right)dx + \sum_{n=4}\frac{1}{n!}\int x^{n-3}\,dx\right)$$

$$\int \frac{2e^x}{x^3}dx = 2\left(-\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}+\frac{\ln x}{2}+\frac{x}{6}+\sum_{n=4}\frac{x^{n-2}}{(n-2)n!}\right)+c$$

7.1.47 $\int \sqrt{x}e^{2x}\,dx$

Resolución

$$\int \sqrt{x}e^{2x}\,dx = \int x^{\frac{1}{2}}\sum_{n=0}\frac{(2x)^n}{n!}dx = \sum_{n=0}\frac{2^n}{n!}\int x^{n+\frac{1}{2}}\,dx = \sum_{n=0}\frac{2^n}{n!}\frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{n+\dfrac{3}{2}}$$

$$= \sum_{n=0}\frac{2^n}{n!}\frac{x^{n+\frac{3}{2}}}{\dfrac{1}{2}(2n+3)} = \sum_{n=0}\frac{2^{n+1}x^{n+\frac{3}{2}}}{(2n+3)n!!}+c$$

7.1.48 $\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx$

Resolución

Desde luego, es mejor aproximar la integral planteada por métodos numéricos; pero, por ahora, para la práctica de integración en series, considera:

$$\int_1^{\pi} \frac{\cos x}{x^2}dx = \int_1^{\pi}\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}dx = \sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_1^{\pi}x^{2n-2}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_1^{\pi}x^{2n-2}\,dx = \frac{(-1)^0}{0!}\int_1^{\pi}x^{-2}\,dx + \sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\int_1^{\pi}x^{2n-2}\,dx$$

$$= -\frac{1}{x}\bigg|_1^{\pi} + \sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\bigg|_1^{\pi} = 1-\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\frac{\pi^{2n-1}-1}{2n-1}$$

$$\int_1^{\pi}\frac{\cos x}{x^2}dx \approx 0.52191$$

7.1.49 $\int \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt[3]{x}}dx$

Resolución

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{4}{3}}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}dx = \sum_{n=0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\int x^{2n-\frac{1}{3}}dx$$

AUTOEVALUACIÓN 7.1-7.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Actitudes

- Trabajo en equipo.
- Interés en la abstracción.
- Interés por la resolución de situaciones novedosas.
- Compromiso ético.

Productos

- No son necesarios, aunque se espera que el estudiante, de manera individual o en equipo, intente la solución de cada autoevaluación.
- Es muy importante que se muestre el dominio de los métodos de integración mediante la resolución de los diversos ejercicios en forma analítica y con el uso de tablas.

Desempeños

- Observable en el producto.

Criterios de calidad

i. Presentación de preguntas de interés grupal o individual, respecto de la resolución de los cuestionamientos.
ii. Presentación en clase o con los compañeros de ejercicios de otras fuentes.
iii. Conjeturas adecuadas sobre variantes o implicaciones de los cuestionamientos.

Sugerencias

- Actividad de revisión obligatoria extraclase, sin manifestación de productos o desempeños, se puede optar por seleccionar algunos de los cuestionamientos para estructurar evaluaciones de conceptos y operatividad.
- Planear, al menos, una sesión en la clase para discusión grupal.
- Propiciar el trabajo en equipo.

$$= \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \int x^{2n-\frac{1}{3}} dx = \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} \frac{x^{2n+\frac{2}{3}}}{2n+\frac{2}{3}}$$

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{x\sqrt[3]{x}} dx = \frac{3}{2} \sum_{n=0} \frac{(-1)^n x^{2n+\frac{2}{3}}}{(3n+1)(2n+1)!} + c$$

Autoevaluación 7.1

Resuelve los siguientes planteamientos:

7.1.1 Escribe los primeros términos de la sucesión y determina si es convergente o no:

$$\left\{ \frac{e^n}{2^n} \right\}$$

7.1.2 Determina si la sucesión dada es convergente o divergente:

$$\left\{ (-1)^n \frac{n}{n+1} \right\}$$

7.1.3 Determina una fórmula para la sucesión:

$$\left\{ -1, \frac{2}{3}, -\frac{3}{5}, \frac{4}{7}, -\frac{5}{9}, \ldots \right\}$$

7.1.4 Determina una fórmula para la sucesión:

$$\left\{ 1-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}-\frac{1}{6}, \ldots \right\}$$

7.1.5 Determina una fórmula no recurrente para la sucesión recurrente: $a_{n+1} = \frac{a_n}{n}$, $a_1 = 1$. Demuestra si es convergente.

AUTOEVALUACIÓN 7.1

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 7.2

Resuelve los siguientes planteamientos.

Determina si la serie converge o diverge. En caso de que converja encuentra su suma:

7.2.1 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \left(2\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\left(\frac{1}{6}\right)^n \right)$

7.2.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{(n+1)^2} - \frac{3}{n^2} \right)$

Determina si la serie dada es convergente o no, indica el criterio que usaste:

AUTOEVALUACIÓN 7.2

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

7.2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3+3n}{n^5-4n^2+1}$

7.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

7.2.5 Un resultado muy importante es que:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Con ese resultado conocido, prueba la convergencia o divergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

Autoevaluación 7.3

Resuelve los siguientes planteamientos:

7.3.1 Expresa en series de potencias la función:

$$f(x) = \frac{3}{x}\left(\frac{1}{2+3x}\right)$$

7.3.2 Construye una serie de potencias en $x = 2$ para la función:

$$f(x) = \frac{3-x}{2+x}$$

7.3.3 Encuentra la serie de Maclaurin para: $f(x) = \pi x \cos(2\pi / x)$

7.3.4 Sabiendo que $\cos h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$, encuentra la serie de Maclaurin correspondiente.

7.3.5 Calcula la serie de Maclaurin para $\tan^{-1} x$ y úsala para aproximar el valor de π hasta seis decimales.

Autoevaluación 7.4

7.4.1 Calcula una fórmula para la sucesión:

$$\{2, 0, 6, 0, 10, 0, 14, 0, \ldots\}$$

7.4.2 Demuestra si es convergente la sucesión:

$$\{e^{-nx}\}$$

7.4.3 Escribe la quinta suma parcial de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n\pi x)}{4n^2\pi}$$

7.4.4 Escribe una serie de potencias para:

SUGERENCIA EVALUACIONES

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

- En caso de que el facilitador o los propios estudiantes consideren la necesidad de realizar alguna evaluación por conocimientos, se puede diseñar un examen que emplee una combinación de cuestionamientos incluidos en estas autoevaluaciones, adiciones de otras fuentes y, sobre todo, propuestas de su propia creación.

AUTOEVALUACIÓN 7.3

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

AUTOEVALUACIÓN 7.4

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

$$f(x) = \frac{x}{4x - 3}$$

7.4.5 Calcula una aproximación polinómica de tercer grado alrededor de $x = \pi$ para la función:

$$f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x - 4}}$$

Autoevaluación 7.5

7.5.1 Demuestra la convergencia o divergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n^2 + 1}}$$

7.5.2 Calcula una aproximación para la serie en $x = 1.1$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{2} - 1 \right) \frac{x^{2n}}{n!}$$

7.5.3 Calcula una serie para:

$$f(x) = \frac{x + 1}{2} \operatorname{sen}(\pi x)$$

7.5.4 Calcula el radio de convergencia para la serie de e^{2x^2}.

7.5.5 Resuelve $\int \frac{\ln(x + 2)}{\sqrt{x + 2}} dx$ sabiendo que

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 1)^{n+1}}{n + 1}.$$

AUTOEVALUACIÓN 7.5

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

Autoevaluación 7.6

7.6.1 Demuestra la convergencia o divergencia de la serie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n + 1}$$

7.6.2 Aproxima el valor de ln(1.3) con la serie:

$$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x - 1)^{n+1}}{n + 1}$$

7.6.3 Calcula una serie para:

$$f(x) = (x + 2) \ln x$$

7.6.4 Resuelve $\int \sqrt[3]{x} \tan^{-1} x \, dx$, sabiendo que

$$\tan^{-1} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n + 1}.$$

AUTOEVALUACIÓN 7.6

EVALUACIÓN POR CONOCIMIENTO Y DESEMPEÑO, ACTIVIDAD DE ENTRENAMIENTO INDIVIDUAL Y GRUPAL.

Características del producto

- En caso de considerar la entrega de la resolución de la autoevaluación como producto:
- Extensión: libre.
- Individual ☐ Equipo ☐
- Fecha de entrega: ______________
- Obligatorio ☐ Optativo ☐

7.6.5 Resuelve $\int \sqrt{3x+1}\ln(3x+2)\,dx$, sabiendo que

$\ln(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^{n+1}}{n+1}$.

Solución a la autoevaluación 7.1

7.1.1 $\left\{\frac{e}{2}, \frac{e^2}{4}, \frac{e^3}{8}, \ldots\right\}$, es divergente $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{e^n}{2^n} = \infty$.

7.1.2 La sucesión es divergente, su límite no existe.

7.1.3 $\left\{\frac{(-1)^n n}{2n-1}\right\}$

7.1.4 $\left\{\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right\}$

7.1.5 Al aplicar la fórmula de manera sucesiva, se tiene: $a_1 = 1$, $a_2 = \frac{1}{1}$, $a_3 = \frac{1}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2\cdot 3}$, $a_5 = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} \ldots a_n = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdots(n-1)} = \frac{1}{(n-1)!}$

Como su límite existe, es convergente: $\lim \frac{1}{(n-1)!} = 0$

Solución a la autoevaluación 7.2

7.2.1 Se tiene la suma de dos series geométricas con razones menores que uno, entonces la serie es convergente y su suma 33/5.

7.2.2 La serie es una serie telescópica, por lo que es convergente y su suma es 3.

7.2.3 Considera la serie p, con $p = 2$, que es convergente y al emplear el criterio de comparación al límite, se encuentra que ambas convergen: $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 4 > 0$

7.2.4 Al emplear el criterio de la raíz, se prueba que la serie es convergente.

7.2.5 Al emplear el criterio de la razón, se prueba que el límite es $1/e < 1$, por lo que la serie es convergente.

Solución a la autoevaluación 7.3

7.3.1 Considera la secuencia de operaciones que permite construir una serie geométrica para al final obtener:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n \frac{3^{n+1}}{2^{n+1}} x^{n-1} \right)$$

7.3.2 Al realizar una secuencia algebraica se logra la construcción de una serie geométrica:

$$\frac{3-x}{2+x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{4^{n+1}}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{4^{n+1}}$$

7.3.3 $f(x)=\pi x\cos(2\pi/x)=\pi\sum_{n=0}\frac{(-1)^n(2\pi)^{2n}}{x^{2n-1}(2n)!}$

7.3.4 $\cos hx=\sum_{n=0}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Se obtiene una serie como la de cos x, pero sin ser alternante.

7.3.5 $\tan^{-1}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}$

Para aproximar el valor de π hasta 6 decimales, utiliza el hecho de que $\tan^{-1}1=\pi/4$, de donde al evaluar la serie en 1 y multiplicar por 4 se debe tener la aproximación deseada, sumando tantos términos como convenga.

Solución a la autoevaluación 7.4

7.4.1 $\{2, 0, 6, 0, 10, 0, 14, 0, \dots\}$, $a_n=n(1-(-1)^n)$

7.4.2 Convergente si $x>0$.

7.4.3 $$S_5=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\cos(2\pi x)}{1}+\frac{\cos(4\pi x)}{4}+\frac{\cos(6\pi x)}{9}+\frac{\cos(8\pi x)}{16}+\frac{\cos(10\pi x)}{25}\right)$$

7.4.4 $f(x)=-\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}x^n,\ |x|<\frac{3}{4}$

7.4.5 Al derivar, como indica la serie de Taylor, se obtienen los coeficientes:

$$c_0=f(\pi)=2(3\pi-4)^{-1/2}$$
$$c_1=f'(\pi)=-3(3\pi-4)^{-3/2}$$
$$c_2=f''(\pi)=\frac{3^3}{2}(3\pi-4)^{-5/2}$$
$$c_3=f'''(\pi)=-\frac{3^4}{4}5(3\pi-4)^{-7/2}$$
$$f(x)=c_0+c_1(x-\pi)+\frac{c_2}{2}(x-\pi)^2+\frac{c_3}{6}(x-\pi)^3$$

Solución a la autoevaluación 7.5

7.5.1 Al emplear la serie H y el criterio de comparación en el límite, arroja un resultado de $\sqrt{3}$ que indica que ambas son divergentes.

7.5.2 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n}{2}-1\right)\frac{x^{2n}}{n!}\approx -2.70439$

7.5.3 $\displaystyle\frac{x+1}{2}\operatorname{sen}(\pi x)=\frac{1}{2}\sum_{n=0}\frac{(-1)^n\pi^{2n+1}(x+1)x^{2n+1}}{(2n+1)!}$

7.5.4 Los reales.

7.5.5 $\displaystyle\int\frac{\ln(x+2)}{\sqrt{x+1}}dx=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x+1)^{n+3/2}}{(n+1)(2n+3)}$

Solución la autoevaluación 7.6

7.6.1 La serie converge si $|x|<1$, de acuerdo con el criterio de la razón.

7.6.2 $\displaystyle\ln(1.3)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(1.3-1)^{n+1}}{n+1}\approx 0.262364$

7.6.3 $\displaystyle(x+2)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{n+1}}{n+1}$

7.6.4 $\displaystyle\int\sqrt[3]{x}\tan^{-1}x\,dx=3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+7/3}}{(2n+1)(6n+7)}$

7.6.5 $\displaystyle\int\sqrt{3x+1}\ln(3x+2)\,dx=\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(3x+1)^{n+5/2}}{(n+1)(2n+5)}$