

Sommaire

Préface – les sangaku et les mathématiques japonaises

p. 7

Sélection de sangaku

p. 19

1



p. 21

6



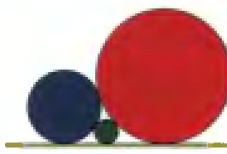
p. 26

11



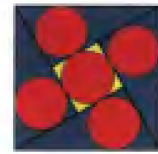
p. 31

2



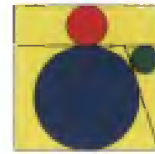
p. 22

7



p. 27

12



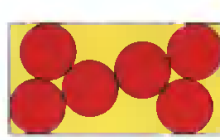
p. 32

3



p. 23

8



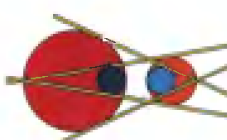
p. 28

13



p. 33

4



p. 24

9



p. 29

14



p. 34

5



p. 25

10



p. 30

15



p. 35

16



p. 36

23



p. 43

29



p. 49

17



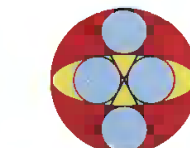
p. 37

24



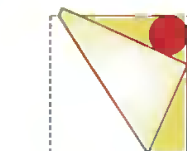
p. 44

30



p. 50

18



p. 38

25



p. 45

31



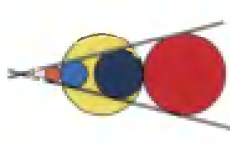
p. 51

19



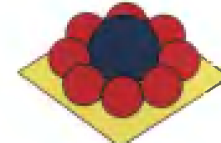
p. 39

26



p. 46

32



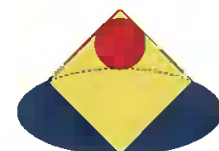
p. 52

20



p. 40

27



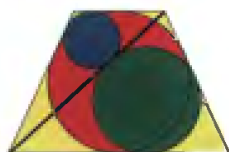
p. 47

33



p. 53

21



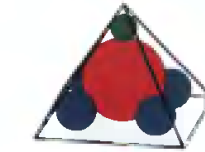
p. 41

28



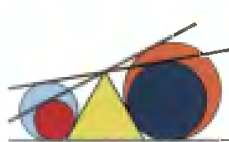
p. 48

34



p. 54

22



p. 42

Solution des sangaku

Memento

Remerciements

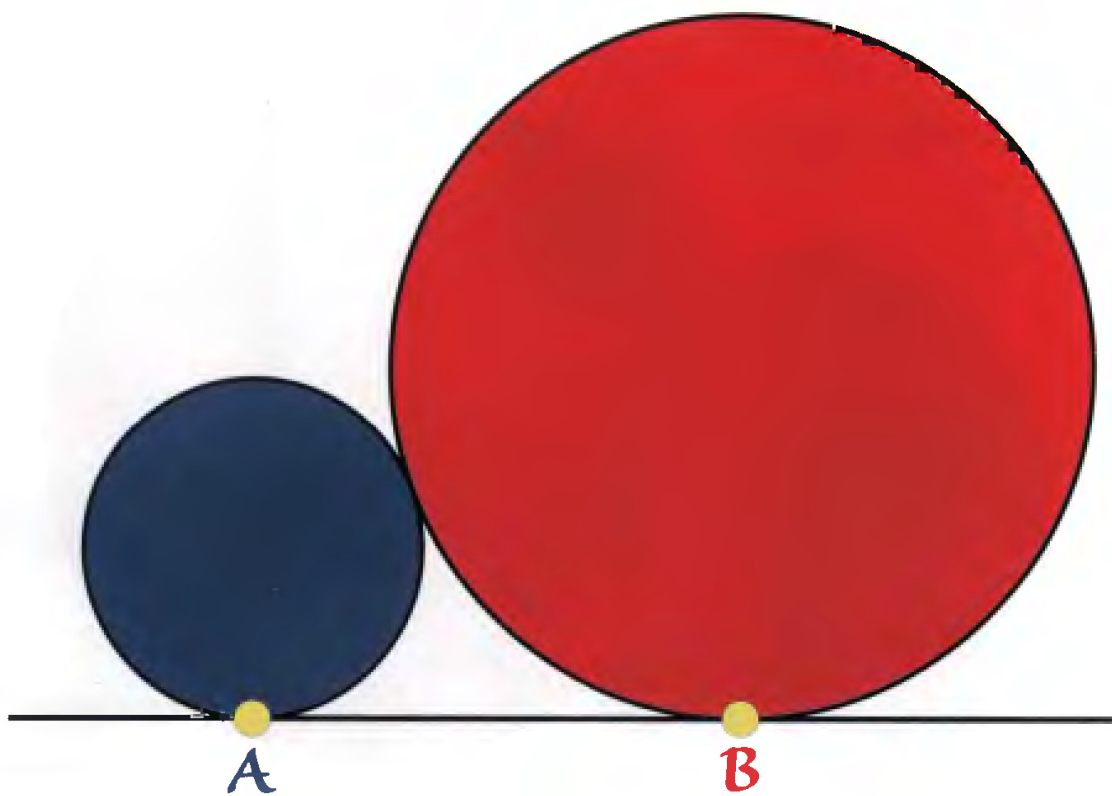
p. 57

p. 161

p. 168

1

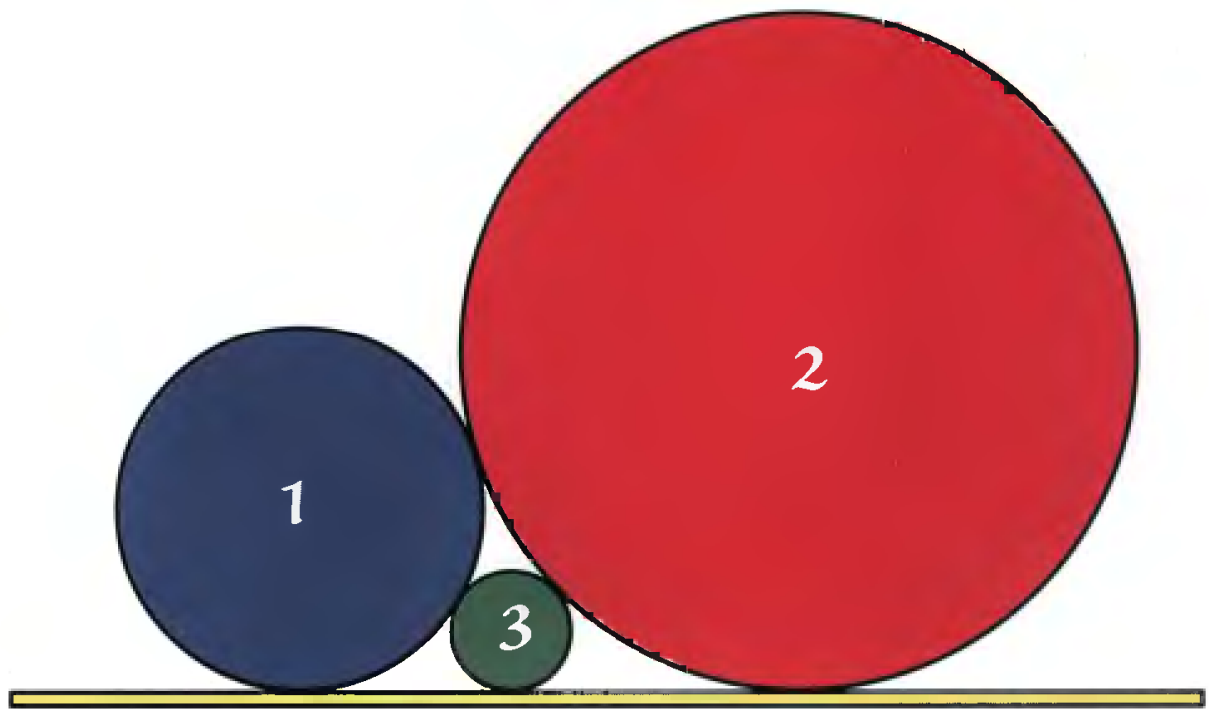
Wasan



$$AB^2 = 4rR$$

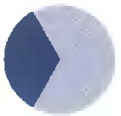
solution p. 59

2 Les trois cercles

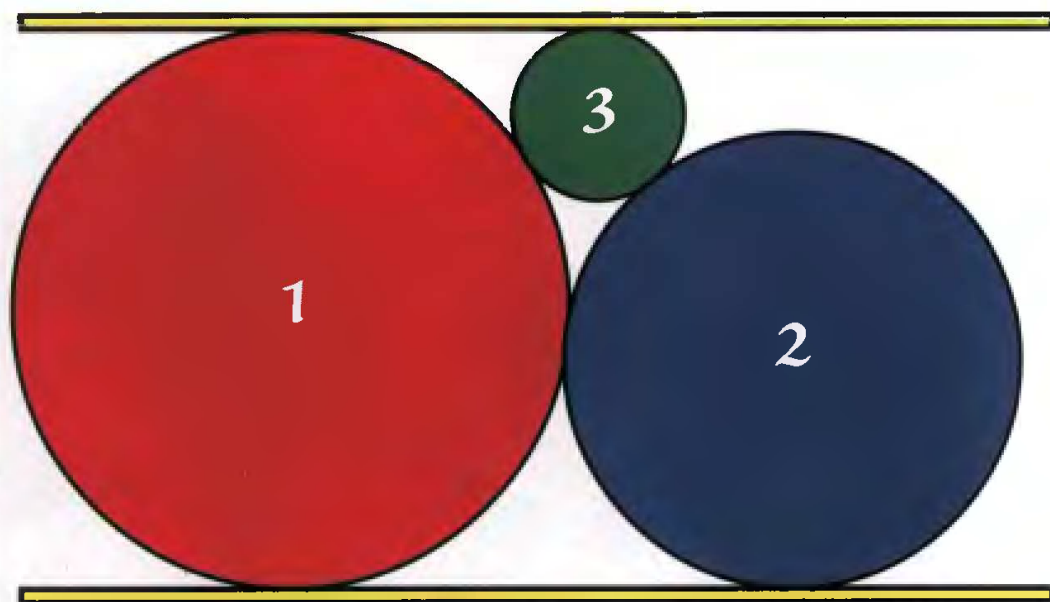


$$1 / \sqrt{r_3} = 1 / \sqrt{r_1} + 1 / \sqrt{r_2}$$

solution p. 60



3 Trois cercles entre deux baguettes

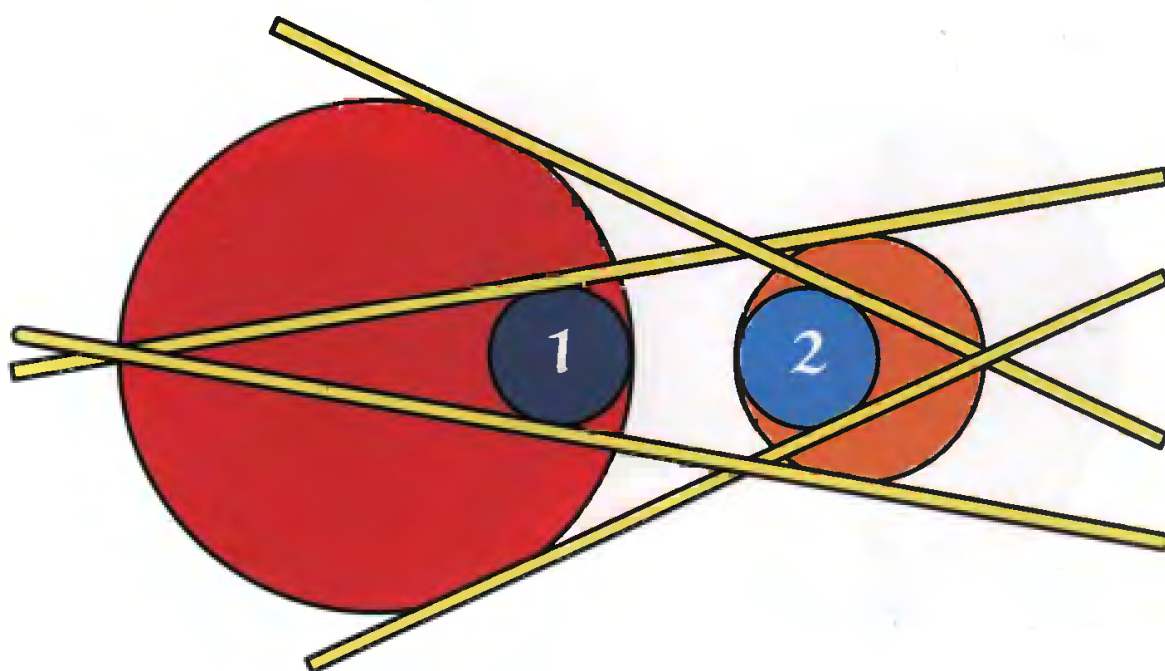


$$r_1^2 = 4 r_2 r_3$$

solution p. 62



4 Cercles et baguettes

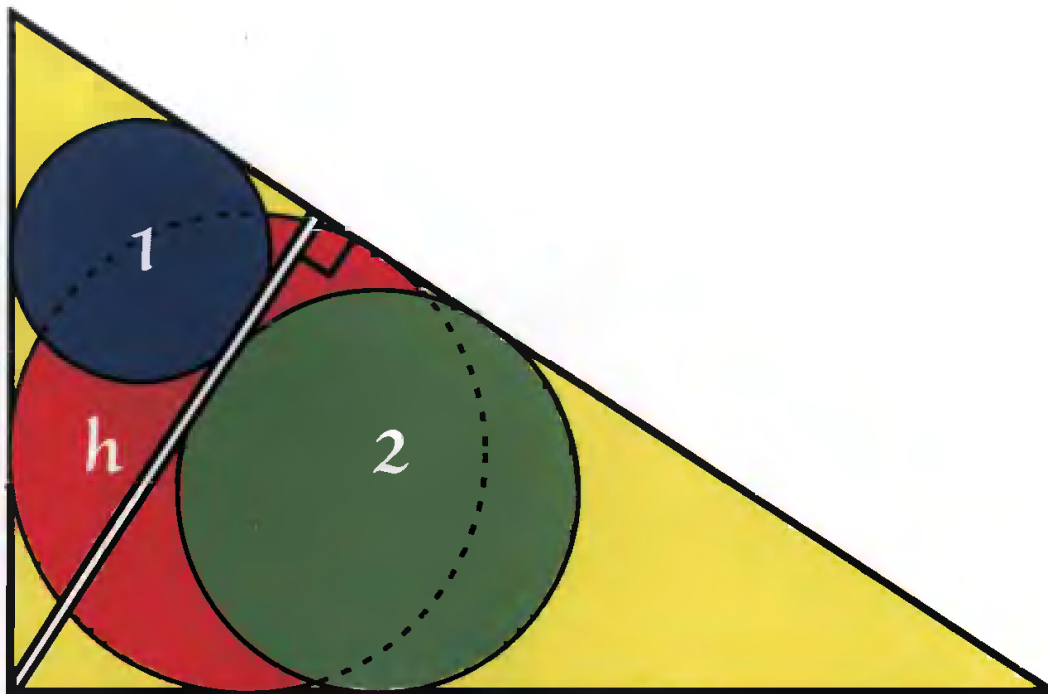


$$r_1 = r_2$$

solution p. 65



5 Trois cercles dans un triangle rectangle

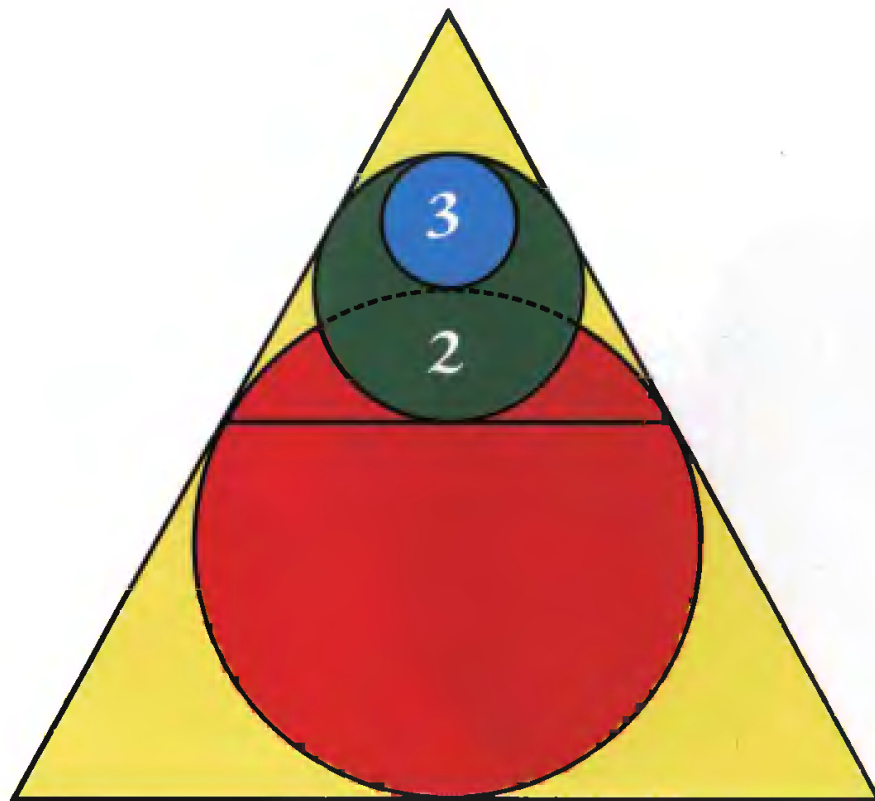


$$r + r_1 + r_2 = h$$

solution p. 67



6 Trois cercles dans un triangle isocèle



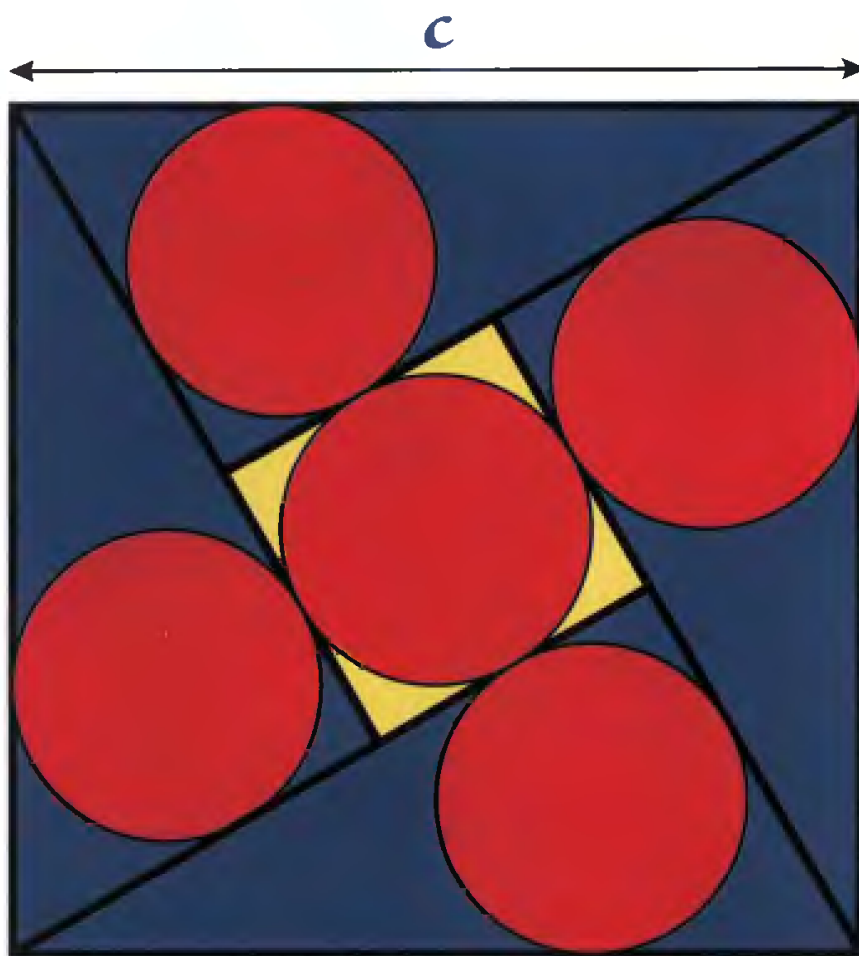
Le triangle est isocèle.

Que vaut r_3/r_2 ?

solution p. 69



7 Cinq cercles dans un carré

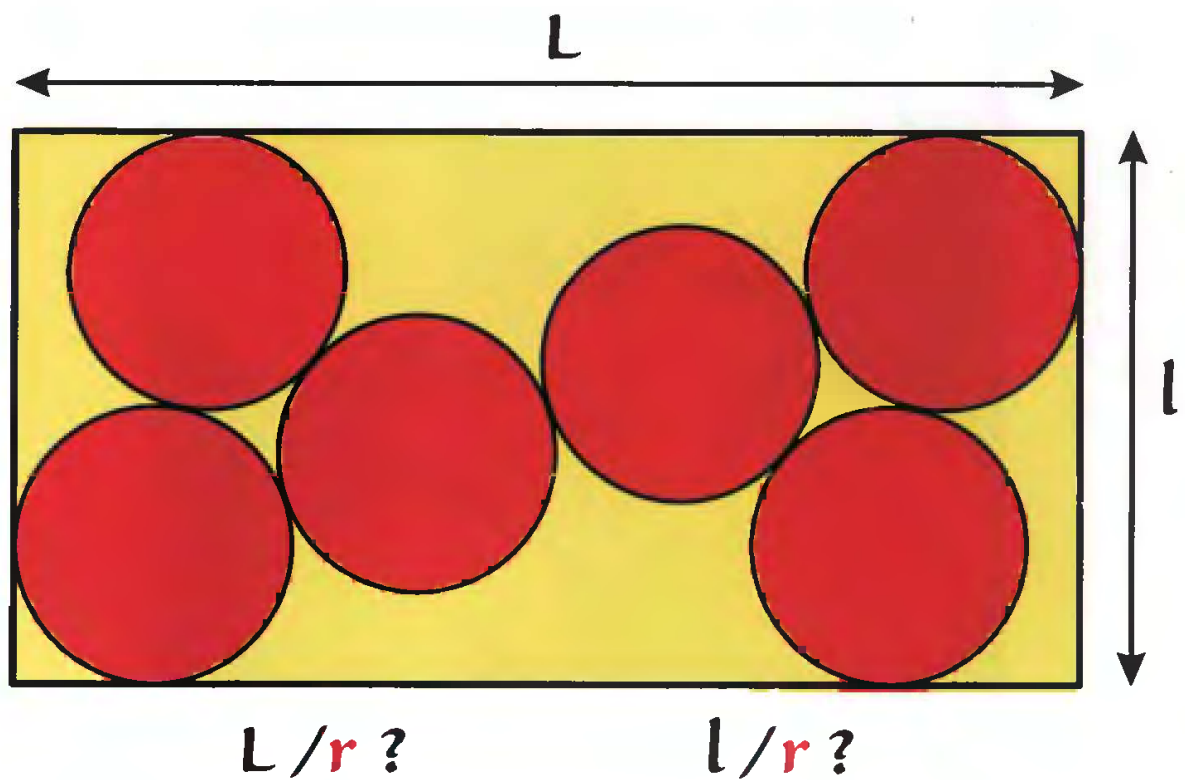


$$r / c = ?$$

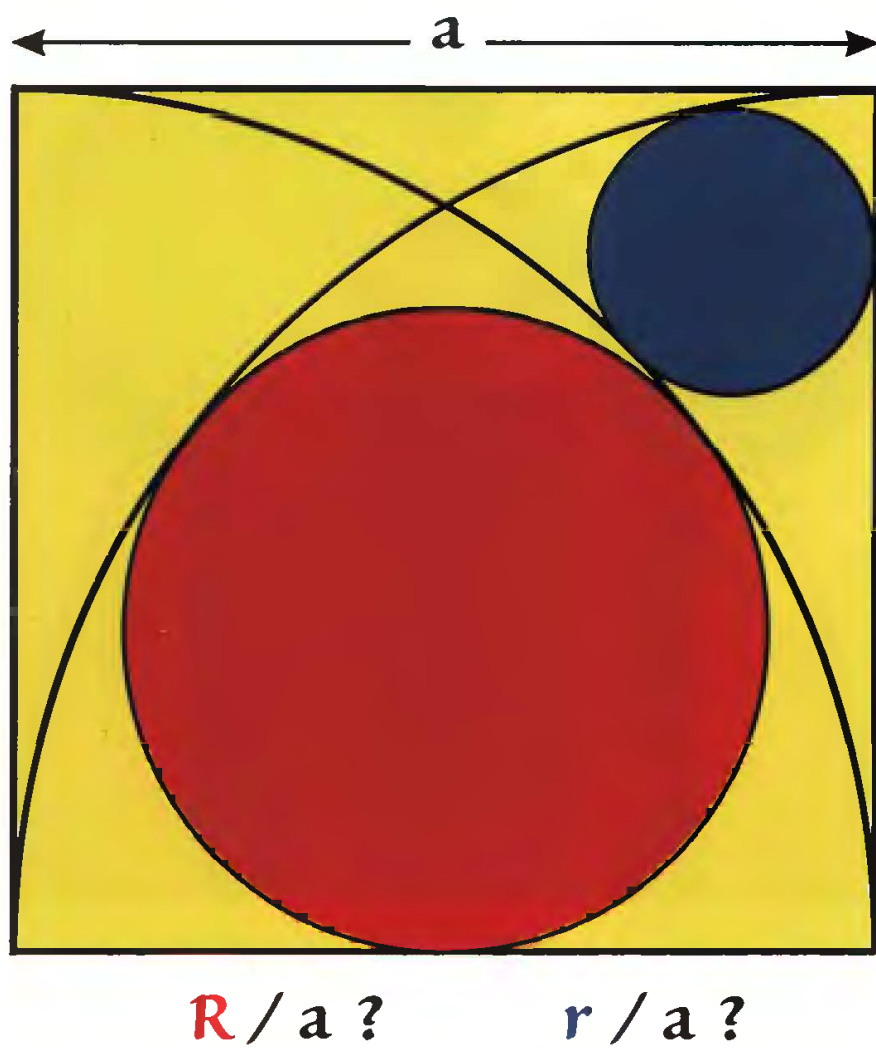
solution p. 72



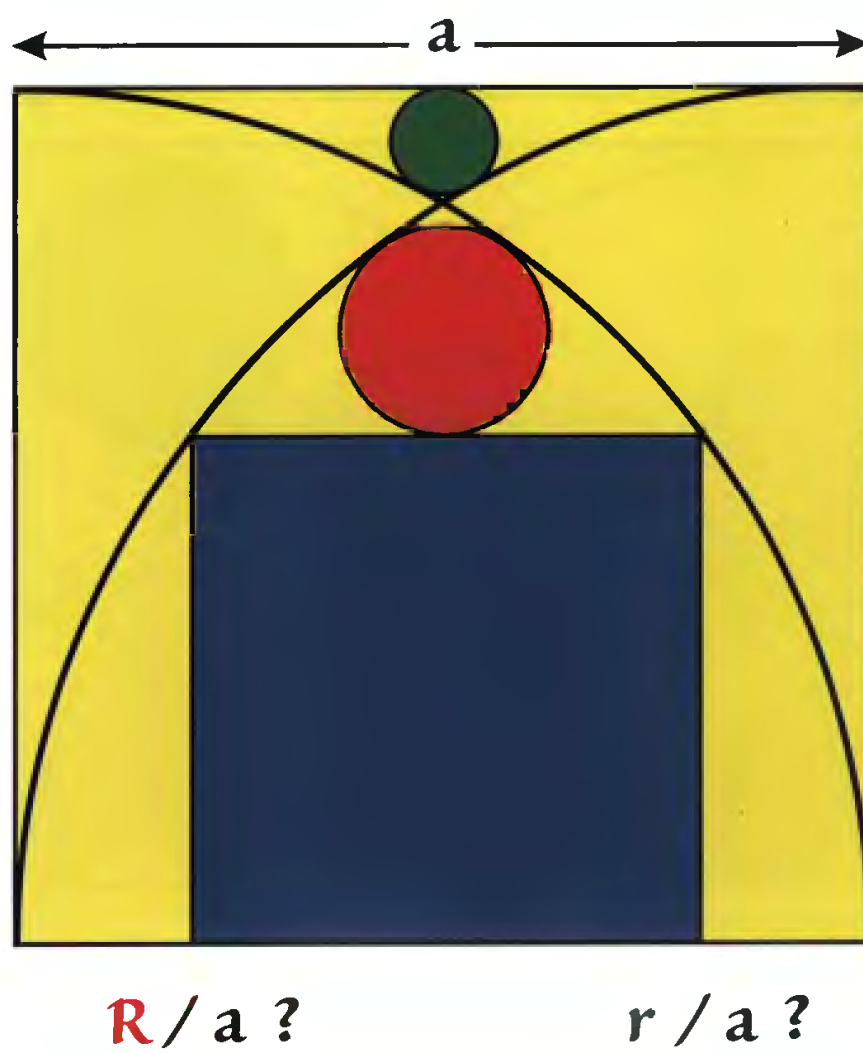
8 Six cercles dans un rectangle



9 L'ogive gothique



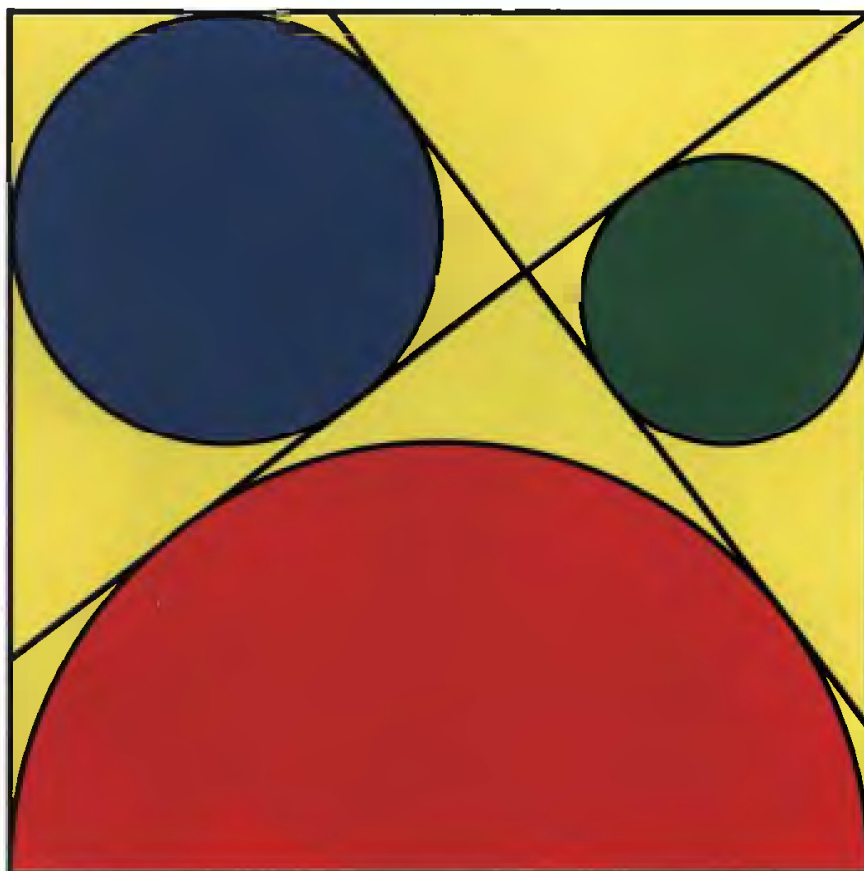
10 L'ogive gothique (II)



30

solution p. 81

11 Deux cercles et un demi-cercle

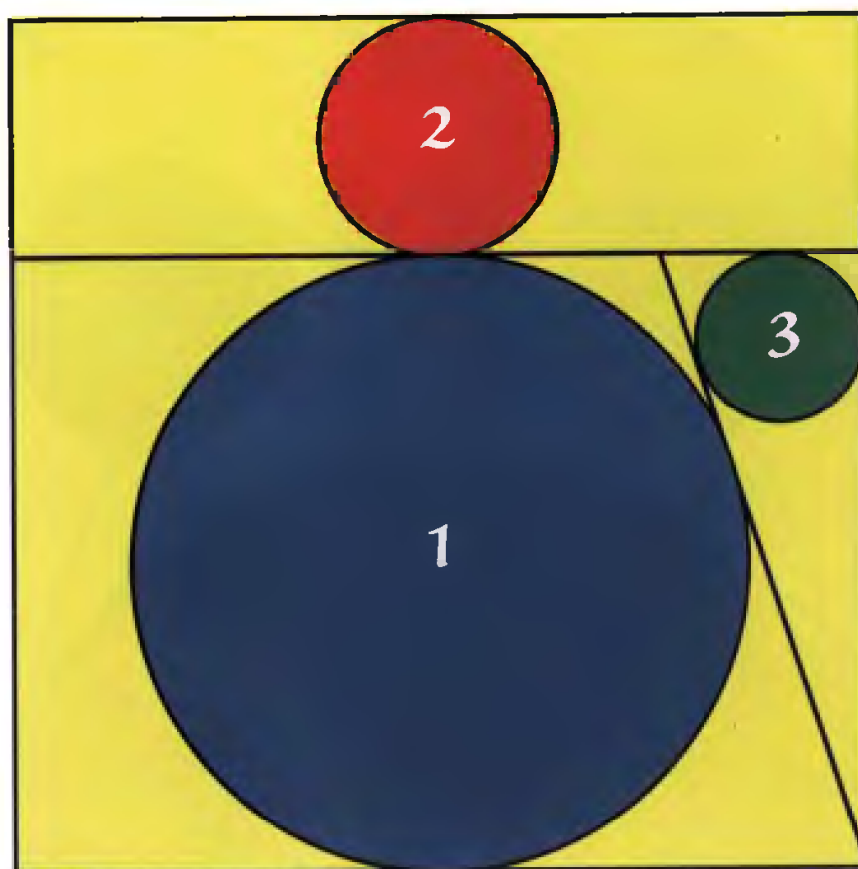


$$R/r = 3/2$$

solution p. 85



12 Le carré coupé en deux

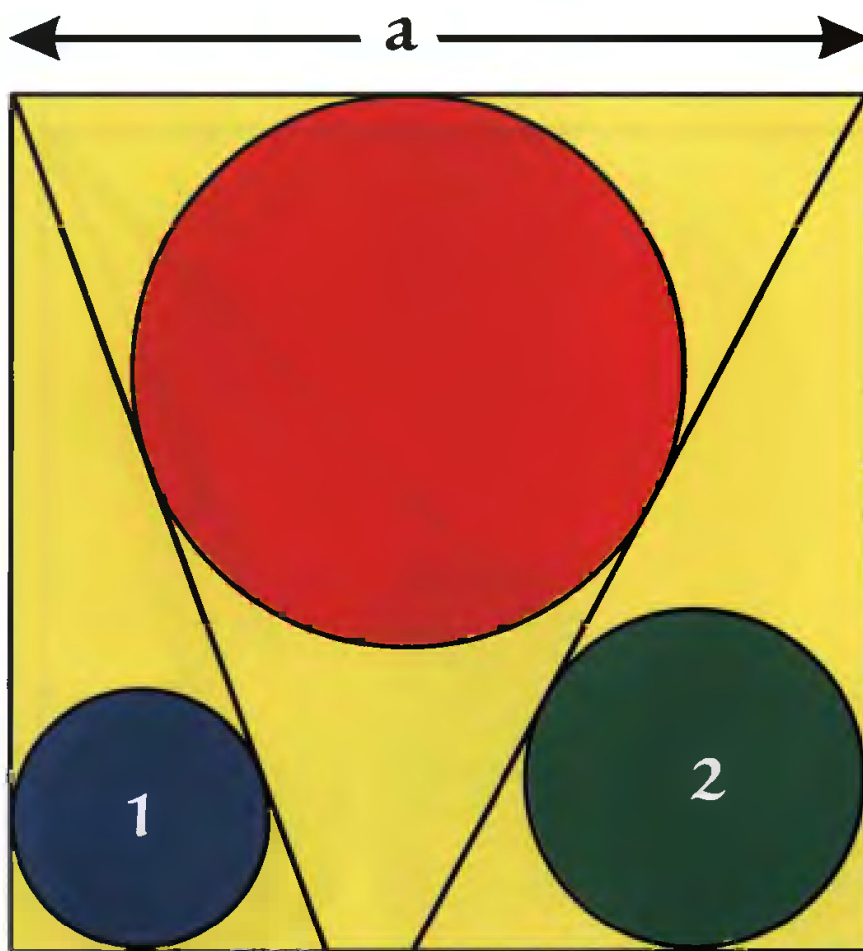


$$1/r_3 = 1/r_1 + 1/r_2$$

solution p. 89



13 Trois cercles dans un carré

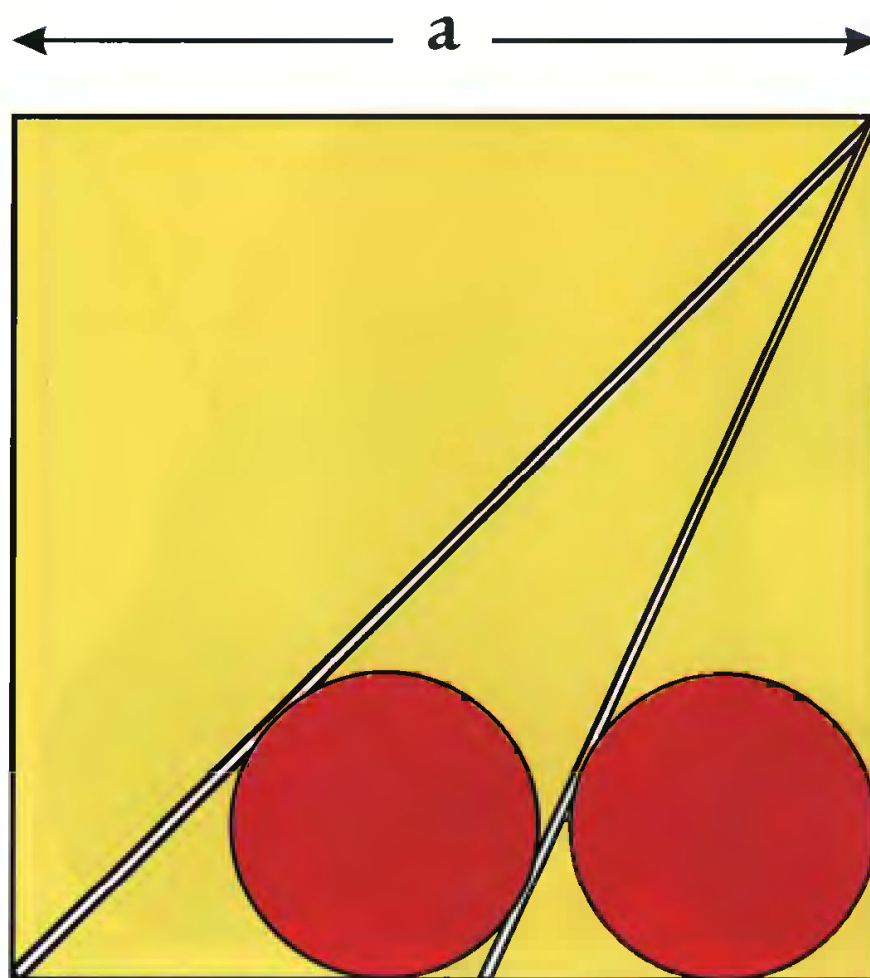


$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a - 2r_1} + \frac{1}{a - 2r_2}$$

solution p. 92



14 Deux cercles égaux dans un carré

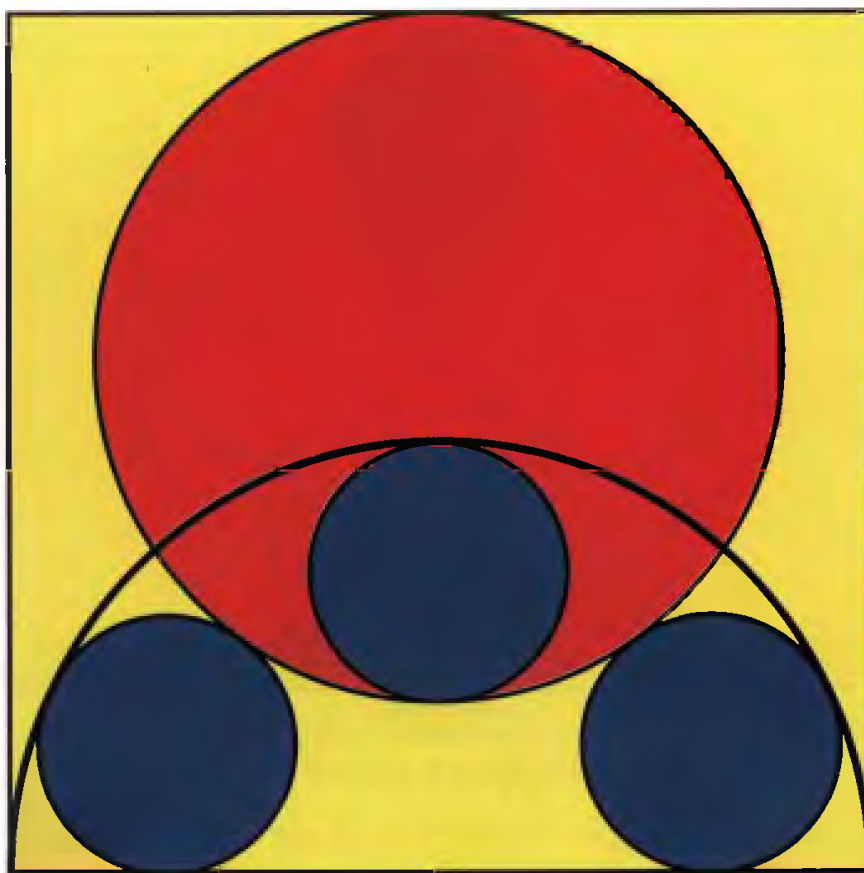


$$r / a = ?$$

solution p. 95



15 Soleil levant



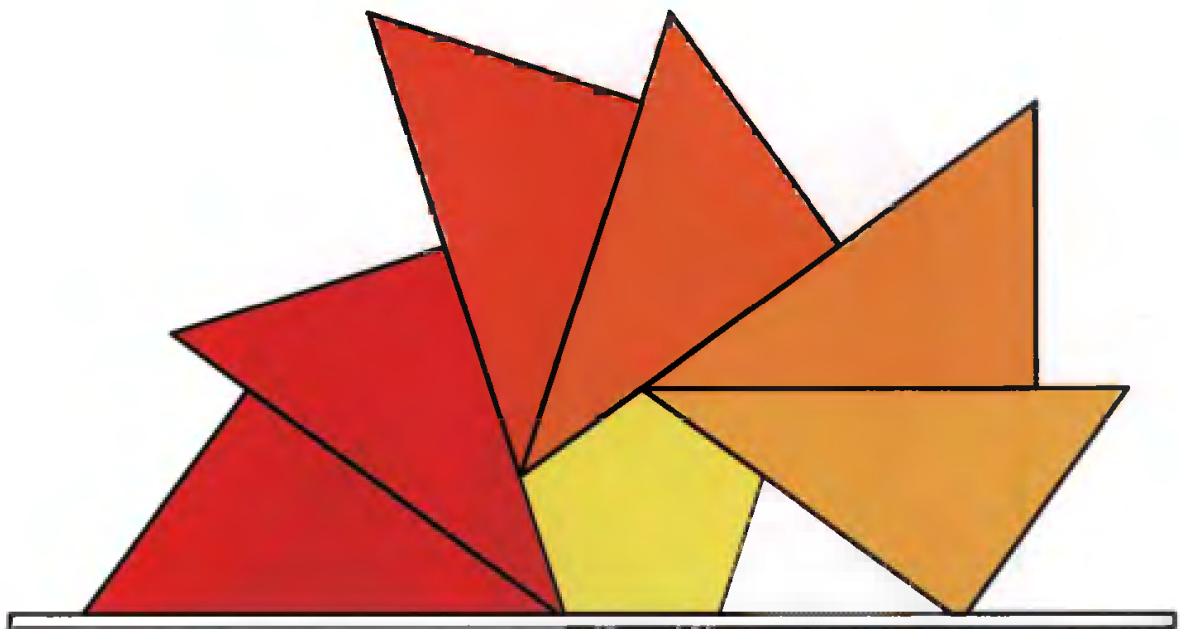
$$R/r = 8/3$$

solution p. 99

16 L'éventail des triangles rectangles



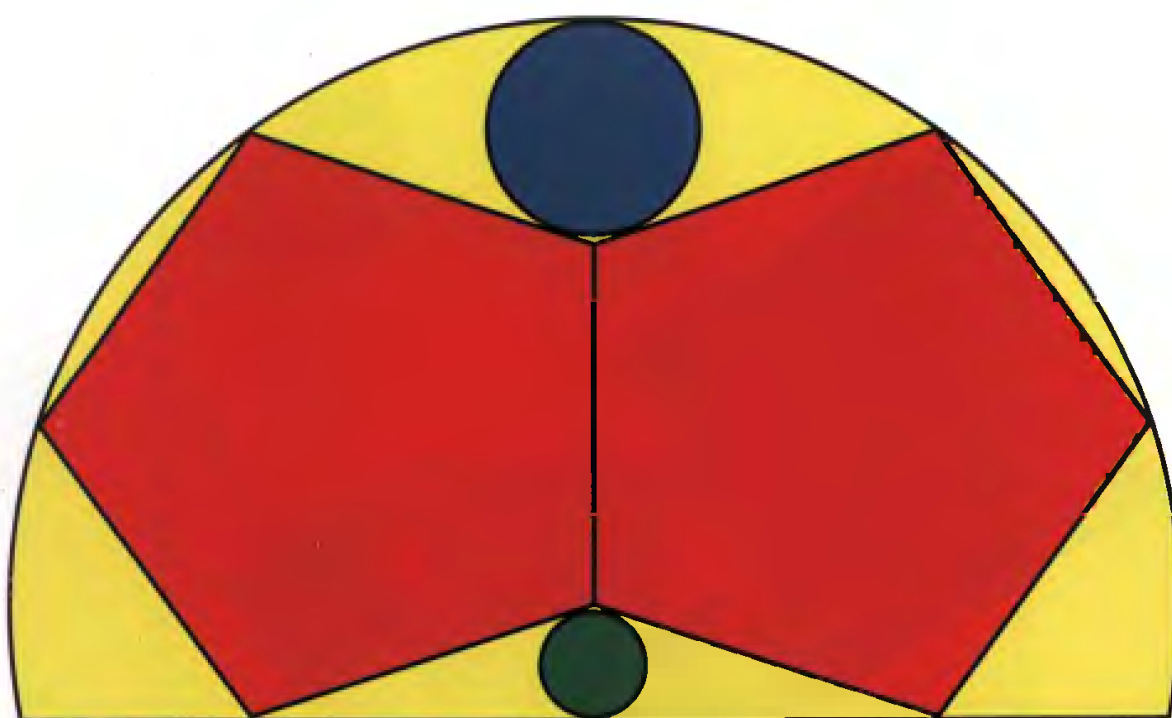
36



Quel est le rapport entre les longueurs
de l'hypoténuse des triangles et du côté du pentagone ?

solution p. 102

17 Deux pentagones réguliers

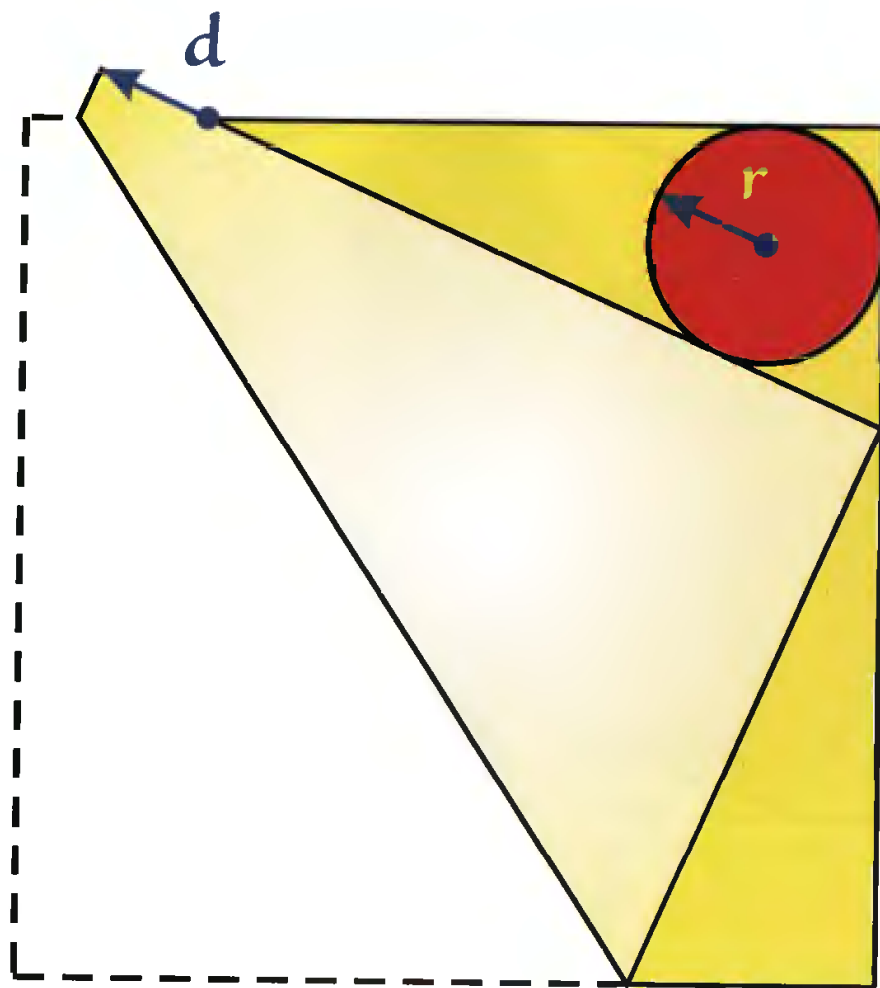


37

$$R/r = ?$$

solution p. 105

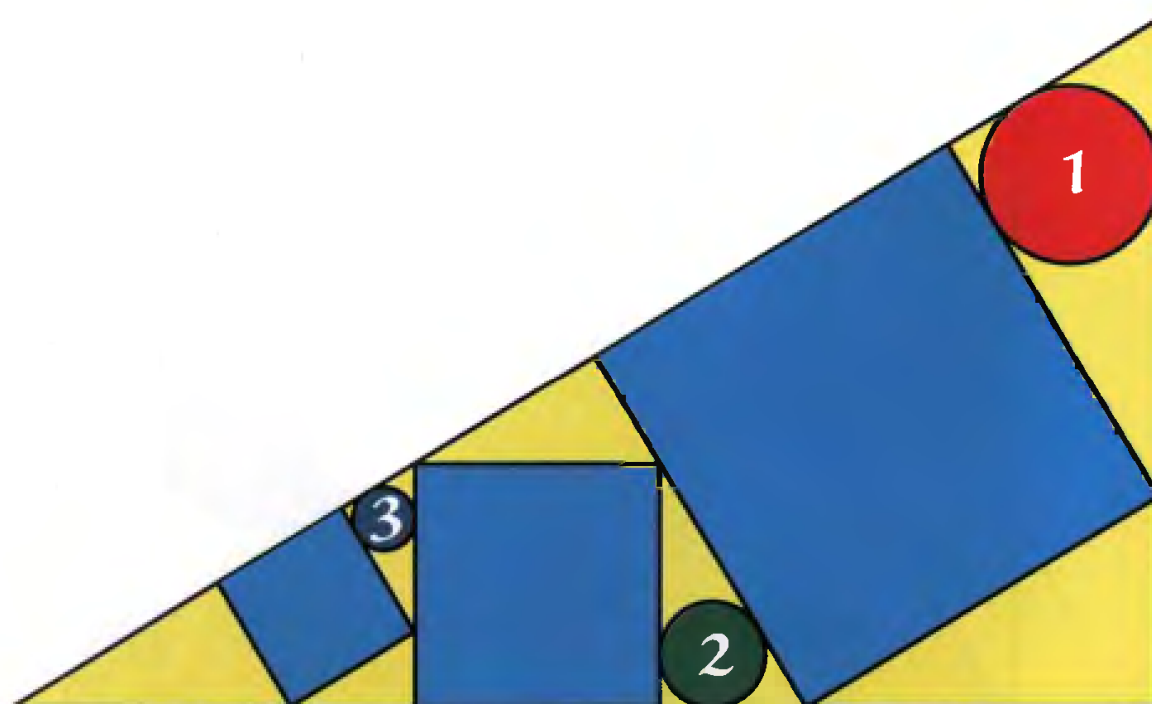
18 Origami et sangaku



$$r = d$$

solution p. 108

19 Empilement de carrés

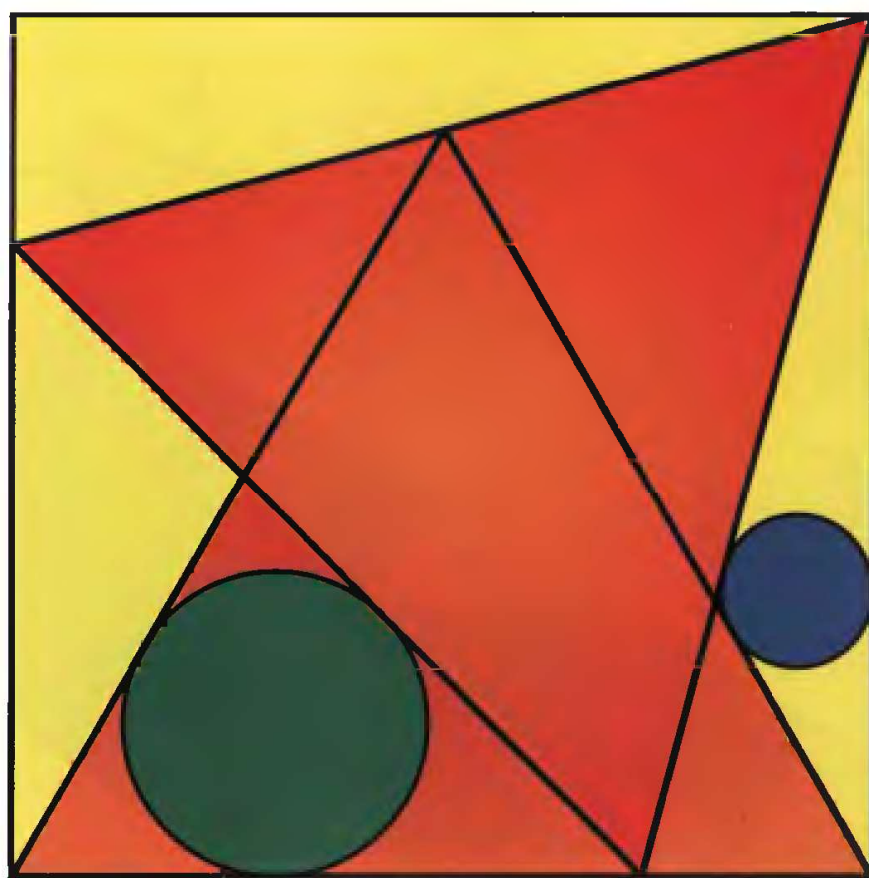


$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$$

solution p. 112



20 Le problème des deux cercles



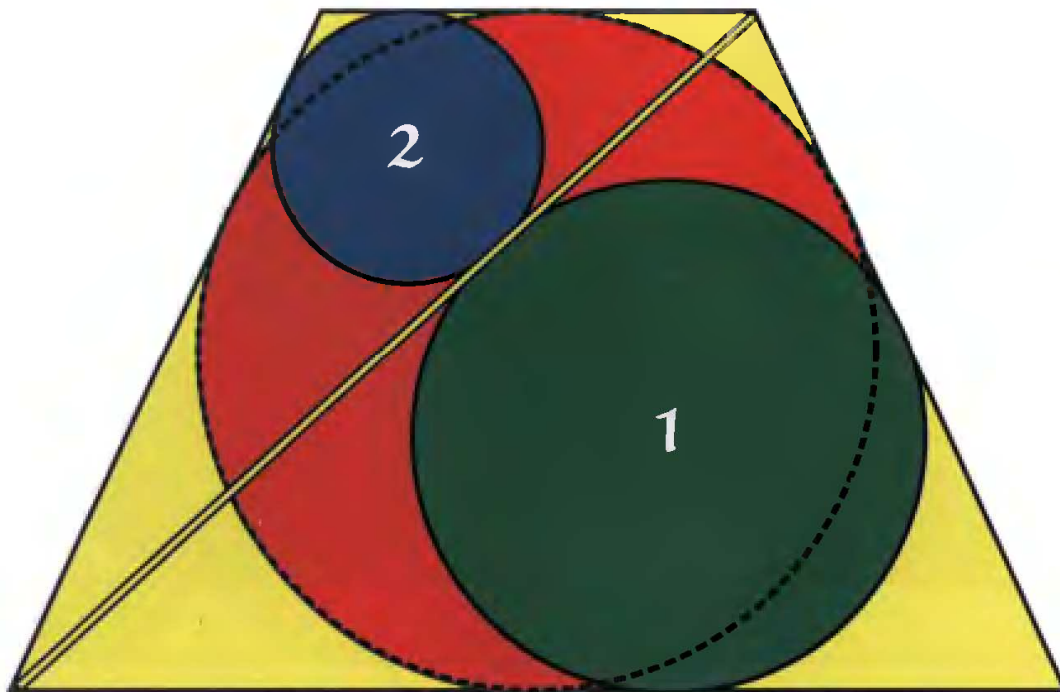
Les triangles sont équilatéraux

$$R/r = 2$$

solution p. 115



21 Le trapèze isocèle



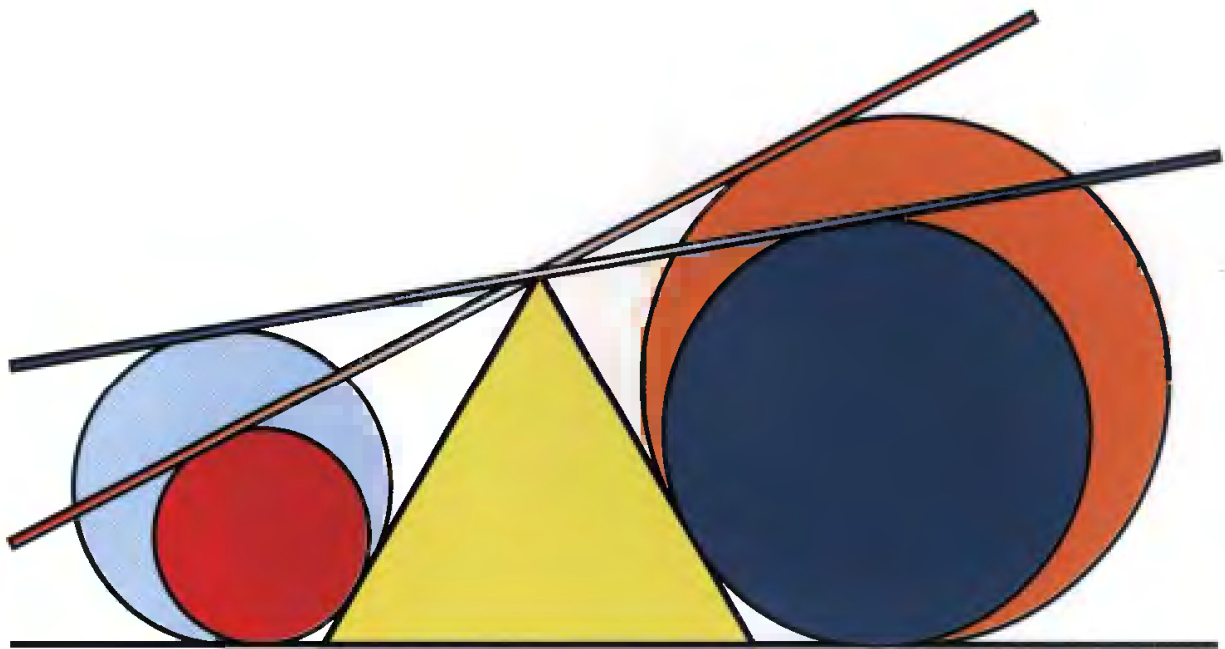
Exprimer R en fonction de r_1 et de r_2

solution p. 119



22

Une somme constante

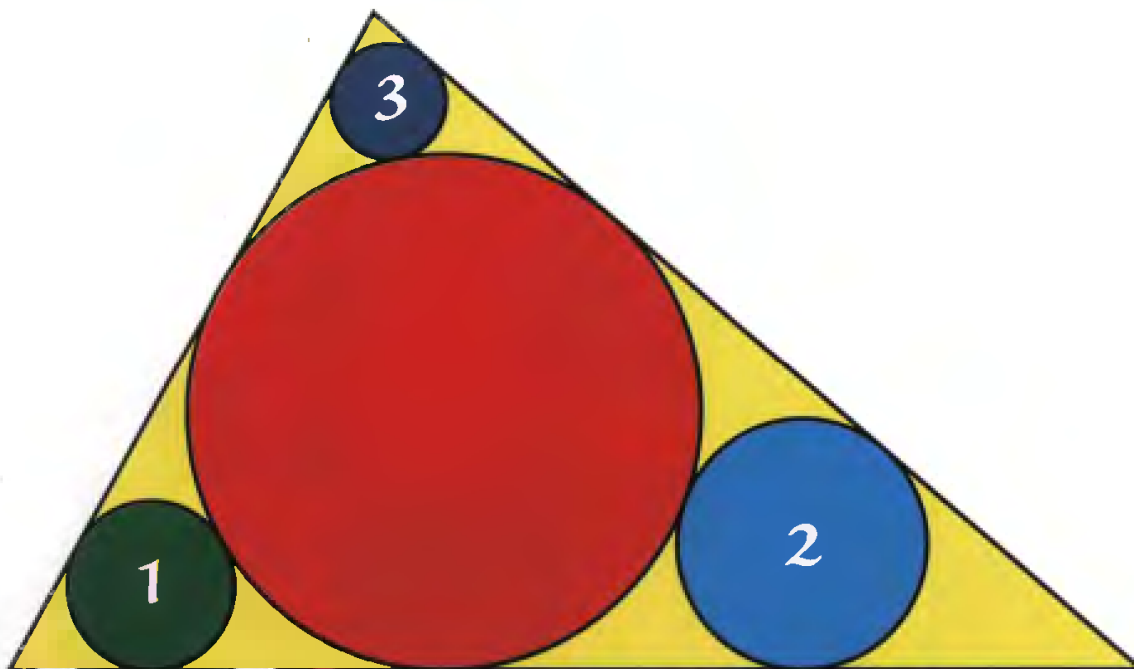


$$r_1 + r_2 = r'_1 + r'_2$$

Pour toute droite passant par le sommet du triangle équilatéral,
la somme des deux rayons des cercles est constante.

solution p. 122

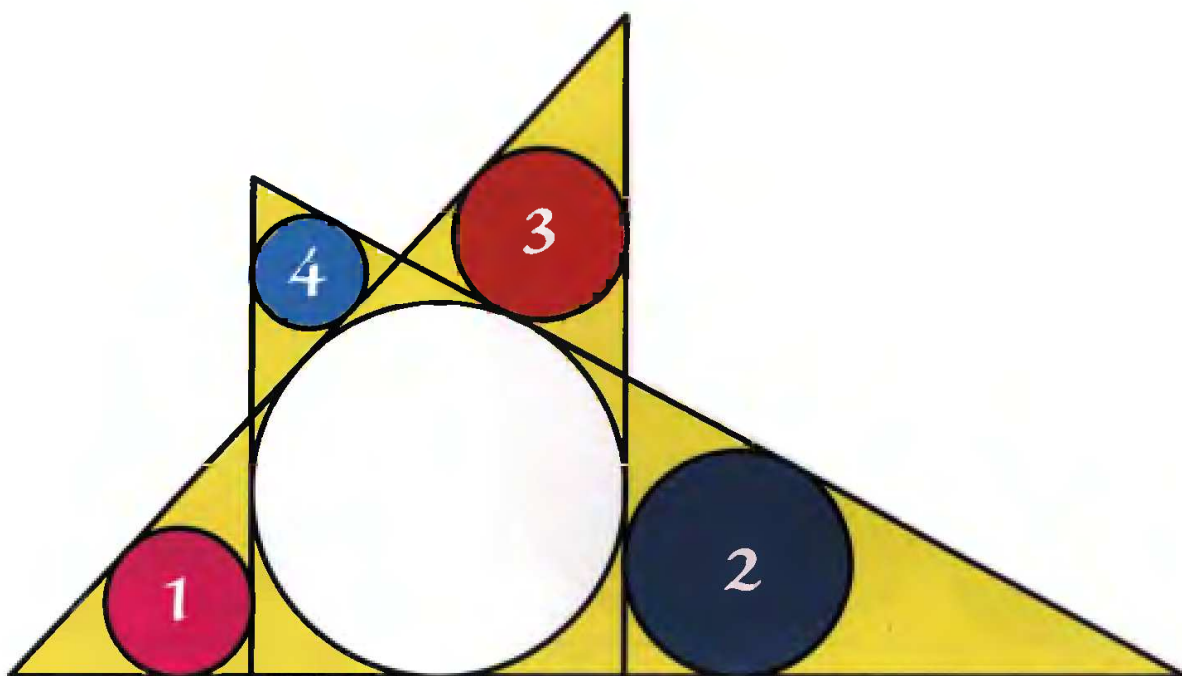
23 Quatre cercles dans un triangle



$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

solution p. 125

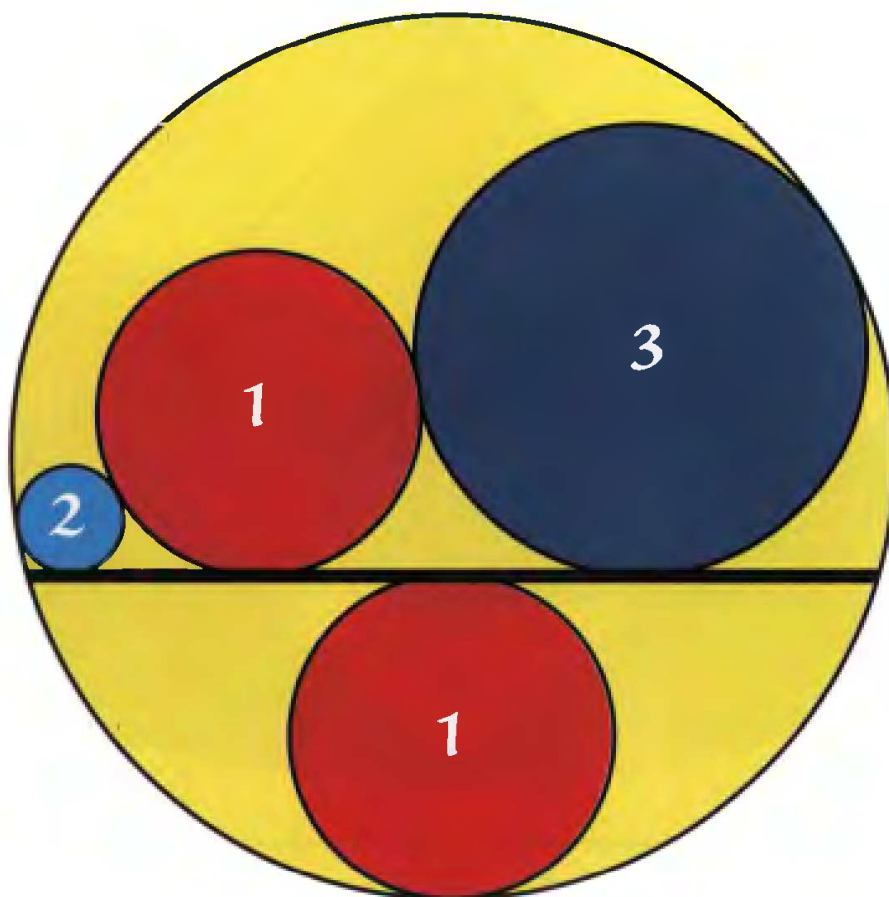
24 Deux triangles rectangles, cinq cercles



$$r_1 r_3 = r_2 r_4$$

solution p. 129

25 Trois cercles tangents deux à deux

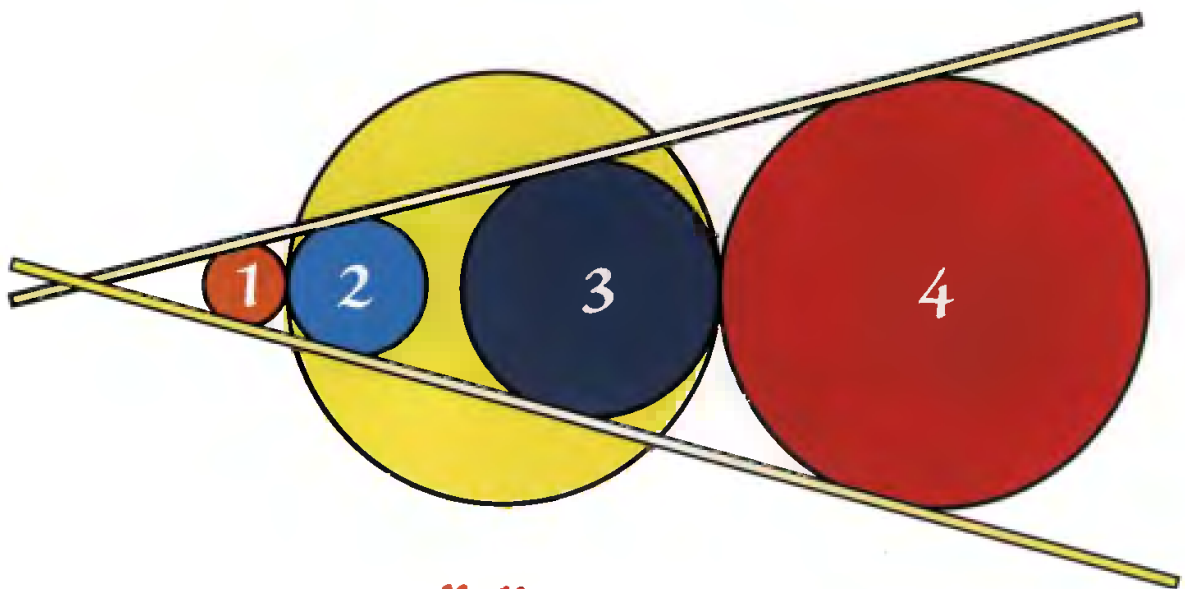


45

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

solution p. 133

26 Le théorème d'Ohara

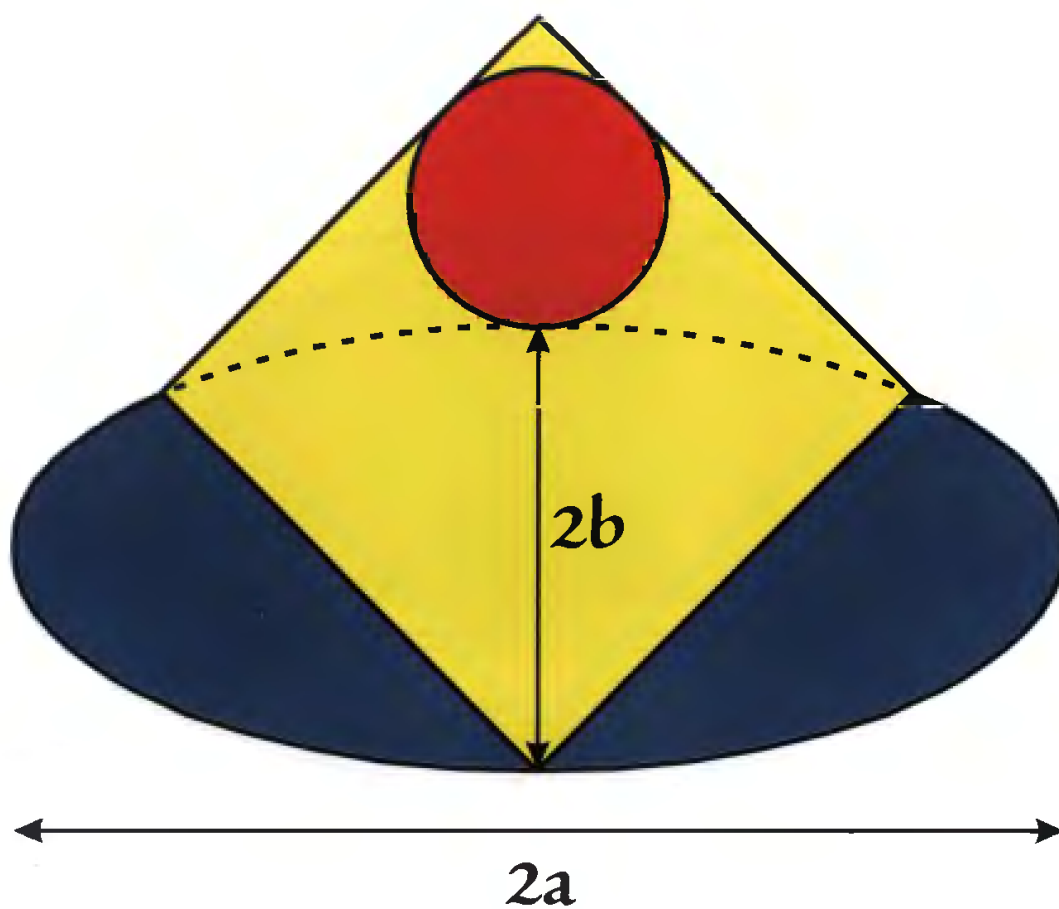


$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

solution p. 136



27 Une ellipse, un carré et un cercle

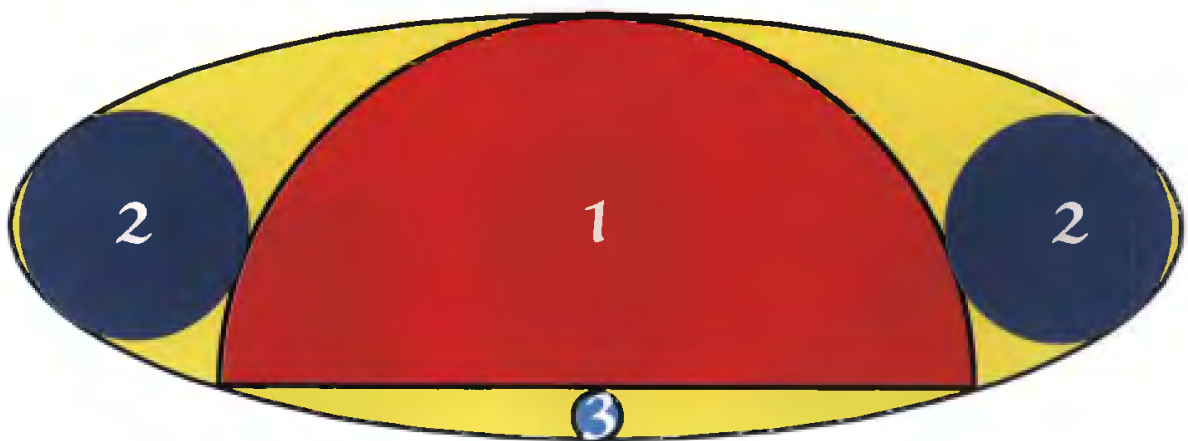
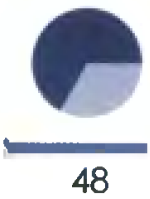


Calculer r en fonction de a et b

solution p. 139



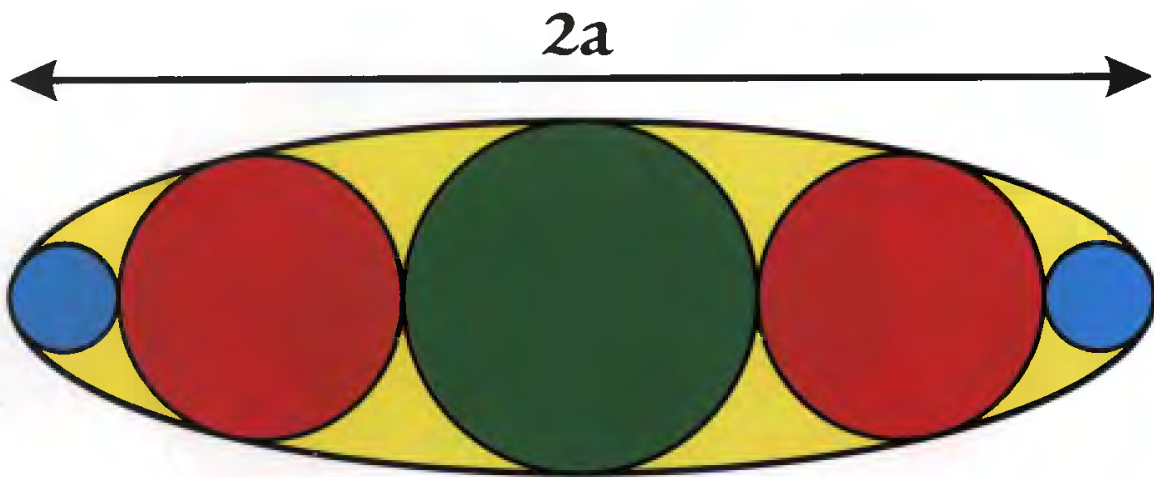
28 L'ellipse et le demi-cercle



$$r_1 = 2r_2 + 6r_3$$

solution p. 142

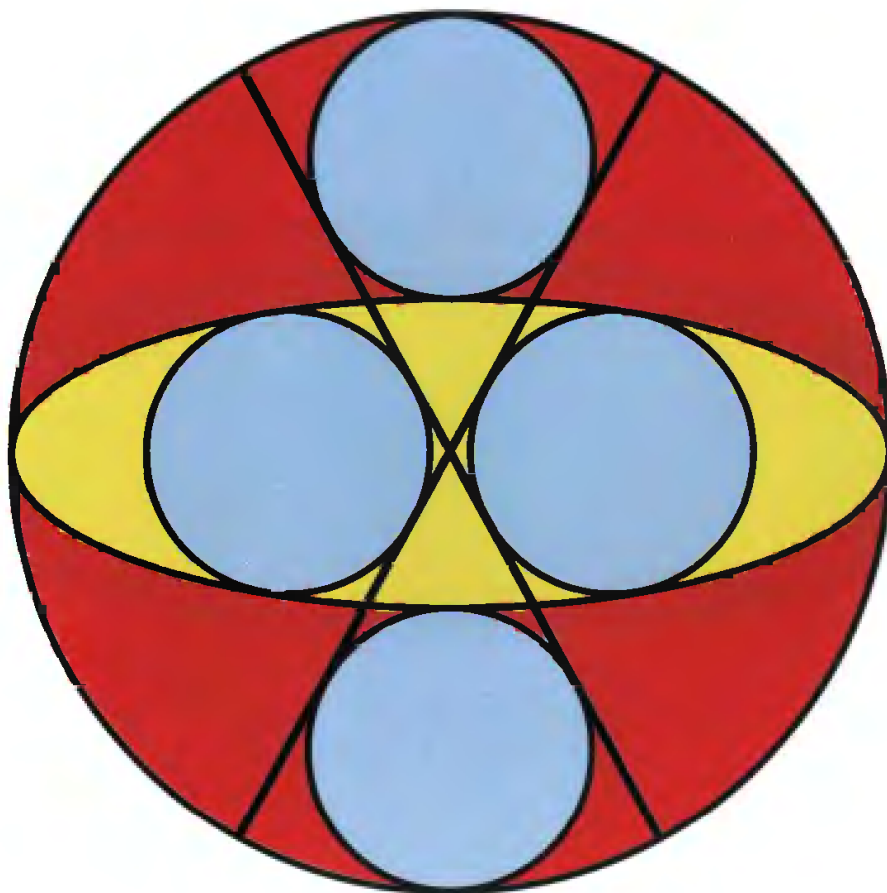
29 Une chaîne de cercles dans une ellipse



$$r = a/4$$



30 Une ellipse et quatre cercles tangents

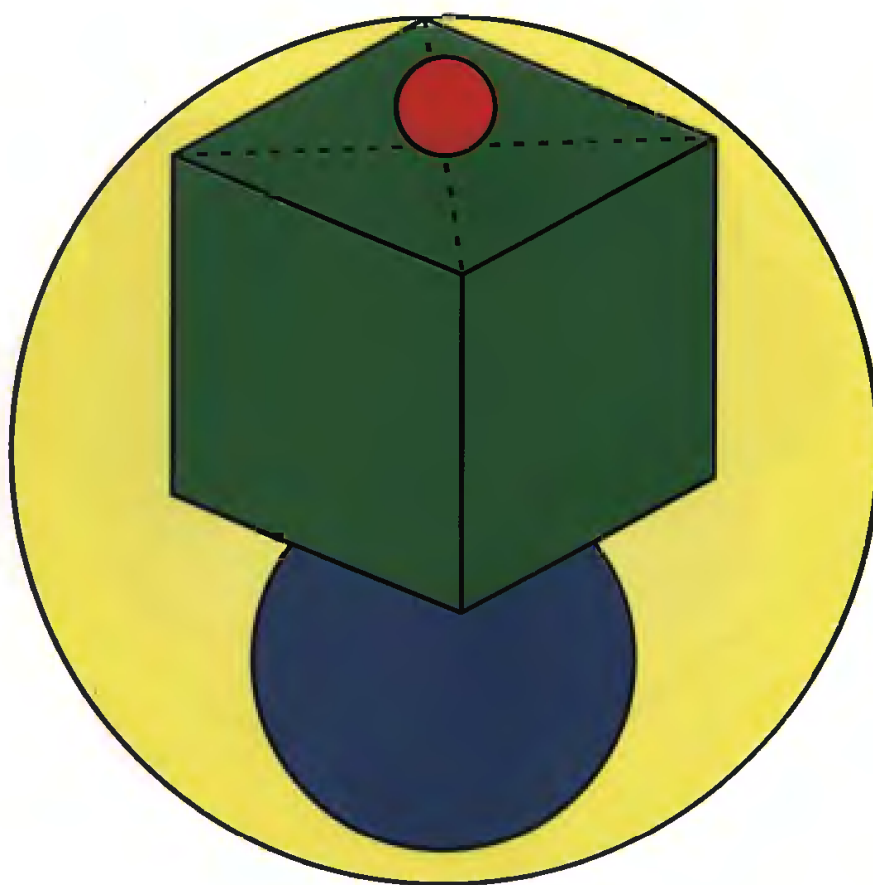


$$R/r = ?$$

solution p. 148



31 Un cube et trois sphères



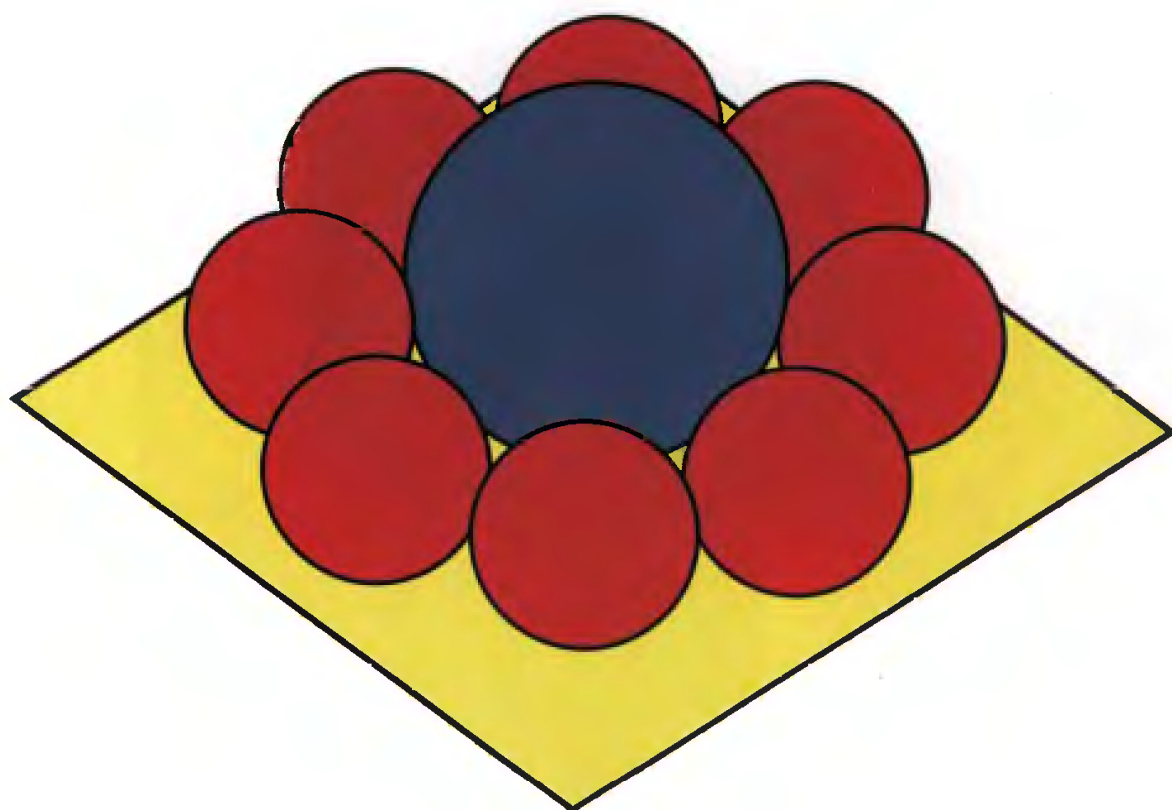
51

L'arête du cube et le diamètre de la sphère bleue
sont de même longueur.

Que vaut r/R ?

solution p. 151

32 Neuf sphères

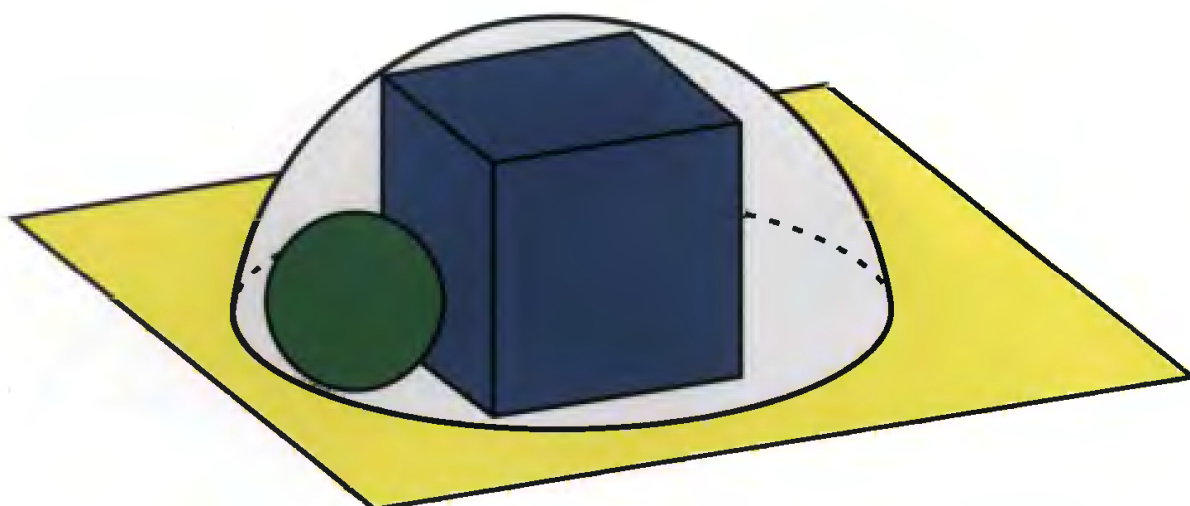


$$R/r = ?$$

solution p. 154



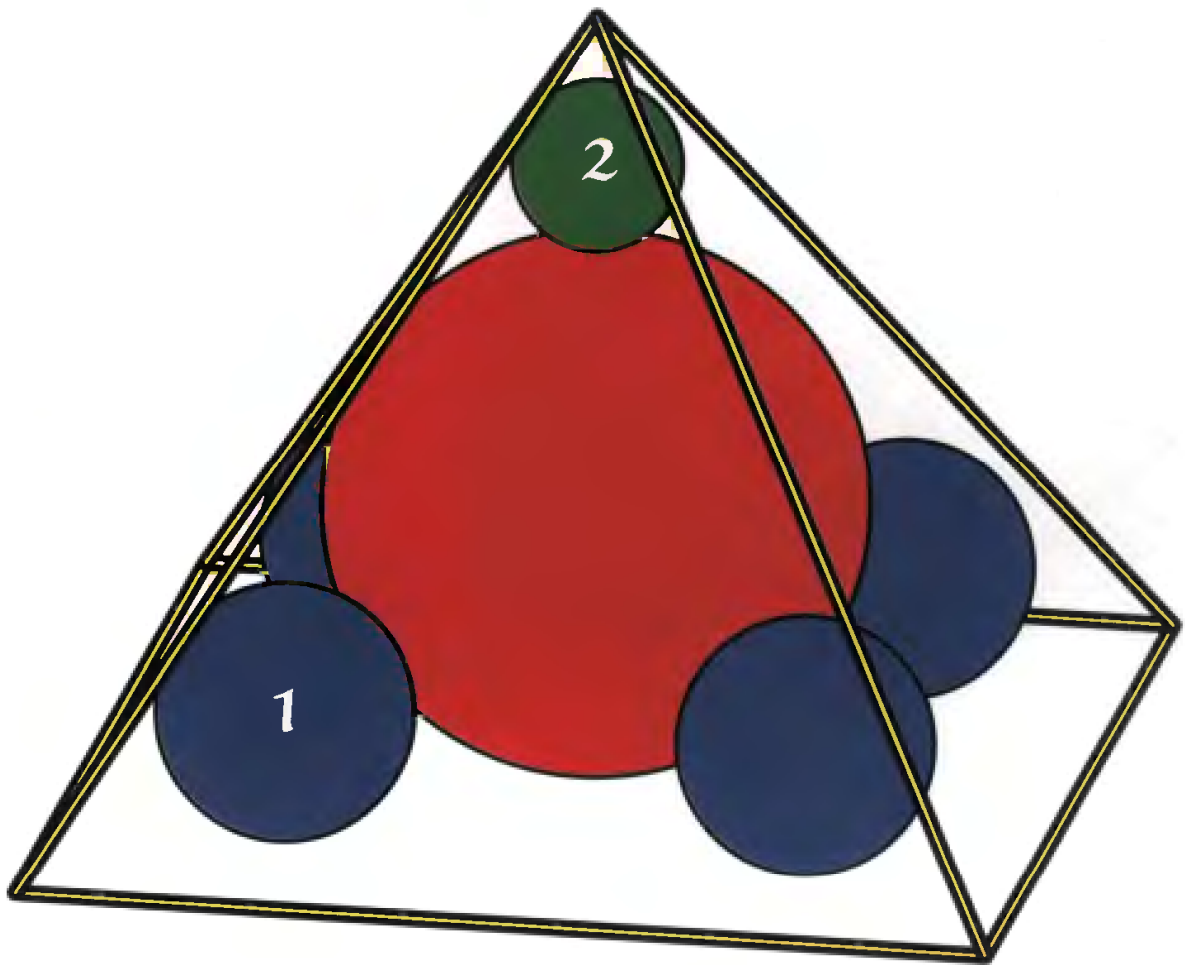
33 La coupole



$$r/R = ?$$



34 La pyramide à base carrée

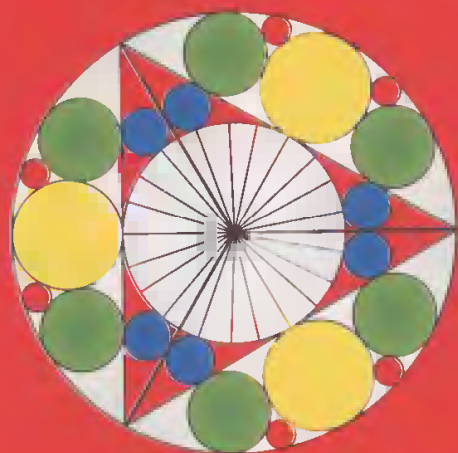


$$R = \sqrt{2r_1 r_2} + r_1$$

solution p. 158



Solutions



1 Wasan

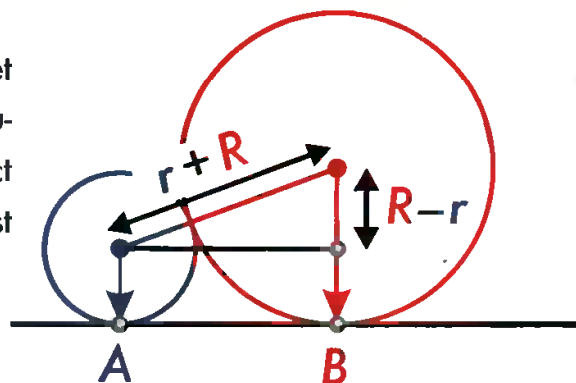
Son histoire

La tablette date de 1820. Elle est exposée dans la préfecture de Miyagi ^[2]. Il s'agit d'un résultat classique des mathématiques japonaises de l'époque Edo, mathématiques connues sous le nom de *Wasan* ^[1].



L'énigme

On considère deux cercles de rayons r et R , tangents entre eux. On demande de prouver que la distance entre les points de contact d'une tangente commune avec ces cercles est égale à $2\sqrt{rR}$.



59

Solution

Pour établir cette égalité, on utilise le fait que lorsque deux cercles sont tangents, le point de contact des deux cercles est aligné avec les centres des cercles. On applique le théorème de Pythagore pour établir que :

$$AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2 = 4Rr$$

Cette relation sera utilisée à plusieurs reprises pour la résolution des sangaku.

2

Les trois cercles

Son histoire

Le sangaku le plus célèbre. La tablette date de 1824.

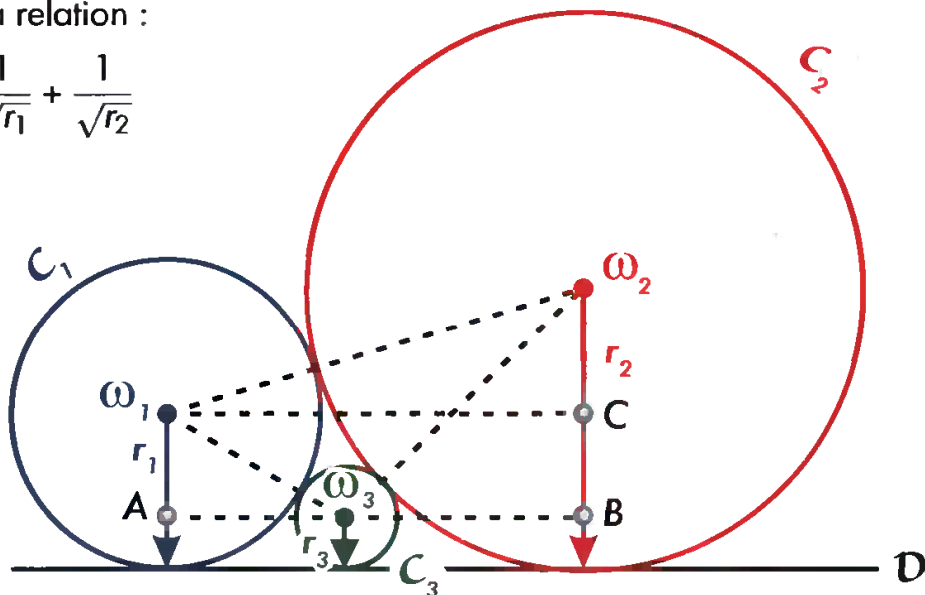
Elle est exposée dans la préfecture de Gunma [2].



L'énigme

On considère trois cercles C_1 , C_2 et C_3 tangents à une droite D tels que C_1 et C_2 soient tangents entre eux extérieurement et C_3 soit tangent à C_1 et C_2 . On demande de prouver que les rayons r_1 , r_2 et r_3 des trois cercles sont liés par la relation :

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$



Solution

Les notations sont celles de la figure. On applique la relation établie dans le premier sangaku aux cercles C_1 et C_2 , puis aux cercles C_1 et C_3 et par symétrie des rôles à C_2 et C_3 . On obtient alors :

$$AB = 2\sqrt{r_1 r_2}, \quad A\omega_3 = 2\sqrt{r_1 r_3}, \quad B\omega_3 = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Puisque $AB = A\omega_3 + B\omega_3$, il vient $\sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{r_1 r_3} + \sqrt{r_2 r_3}$, ce qui, en divisant par $\sqrt{r_1 r_2 r_3}$ donne :

$$\frac{1}{\sqrt{r_3}} = \frac{1}{\sqrt{r_1}} + \frac{1}{\sqrt{r_2}}$$

On peut donner une solution en nombre entier, comme c'était souvent le cas dans les problèmes posés sur les tablettes : $r_1 = 36$, $r_2 = 9$ et $r_3 = 4$.

3

Trois cercles entre deux baguettes

Son histoire

Un problème proposé sur une tablette datée de 1881 et exposée dans la préfecture d'Ibaraki. Le même problème est cependant déjà discuté dans un ouvrage publié antérieurement [2]. De nombreux sangaku semblent avoir été copiés et se retrouvent dans différents lieux, et sont parfois attribués à divers auteurs.



L'énigme

62

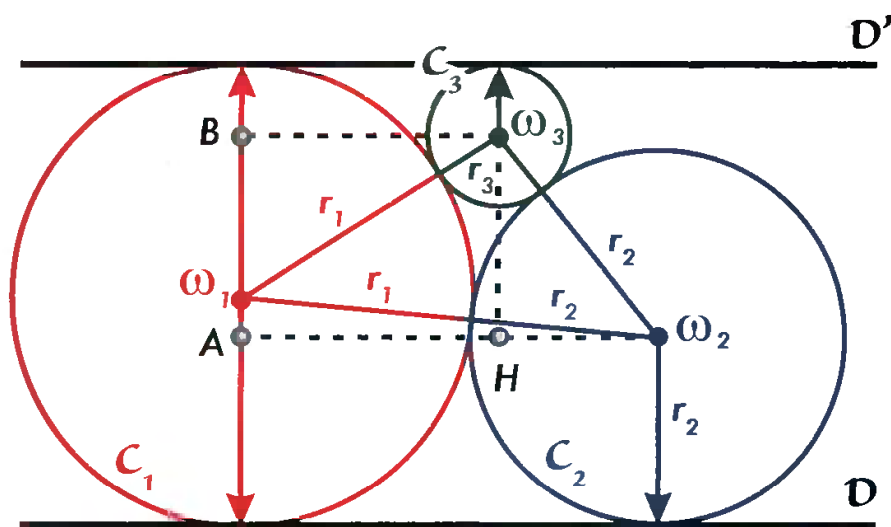
Soient $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ deux droites parallèles, le cercle $\mathcal{C}_1$ est tangent à ces deux droites. Les cercles $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ sont tangents entre eux, tangents à $\mathcal{C}_1$ et tangents respectivement à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Si r_i est le rayon de $\mathcal{C}_i$, on demande de prouver la relation suivante entre les rayons :

$$r_1^2 = 4r_2r_3$$

Solution

Les rôles de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ étant symétriques ainsi que ceux de $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$, on peut supposer que $r_3 < r_2$, et ainsi on est bien dans la configuration de la figure. Le cas où $r_2 = r_3$ est simple, puisqu'il donne $r_2 = r_3 = \frac{r_1}{2}$, soit $r_1^2 = 4r_2r_3$.

Les notations sont celles de la figure, en particulier ω_i est le centre du cercle C_i , A et B sont les projections de ω_2 et ω_3 sur la perpendiculaire commune à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ passant par ω_1 .



On a immédiatement :

$$\omega_1 B = r_1 - r_3 \quad \text{et} \quad \omega_1 A = r_1 - r_2$$

Par applications du théorème de Pythagore ou du premier sangaku, on obtient :

$$\omega_3 B = \sqrt{(r_1 + r_3)^2 - (r_1 - r_3)^2} = 2\sqrt{r_1 r_3}$$

$$\omega_2 A = 2\sqrt{r_1 r_2}$$

Si H est la projection de ω_3 sur la parallèle à $\mathcal{D}$ passant par ω_2 , dans le triangle rectangle $\omega_2 \omega_3 H$, on a :

$$\omega_2 \omega_3 = r_2 + r_3$$

$$\omega_2 H = \omega_2 A - \omega_3 B = 2\sqrt{r_1} (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})$$

$$\omega_3 H = 2r_1 - r_2 - r_3$$

La relation de Pythagore conduit alors à l'égalité :

$$\begin{aligned} (r_2 + r_3)^2 &= 4r_1 (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2 + (2r_1 - r_2 - r_3)^2 \\ &= 4r_1 (\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2 + 4r_1^2 - 4r_1 (r_2 + r_3) + (r_2 + r_3)^2 \end{aligned}$$

soit

$$(\sqrt{r_2} - \sqrt{r_3})^2 + r_1 - (r_2 + r_3) = 0 \iff r_1 = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

qui équivaut à :

$$r_1^2 = 4r_2 r_3$$

4 Cercles et baguettes

Son histoire

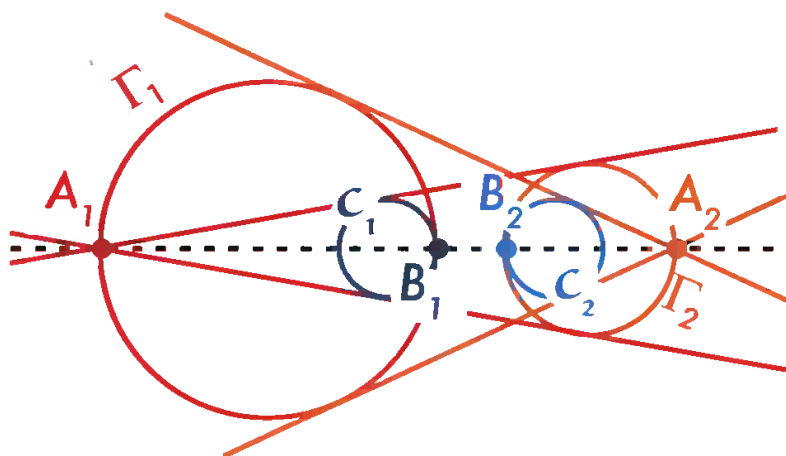
La tablette, datée de 1842, n'existe plus. Elle était située dans la préfecture de Aichi [2].



L'énigme

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles. La droite qui relie les centres de ces deux cercles les coupe en quatre points A_1, B_1, B_2, A_2 selon la figure suivante. On définit le cercle C_2 tangent intérieurement à Γ_2 et aux deux tangentes à Γ_2 issues de A_2 . On définit de même, par symétrie des rôles, le cercle C_1 . Le sangaku demande de prouver que les rayons r_1 et r_2 de C_1 et C_2 sont égaux.

65



Les notations sont celles de la figure, en particulier O_1 est le centre de C_1 , r_1 son rayon, Ω_2 le centre de Γ_2 , enfin R_1 et R_2 désignent les rayons de Γ_1 et Γ_2 . Dans la figure suivante, le théorème de Thalès fournit l'égalité :

La symétrie du résultat par rapport aux deux indices montre que r_2 vaut la même valeur. On a donc prouvé que :

On peut constater que lorsque les deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents, la valeur commune de $\frac{1}{r_1}$ et de $\frac{1}{r_2}$ est égale à $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$.

5 Trois cercles dans un triangle rectangle

Son histoire

Un sangaku non daté qui était exposé dans la préfecture d'Iwate ^[2].



67

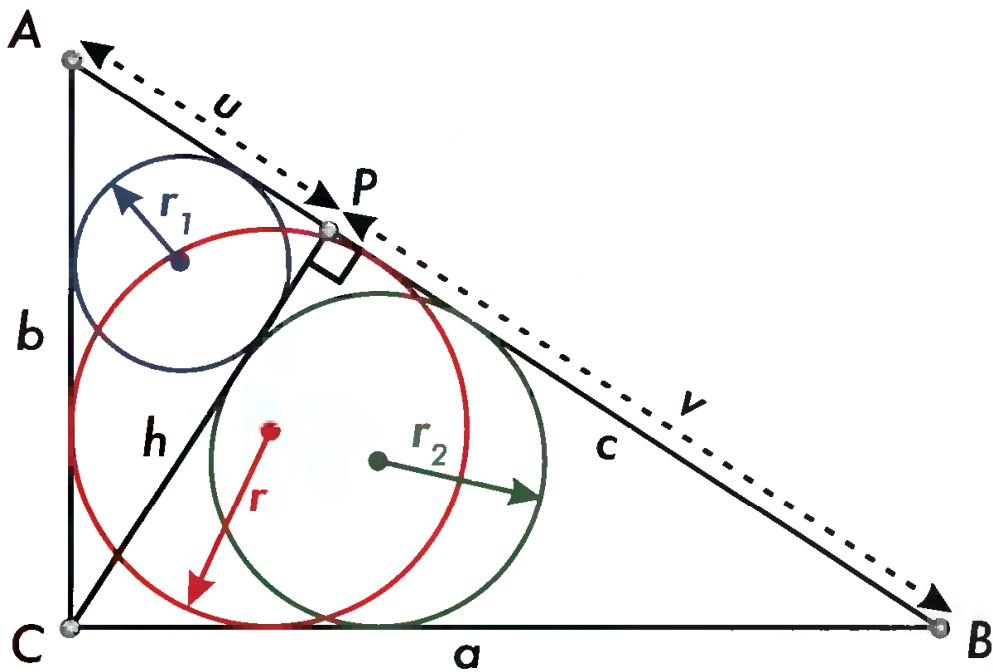
L'énigme

Soit ABC un triangle rectangle en C . On note r le rayon du cercle inscrit et P le pied de la hauteur issue de C . Si $h = CP$ et si r_1, r_2 désignent les rayons des cercles inscrits aux triangles ACP et BCP respectivement, ce sangaku demande de prouver la relation :

$$h = r + r_1 + r_2$$

Solution

Les notations sont celles de la figure.



Les trois triangles ABC , ACP et BCP sont rectangles, donc en posant $u = AP$ et $v = BP$:

$$r = \frac{a+b-c}{2}, \quad r_1 = \frac{u+h-a}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{v+h-b}{2}$$

Ainsi, puisque $c = u + v$:

$$r + r_1 + r_2 = h$$

6 Trois cercles dans un triangle isocèle

Son histoire

Un sangaku daté de 1872 et exposé dans le sanctuaire de Kumano-Jinja, ville de Karuizawa, préfecture de Nagano. On peut voir deux tablettes dans ce sanctuaire. Celle dont est extrait ce problème mesure 58 cm sur 238 cm et propose sept énigmes. On présente au lecteur la dernière.



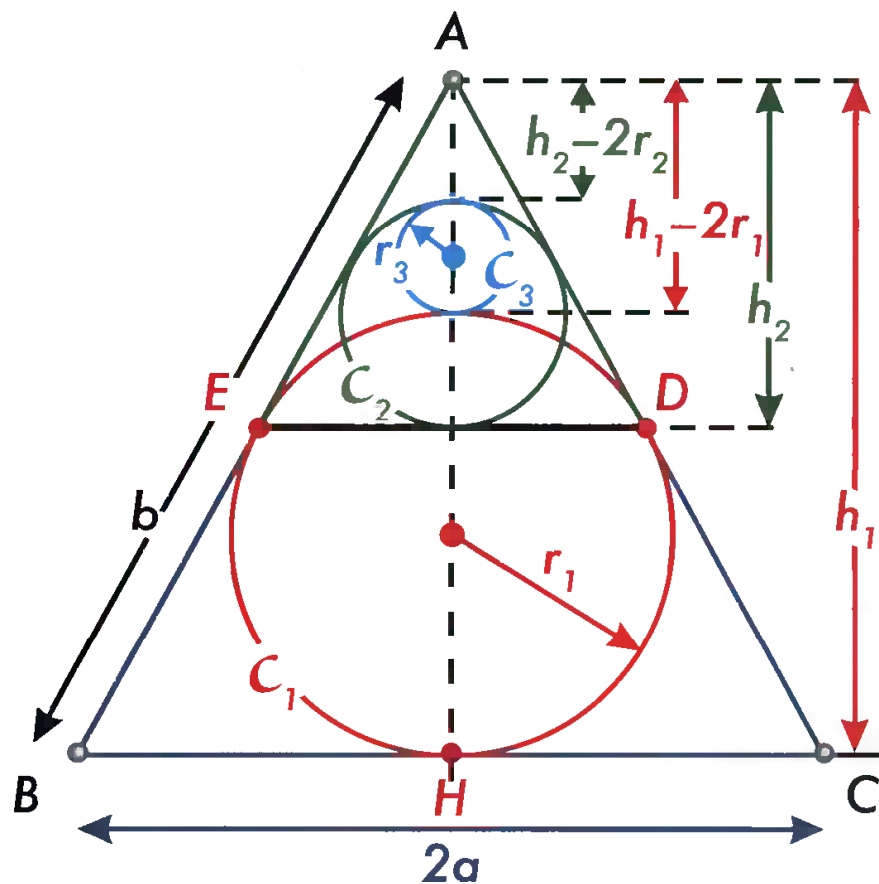
69

L'énigme

Soit ABC un triangle isocèle tel que $AB = AC$, le cercle inscrit C_1 touche les deux côtés égaux en D et E . Soit C_2 le cercle inscrit au triangle ADE et C_3 le cercle tangent extérieurement à C_1 , intérieurement à C_2 et centré sur la hauteur issue de A , comme indiqué sur la figure. On demande de calculer le rapport des rayons $\frac{r_3}{r_2}$ des cercles C_3 et C_2 .

Solution

Les notations sont celles de la figure, r_1 désigne le rayon du cercle inscrit à ABC , b la longueur des deux côtés égaux et $2a$ celle de la base.



On a immédiatement :

$$2r_3 = (h_1 - 2r_1) - (h_2 - 2r_2) = (h_1 - h_2) - 2(r_1 - r_2)$$

Or d'après la proposition 1 du memento (p. 161), $BE = BH = a$ ainsi $AE = b - a$.

Le cercle C_2 est l'homothétique du cercle C_1 dans le rapport $\frac{b-a}{b}$, donc :

$$h_2 = h_1 \frac{b-a}{b} \text{ et } r_2 = r_1 \frac{b-a}{b} \implies h_1 - h_2 = \frac{a}{b} h_1 \text{ et } r_1 - r_2 = \frac{a}{b} r_1$$

En remplaçant dans l'expression de r_3 , on obtient $2r_3 = \frac{a}{b}(h_1 - 2r_1)$. Le calcul du rayon de $\mathcal{C}_1$ donne $r_1 = \frac{h_1 a}{b+a}$ ainsi :

$$2r_3 = \frac{a}{b} h_1 \left(1 - \frac{2a}{b+a}\right) = \frac{a}{b} \frac{b-a}{b+a} h_1 = \frac{b-a}{b} r_1 = r_2$$

soit

$$\frac{r_3}{r_2} = \frac{1}{2}$$

On en déduit que $h_2 - 2r_3 = h_2 - r_2$, ce qui signifie que le cercle $\mathcal{C}_1$ passe par le centre du cercle $\mathcal{C}_2$.

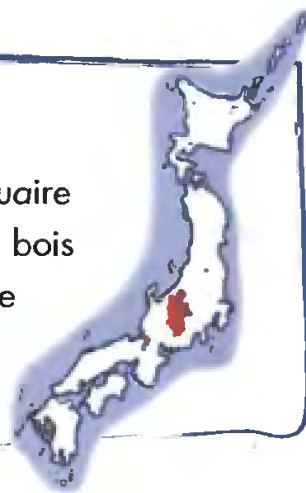


Sangaku accroché à l'auvent du sanctuaire de Matsubara, ville d'Odawara, préfecture de Kanagawa.

7 Cinq cercles dans un carré

Son histoire

Ce sangaku date de 1811. Il se situe dans le sanctuaire d'Ichikawadani-Ohmoto, préfecture de Nagano. La tablette de bois mesure 74 cm de haut sur 147 cm de large. Le sangaku propose sept énigmes géométriques différentes. « Cinq cercles dans un carré » est la sixième [7], [2].



72

L'énigme

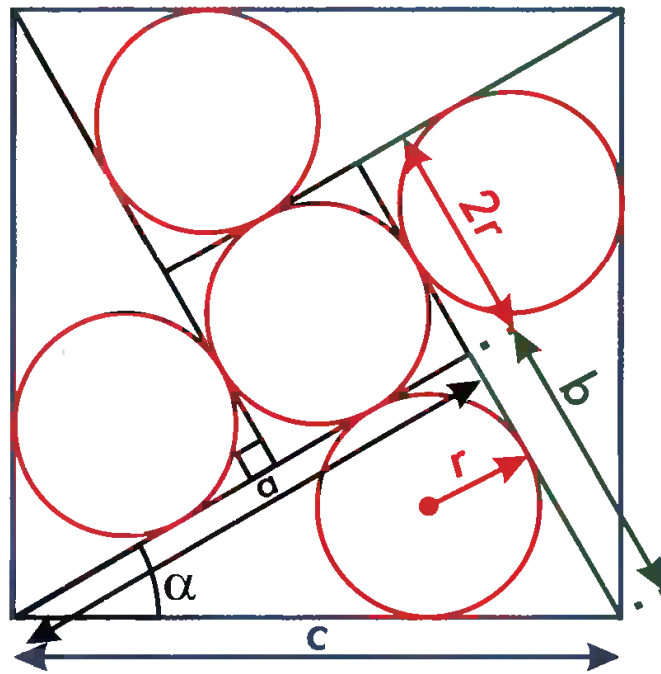
Cinq cercles isométriques, inscrits dans un carré suivant la configuration décrite par la figure. Quel est le rapport $\frac{r}{c}$, entre le rayon des cercles et le côté du carré ?

Solution

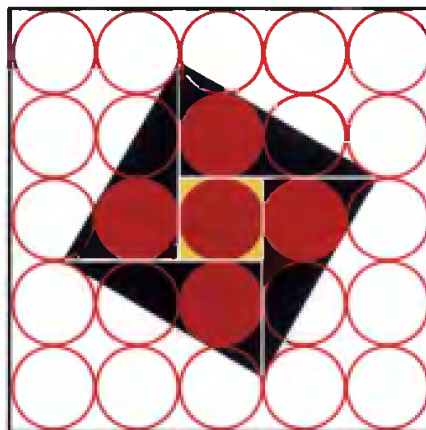
Avec les notations du schéma, puisque $r = \frac{a+b-c}{2}$ et $b = a - 2r$ on a $ac = 2b$.

De là, $\alpha = \frac{\pi}{6}$ et $a = c \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où :

$$\frac{r}{c} = \frac{\sqrt{3} - 1}{4}$$



On peut éviter le recours à la trigonométrie (inconnue des mathématiciens japonais de la période Edo), en utilisant la relation de Pythagore $a^2 = b^2 + c^2$ qui conduit à une équation du second degré en r . Ce sangaku s'intègre dans un pavage du plan par des cercles que la figure suivante illustre.



8

Son histoire

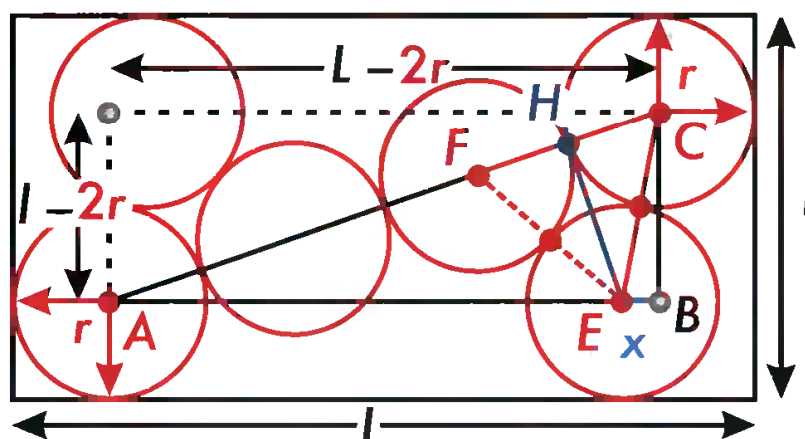
Ce problème n'est pas extrait d'une tablette mais d'une pierre gravée dans la ville d'Annaka à proximité du temple de Haruna, préfecture de Gunma. Ces sangaku sur pierre sont si rares que certains sont considérés par le gouvernement japonais comme « trésors du patrimoine culturel national ». Le sangaku qui nous intéresse, n'ayant pu être daté, ne fait cependant pas partie de la collection nationale.



74

L'énigme

Dans un rectangle on inscrit six cercles isométriques selon la figure suivante. On demande d'exprimer la longueur L et la largeur l du rectangle en fonction du rayon commun r des cercles.



Pour être précis, le sangaku demande d'exprimer le rapport des longueurs sur le diamètre des cercles.

Solution

Les notations sont celles de la figure, en particulier le point B est tel que le triangle ABC soit rectangle en B . Le triangle CEF est équilatéral. La médiane EH coïncide donc avec la hauteur. Elle a pour longueur $\sqrt{3}r$ et le triangle AEH est rectangle en H . On pose $d = 2r$, $L_1 = L - d$, $l_1 = l - d$ et $x = EB$, la relation de Pythagore appliquée au triangle AEH s'écrit :

$$(L_1 - x)^2 = EH^2 + AH^2 = 3r^2 + (5r)^2 = 7d^2$$

soit

$$L_1 - x = \sqrt{7}d$$

Les triangles ABC et EBC sont rectangles en B , le théorème de Pythagore dans ces deux triangles s'écrit :

$$L_1^2 + l_1^2 = 9d^2$$

$$x^2 + l_1^2 = d^2$$

Par différence de ces deux égalités, on obtient :

$$(L_1 - x)(L_1 + x) = 8d^2$$

Avec $L_1 - x = \sqrt{7}d$, on en déduit :

$$L_1 + x = \frac{8}{\sqrt{7}}d \quad \text{puis} \quad L_1 = \frac{15d}{2\sqrt{7}} \quad \text{et} \quad x = \frac{d}{2\sqrt{7}}.$$

Enfin

$$L = L_1 + d = \left(1 + \frac{15}{2\sqrt{7}}\right) d \quad \text{et} \quad l_1^2 = d^2 - x^2 = \frac{27}{28} d^2$$

donne

$$l = d + l_1 = \left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{7}}\right) d.$$

On en déduit que :

$$\frac{L}{r} = \left(2 + \frac{15}{\sqrt{7}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{l}{r} = \left(2 + \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}\right)$$

Un sangaku récemment donné
au sanctuaire Yasi,
ville de Kyoto (1989).



9 L'ogive gothique

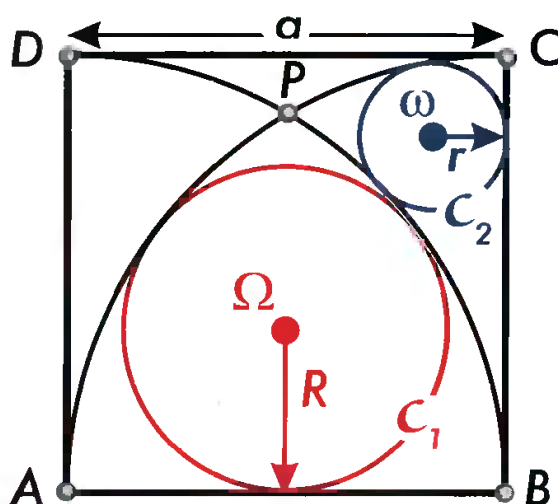
Son histoire

Un sangaku non daté, observé dans la préfecture de Miyagi et qui a été détruit.



L'énigme

Soit $ABCD$ un carré de côté de longueur a .

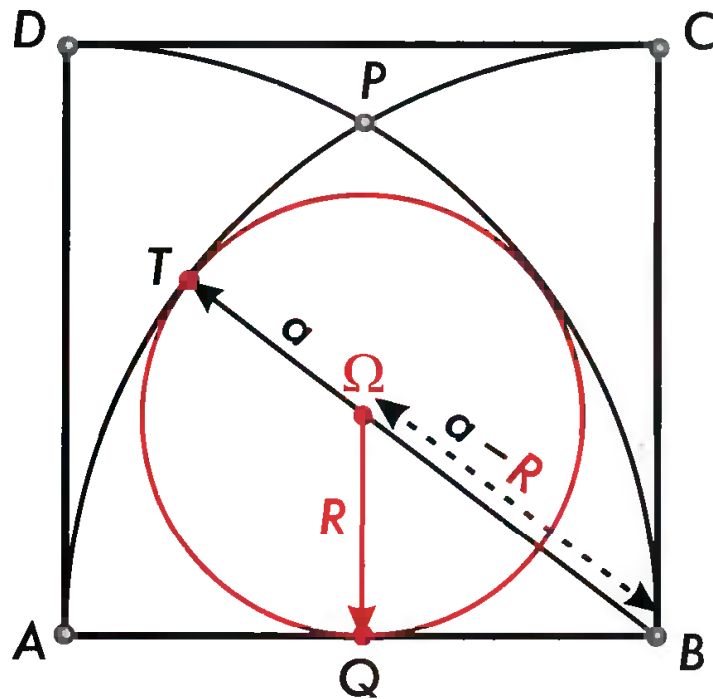


Dans ce carré, on trace les deux arcs de cercles $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$ de centres B et D et de même rayon a . On construit ainsi une ogive gothique APB . On place alors les

cercles C_1 et C_2 inscrits aux triangles curvilignes APB et BPC . On demande de calculer la longueur des rayons des deux cercles en fonction de celle du côté du carré.

Solution

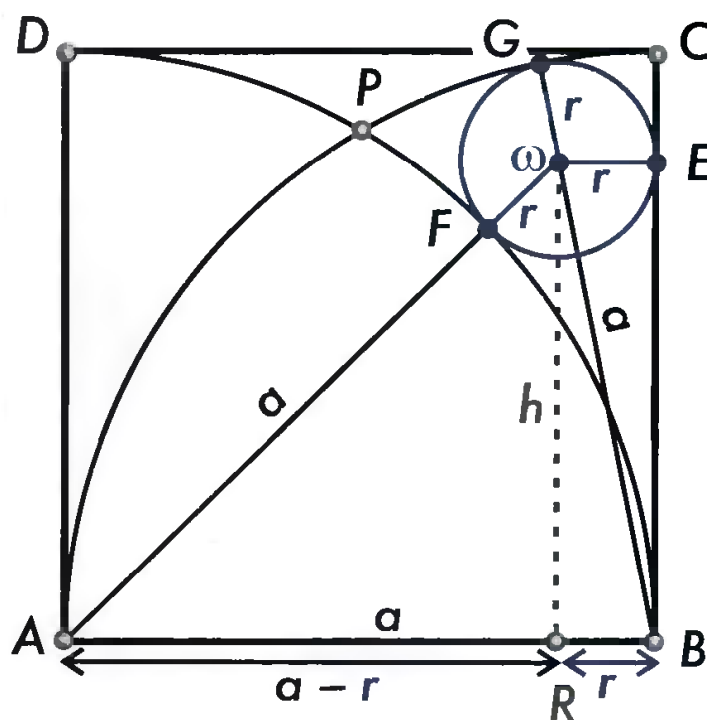
Les notations sont celles de la figure, en particulier, on note Ω et ω les centres des deux cercles de rayon R et r . On commence par calculer R en fonction de a . Soit T le point de contact de C_1 avec l'arc $\widehat{AC}$, on a $BT = a$ et $\Omega T = R$, et puisque les points B , Ω et T sont alignés, on en déduit que $B\Omega = a - R$.



Si Q est le point de contact de C_1 et de (AB) , le triangle $BQ\Omega$ est rectangle en Q , ainsi $(a - R)^2 - R^2 = \frac{a^2}{4}$, d'où $a - 2R = \frac{a}{4}$ et :

$$R = \frac{3a}{8}$$

On calcule ensuite r en fonction de a . Soient E, F, G les points de contact de C_2 avec le côté (BC) et les arcs $\widehat{BD}$ et $\widehat{AC}$ respectivement. On note R le pied de la hauteur issue de ω dans le triangle $A\omega B$ et $h = \omega R$.



Alors $A\omega = AF + F\omega = a + r$, $B\omega = BG - \omega G = a - r$, $\omega E = r$ donc $AR = a - r$ et $BR = r$. La relation de Pythagore dans les triangles $A\omega B$ et $B\omega R$ s'écrit :

$$(a + r)^2 = h^2 + (a - r)^2$$

$$(a - r)^2 = h^2 + r^2$$

par différence, il vient :

$$(a + r)^2 - (a - r)^2 = (a - r)^2 - r^2$$

soit

$$a - 2r = 4r \implies r = \frac{a}{6}$$

Sangaku du sanctuaire
de Matsubara,
ville d'Odawara, préfecture de
Kanagawa.



10 L'ogive gothique (II)

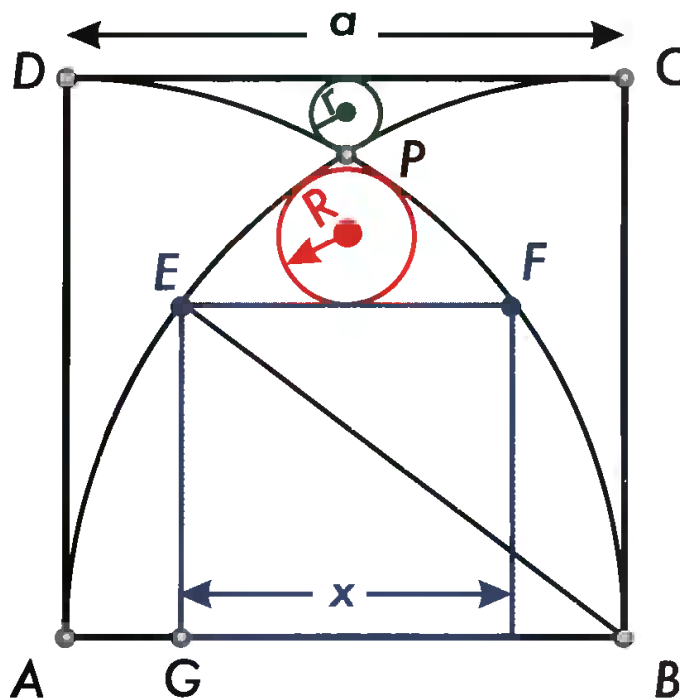
Son histoire

Un problème élaboré à partir de deux sangaku basés sur un carré inscrit dans une ogive. Le premier, daté de 1820, provenant de la préfecture d'Iwate a été détruit. Le second sangaku, a été peint 75 ans plus tard (1895) dans la préfecture de Fukushima ^[2].



L'énigme

Dans le carré $ABCD$ de côté de longueur a , on trace les deux arcs de cercles $\widehat{AC}$ et $\widehat{BD}$ de centre B et D et de même rayon a . Dans l'ogive gothique APB ainsi construite, on place un carré et les cercles inscrits aux triangles curvilignes EFP et CDP .



82

Déterminer les rapports $\frac{R}{a}$ et $\frac{r}{a}$ des rayons des cercles sur le côté du carré.

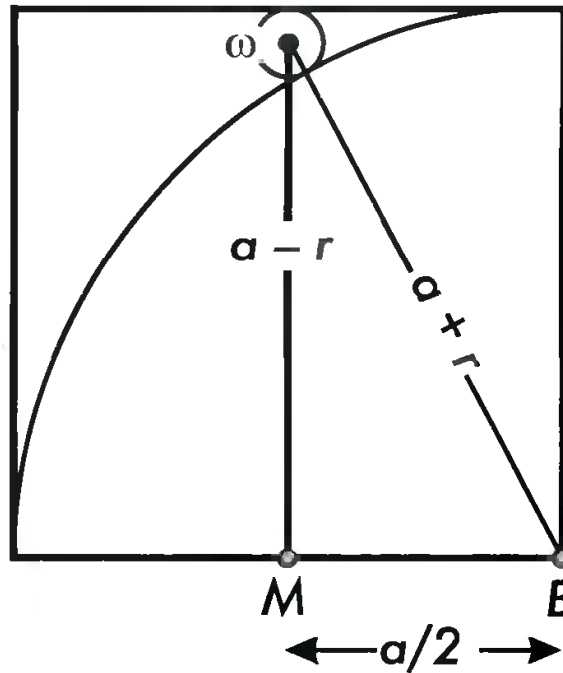
Solution

On commence par calculer le rapport $\frac{r}{a}$, qui est immédiat. Si ω est le centre du petit cercle, le théorème de Pythagore appliqué au triangle $BM\omega$ conduit à l'égalité :

$$(a+r)^2 - (a-r)^2 = 4ar = \frac{a^2}{4}$$

soit

$$\frac{r}{a} = \frac{1}{16}$$



Pour calculer le second rapport, on note x la longueur du côté du carré inscrit dans l'ogive. Dans le triangle rectangle BEG , on a :

$$BG + AG = a \quad \text{et} \quad BG - AG = x \quad \text{d'où} \quad BG = \frac{x + a}{2}$$

et la relation de Pythagore s'écrit :

$$\left(\frac{x + a}{2}\right)^2 + x^2 = a^2$$

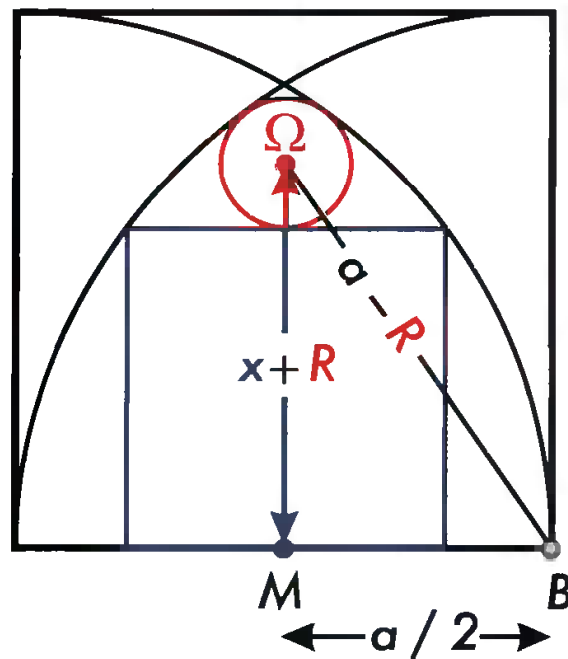
Cette équation du second degré en x admet $-a$ (que l'on ne retient pas, car x est positif) comme solution évidente. L'autre solution s'obtient en considérant le coefficient constant divisé par le coefficient dominant en x .

On a donc :

$$x = \frac{1}{-a} \times \frac{\frac{a^2}{4} - a^2}{\frac{1}{4} + 1} = \frac{3}{5}a$$

Il reste alors à calculer R . Dans le triangle $BM\Omega$, on a d'après la relation de Pythagore :

$$(a - R)^2 = (x + R)^2 + \frac{a^2}{4}$$



d'où après résolution :

$$\frac{R}{a} = \frac{39}{320}$$

11

Deux cercles et un demi-cercle

Son histoire

Un sangaku composé en 1838 dans la préfecture d'Iwate sur une tablette qui n'existe plus.



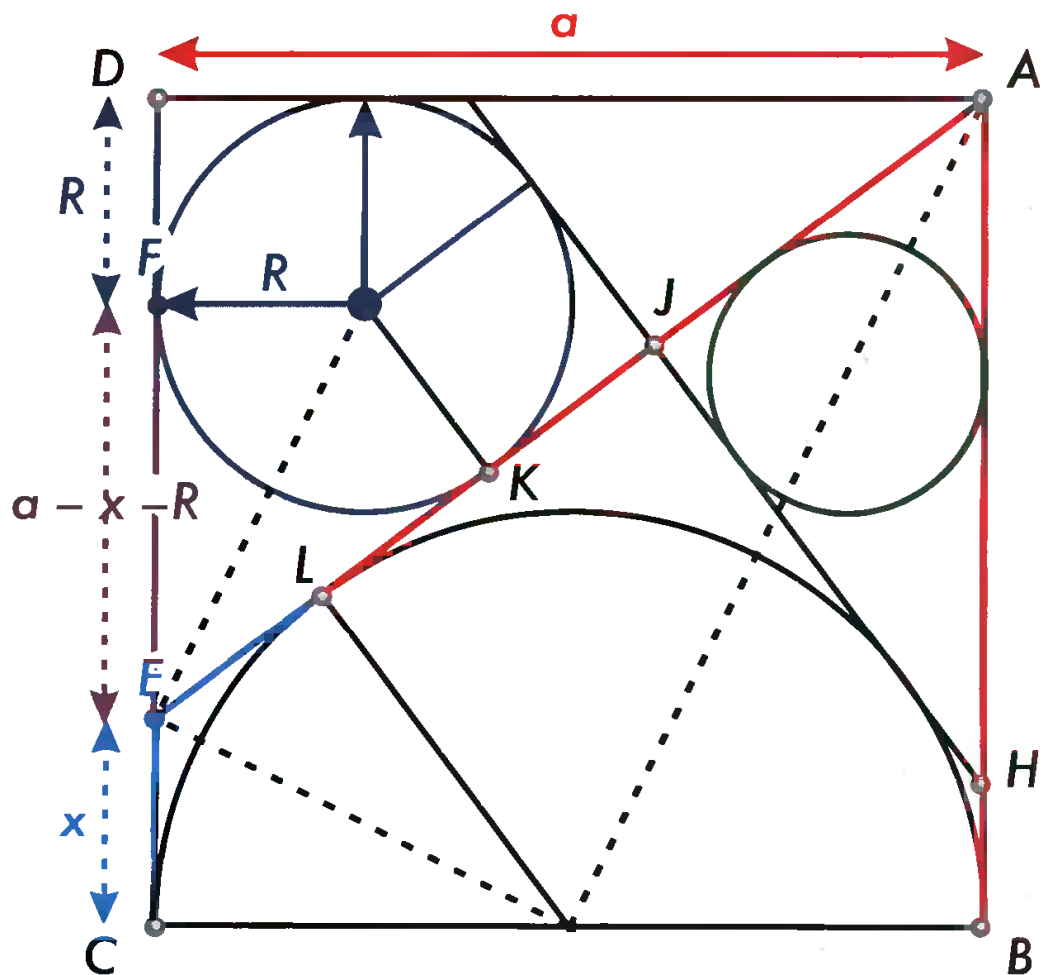
L'énigme

Dans le carré $ABCD$, la tangente issue de A au demi-cercle de diamètre $[BC]$ coupe le côté $[CD]$ au point E . On note R le rayon du cercle inscrit au triangle ADE . La tangente commune à ce cercle et au demi-cercle coupe (AE) en J et le côté (AB) en H . On note r le rayon du cercle inscrit au triangle AHJ . Il s'agit de prouver que :

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

Solution

Les notations sont celles de la figure. Les deux cercles inscrits de rayon r et R sont homothétiques dans l'homothétie de centre J et de rapport $-\frac{JE}{JA}$. Il s'agit donc de calculer ces deux longueurs.



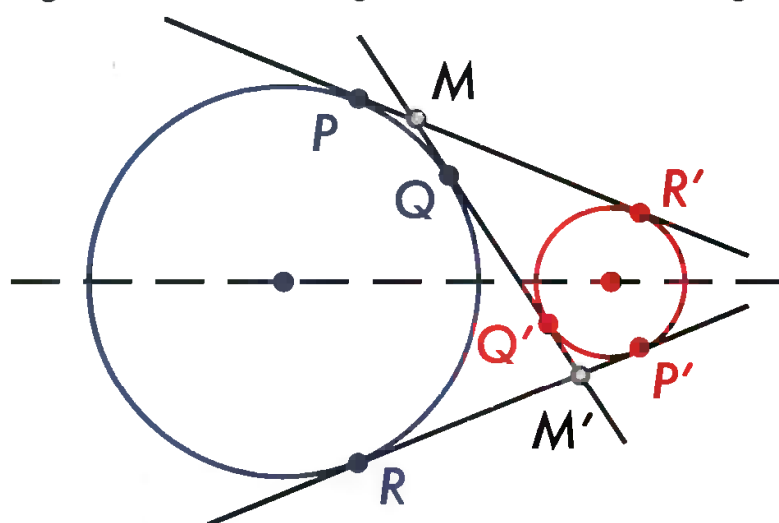
On commence par remarquer que $AL = a$ car les droites AL et AB sont deux tangentes au demi-cercle issues de A . On note ensuite x la longueur EC , on a ainsi $x = EL$. Le théorème de Pythagore dans le triangle ADE donne alors :

$$(a + x)^2 - (a - x)^2 = a^2 \Rightarrow x = \frac{a}{4}$$

Le calcul de R , rayon du cercle inscrit dans un triangle rectangle est alors immédiat :

$$R = \frac{a + a - x - (a + x)}{2} = \frac{a}{4}$$

On montre ensuite un résultat sur les tangentes communes à deux cercles non sécants : dans la figure suivante, les longueurs PR' et MM' sont égales.



En effet, on a $MP = MQ$ et $MQ' = MR'$, ainsi :

$$PR' = PM + MR' = PM + MQ' = PM + MQ + QQ' = 2MQ + QQ'.$$

Par symétrie de la configuration, on a également $P'R = 2M'Q' + QQ'$.

La figure étant symétrique par rapport à la droite qui joint les centres des deux cercles, on a $PR' = P'R$, donc $MQ = M'Q' = PM$.

Enfin $PR' = PM + MR' = PM + MQ' = MQ' + Q'M' = MM'$.

On applique ce résultat au demi-cercle et au cercle de rayon R , les tangentes extérieures sont les droites CD et HJ , la tangente intérieure est la droite AE . On en déduit que :

$$FC = a - R = \frac{3a}{4} = JE$$

et

$$JA = AE - JE = a + \frac{a}{4} - \frac{3a}{4} = \frac{a}{2}$$

ainsi $\frac{JE}{JA} = \frac{3}{2}$, d'où :

$$\frac{R}{r} = \frac{3}{2}$$

Un sangaku récemment donné
au sanctuaire Yasi,
ville de Kyoto (1989).



12 Le carré coupé en deux

Son histoire

La tablette qui existe encore date de 1853. Elle se trouve dans la préfecture de Kyōto, dont la ville éponyme est l'ancienne capitale impériale ^[2].



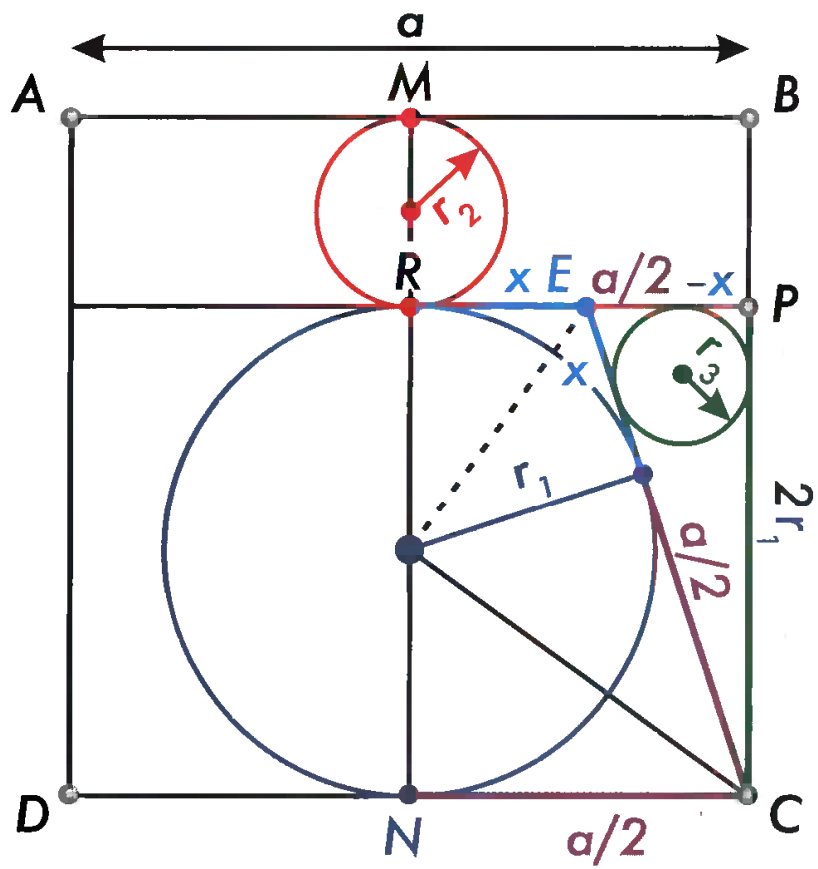
L'énigme

Soit $ABCD$ un carré de côté de longueur a , M est le milieu de $[AB]$ et N celui de $[CD]$. Soit P un point appartenant au côté $[BC]$, la parallèle à (AB) passant par P coupe (MN) en R . On désigne par r_1 et r_2 les rayons des cercles de diamètre $[NR]$ et $[MR]$. La tangente issue de C au cercle de diamètre $[NR]$ coupe $[PR]$ en E , si r_3 est le rayon du cercle inscrit au triangle rectangle PCE , on demande de prouver que :

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

Solution

Les notations sont celles de la figure.



On a immédiatement, en posant $x = ER$

$$CE = \frac{a}{2} + x, \quad CP = 2r_1, \quad EP = \frac{a}{2} - x$$

$$\text{et } a - 2r_1 = 2r_2$$

ainsi dans le triangle rectangle EPC ,

$$\left(\frac{a}{2} + x\right)^2 - \left(\frac{a}{2} - x\right)^2 = 4r_1^2 \implies x = \frac{2r_1^2}{a}$$

d'où

$$r_3 = \frac{EP + CP - CE}{2} = r_1 - x = r_1 - \frac{2r_1^2}{a} = r_1 \frac{a - 2r_1}{a}$$

soit

$$\frac{1}{r_3} = \frac{a}{r_1(a - 2r_1)} = \frac{2r_1 + 2r_2}{r_1 \times (2r_2)}$$

ce qui prouve que

$$\frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

13 Trois cercles dans un carré

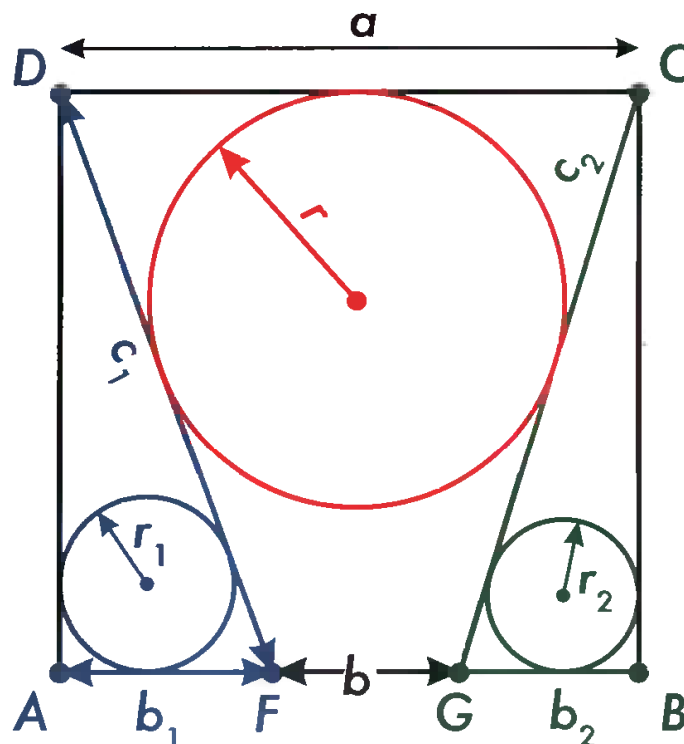
Son histoire

Le sangaku figurait sur une tablette datant de 1877, et qui était localisée dans la préfecture de Fukushima [2].



L'énigme

Sur le côté $[AB]$ d'un carré $ABCD$, on place deux points F et G quelconques.

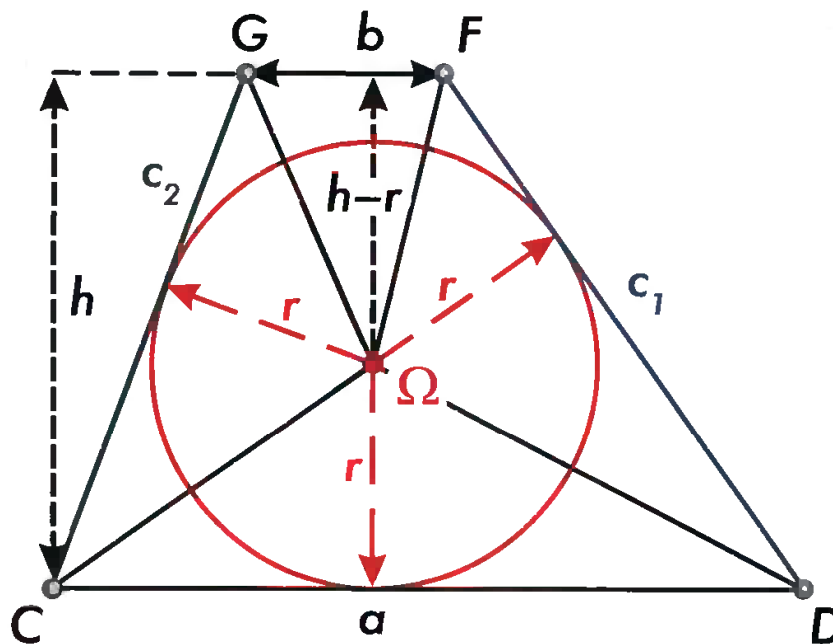


On note r le rayon du cercle inscrit dans le trapèze $DCGF$, r_1 et r_2 les rayons des cercles inscrits dans les triangles rectangles ADF et BCG . Ce sangaku propose d'établir la relation suivante entre le côté a du carré et les rayons des trois cercles :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a - 2r_1} + \frac{1}{a - 2r_2}$$

Solution

On commence par calculer de manière générale le rayon de $DCGF$. On considère un trapèze tel qu'il existe un cercle tangent à la base et aux deux côtés adjacents. Avec les notations de la figure suivante, on décompose le trapèze en quatre triangles.



L'aire du trapèze est

$$\mathcal{A}(CDFG) = \frac{1}{2} h(a+b) = \mathcal{A}(CG\Omega) + \mathcal{A}(CD\Omega) + \mathcal{A}(DF\Omega) + \mathcal{A}(FG\Omega).$$

Les trois premiers triangles ont une hauteur de même longueur r et pour base respective c_2, a et c_1 . Le dernier a pour hauteur $h-r$ et pour base b . Ainsi, en considérant le double des aires :

$$h(a+b) = r(c_1 + c_2 + a) + (h-r)b$$

d'où l'expression très simple pour la courbure :

$$\frac{1}{r} = \frac{c_1 + c_2 + a - b}{ha}$$

Dans le problème posé, $h = a$ et $a - b = b_1 + b_2$ ainsi :

$$\frac{1}{r} = \frac{c_1 + b_1 + c_2 + b_2}{a^2}$$

On calcule maintenant r_1 et $\frac{1}{a-2r_1}$. On a $r_1 = \frac{a+b_1-c_1}{2}$, ainsi :

$$\frac{1}{a-2r_1} = \frac{1}{c_1-b_1} = \frac{c_1+b_1}{c_1^2-b_1^2} = \frac{c_1+b_1}{a^2}$$

car, d'après la relation de Pythagore dans le triangle ADF , $a^2 + b_1^2 = c_1^2$.

On a de même $\frac{1}{a-2r_2} = \frac{c_2+b_2}{a^2}$ ce qui permet d'affirmer que :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a-2r_1} + \frac{1}{a-2r_2}$$

14 Deux cercles égaux dans un carré

Son histoire

La tablette date de 1893 et est exposée dans la préfecture d'Hyōgo.



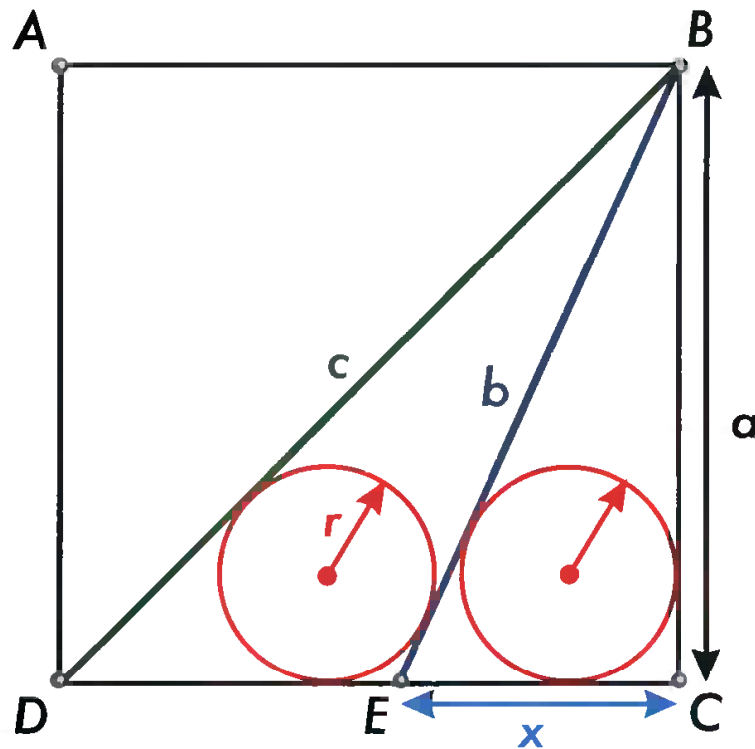
L'énigme

Dans un carré dont la longueur du côté vaut a , on trace la diagonale $[BD]$ et le segment $[BE]$ où E est le point du côté $[CD]$ tel que les cercles inscrits aux triangles BCE et BED aient même rayon r . On demande de calculer le rapport $\frac{r}{a}$.

95

Solution

Les notations sont celles de la figure.



On exprime les rayons communs, sans tenir compte du fait que le triangle BCE est rectangle et en utilisant la hauteur commune (BC) . Le rayon du cercle inscrit à BCE est $r = \frac{ax}{a+b+x}$, et celui du cercle inscrit à BED est $r = \frac{a(a-x)}{a-x+c+b}$. Les deux rayons sont égaux donc :

$$x(a+b+c-x) = (a-x)(a+b+x)$$

ce qui permet le calcul de b en fonction de a, c et x :

$$b = \frac{x(a+c) - a^2}{a-2x}$$

Le triangle BCE est rectangle en C , on peut appliquer la relation de Pythagore qui donne :

$$x^2 + a^2 = b^2$$

d'où l'équation d'inconnue x :

$$x^2 + a^2 = \frac{(a^2 - x(a+c))^2}{(a-2x)^2}$$

Puisque $c^2 = 2a^2$, on constate qu'il y a deux solutions évidentes à cette équation, $x = 0$ et $x = a$. On peut maintenant la résoudre, elle est équivalente à l'équation polynomiale de degré quatre :

$$P(x) = (x^2 + a^2)(a - 2x)^2 - (a^2 - x(a+c))^2 = 0$$

Le coefficient dominant de P vaut 4, le coefficient de degré 3 vaut $-4a$ et celui de degré 1 vaut $-4a^3 + 2a^2(a+c) = 2a^2c - 2a^3$. On cherche les deux autres racines de P , que l'on note α et β . On a alors, d'après les relations coefficients racines :

$$\alpha + \beta + 0 + a = -\frac{-4a}{4} = a \Rightarrow \alpha + \beta = 0$$

$$a\alpha\beta = -\frac{2a^2c - 2a^3}{4} = \frac{1}{2}a^2(a-c)$$

Ce qui prouve que α et β sont racines de $x^2 = \frac{1}{2}a(c-a)$, d'où avec $c = \sqrt{2}a$ et $b^2 = x^2 + a^2$:

$$x = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}, \quad b = a\sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}}$$

Enfin,

$$r = \frac{a+x-b}{2} = \frac{a}{2} \left(1 + \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} - \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2}} \right)$$

On peut simplifier le résultat car $(\sqrt{2}-1) \times (\sqrt{2}+1) = 1$, si on pose $z = \sqrt{2}+1$ alors :

$$\begin{aligned} \frac{2r}{a} &= 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{z}} - z \right) = 1 + \frac{1-z}{\sqrt{2}\sqrt{z}} \\ &= 1 - \sqrt{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

d'où :

$$r = \frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{\sqrt{2}-1} \right) a$$

Résultat donné par l'auteur de la tablette [2].

15 soleil levant

Son histoire

La tablette qui date de 1845 est encore exposée dans le temple Chusonji de la ville d'Iwate. Elle comporte quatre problèmes et mesure 139 cm sur 45 cm.



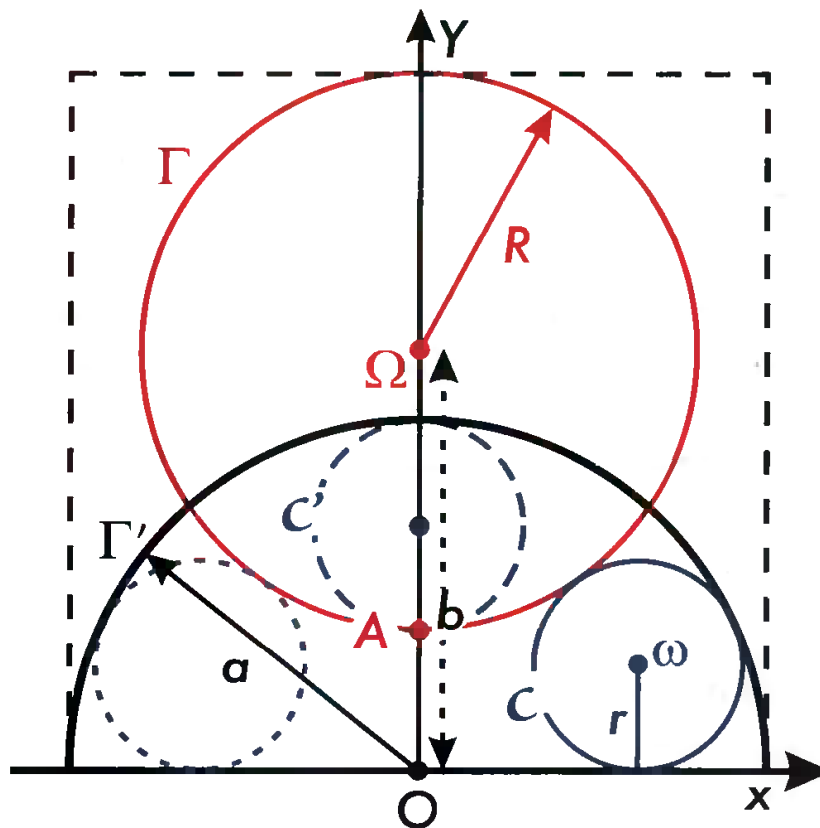
L'énigme

Soit un carré de côté dont la longueur vaut $2a$. Γ' désigne un demi-cercle, de centre O , intérieur au carré dont le diamètre est l'un des côtés du carré. On construit le cercle Γ , de rayon R centré sur la perpendiculaire passant par O au diamètre de Γ' et tel que les trois cercles bleus sur la figure page suivante aient même rayon r .

On demande de prouver que le rapport $\frac{R}{r}$ vaut $\frac{8}{3}$.

Solution

Les notations sont celles de la figure, en particulier le repère est celui indiqué par les axes Ox et Oy . Les coordonnées de ω et Ω sont respectivement (α, r) et $(0, b)$. Les conditions de tangence entre Γ et $\mathcal{C}$ puis Γ' et $\mathcal{C}'$ s'écrivent respectivement :



$$\begin{aligned}\omega \Omega^2 &= \alpha^2 + (b-r)^2 = (R+r)^2 \\ \omega O^2 &= \alpha^2 + r^2 = (a-r)^2\end{aligned}$$

On élimine l'inconnue α pour obtenir :

$$\begin{cases} \alpha^2 = (R+r)^2 - (b-r)^2 = (b+R)(R-b+2r) \\ \alpha^2 = (a-r)^2 - r^2 = a(a-2r) \end{cases}$$

d'où l'égalité :

$$a(a - 2r) = (b + R)(2r - (b - R)) \quad (1)$$

Le cercle C' a pour rayon r , d'où en calculant OA de deux manières :

$$a - 2r = b - R$$

De plus, puisque l'on est dans un carré :

$$b + R = 2a$$

En reportant ces deux dernières égalités dans (1), on obtient :

$$a - 2r = 2(4r - a) \Rightarrow a = \frac{10}{3}r$$

Enfin :

$$2R = (R - b) + (b + R) = 2r - a + 2a = 2r + a = \frac{16}{3}r$$

Ce qui permet de conclure à :

$$\frac{R}{r} = \frac{8}{3}$$

16 L'éventail des triangles rectangles

Son histoire

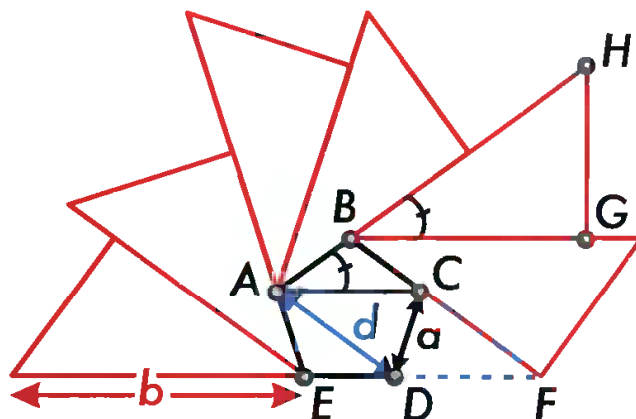
Le sangaku est relativement récent car daté de 1912, fin de l'ère Meiji. Ce problème fait partie d'une double tablette dont la longueur totale est de 360 cm sur 90 cm de haut, encore exposée dans un des sanctuaires shinto de la ville de Miyagi. La tablette propose vingt-quatre problèmes.



L'énigme

102

On considère un pentagone régulier autour duquel s'enroule en éventail six triangles rectangles isométriques selon la figure suivante.



On demande d'exprimer la longueur de l'hypoténuse des triangles en fonction de celle du côté du pentagone.

Solution

On commence par quelques remarques sur le pentagone régulier. La perpendiculaire à CD issue de A est un axe de symétrie du pentagone dans la figure. On en déduit que les diagonales $[AC]$ et $[AD]$ sont de même longueur. L'existence des autres axes de symétrie, permet d'affirmer que AC et ED sont parallèles, ainsi que AD et BC . On en déduit que $ACFD$ est un losange d'où $BF = d + a$. Pour calculer la longueur b de l'hypoténuse des triangles rectangles, on utilise l'angle au sommet B du triangle BGH de la figure ci dessous. Ainsi :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\cos \widehat{B}} \left(1 + \frac{d}{a} \right)$$

On sait que le pentagone régulier est inscrit dans un cercle, et chaque côté est vu sous l'angle $\frac{2\pi}{5}$.

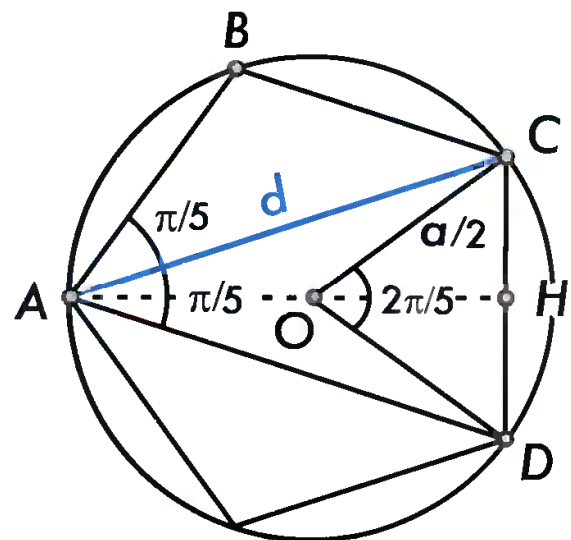
D'après le théorème de l'angle au centre, les angles sous lesquels on voit les côtés $[BC]$ et $[CD]$ depuis le point A sont donc égaux à $\frac{\pi}{5}$. Dans le triangle rectangle AHC , on a alors :

$$\frac{a}{2d} = \sin \frac{\pi}{10}$$

d'où :

$$\frac{b}{a} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} \left(1 + \frac{d}{a} \right) = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{5}} \left(1 + \frac{1}{2 \sin \frac{\pi}{10}} \right)$$

On calcule ces deux lignes trigonométriques.



De $\sin a \cos b = \frac{1}{2} (\sin(a+b) + \sin(a-b))$, on déduit que :

$$\sin \frac{\pi}{5} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{5} + 2 \cos \frac{4\pi}{5} \right) = 0$$

Puisque $\cos 2u = 2 \cos^2 u - 1$, on en déduit que :

$\cos \frac{2\pi}{5}$ est racine de $1 + 2x + 2(2x^2 - 1) = 4x^2 + 2x - 1$.

En remarquant que $\cos \frac{2\pi}{5} = \cos \frac{8\pi}{5}$, on peut affirmer que $\cos \frac{4\pi}{5}$ est racine de la même équation. On distingue les deux solutions par leur signe car $\cos \frac{2\pi}{5} > 0$ et $\cos \frac{4\pi}{5} = -\cos \frac{\pi}{5} < 0$. On a ainsi, après résolution de l'équation du second degré :

$$\cos \frac{\pi}{5} = -\cos \frac{4\pi}{5} = \frac{1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\phi}{2} \quad \text{et} \quad \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2\phi}$$

$$\text{où } \phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \text{ est le nombre d'or, racine de } \phi^2 = \phi + 1$$

La valeur de $\sin \frac{\pi}{10}$ en découle immédiatement, car $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{5} = \frac{\pi}{10}$ d'où $\sin \left(\frac{\pi}{10} \right) = \cos \frac{2\pi}{5}$.

Pour conclure :

$$\frac{b}{a} = \frac{2}{\phi} \left(1 + \frac{1}{2\frac{1}{2\phi}} \right) = 2 \frac{\phi + 1}{\phi} = 2\phi = 1 + \sqrt{5}$$

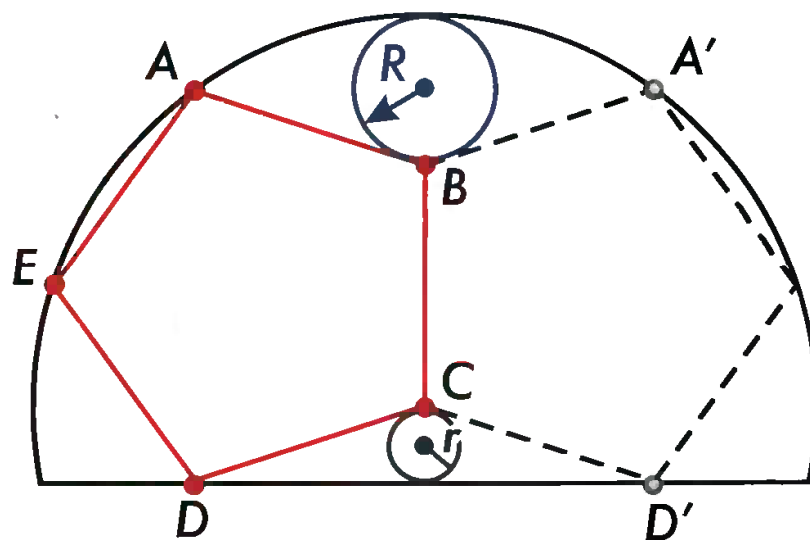
17 Deux pentagones réguliers

Son histoire

Ce sangaku est souvent cité comme exemple typique mais son origine est inconnue.

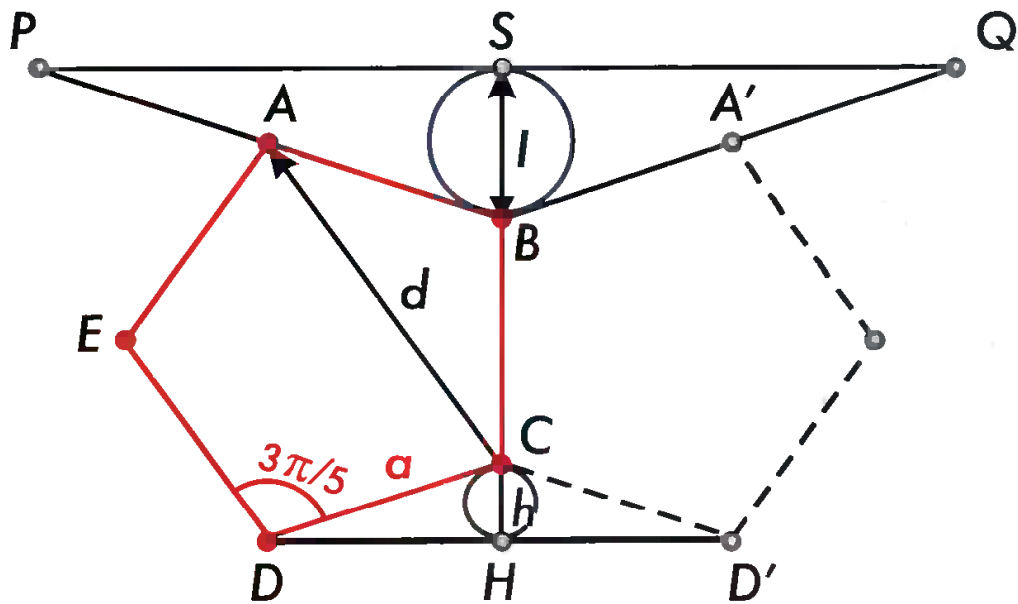
L'énigme

Soit $ABCDE$ un pentagone que l'on symétrise en $A'B'C'D'E'$ par rapport à l'un de ses côtés $[BC]$. On inscrit les deux pentagones obtenus dans un cercle Γ . Si r est le rayon du cercle inscrit au triangle DCD' et R le rayon du cercle inscrit au triangle curviligne $AA'B$, on demande de calculer $\frac{R}{r}$.



Solution

Le point C est à égale distance de A et de E . C'est donc le centre du cercle circonscrit aux deux pentagones. En particulier, le rayon de ce cercle est égal à la diagonale d du pentagone. On prolonge ensuite les côtés AB et $A'B$ jusqu'à la tangente au sommet S du cercle Γ , ceci définit par intersection les points P et Q . Les triangles BQP et CDD' sont semblables car ils sont isocèles et ont même angle aux sommets B et C . Le rapport de la similitude qui permet de passer de CDD' à BQP est égal au rapport des rayons de leur cercle inscrit, à savoir $\frac{R}{r}$. Ce rapport est également égal au rapport des hauteurs BS et CH , issues des sommets principaux.



Dans BQP , la hauteur BS est égale à $l = d - a$ où a est la longueur de l'arête du pentagone. Dans le pentagone, l'angle entre deux sommets consécutifs vaut $\frac{3\pi}{5}$. Ainsi dans le triangle CDH , on a $\widehat{C} = \frac{2\pi}{5}$. On obtient alors la valeur de h :

$$h = a \cos \frac{2\pi}{5}$$

On a vu page 104, que :

$$\begin{aligned} \cos \frac{2\pi}{5} &= \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{1}{2\phi} \Rightarrow h = \frac{a}{2\phi} \\ \frac{a}{2d} &= \sin \frac{\pi}{10} \Rightarrow d = a\phi \Rightarrow l = d - a = a(\phi - 1) \end{aligned}$$

où ϕ est le nombre d'or, solution positive de $\phi^2 - \phi = 1$, ainsi :

$$\frac{R}{r} = \frac{l}{h} = 2(\phi^2 - \phi)$$

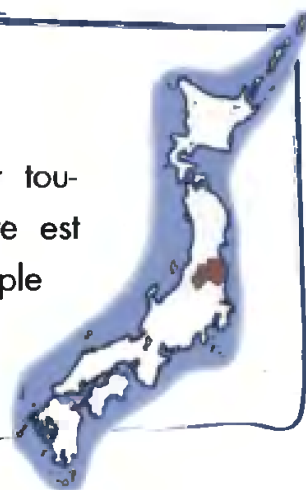
ce qui donne :

$$\frac{R}{r} = 2$$

18 Origami et sangaku

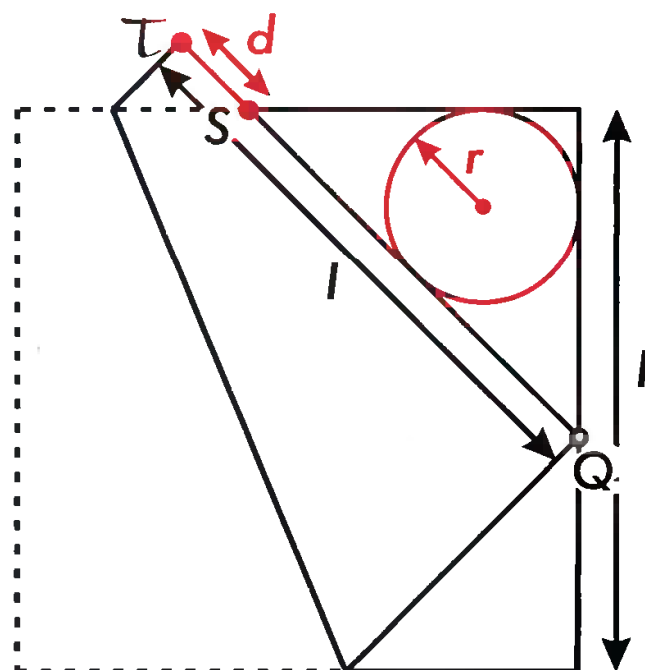
Son histoire

Ce sangaku est peint sur une tablette datée de 1813 et toujours exposée dans la préfecture de Fukushima. La tablette est accrochée dans le pavillon du Bodhisatva Kokûzô, temple Mangan-ji (voir photo page 11). On peut aussi y lire seize autres problèmes et le nom de l'auteur, en japonais ancien, Akama Chû.



L'énigme

Ce sangaku invite à prouver le résultat suivant : on prend une feuille de papier de dimension carrée que l'on plie de manière à amener un des coins sur le côté opposé. La mesure du rayon du cercle inscrit dans le triangle supérieur est égale à la mesure d'un des côtés du triangle en débord de la feuille.



$$r = ST = l - QS$$

Solution

Pour prouver ce résultat, on va s'intéresser à une propriété des mathématiques des pliages. Le lecteur est invité à plier en deux une feuille de papier de dimension carrée, et obtenir ainsi le milieu d'un de ses côtés. On amène ensuite un coin sur le milieu du côté opposé. Le pli obtenu permet de diviser en trois le côté du carré, comme indiqué sur la figure 1. En généralisant, par itérations successives ayant divisé en k parties égales un des bords de la feuille, on obtient la $k + 1$ ième fraction (figure 2).

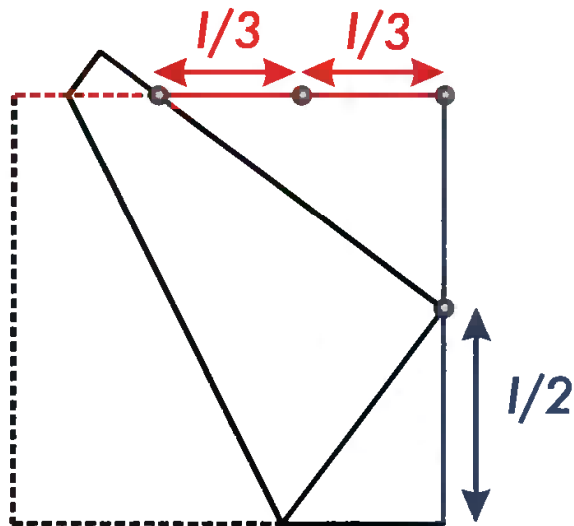


Figure 1

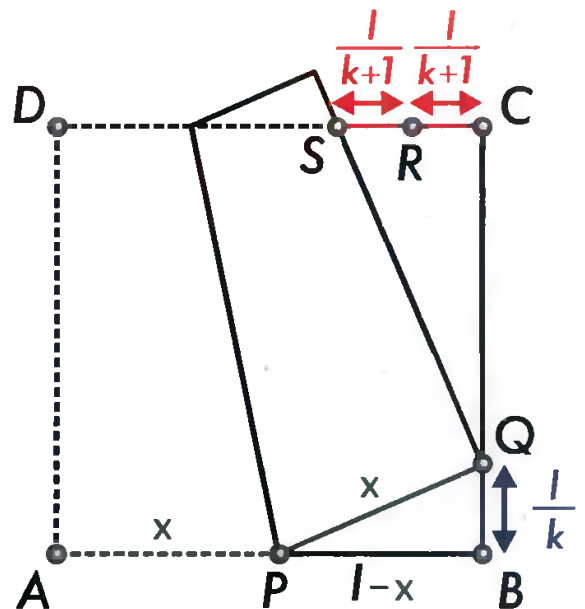


Figure 2

En effet, soit l la longueur du côté du carré, et $x = AP = PQ$, d'après le théorème de Pythagore :

$$x^2 = \frac{l^2}{k^2} + (l - x)^2, \text{ soit } x = \frac{l}{2} \frac{1 + k^2}{k^2}.$$

Puisque l'angle $\widehat{SQP}$ est droit, les triangles PBQ et QCS sont semblables, donc :

$$\frac{CS}{CQ} = \frac{BQ}{BP} \Rightarrow CS = CQ \times \frac{BQ}{BP}$$

Avec $BQ = \frac{l}{k}$, $CQ = l - \frac{l}{k}$ et $BP = l - x = l - \frac{l}{2} \frac{1 + k^2}{k^2} = l \frac{k^2 - 1}{2k^2}$, on obtient :

$$CS = \frac{2l}{k+1},$$

ce qui termine la preuve.

Le sangaku devient maintenant immédiat. En effet, rien n'impose à k d'être entier.

Puisque $\frac{PQ}{BQ} = \frac{QS}{CS}$, on a :

$$QS = \frac{2l}{k+1} \times \frac{l}{2} \frac{1+k^2}{k^2} \frac{k}{l} = l \frac{k^2+1}{k(k+1)}.$$

Le rayon du cercle inscrit au triangle rectangle CQS vaut alors :

$$r = \frac{CQ + CS - QS}{2} = \frac{l}{2} \left(1 - \frac{1}{k} + \frac{2}{k+1} - \frac{k^2+1}{k(k+1)} \right) = l \frac{k-1}{(k+1)k}$$

On vérifie que cette valeur est bien égale à $l - QS = l - l \frac{k^2+1}{k(k+1)}$ ce qui prouve que :

$$r = d$$



Extrait de la tablette du temple Mangan-ji, préfecture de Fukushima.

19 Empilement de carrés

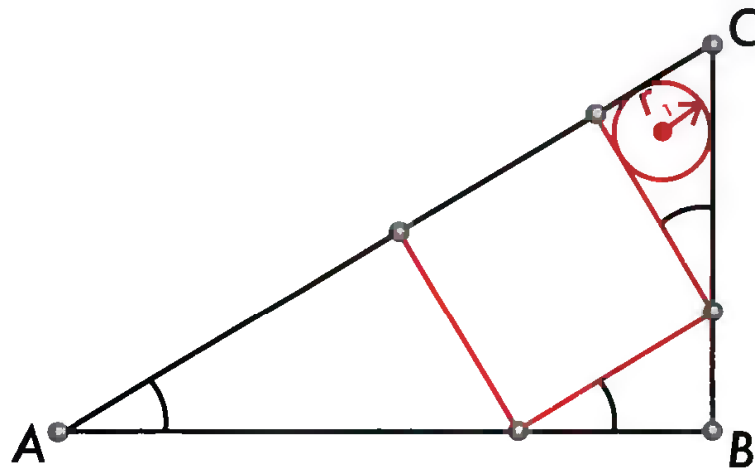
Son histoire

Un problème relativement récent puisqu'il date de 1913. La tablette est toujours exposée dans la préfecture de Miyagi ^[2].

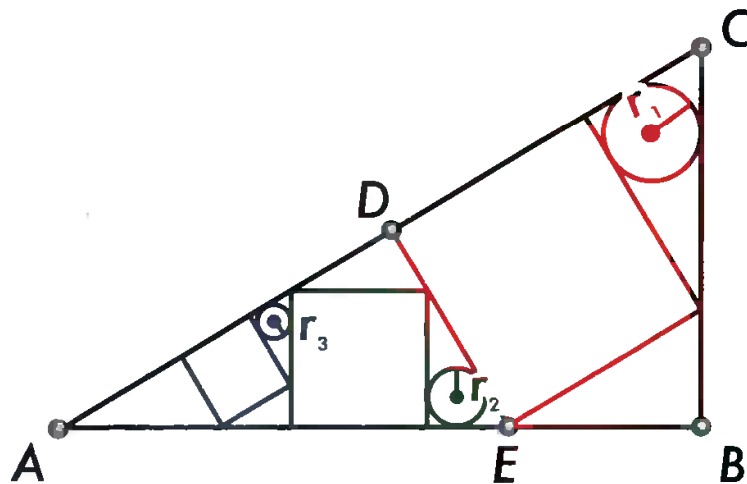


L'énigme

Dans un triangle rectangle ABC , on inscrit un carré. On met ainsi en évidence trois triangles rectangles semblables. Dans celui de sommet C , on inscrit le cercle de rayon r_1 .



Dans le nouveau triangle de sommet A , on réitère l'opération deux fois de suite afin d'aboutir à la figure suivante.



On demande de prouver la relation :

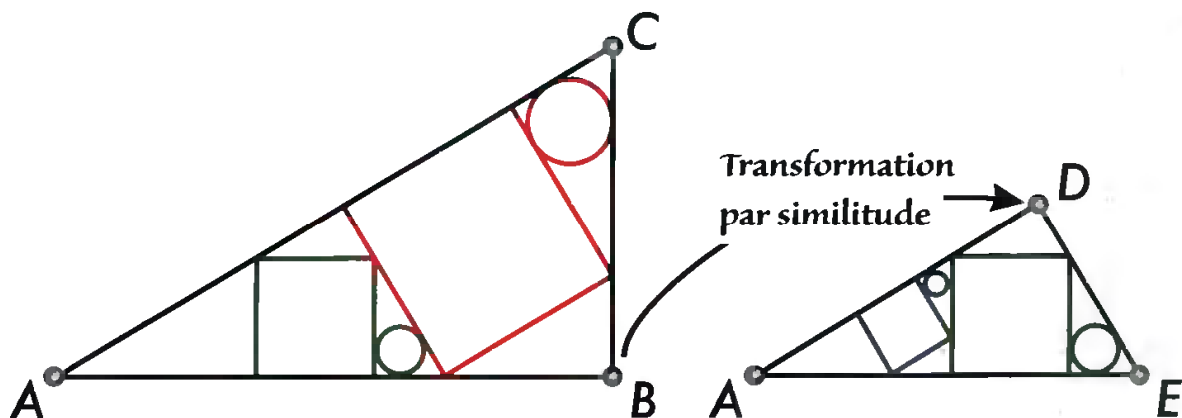
$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$$

113

Dans le sangaku original, il était demandé d'établir une relation entre les trois cercles inscrits.

Solution

Les triangles ABC et ADE sont semblables car ils ont mêmes angles. La similitude qui transforme ABC et ADE transforme le grand carré rouge en carré vert et ce dernier en petit carré bleu. Il en va de même pour les cercles.



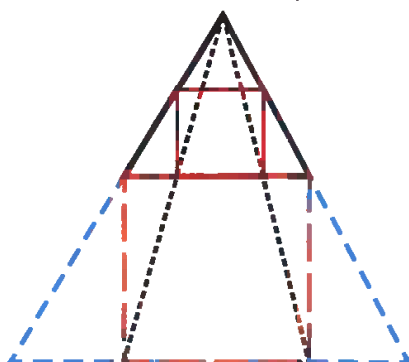
Puisqu'une similitude conserve les rapports de longueurs, on a :

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{r_3}{r_1}$$

soit :

$$r_2 = \sqrt{r_1 r_3}$$

Remarque : ce sangaku pose également le problème de la construction d'un carré inscrit dans un triangle (rectangle ou non). La figure suivante y répond et illustre l'idée qu'il est plus facile de placer d'abord le carré et ensuite le triangle autour, puis par homothétie de se ramener au problème initial.



20 Le problème des deux cercles

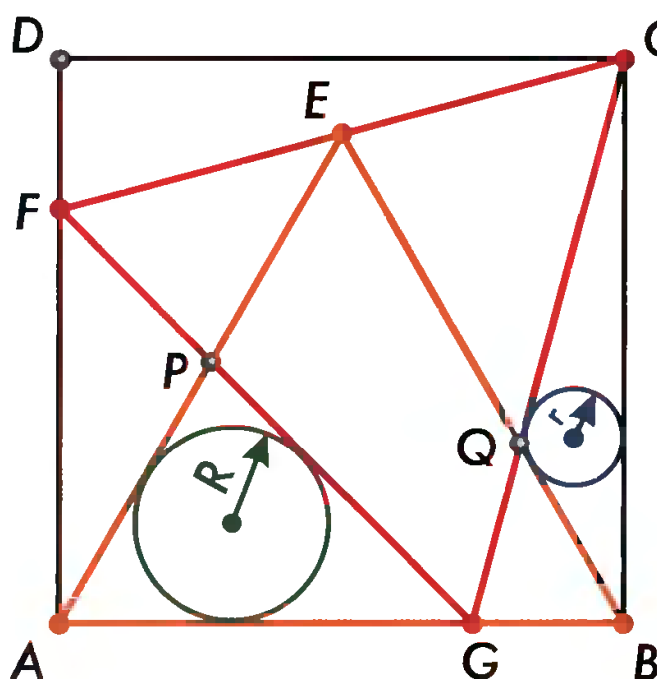
Son histoire

Ce problème est daté de 1881. Il provient d'une tablette de grande dimension, 97 cm de haut sur 303 cm de large, encore exposée dans la préfecture de Yamagata.



L'énigme

Sur le côté AB d'un carré $ABCD$, on construit un triangle équilatéral ABE . La droite (CE) coupe le côté $[AD]$ en F . On construit alors le triangle équilatéral CFG en plaçant G sur le côté $[AB]$. Les droites (FG) et (AE) se coupent en P , et les droites (CG) et (BE) en Q .

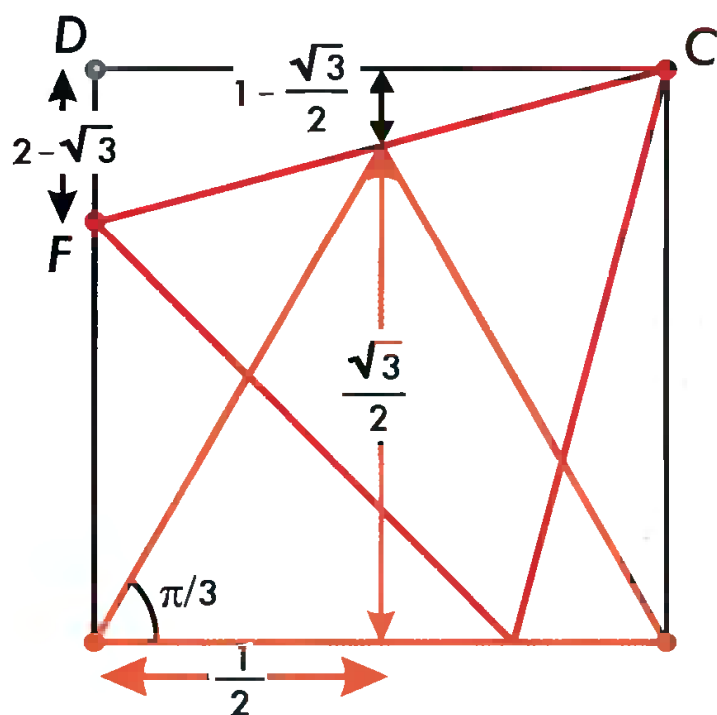


On demande de prouver que les rayons R et r des cercles inscrits respectivement aux triangles (AGP) et (BCQ) vérifient $R = 2r$.

Solution

Sans perte de généralité, on suppose que la longueur du côté du carré vaut 1.

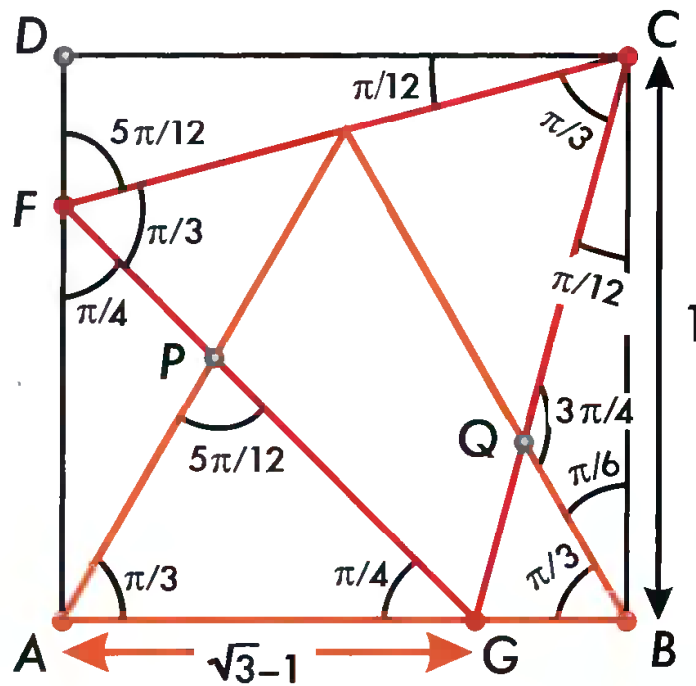
Dans ce cas, puisque le triangle ABE est équilatéral, la hauteur vaut $\frac{\sqrt{3}}{2}$. On en déduit ensuite par Thalès que $FD = 2 - \sqrt{3}$.



Or, cette valeur est exactement celle de la tangente de l'angle $\frac{\pi}{12}$, en effet :

$$\begin{aligned}\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right) &= \tan\frac{\pi}{12} = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

On en déduit alors facilement les différents angles indiqués sur la figure ci-dessous et le fait que les triangles CDF et BCG sont semblables. En particulier $AG = 1 - (2 - \sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$.



On a alors (proposition 4 du memento, page 164) :

$$R = (\sqrt{3} - 1) \frac{\sin \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \frac{5\pi}{24}}$$

$$r = 1 \times \frac{\sin \frac{\pi}{24} \sin \frac{\pi}{12}}{\cos \frac{3\pi}{8}}$$

d'où :

$$\frac{R}{r} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2} \frac{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}}{\cos \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24}} \times \frac{1}{\sin \frac{\pi}{12}}$$

Mais :

$$\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

et :

$$\cos \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{4} - \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2} - 1}{4}$$

ce qui donne :

$$\frac{\sin \frac{\pi}{8} \cos \frac{3\pi}{8}}{\cos \frac{5\pi}{24} \sin \frac{\pi}{24}} = \sqrt{2}$$

Pour conclure, il suffit de vérifier que $\sin \frac{\pi}{12} = \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{2}}{4} (\sqrt{3} - 1)$,
ainsi :

$$\frac{R}{r} = 2$$

21 Le trapèze isocèle

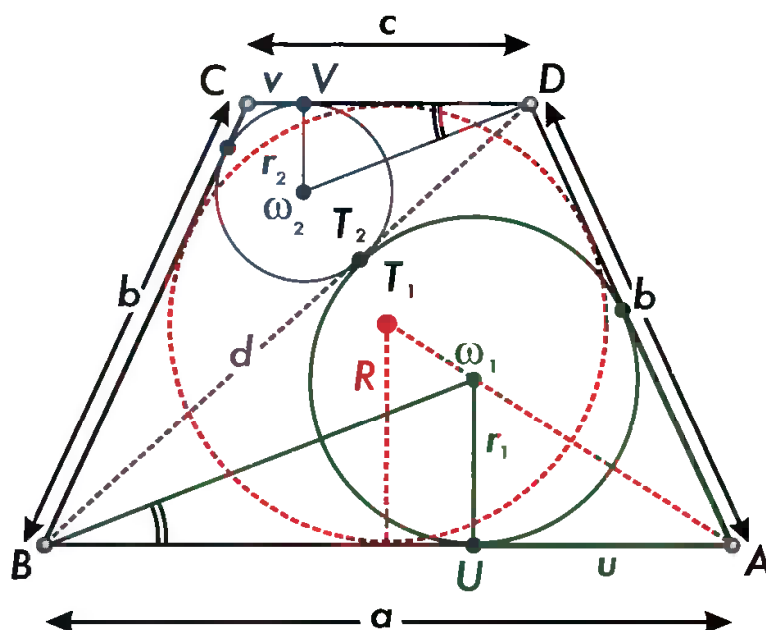
Son histoire

Un problème posé en 1826 dans la préfecture d'Ibaraki sur une tablette qui a été détruite ^[2].

L'énigme

On considère un trapèze isocèle $ABCD$ circonscriptible, soit R le rayon du cercle inscrit à $ABCD$, r_1 et r_2 les rayons des cercles inscrits aux triangles ABD et BCD .

Le sangaku demande d'exprimer R en fonction de r_1 et r_2 .



Solution

Les notations sont celles de la figure, en particulier U est le point de contact du cercle inscrit au triangle ABD avec la grande base AB , u désigne la distance AU . On définit de manière analogue V et v . Les points T_1 et T_2 sont les points de contact des cercles avec la diagonale. Ils sont supposés distincts, on peut démontrer qu'ils sont confondus, mais cela ne sera pas utile.

Puisque $(B\omega_1)$ et $(D\omega_2)$ sont les bissectrices des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{CDB}$, les angles $\widehat{UB\omega_1}$ et $\widehat{VD\omega_2}$ sont égaux. Les triangles $BU\omega_1$ et $DV\omega_2$ sont donc semblables car ils ont mêmes angles, ainsi :

$$\frac{a-u}{r_1} = \frac{c-v}{r_2}$$

Les longueurs des tangentes communes issues de A et de B au cercle inscrit à ABD sont égales donc $BU = BT_1 = a - u$ et $DT_1 = b - u$.

On en déduit que la diagonale BD du trapèze a pour longueur $d = a + b - 2u$ et par symétrie des rôles, $d = c + b - 2v$. Ainsi :

$$a - 2u = c - 2v$$

Les cercles verts et rouges sont homothétiques dans l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{r_1}{R}$, ainsi $\frac{r_1}{R} = \frac{u}{\frac{a}{2}} \Rightarrow u = \frac{ar_1}{2R}$ et de même $v = \frac{cr_2}{2R}$.

Avec les deux dernières relations les égalités $\frac{a-u}{r_1} = \frac{c-v}{r_2}$ et $a - 2u = c - 2v$ s'écrivent $\frac{a}{c} = \frac{r_1}{r_2} \frac{2R - r_2}{2R - r_1}$ et $\frac{a}{c} = \frac{R - r_2}{R - r_1}$.

Le rayon R vérifie donc l'équation :

$$\frac{r_1}{r_2} \frac{2R - r_2}{2R - r_1} = \frac{R - r_2}{R - r_1}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré en R

$$(2r_1 - 2r_2)R^2 + (2r_2^2 - 2r_1^2)R + (r_1^2 r_2 - r_1 r_2^2) = 0$$

et se simplifie en :

$$2R^2 - 2R(r_1 + r_2) + r_1 r_2 = 0$$

Puisqu'il est clair que R est plus grand que r_1 et r_2 , on a, après résolution de cette équation :

$$R = \frac{r_1 + r_2 + \sqrt{r_1^2 + r_2^2}}{2}$$



Le célèbre Torii de l'île de Miyajima.

22 Une somme constante

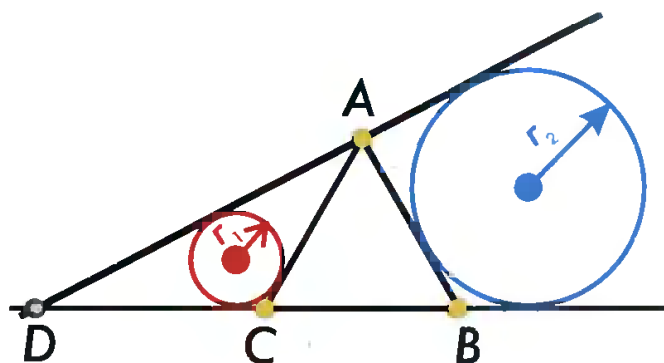
Son histoire

Un problème peint dans la préfecture de Fukushima en 1885 et qui a survécu. [7][2]



L'énigme

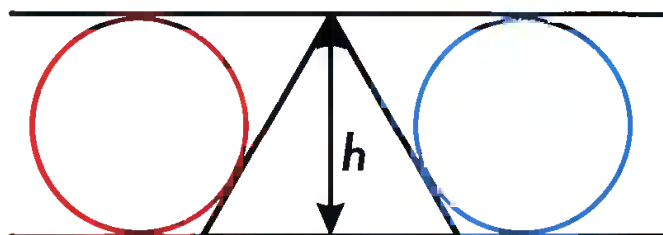
Soit ABC un triangle équilatéral. Une droite $\mathcal{D}$ variable passant par A et coupant la demi droite BC en D détermine deux cercles. Le premier, de rayon r_1 , est inscrit au triangle ACD , le second, de rayon r_2 , est exinscrit au triangle ABD dans l'angle $\widehat{D}$. Le sangaku demande de prouver que lorsque $\mathcal{D}$ varie, la somme $r_1 + r_2$ reste constante.



Solution

On résout ce sangaku par un calcul d'aires. Comme il est toujours préférable de connaître ce que l'on cherche, on peut se demander ce que vaut la constante.

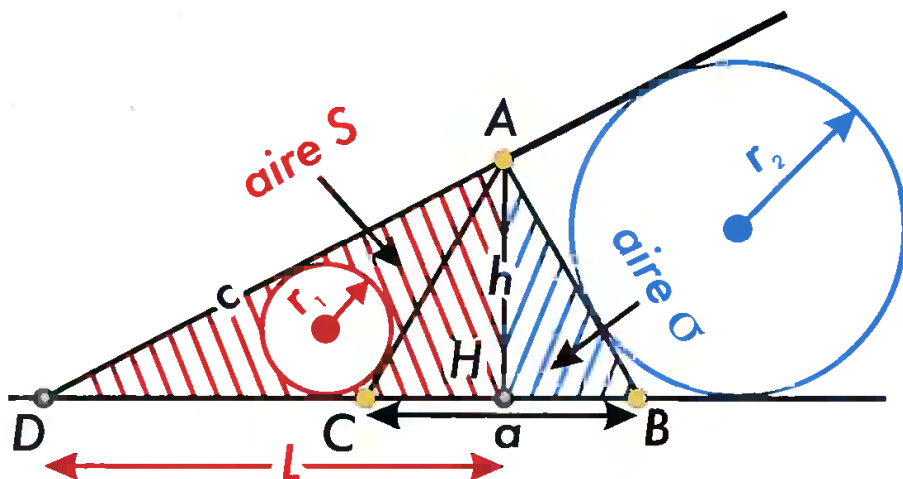
On examine donc le cas limite où $\mathcal{D}$ est parallèle à BC . Les deux cercles ont même diamètre égal à la hauteur h du triangle équilatéral.



Cas limite

On doit donc prouver que $r_1 + r_2 = h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ (le calcul de la hauteur découle du théorème de Pythagore).

On peut maintenant prouver le résultat annoncé. On commence par quelques notations qui sont résumées dans la figure ci-dessous. On note H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC , S l'aire de AHD , σ l'aire du triangle ABH , $a = BC$, $c = AD$ et $L = HD$.



On a ainsi :

$$S = \frac{Lh}{2}, \sigma = \frac{ah}{4}$$

Le rayon r_1 du triangle inscrit dans ACD vaut :

$$r_1 = \frac{2(S - \sigma)}{\left(L - \frac{a}{2}\right) + a + c} = \frac{h\left(L - \frac{a}{2}\right)}{\left(L + \frac{a}{2}\right) + c}$$

et le rayon r_2 du cercle exinscrit à ABD dans l'angle $\hat{D}$ est égal à (proposition 3 du memento) :

$$r_2 = \frac{2(S + \sigma)}{\left(L + \frac{a}{2}\right) + c - a} = \frac{h\left(L + \frac{a}{2}\right)}{\left(L - \frac{a}{2}\right) + c}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{r_1 + r_2}{h} &= \frac{\left(L - \frac{a}{2}\right)}{\left(L + \frac{a}{2}\right) + c} + \frac{\left(L + \frac{a}{2}\right)}{\left(L - \frac{a}{2}\right) + c} \\ &= \frac{2L^2 + 2Lc + \frac{a^2}{2}}{(L+c)^2 - \frac{a^2}{4}} = \frac{(L+c)^2 - c^2 + L^2 + \frac{a^2}{2}}{(L+c)^2 - \frac{a^2}{4}} \end{aligned}$$

Mais la relation de Pythagore dans le triangle AHD s'écrit $h^2 = \frac{3a^2}{4} = c^2 - L^2$, ainsi :

$$\frac{r_1 + r_2}{h} = 1$$

On vient donc de prouver que $r_1 + r_2$ est constant égal à h . On peut démontrer le même résultat avec un triangle isocèle.

23 Quatre cercles dans un triangle

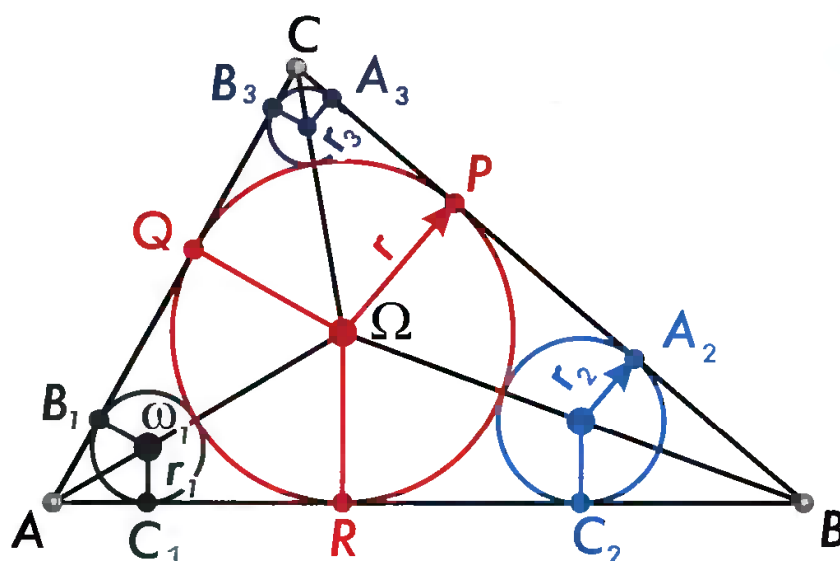
Son histoire

Un sangaku daté de 1814 et peint sur une tablette exposée dans la préfecture de Chiba. Le même problème apparaît cependant dans un ouvrage de Seiyo Sanpo en 1781 [2].



L'énigme

Dans le triangle ABC , le cercle inscrit, de centre Ω permet de construire trois cercles tangents à ce dernier de rayon r_1 , r_2 et r_3 respectivement. Le premier étant également tangent à AB et AC , le second à BA et BC et le troisième à CB et CA .



On demande de prouver la relation suivante entre les rayons des quatre cercles :

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

On utilise les notations de la figure de la page précédente pour la résolution de ce sangaku.

Solution

On utilise le résultat établi dans le premier sangaku page 59. On applique cette relation au cercle inscrit et au cercle de rayon r_1 pour en déduire que $C_1R = 2\sqrt{rr_1}$. Le théorème de Thalès permet d'affirmer que :

$$\frac{AC_1}{AR} = \frac{r_1}{r} \Rightarrow \frac{C_1R}{AR} = \frac{AR - AC_1}{AR} = 1 - \frac{AC_1}{AR} = \frac{r - r_1}{r}$$

ainsi :

$$AR = \frac{2r\sqrt{rr_1}}{r - r_1}$$

et par permutation des rôles :

$$BP = \frac{2r\sqrt{rr_2}}{r - r_2}, \quad CQ = \frac{2r\sqrt{rr_3}}{r - r_3}$$

On en déduit la valeur du demi-périmètre p du triangle ABC , puisque $AQ = AR$, $CQ = CP$, $BP = BR$:

$$p = AR + BP + CQ = 2r\sqrt{r} \left[\frac{\sqrt{r_1}}{r - r_1} + \frac{\sqrt{r_2}}{r - r_2} + \frac{\sqrt{r_3}}{r - r_3} \right]$$

Mais, on a également d'après la formule de Héron (voir proposition 5 du mémento, page 165) :

$$r^2 p = (p - a)(p - b)(p - c) = AR \times BP \times CQ$$

soit :

$$2r^3 \sqrt{r} \left(\frac{\sqrt{r_1}}{r-r_1} + \frac{\sqrt{r_2}}{r-r_2} + \frac{\sqrt{r_3}}{r-r_3} \right) = 8r^4 \sqrt{r} \frac{\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{(r-r_1)(r-r_2)(r-r_3)}$$

Ce qui après simplification et réduction au même dénominateur donne :

$$(r-r_2)(r-r_3)\sqrt{r_1} + (r-r_1)(r-r_3)\sqrt{r_2} + (r-r_1)(r-r_2)\sqrt{r_3} - 4r\sqrt{r_1 r_2 r_3} = 0$$

soit en développant :

$$\begin{aligned} & (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}) r^2 \\ & - (r_1 \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1} r_2 + r_2 \sqrt{r_3} + \sqrt{r_2} r_3 + r_3 \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} r_1 + 4 \sqrt{r_1 r_2 r_3}) r \\ & + (r_1 r_2 \sqrt{r_3} + r_1 \sqrt{r_2} r_3 + \sqrt{r_1} r_2 r_3) = 0 \end{aligned}$$

On pose alors $\sigma_1 = \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3}$, $\sigma_2 = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$ et $\sigma_3 = \sqrt{r_1 r_2 r_3}$ les fonctions symétriques des racines des rayons, alors :

$$\begin{aligned} & (r_1 \sqrt{r_2} + \sqrt{r_1} r_2) + (r_2 \sqrt{r_3} + \sqrt{r_2} r_3) + (r_3 \sqrt{r_1} + \sqrt{r_3} r_1) + 4 \sqrt{r_1 r_2 r_3} \\ & = \sqrt{r_1 r_2} (\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_3}) \\ & + \sqrt{r_2 r_3} (\sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} - \sqrt{r_1}) \\ & + \sqrt{r_3 r_1} (\sqrt{r_3} + \sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} - \sqrt{r_2}) \\ & + 4 \sqrt{r_1 r_2 r_3} \\ & = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (r_1 r_2 \sqrt{r_3} + r_1 \sqrt{r_2} r_3 + \sqrt{r_1} r_2 r_3) & = \sqrt{r_1 r_2 r_3} (\sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}) \\ & = \sigma_2 \sigma_3 \end{aligned}$$

et l'équation en r s'écrit :

$$\sigma_1 r^2 - (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_3) r + \sigma_2 \sigma_3 = 0$$

qui se factorise en :

$$(r - \sigma_2) (r \sigma_1 - \sigma_3) = 0$$

Il reste à prouver que l'on a bien $r = \sigma_2$ et non pas $r = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$. Pour cela, on considère le cas particulier du triangle équilatéral pour lequel $r_1 = r_2 = r_3$ et qui donne :

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} = \frac{\sqrt{r_1^3}}{3\sqrt{r_1}} = \frac{r_1}{3} < r_1$$

et prouve que c'est bien l'expression :

$$r = \sqrt{r_1 r_2} + \sqrt{r_2 r_3} + \sqrt{r_3 r_1}$$

qu'il faut choisir.

Remarque : On peut également éliminer la solution $\frac{\sigma_3}{\sigma_1}$ de la manière suivante. L'inégalité arithmético-géométrique pour trois nombres positifs s'écrit $\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a+b+c}{3}$. On en déduit que :

$$3 \sqrt[3]{r_1 r_2 r_3} \leq r_1 + r_2 + r_3$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{r_1 r_2 r_3}} = 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \times \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} \times \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}} \leq \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}}$$

d'où :

$$9 \leq (r_1 + r_2 + r_3) \times \left(\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} + \frac{1}{\sqrt{r_2 r_3}} + \frac{1}{\sqrt{r_3 r_1}} \right) = (r_1 + r_2 + r_3) \times \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_3} \right)$$

soit :

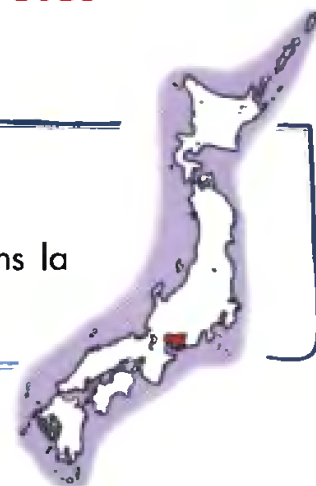
$$\frac{\sigma_3}{\sigma_1} < \frac{r_1 + r_2 + r_3}{9}$$

Puisque r_1 , r_2 et r_3 sont plus petits que r , on en déduit que $\frac{\sigma_3}{\sigma_1} < \frac{r}{3}$, ce qui conduit à rejeter la solution $r = \frac{\sigma_3}{\sigma_1}$.

24 Deux triangles rectangles, cinq cercles

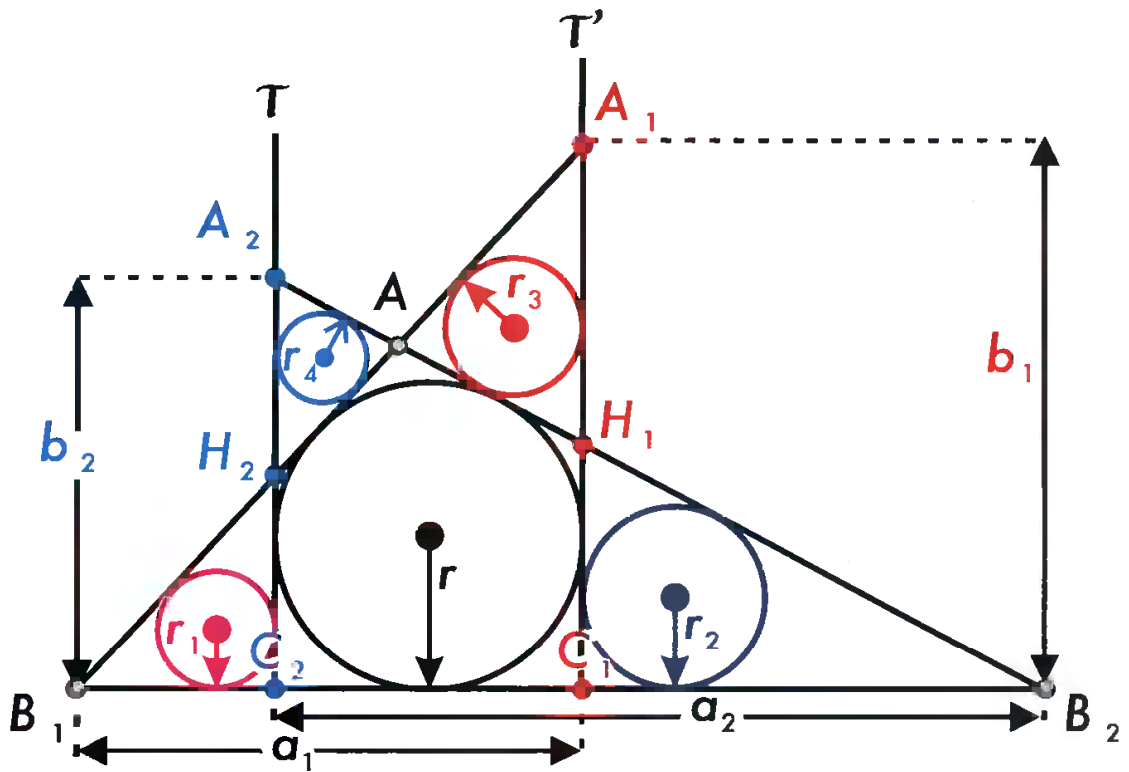
Son histoire

La tablette, datée de 1847 n'existe plus. Elle était située dans la préfecture d'Aichi ^[2].



L'énigme

On considère un triangle AB_1B_2 , les deux tangentes $\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}'$ au cercle inscrit et perpendiculaires au côté B_1B_2 coupent les côtés AB_1 , AB_2 et B_1B_2 selon la figure suivante. On définit ainsi quatre nouveaux triangles Δ_1 , Δ_2 , Δ_3 et Δ_4 tels que Δ_1 et Δ_4 ont un côté s'appuyant sur $\mathcal{T}$, alors que Δ_2 et Δ_3 ont un côté s'appuyant sur $\mathcal{T}'$. On demande de prouver que si r_i est le rayon du cercle inscrit à Δ_i alors $r_1 r_3 = r_2 r_4$.



Solution

Les notations sont celles de la figure. On note r le rayon du cercle C inscrit au triangle AB_1B_2 , c_1 et c_2 les longueurs des hypoténuses des triangles $A_1B_1C_1$ et $A_2B_2C_2$. Le cercle C est également inscrit au triangle $A_1B_1C_1$ qui est rectangle en C_1 , ainsi :

$$r = \frac{a_1 + b_1 - c_1}{2}$$

Les triangles $B_1C_2H_2$ et $B_1C_1A_1$ sont homothétiques dans le rapport $\frac{a_1 - 2r}{a_1}$ ainsi :

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a_1 - 2r}{a_1}$$

et par symétrie des rôles :

$$\frac{r_2}{r} = \frac{a_2 - 2r}{a_2}$$

L'expression de r en fonction de a_1 , b_1 et c_1 peut s'écrire $2r + c_1 = a_1 + b_1$. En élevant au carré cette égalité, compte tenu de la relation de Pythagore $c_1^2 = a_1^2 + b_1^2$ dans le triangle $A_1 B_1 C_1$, on obtient :

$$(2r + c_1)^2 = (a_1 + b_1)^2 \iff 4r^2 + 4rc_1 = 2a_1 b_1$$

Si on utilise de nouveau la relation $2r + c_1 = a_1 + b_1$ sous la forme $c_1 r = a_1 r + b_1 r - 2r^2$, dans la relation précédente on en déduit que :

$$-2r^2 + 2a_1 r + 2b_1 r - a_1 b_1 = 0$$

$$\text{soit} \quad \frac{r}{a_1} = \frac{2r - b_1}{2(r - b_1)}$$

131

On en déduit alors que :

$$\frac{r_1}{r} = 1 - 2 \frac{r}{a_1} = 1 - \frac{2r - b_1}{r - b_1} = \frac{r}{b_1 - r}$$

et de la même manière, par symétrie des rôles :

$$\frac{r}{a_2} = \frac{2r - b_2}{2(r - b_2)} \text{ et } \frac{r_2}{r} = \frac{r}{b_2 - r}$$

d'où :

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{b_2 - r}{b_1 - r}$$

Il reste à prouver que le rapport $\frac{r_4}{r_3}$ vaut également $\frac{b_2 - r}{b_1 - r}$. Or les triangles AH_1A_1 et AA_2H_2 sont homothétiques dans le rapport $\frac{r_4}{r_3}$. En notant $h_1 = C_1H_1$ et $h_2 = C_2H_2$, ce rapport vaut aussi :

$$\frac{b_2 - h_2}{b_1 - h_1}$$

mais puisque les triangles $B_2C_1H_1$ et $B_2C_2A_2$ sont homothétiques dans le rapport $\frac{h_1}{b_2}$, on a :

$$\frac{h_1}{b_2} = \frac{a_2 - 2r}{a_2} = \frac{r_2}{r} = \frac{r}{b_2 - r} \Rightarrow h_1 = \frac{b_2 r}{b_2 - r}$$

donc :

$$b_1 - h_1 = b_1 - \frac{b_2 r}{b_2 - r} = \frac{r(b_1 + b_2) - b_1 b_2}{r - b_2}$$

par symétrie des rôles, on a également $b_2 - h_2 = \frac{r(b_1 + b_2) - b_1 b_2}{r - b_1}$ et le rapport $\frac{b_2 - h_2}{b_1 - h_1}$ vaut $\frac{b_2 - r}{b_1 - r}$ ce qui prouve que $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_4}{r_3}$ et que :

$$r_1 r_3 = r_2 r_4$$

25 Trois cercles tangents deux à deux

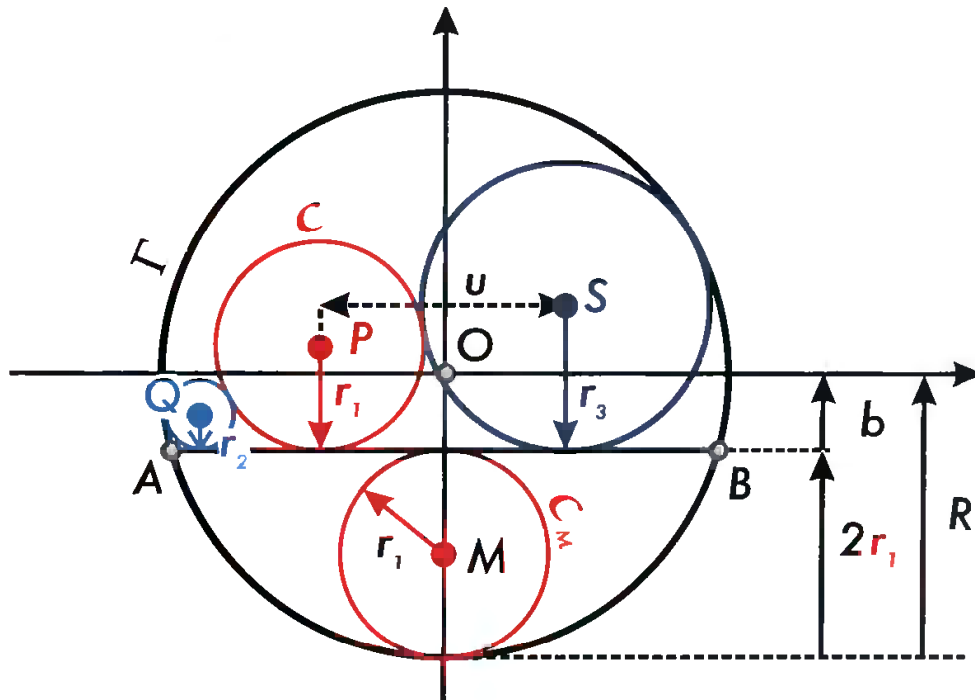
Son histoire

Ce sangaku est daté de 1888. Il se trouve sur une tablette de la préfecture de Fukushima. Le même problème est cependant discuté dans un ouvrage de Sanpo Jyojutu de 1841 ^[2].



L'énigme

Soit Γ un cercle de rayon R et (AB) une corde de Γ , on construit le cercle $\mathcal{C}_M$, de rayon r_1 , tangent à Γ et à (AB) et centré sur le diamètre de Γ perpendiculaire à (AB) . On construit à l'intérieur de Γ trois cercles deux à deux tangents comme indiqué sur la figure page suivante. Le cercle $\mathcal{C}$, ayant même rayon que $\mathcal{C}_M$, est tangent à (AB) , les deux autres cercles sont tangents extérieurement à $\mathcal{C}$ et intérieurement à Γ .



On demande de prouver la relation sur les longueurs des rayons : $R = r_1 + r_2 + r_3$.

Solution

Les notations sont celles de la figure. On se place dans le repère orthonormé dont l'origine est le centre du grand cercle, et tel que la corde (AB) ait pour équation $y = -b$ où $b > 0$. Les coordonnées du centre du cercle C_M sont $M : (0, -b - r_1)$. Compte tenu des conditions de tangence on a :

$$R = b + 2r_1$$

On note P le centre du cercle C de rayon r_1 et tangent à (AB) , et on désigne par $(p, -b + r_1)$ les coordonnées de P . On cherche alors les cercles tangents à C et à Γ .

Soit S de coordonnées $(p + u, -b + r)$ le centre d'un tel cercle et r son rayon. Les conditions de tangence à $\mathcal{C}$ et Γ s'écrivent respectivement :

$$(p + u - p)^2 + (r - r_1)^2 = (r + r_1)^2 \quad (1)$$

$$(p + u)^2 + (r - b)^2 = (R - r)^2 \quad (2)$$

La première équation fournit :

$$u^2 = 4rr_1$$

La seconde équation donne, avec $R - b = 2r_1$

$$(p + u)^2 = (R - b)(R + b - 2r) = (R^2 - b^2) - 4rr_1$$

ce qui fournit l'équation du second degré en u

$$u^2 + pu + \frac{1}{2}(p^2 + b^2 - R^2) = 0 \quad (E)$$

Les deux solutions (qui existent car le discriminant vaut $2(R^2 - b^2) - p^2$ et $p^2 \leq R^2 - b^2$) donnent donc deux cercles solutions et ainsi r_2 et r_3 sont tels que

$$r_2 = \frac{u^2}{4r_1} \text{ et } r_3 = \frac{v^2}{4r_1} \text{ où } u \text{ et } v \text{ sont les solutions de (E).}$$

On calcule alors la somme des carrés des solutions de cette équation qui vaut $(u + v)^2 - 2uv$ soit :

$$u^2 + v^2 = (-p)^2 - 2\left(\frac{1}{2}(p^2 + b^2 - R^2)\right) = R^2 - b^2$$

ce qui donne, avec $R - b = 2r_1$ et $R + b = 2(R - r_1)$:

$$r_2 + r_3 = \frac{R^2 - b^2}{4r_1} = \frac{(R - b)(R + b)}{4r_1} = \frac{4r_1(R - r_1)}{4r_1} = R - r_1$$

Ceci prouve l'égalité :

$$R = r_1 + r_2 + r_3$$

26 Le théorème d'Ohara

Son histoire

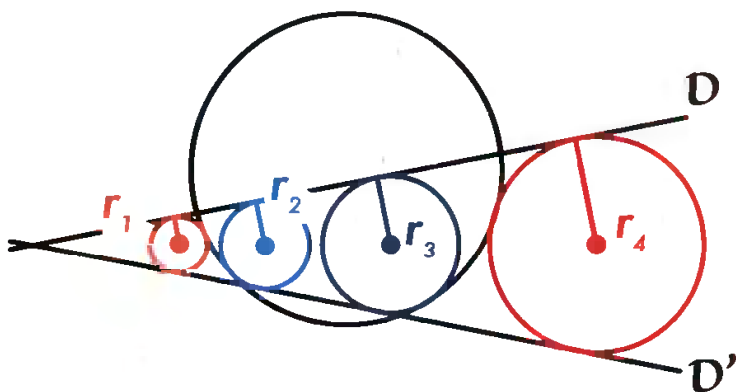
Ce résultat qui date de 1802 figure sur une tablette exposée dans la préfecture de Tokyo. Son auteur est le mathématicien Rimeï Ōhara (1793-1831).



136

L'énigme

Soient deux droites sécantes $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, un cercle $\mathcal{C}$ coupe ces deux droites. On considère les quatre cercles tangents à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et au cercle $\mathcal{C}$. Deux de ces cercles, de rayons r_1 et r_4 , sont tangents extérieurement à $\mathcal{C}$, alors que les deux autres, de rayon r_2 et r_3 , le sont intérieurement suivant le schéma ci-contre.



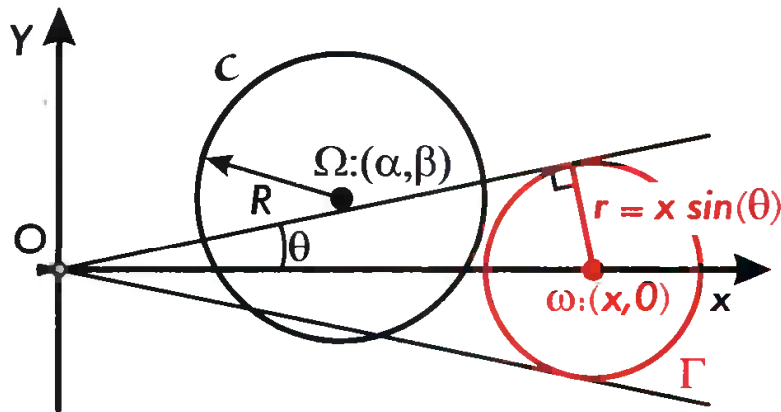
On demande de prouver la relation entre les rayons des quatre cercles

$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

Solution

On commence par une remarque élémentaire : les centres des quatre cercles tangents à $\mathcal{C}$ sont sur une même bissectrice de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. En effet, les quatre cercles sont tangents auxdites droites ; les centres des cercles sont donc équidistants de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$.

On se place dans le repère orthonormé suivant : l'origine O est prise au point de concours de $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, l'axe des abscisses est la bissectrice contenant les quatre centres. On note Ω le centre du cercle $\mathcal{C}$ coupant les deux droites, (α, β) les coordonnées de Ω , R le rayon de $\mathcal{C}$, et θ l'angle $\frac{1}{2}(\widehat{\mathcal{D}, \mathcal{D}'})$. Soit Γ un cercle centré en ω sur la bissectrice et tangent à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, si $(x, 0)$ sont les coordonnées de ω , le rayon de ce cercle est égal à $r = x \sin \theta$.



Les cercles $\mathcal{C}$ et Γ sont tangents extérieurement si la distance entre leurs centres vaut la somme des rayons, soit $R + r$; et tangents intérieurement lorsque cette distance vaut $R - r$. On en déduit que x est l'abscisse d'un des cercles tangent à $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{C}$ extérieurement lorsque

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 - (R + x \sin \theta)^2 = 0$$

Puisque le rayon de Γ vaut $x \sin \theta$, on peut alors affirmer que r_1 et r_4 sont solutions de l'équation du second degré en r

$$\left(\frac{r}{\sin \theta} - \alpha\right)^2 + \beta^2 - (R + r)^2 = 0 \quad (E_1)$$

De même, r_2 et r_3 sont solutions de :

$$\left(\frac{r}{\sin \theta} - \alpha\right)^2 + \beta^2 - (R - r)^2 = 0 \quad (E_2)$$

Le produit des racines des équations (E_1) et (E_2) est le même car les coefficients constants et dominants sont identiques, ce qui prouve que :

$$r_1 r_4 = r_2 r_3$$

27 Une ellipse, un carré et un cercle

Son histoire

La tablette n'existe plus, elle datait de 1857 et était localisée dans la préfecture d'Aichi ^[2].



L'énigme

On considère une ellipse telle que l'on puisse construire un carré ayant un sommet qui coïncide avec un des sommets secondaires, noté B , deux sommets sur l'ellipse et une diagonale confondue avec l'axe secondaire. On inscrit alors un cercle comme indiqué sur la figure. On demande d'exprimer le rayon du cercle en fonction des longueurs a et b des demi axes de l'ellipse.

Solution

On se place dans le repère orthonormé où l'ellipse a pour équation réduite :

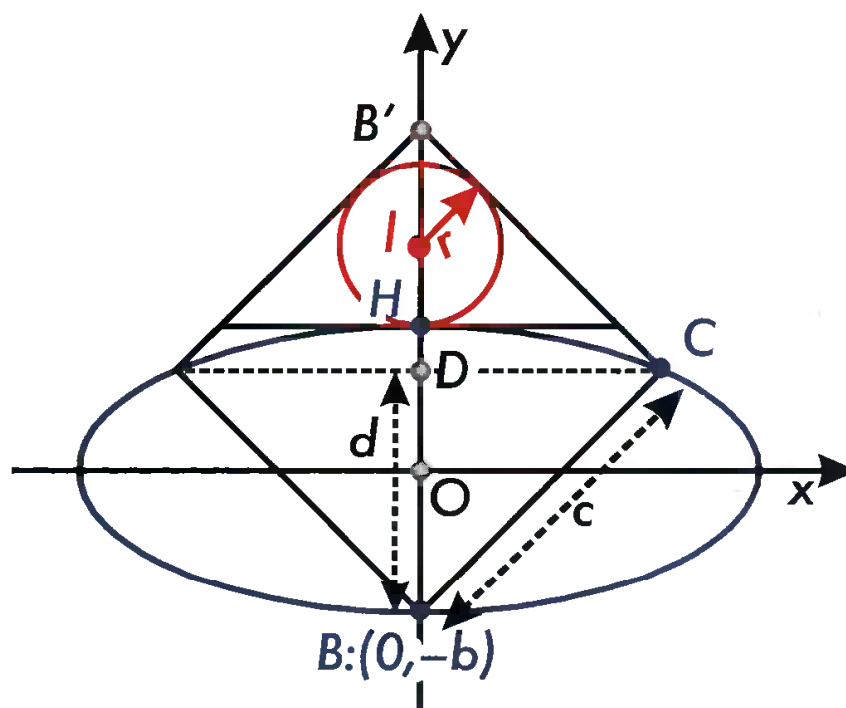
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Les notations utilisées sont celles de la figure. L'équation de la droite (BC) est $y = x - b$; elle coupe l'ellipse en deux points : B et C . On obtient les abscisses de ces points par résolution du système :

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ y = x - b \end{cases}$$

ce qui conduit à l'équation du second degré en x :

$$b^2 x^2 + a^2 (x - b)^2 - a^2 b^2 = 0 \iff (a^2 + b^2) x^2 - 2a^2 b x = 0$$



Une des racines est $x = 0$, abscisse du point B : l'autre est l'abscisse de C , à savoir $\frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}$. Mais puisque l'on a construit un carré, cette abscisse vaut DC , soit également BD , on en déduit les valeurs de d et c :

$$d = \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad c = \sqrt{2} d$$

Or, si I est le centre du cercle inscrit $B'I = BB' - (BH + HI) = 2d - (2b + r)$ et d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{r}{c} = \frac{B'I}{B'B} = \frac{2d - (2b + r)}{2d} = \frac{d - b}{d} - \frac{r}{2d}$$

soit $r \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{2d} \right) = \frac{r}{d} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \right) = \frac{r(\sqrt{2} + 1)}{2d} = \frac{d - b}{d} = \frac{b}{d} \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$, ce qui donne :

$$r = 2(\sqrt{2} - 1) b \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$$

28 L'ellipse et le demi-cercle

Son histoire

Un problème récent car daté de 1915. Le même problème serait cependant déjà mentionné en 1799. La tablette est encore exposée dans la ville de Yamagata éponyme de la préfecture. Elle mesure 70 cm de haut sur 187 cm de large.



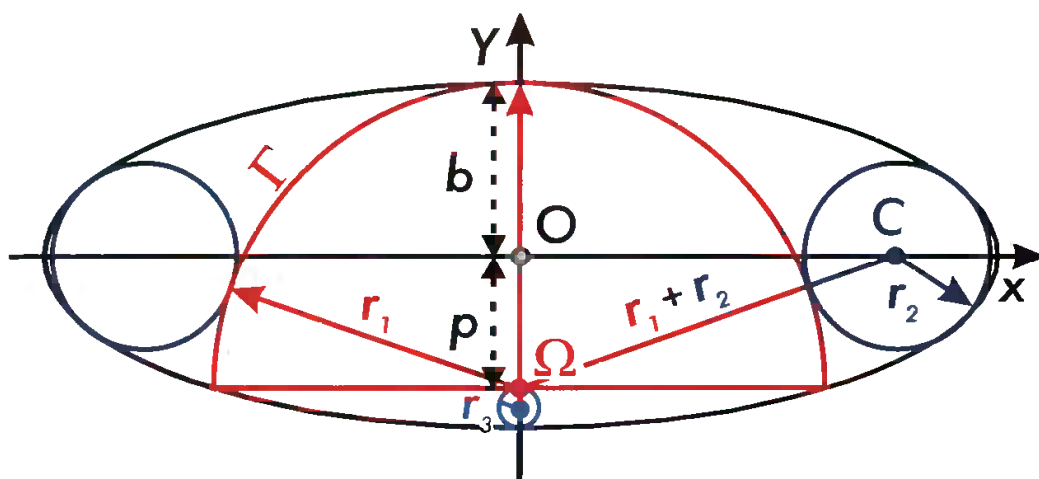
142

L'énigme

On considère une ellipse de demi grand axe a et de demi petit axe b . Soit Γ un cercle de rayon r_1 centré sur l'axe secondaire passant par un des sommets secondaires de l'ellipse et coupant cette dernière selon un diamètre.

On considère alors les deux cercles de rayon r_2 , centrés sur l'axe focal de l'ellipse, tangents à Γ et bitangents à l'ellipse. Enfin, r_3 désigne le rayon du cercle tangent à l'ellipse en l'autre sommet secondaire et au diamètre de Γ . On demande de prouver que :

$$r_1 = 2r_2 + 6r_3$$



Solution

Les notations sont celles de la figure. On se place dans le repère où l'ellipse a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ et le diamètre du demi-cercle $y = -p$. Les points d'intersections du demi-cercle et de l'ellipse ont donc pour abscisse les x tels que :

$$x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - p^2)$$

Puisque le grand cercle coupe l'ellipse en un diamètre :

$$r_1^2 = (b + p)^2 = x^2 = \frac{a^2}{b^2} (b^2 - p^2)$$

d'où :

$$b + p = \frac{a^2}{b^2} (b - p) \Rightarrow p = b$$

et ainsi :

$$r_1 = b + p = \frac{2a^2 b}{a^2 + b^2}$$

Il est clair que :

$$r_3 = \frac{2b - r_1}{2} = b - \frac{r_1}{2} = \frac{b^3}{a^2 + b^2}$$

Il reste à calculer r_2 . On sait que $OC^2 = \frac{a^2 - b^2}{b^2} (b^2 - r_2^2)$ (proposition 6 du memento page 166), et par application du théorème de Pythagore, puisque les cercles sont tangents :

$$OC^2 + p^2 = (r_1 + r_2)^2$$

d'où, avec $p = r_1 - b$, $OC^2 = (r_1 + r_2)^2 - (r_1 - b)^2$, soit

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} (b^2 - r_2^2) = (b + r_2) (2r_1 + r_2 - b)$$

ce qui donne :

$$\frac{a^2 - b^2}{b^2} (b - r_2) = 2r_1 - (b - r_2) \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} (b - r_2) = 2r_1$$

Avec les valeurs trouvées pour r_1 et r_3 , on obtient :

$$b - r_2 = \frac{4b^3}{a^2 + b^2} = 4r_3 = 4b - 2r_1$$

ce qui s'écrit aussi :

$$r_2 = 2r_1 - 3b$$

De $2(2r_1 - 3b) + 6\left(b - \frac{r_1}{2}\right) = r_1$ on en déduit alors que :

$$2r_2 + 6r_3 = r_1$$

Remarque : On a $r_2 = b \frac{a^2 - 3b^2}{a^2 + b^2}$, ce qui semble indiquer qu'il y a une condition sur l'ellipse pour que la configuration soit possible. En fait, le rayon d'un cercle centré sur l'axe focal et bitangent à l'ellipse, qui coupe ainsi l'ellipse en deux points doubles, est compris entre $\frac{b^2}{a}$ et b . On doit donc avoir $\frac{b^2}{a} \leq r_2 \leq b$. L'inégalité $\frac{b^2}{a} \leq r_2$ équivaut à $\frac{a^2 - 3b^2}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a} \geq 0$ soit après réduction au même dénominateur et simplification à $(a - b)^2 - 2b^2 \geq 0$. On doit ainsi avoir $\frac{a}{b} \geq 1 + \sqrt{2}$, l'autre inégalité $r_2 \leq b$ étant toujours vérifiée.

(Photographie de Tomomi Ozawa)



Santuaire de Matsubara, ville d'Odawara, préfecture de Kanagawa.

29 Une chaîne de cercles dans une ellipse

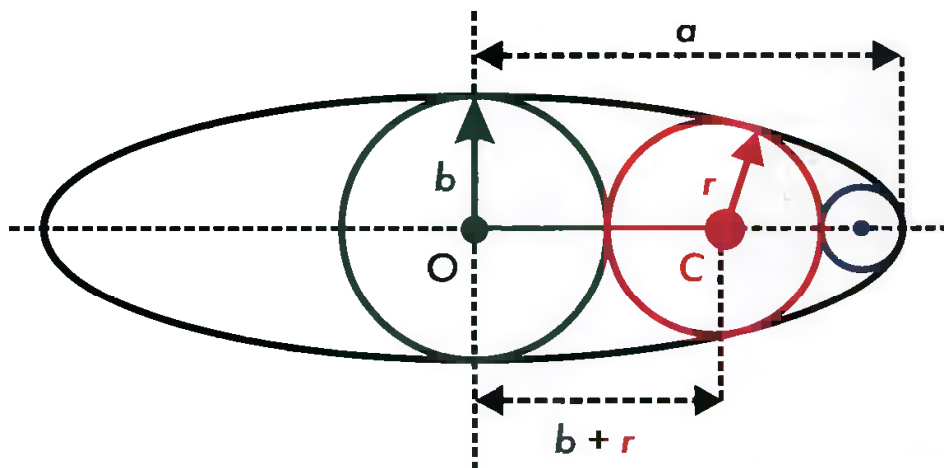
Son histoire

La tablette, datée de 1838, n'existe plus. Elle était localisée dans la préfecture d'Aichi.



L'énigme

On considère une ellipse de demi grand axe a telle qu'il existe un cercle centré sur l'axe focal, bitangent à l'ellipse, tangent extérieurement au cercle secondaire et au cercle osculateur au sommet principal.



On demande de montrer que le rayon de ce cercle bitangent vaut $\frac{a}{4}$.

Solution

Soient b la longueur du demi petit axe de l'ellipse et r le rayon du cercle rouge. Le cercle vert a pour rayon b et le cercle bleu a pour rayon $\frac{b^2}{a}$. On en déduit donc que :

$$2r + b + \frac{2b^2}{a} = a \Leftrightarrow 2r + b = \frac{a^2 - 2b^2}{a} \quad (1)$$

On sait également que, d'après la proposition 6 du memento :

$$OC^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2} = (b + r)^2 \quad (2)$$

Cette équation donne, après simplification par $b + r$,

$$\frac{a}{b}r = \frac{a^2 - 2b^2}{a} \quad (3)$$

(1) et (2) donnent l'égalité :

$$2r + b = \frac{a}{b}r \Leftrightarrow r = \frac{b^2}{a - 2b} \quad (4)$$

on reporte dans (3) pour obtenir :

$$(a - b)(a^2 - 2ab - 4b^2) = 0 \Rightarrow a(a - 2b) = 4b^2$$

soit, compte tenu de (4) :

$$r = \frac{a}{4}$$

Remarque : la résolution de $a^2 - 2ab - 4b^2 = 0$ donne $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$ ce qui prouve qu'il n'y a qu'un type d'ellipse possible.

30 Une ellipse et quatre cercles tangents

Son histoire

Le problème suivant est extrait d'un sangaku de 1813 localisé dans la préfecture de Fukushima. La tablette comporte 17 problèmes. Un autre de ces problèmes a déjà été résolu page 108, sous le titre « Origami et sangaku ».



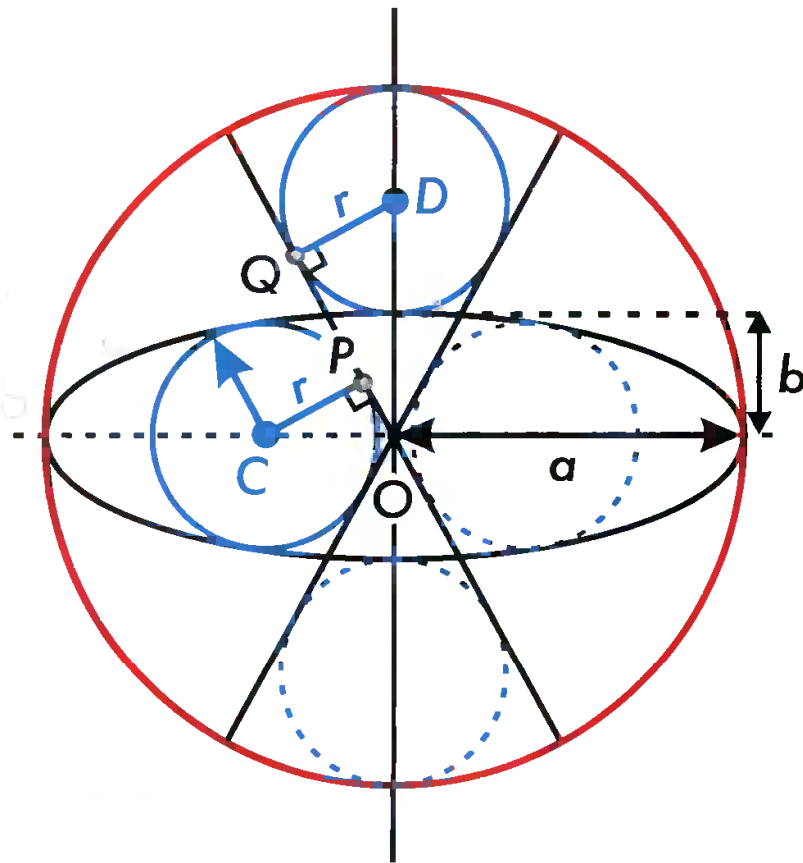
L'énigme

148

Soit une ellipse de demi grand axe a . On peut définir deux cercles tangents intérieurement au cercle principal de l'ellipse et extérieurement à l'ellipse aux sommets secondaires. Les tangentes au centre de l'ellipse à ces deux cercles définissent alors deux autres cercles, centrés sur l'axe focal, bitangents intérieurement à l'ellipse et tangents à ces deux droites.

On suppose que l'ellipse est telle que ces quatre cercles, en bleu sur la figure page suivante, ont même rayon. On demande de calculer le rapport de ce rayon au demi grand axe de l'ellipse. Le sangaku original demande de prouver que le

rapport vaut $\frac{r}{a} = \frac{13 - \sqrt{137}}{4}$.



Solution

Les notations sont celles de la figure. En observant la figure, on déduit que le rayon des cercles bleus vaut $r = \frac{a-b}{2}$. Les triangles OCP et DOQ sont semblables donc :

$$\frac{OC}{OD} = \frac{r}{OQ}$$

Dans le triangle rectangle ODQ , la relation de Pythagore donne $OD^2 = r^2 + OQ^2$,
avec $OD = b + r = \frac{a+b}{2}$ on obtient :

$$OQ^2 = (b+r)^2 - r^2 = b(b+2r) = ab$$

On sait également que :

$$OC^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2} = \frac{(a+b)^2(a-b)(3b-a)}{4b^2}$$

Ainsi :

$$\frac{OC^2}{OD^2} = \frac{(a-b)(3b-a)}{b^2} \quad \text{et} \quad \frac{r^2}{OQ^2} = \frac{(a-b)^2}{4ab}$$

d'où :

$$\frac{OC^2}{OD^2} = \frac{r^2}{OQ^2} \iff \frac{3b-a}{b} = \frac{a-b}{4a}$$

soit

$$4a^2 - 11ab - b^2 = 0$$

On a donc établi que $\frac{b}{a}$ est solution de l'équation du second degré $X^2 + 11X - 4 = 0$
qui admet une seule racine positive :

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{137} - 11}{2}$$

Il en découle que avec $\frac{r}{a} = \frac{a-b}{2a} = \frac{1}{2} - \frac{b}{2a}$

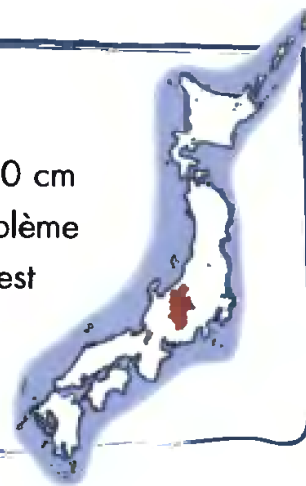
$$\frac{r}{a} = \frac{13 - \sqrt{137}}{4}$$

On constate qu'il n'existe qu'un type d'ellipse possible permettant de réaliser la figure du problème.

31 Un cube et trois sphères

Son histoire

La tablette date de 1875 et mesure 121 cm de large sur 60 cm de haut. Elle propose deux problèmes : le premier est un problème classique de géométrie de contact sur les cercles, le second est celui proposé au lecteur. Ce sangaku est encore exposé dans le sanctuaire de Komagata, ville de Nagawa, préfecture de Nagano ^[2].



151

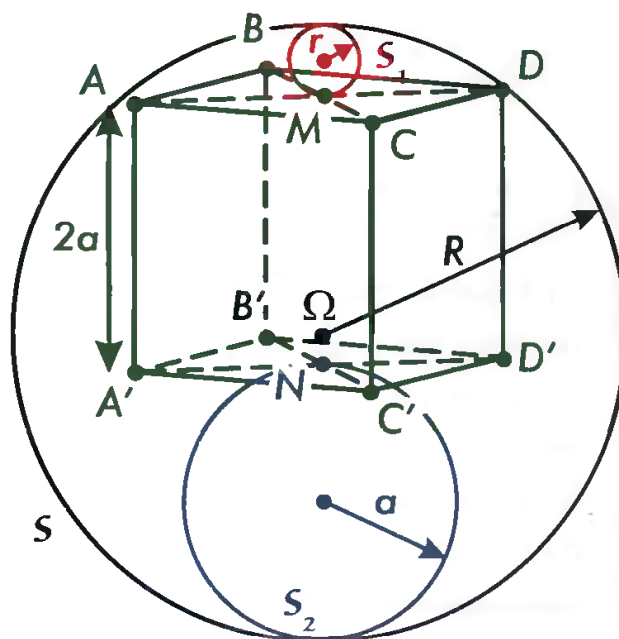
L'énigme

On considère un cube $ABCD A' B' C' D'$ dont les arêtes ont pour longueur $2a$. La sphère S , de rayon R , passe par les sommets $ABCD$ du cube. La sphère S_1 , de rayon r , est tangente à S intérieurement et à la face $ABCD$ du cube en son centre M . Enfin la sphère S_2 , de rayon a , est tangente à S intérieurement et à la face $A' B' C' D'$ du cube en son centre N .

On demande de calculer le rapport $\frac{r}{R}$.

Solution

On se place dans le plan de coupe contenant A, D, A' et D' . Ce plan contient les centres des sphères et le centre du cube. Ainsi il coupe les trois sphères selon des cercles de rayon R, r et a et la trace du cube est un rectangle dont les côtés ont pour longueur $2a$ et $2a\sqrt{2}$.



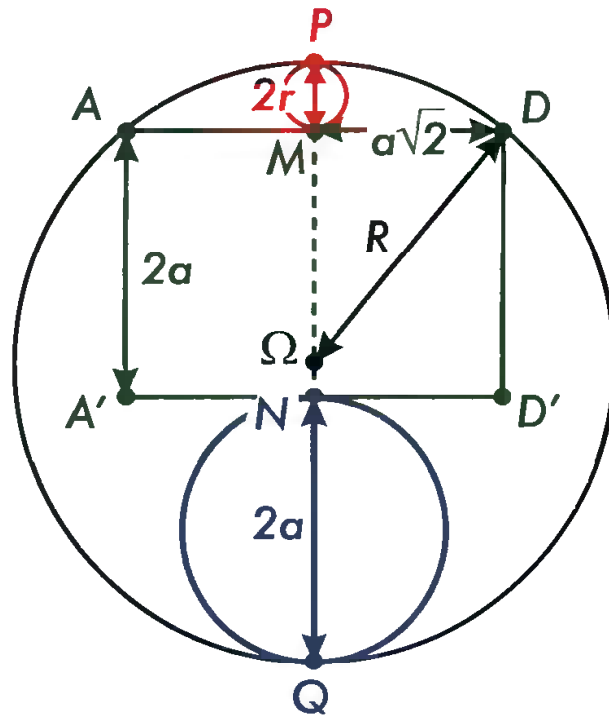
Soit Ω le centre de S , P et Q les points de contact des sphères S_1 et S_2 avec S respectivement, le théorème de Pythagore appliqué au triangle ΩMD s'écrit :

$$\Omega M^2 = R^2 - 2a^2$$

Ainsi

$$\Omega N = 2a - \Omega M = 2a - \sqrt{R^2 - 2a^2}$$

$$\text{et } \Omega Q = R = \Omega N + 2a = 4a - \sqrt{R^2 - 2a^2}.$$



La dernière égalité implique :

$$(R - 4a)^2 = R^2 - 2a^2 \Rightarrow a = \frac{4R}{9}$$

Enfin :

$$PQ = 2R = 2r + 4a = 2r + \frac{16R}{9}$$

ce qui donne la valeur du rapport :

$$r = \frac{R}{9}$$

32 Neuf sphères

Son histoire

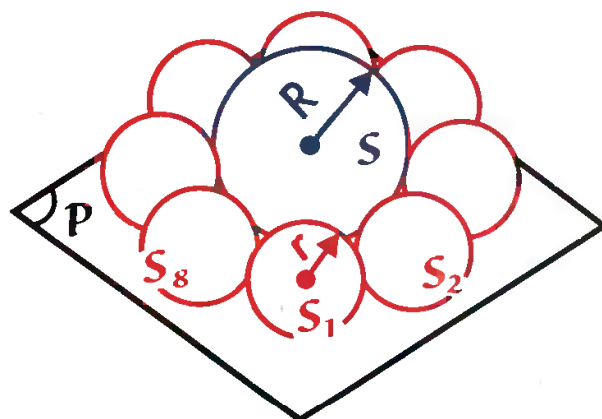
Un problème extrait d'une tablette datée de 1914 et exposée dans la préfecture de Yamagata ^[2].



L'énigme

154

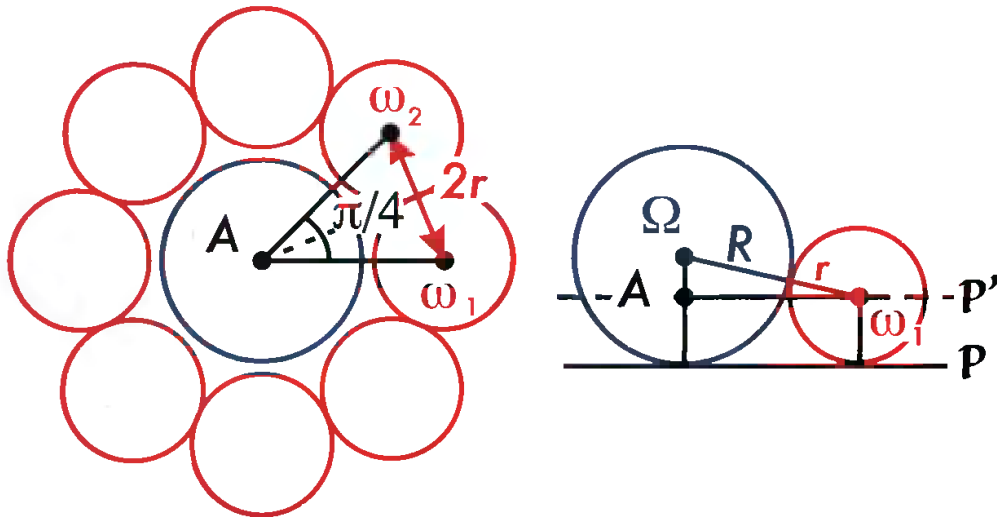
Soit S une sphère tangente à un plan $\mathcal{P}$, on dispose autour de S huit sphères isométriques $S_1, S_2, \dots, S_8$ tangentes entre elles, tangentes à S et tangentes à $\mathcal{P}$. Si R est le rayon de S et r le rayon commun aux huit sphères, on demande de déterminer la valeur du rapport $\frac{r}{R}$.



Solution

On regarde la trace des neuf sphères dans un plan $\mathcal{P}'$ parallèle à $\mathcal{P}$ et passant par le centre des huit sphères isométriques. On obtient un collier de huit cercles isométriques tangents. Si on coupe par un plan perpendiculaire à $\mathcal{P}$, passant par

les centres de S et de S_1 , on obtient deux cercles tangents entre eux et tangents à une droite.



En utilisant le résultat démontré dans le premier sangaku, page 59, on a :

$$A\omega_1 = 2\sqrt{Rr}$$

Dans le triangle isocèle $A\omega_1\omega_2$, on a :

$$r = A\omega_1 \sin \frac{\pi}{8} = 2\sqrt{Rr} \sin \frac{\pi}{8}$$

en élevant au carré, on obtient :

$$\frac{r}{R} = 4 \sin^2 \frac{\pi}{8} = 2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{4} \right)$$

soit :

$$\frac{r}{R} = 2 - \sqrt{2}$$

33 La coupole

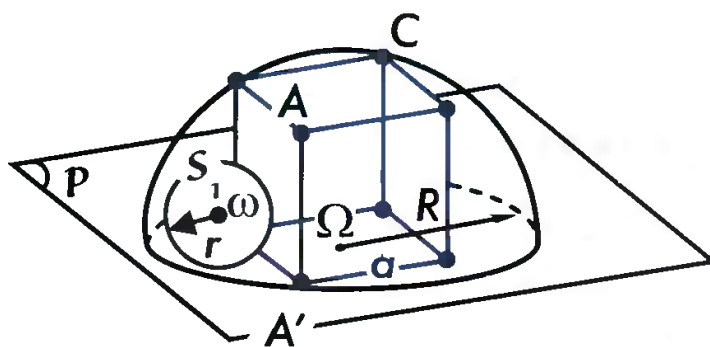
Son histoire

Un sangaku peint en 1822 dans la préfecture de Miyagi et qui a disparu [2].



L'énigme

Une sphère S de rayon R est coupée en son centre par un plan $\mathcal{P}$. Dans une des demi sphères obtenues, on inscrit un cube $\mathcal{C}$ dont une face est centrée au centre de la sphère. Soit S_1 une sphère tangente à S , à une des faces de $\mathcal{C}$ « au milieu » et à $\mathcal{P}$, on demande d'exprimer la longueur a de l'arête du cube et le rayon r de S_1 en fonction de R .



Solution

On commence par calculer la longueur de l'arête du cube en fonction de R . Pour cela, on se place dans un plan de coupe passant par le centre de la demi sphère et deux sommets du cube situés sur la sphère, par exemple A et C . La diagonale AC

a pour longueur $a\sqrt{2}$, dans le triangle rectangle $\Omega AA'$, la relation de Pythagore donne :

$$a^2 + \frac{a^2}{2} = R^2$$

soit :

$$a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} R$$

Pour calculer le rayon r de S_1 , on se place maintenant dans un plan de coupe perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par les centres Ω et ω de S et S_1 .

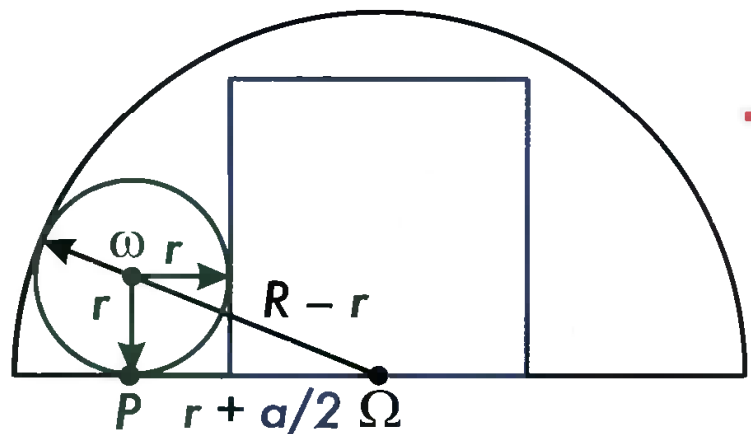
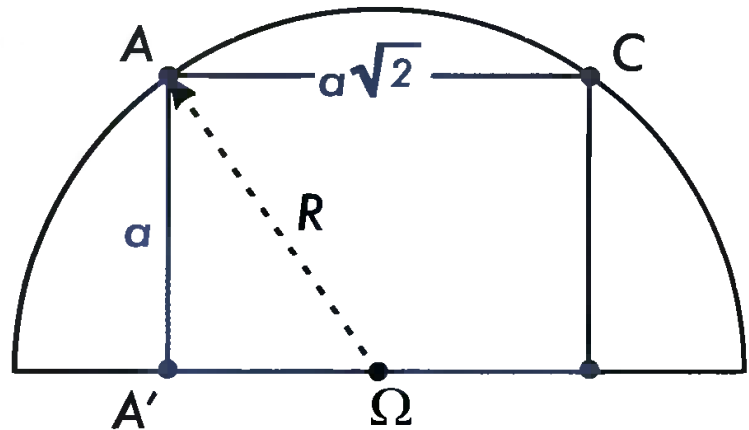
Si P est le projeté de ω sur le plan $\mathcal{P}$, la relation de Pythagore dans le triangle $\Omega\omega P$ donne :

$$(R - r)^2 = r^2 + \left(r + \frac{a}{2}\right)^2$$

ainsi $x = \frac{r}{R}$ est solution de l'équation du second degré :

$$x^2 + 2 \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right) x - \frac{5}{6} = 0$$

dont l'unique solution positive est :



$$\frac{r}{R} = \sqrt{2 + \frac{\sqrt{6}}{3}} - \left(1 + \frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

34 La pyramide à base carrée

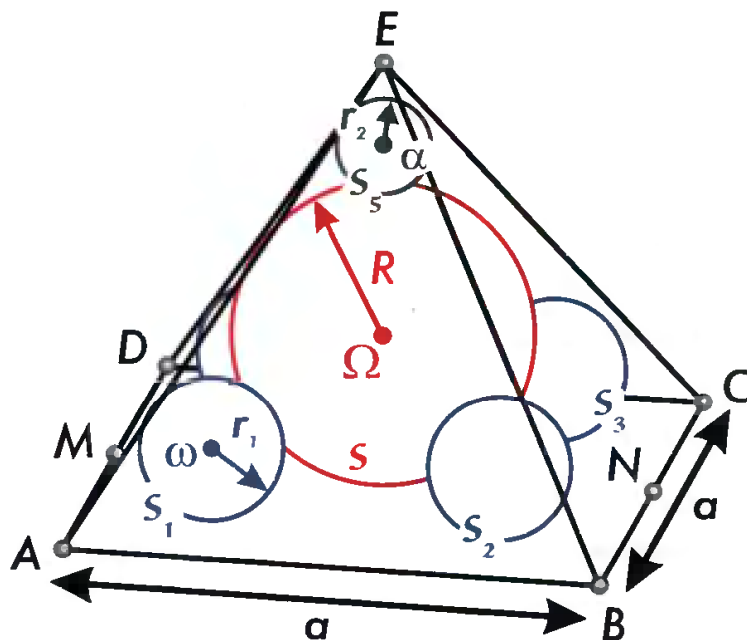
Son histoire

Un sangaku proposé sur une tablette qui a disparu. Datée de 1789, elle était exposée dans la préfecture de Tokyo [2].



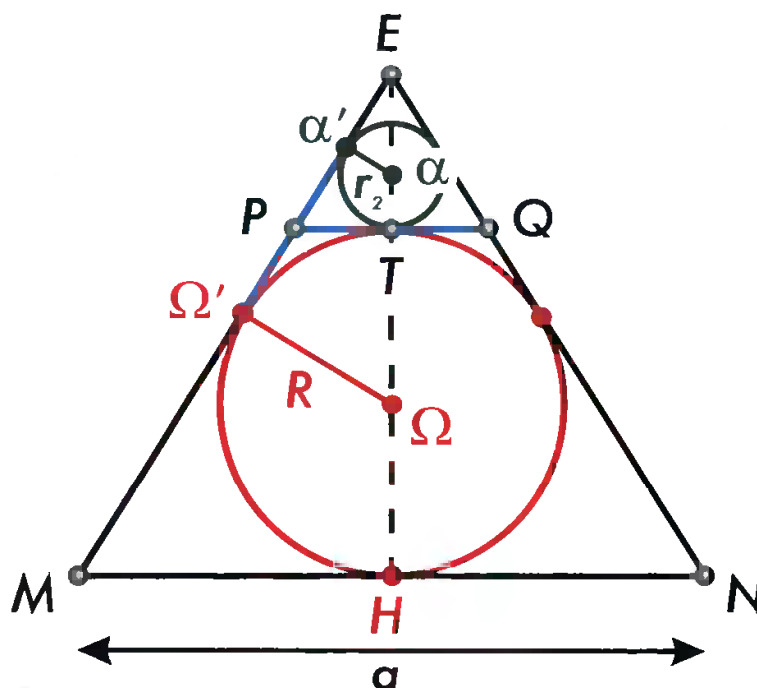
L'énigme

Soit $\Delta = ABCDE$ une pyramide droite à base carrée, on désigne par S la sphère inscrite à Δ . On considère les quatre sphères isométriques S_1, S_2, S_3 et S_4 tangentes à S , à la base de la pyramide et chacune à deux faces. Enfin S_5 est la sphère tangente à S et aux quatre faces de la pyramide. Si R est le rayon de S , r_1 le rayon commun aux quatre sphères S_1, S_2, S_3 et S_4 et r_2 celui de S_5 , on demande de prouver que $R = 2\sqrt{r_1 r_2} + r_1$.



Solution

On note M et N les milieux des côtés $[AD]$ et $[BC]$. On se place dans les deux plans de coupe (MEN) et (AEC) . Les notations sont celles des figures. Dans le premier plan de coupe, les triangles EMN et EPQ sont homothétiques dans l'homothétie de centre E et de rapport $\frac{MN}{PQ}$. Les cercles inscrits sont images l'un de l'autre donc $\frac{MN}{PQ} = \frac{R}{r_2}$. Le triangle MEN est isocèle donc $PT = TQ$. On sait également que $P\alpha' = PT$ et $P\Omega' = PT$, sur la figure les segments de même couleur ont même longueur, ainsi $\Omega'\alpha' = 2PT = PQ$.



Mais $\Omega'\alpha' = 2\sqrt{Rr_2}$ comme on l'a prouvé dans le premier sangaku page 59.
 Pour résumer, on a donc :

$$MN = PQ \frac{R}{r_2} = \Omega'\alpha' \frac{R}{r_2} = 2\sqrt{Rr_2} \frac{R}{r_2} = 2R\sqrt{\frac{R}{r_2}}$$

Dans le second plan de coupe, puisque les sphères S et S_1 sont tangentes à trois plans des cinq faces de la pyramide, elles sont homothétiques dans une homothétie de centre A . En particulier, les points A , ω et Ω sont alignés. Dans le triangle $A\Omega H$, le théorème de Thalès permet d'affirmer que :

$$\frac{\frac{1}{2}AC}{2\sqrt{Rr_1}} = \frac{R}{R-r_1} \Rightarrow AC = \frac{4R\sqrt{Rr_1}}{R-r_1}$$

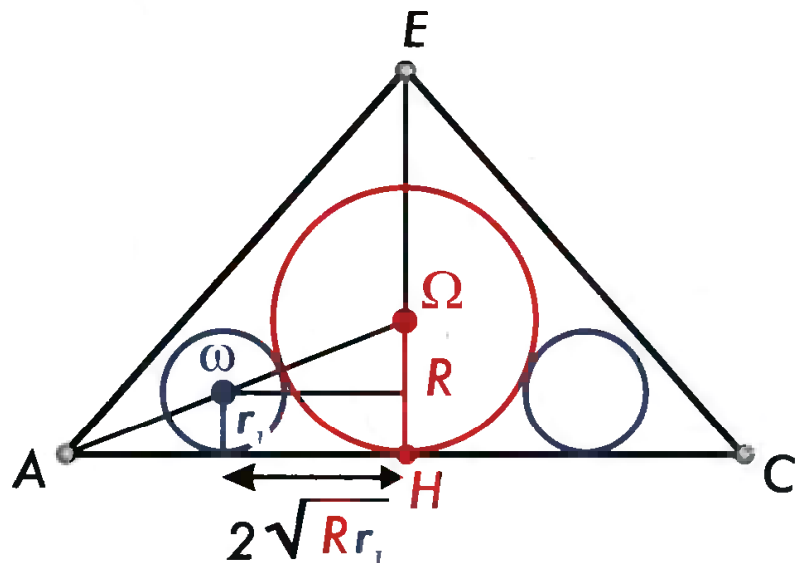
Or

$$AC = \sqrt{2}MN = 2R\sqrt{\frac{2R}{r_2}}$$

$$\text{d'où } \frac{4R\sqrt{Rr_1}}{R-r_1} = 2R\sqrt{\frac{2R}{r_2}},$$

ce qui donne :

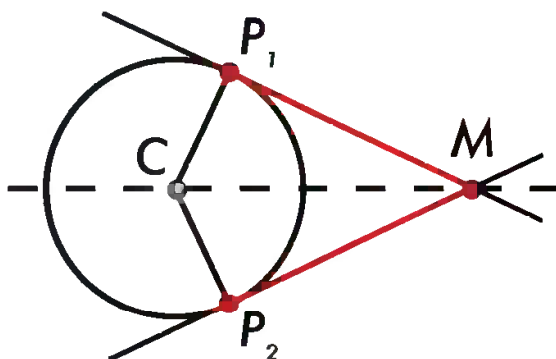
$$R = \sqrt{2r_1r_2} + r_1$$



Mémento

On rappelle ici quelques résultats utiles pour la résolution des sangaku.

Proposition 1 – Soit C un cercle, M un point extérieur à C , soit T_1 et T_2 les deux tangentes issues de M à C . Si $P_1 = T_1 \cap C_1$ et $P_2 = T_2 \cap C$ alors $MP_1 = MP_2$.



161

Preuve : Pour justifier cette égalité, Il suffit de constater que la droite reliant M au centre du cercle est un axe de symétrie de la figure.

Proposition 2 – Rayon du cercle inscrit à un triangle quelconque

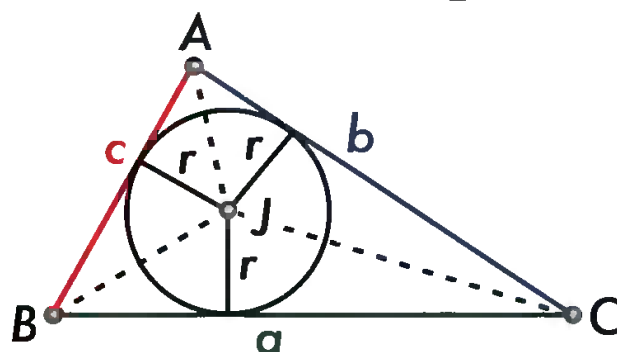
Si $\mathcal{A}$ est l'aire du triangle, p le demi périmètre et r le rayon du cercle inscrit alors :

$$\mathcal{A} = rp$$

Dans le cas d'un triangle rectangle de côtés de longueur a , b et c où c est l'hypoténuse, on obtient :

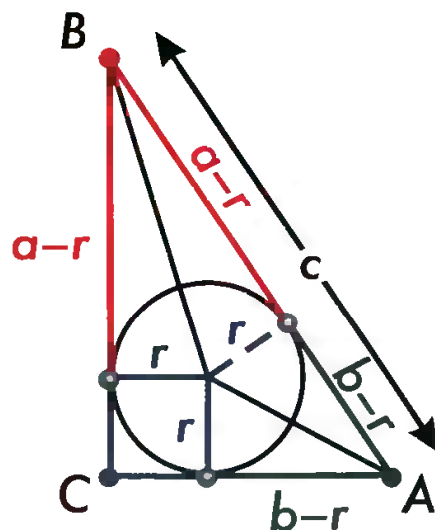
$$r = \frac{a + b - c}{2}$$

Preuve : Il suffit pour cela de calculer l'aire du triangle en décomposant ce dernier en trois triangles AIB , BIC et CIA ayant chacun pour hauteur commune r et pour base respective c , a et b . Ceci donne $A = \frac{1}{2} (ra + rb + rc) = rp$.



Dans le cas d'un triangle rectangle, on a l'égalité $c = (a - r) + (b - r)$ d'où :

$$r = \frac{a + b - c}{2}$$



Proposition 3 – Rayon du cercle exinscrit

Soit ABC un triangle, le rayon r_a du cercle exinscrit dans l'angle $\hat{A}$ est égal à :

$$r_a = \frac{2A}{-a+b+c}$$

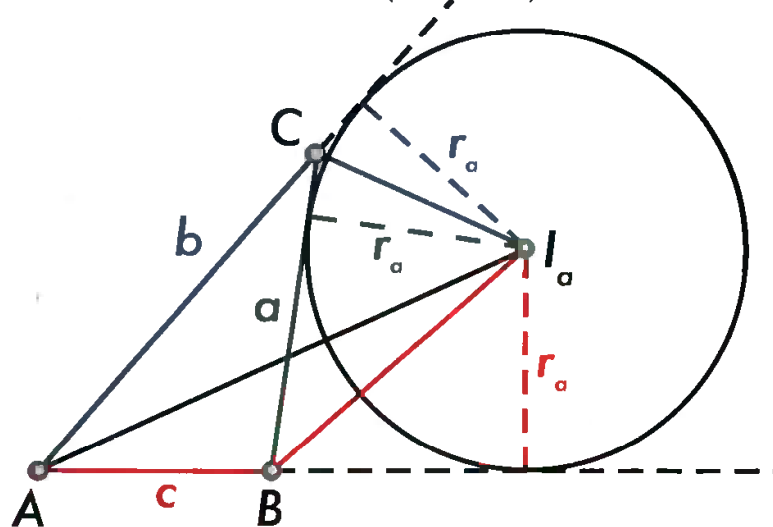
où A est l'aire du triangle.

Preuve : On calcule l'aire A du triangle de deux manières. Si I_a est le centre du cercle exinscrit à l'angle $\hat{A}$, l'aire A du triangle est égale à :

$$A = A(ACI_a) + A(ABI_a) - A(BCI_a)$$

Ces trois triangles ont une hauteur de même longueur r_a . On obtient alors :

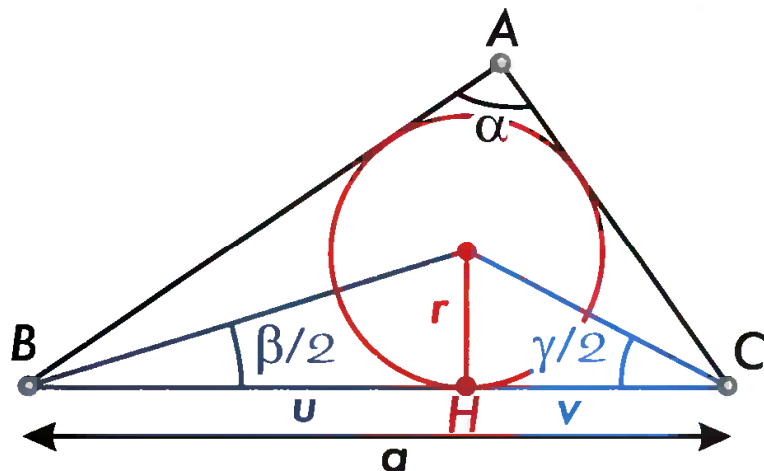
$$2A = r_a(b+c-a)$$



Proposition 4 – Rayon du cercle inscrit en fonction d'un côté et des angles aux sommets

Soit ABC un triangle, α , β et γ les angles aux sommets A , B et C et soit a la longueur du côté BC alors le rayon r du cercle inscrit vaut :

$$r = a \frac{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$



Preuve : Soit H le point d'intersection du cercle inscrit et du côté $[BC]$, on note u et v les longueurs BH et CH .

On a $u = r \cotan \frac{\beta}{2}$ et $v = r \cotan \frac{\gamma}{2}$, ainsi :

$$a = u + v = r \left(\frac{\cos \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2}} + \frac{\cos \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\gamma}{2}} \right) = r \frac{\cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} + \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}} = r \frac{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}$$

mais puisque $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, on en déduit le résultat annoncé.

Proposition 5 – Formule de Héron

L'aire d'un triangle ABC de demi périmètre p est égale à :

$$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

où a , b et c sont les longueurs des côtés.

Avec l'expression du rayon r du cercle inscrit, on obtient :

$$r^2 p = (p-a)(p-b)(p-c)$$

Preuve : On utilise la formule d'Al-Kashi qui généralise le théorème de Pythagore. Si γ est l'angle au sommet C du triangle alors :

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

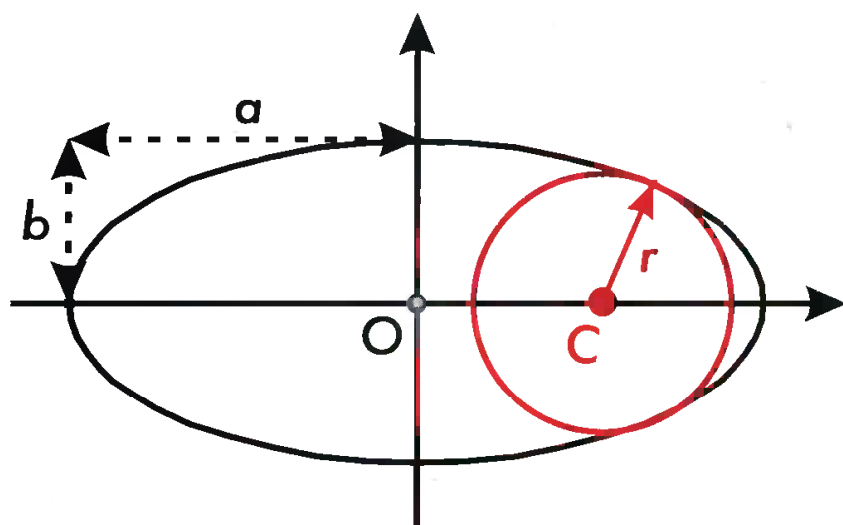
On a également :

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &= \frac{1}{2} ab \sin \gamma = \frac{1}{2} ab \sqrt{1 - \cos^2 \gamma} \\ &= \frac{1}{2} ab \sqrt{(1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma)} \\ &= \frac{1}{2} ab \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)} \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}\end{aligned}$$

Avec $a+b+c = 2p$, et $a = 2p - b - c$ on obtient la formule de Héron d'Alexandrie.

Proposition 6 – Soit $\mathcal{E}$ une ellipse de demi grand axe de longueur a et de demi petit axe de longueur b , soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon r , centré sur l'axe focal en C et bitangent à l'ellipse. Alors :

$$OC^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$



En particulier le rayon du cercle osculateur au sommet principal vaut $\frac{b^2}{a}$.

Preuve : On se place dans le repère où l'équation de l'ellipse est $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, le cercle a pour équation $(x - \alpha)^2 + y^2 = r^2$ où $OC^2 = \alpha^2$. On cherche les points d'intersection du cercle et de l'ellipse, ce qui revient à résoudre le système :

$$\begin{cases} \frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2 \\ (x - \alpha)^2 + y^2 = r^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 \\ (x - \alpha)^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2 - r^2 = 0 \end{cases}$$

La seconde équation donne, en général, deux valeurs pour x et lorsque ces deux valeurs sont positives, deux solutions pour y . Cela traduit le fait que le cercle, coupe en général l'ellipse en quatre points. Lorsque le discriminant Δ' de l'équation $(x - \alpha)^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2 + b^2 - r^2 = 0$ est nul, le cercle et l'ellipse sont bitangents. On obtient une racine double pour x , qui donne en général deux valeurs pour y . Le discriminant réduit vaut :

$$\begin{aligned}\Delta' &= \alpha^2 - \left(1 - \frac{b^2}{a^2}\right) (\alpha^2 + b^2 - r^2) \\ &= \frac{b^2}{a^2} \alpha^2 - \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{a^2}\end{aligned}$$

d'où la condition :

$$OC^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$

En particulier, si on cherche le cercle bitangent au sommet, on retrouve le cercle osculateur. Ce cercle a un contact d'ordre quatre, $x = a$ est racine double et donne $y = 0$ racine double, mais cela revient à $OC^2 = (a - r)^2$ d'où :

$$(a - r)^2 = \frac{(a^2 - b^2)(b^2 - r^2)}{b^2}$$

soit :

$$\begin{aligned}b^2 [(a - r)^2 - (a^2 - b^2)] + r^2 (a^2 - b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2arb^2 + b^2(b^2 + r^2) + r^2(a^2 - b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow b^4 - 2arb^2 + a^2r^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (b^2 - ar)^2 &= 0\end{aligned}$$

Ce qui donne le rayon de courbure au sommet $r = \frac{b^2}{a}$.