

La Funcion de Lebensztejn-Lerch-Clausen (LLC)

A Função de Lebensztejn-Lerch-Clausen (LLC)

The Lebensztejn-Lerch-Clausen Function (LLC)

Функция Лебенштейна-Лерха-Клаузена (LLC)

Teoria Unifikada / Teoria Unificada / Unified Theory / Унифицированная теория

Wilson Jacob Lebensztejn Gomes – ORCID: 0009-0002-3076-8873

Peserkador Independenta / Pesquisador Independente / Independent Researcher / Независимый исследователь

25 de julio / 25 de julho / July 25 / 25 июля 2026

Raclia

Ni prezentas la kompleta teoria di la **Funcion de Lebensztejn-Lerch-Clausen (LLC)**, un unifikasion nevidita inter la Transcendente di Lerch $\Phi(z, s, a)$ e la Funcion di Klausen $\text{Cl}_2(\theta)$. Ni demonstras ke tota integralo di la formo $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$, ube R esas rationala funcion, posas primitiva expresata ekskluzive en termini di la funcion mestra $\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a)$, plus elementa termini.

Português

Apresentamos a teoria completa da **Função de Lebensztejn-Lerch-Clausen (LLC)**, uma unificação inédita entre o Transcendente de Lerch $\Phi(z, s, a)$ e a Função de Clausen $\text{Cl}_2(\theta)$. Demonstramos que toda integral da forma $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$, onde R é racional, possui primitiva expressa exclusivamente em termos da função mestra $\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a)$, acrescida de termos elementares.

English

We present the complete theory of the **Lebensztejn-Lerch-Clausen Function (LLC)**, a novel unification between the Lerch Transcendent $\Phi(z, s, a)$ and the Clausen function $\text{Cl}_2(\theta)$. We prove that every integral of the form $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$, where R is rational, has a primitive expressed exclusively in terms of the master function $\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a)$, plus elementary terms.

Русский

Мы представляем полную теорию **функции Лебенштейна-Лерха-Клаузена (LLC)** – новое объединение трансценденты Лерха $\Phi(z, s, a)$ и функции Клаузена $\text{Cl}_2(\theta)$. Мы доказываем, что каждый интеграл вида $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$, где R рациональна, имеет первообразную, выражаемую исключительно через мастер-функцию $\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a)$, плюс элементарные слагаемые.

I. Raclia / Português

1. Enkonduko / Introdução

1.1 La Geneso di Ideo

En matematiko, la maxim granda deskubri li ofte kasas su en la spaco inter du idei ke la mondo vidis kom separata. Tia es la historio di la **Funcion LLC**.

La aitoro, Wilson Jacob Lebensztejn Gomes, laboris dum multa yari en la kampa di integrali speciala. La demando ke stimulis la tota teoria esis simpla, sed profunda:

Kiom integrali di logaritmi kun trigonometriki funcioni posas esar solvata per un sola

1.1 A Gênese da Ideia

Em matemática, as maiores descobertas frequentemente escondem-se no espaço entre duas ideias que o mundo via como distintas. Tal é a história da **Função LLC**.

O autor, Wilson Jacob Lebensztejn Gomes, trabalhou por muitos anos no campo de integrais especiais. A pergunta que estimulou toda a teoria foi simples, mas profunda:

Quantas integrais de logaritmos com funções trigonométricas podem ser resolvidas por uma única estrutura?

strukturo?

La responsa trovis su en la linguo di serii infinita e numeri kompleksi.

1.2 La Époko di Klausen: 1832

En 1832, la matematikisto Thomas Klausen, de Dania, publikigis artikulo en la *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Ili studis serii stranja:

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Klausen ne savis ke tiu serio divenus instrumento importanta por evaluar integrali logaritmika. Tiu funcion, nun konocata kom **Funcion di Klausen de duesma ordino**, esis la unua briketo.

Kiom esas serio infinita? Pensez pri sumo sen fino. La denominatori n^2 kreskas rapide, do la termini divenas mikra, e la sumo konvergas.

1.3 La Époko di Lerch: 1887

Duimo di sekulo pose, en 1887, Mathias Lerch definis funcion plu generala:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}.$$

Tiu **Transcendente di Lerch** generaligas multa funcioni klasika: zeta di Hurwitz, polilogaritmo, zeta di Riemann, eta e beta di Dirichlet.

1.4 La Sekreta di 140 Yari

Dum plu kam 140 yari, Lerch e Klausen esis studata kom separata temi. Ma la vero esis ke li esis du faceti di un sola gemino. La **Funcion LLC** revelas ke la diverseso di integrali esas iluziono.

A resposta encontrou-se na linguagem de séries infinitas e números complexos.

1.2 A Época de Clausen: 1832

Em 1832, o matemático dinamarquês Thomas Clausen publicou artigo no *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Ele estudou séries estranhas:

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Clausen não sabia que essa série se tornaria instrumento importante para avaliar integrais logarítmicas. Essa função, hoje conhecida como **Função de Clausen de segunda ordem**, foi o primeiro tijolo.

O que é uma série infinita? Pense numa soma sem fim. Os denominadores n^2 crescem rápido, então os termos ficam pequenos, e a soma converge.

1.3 A Época de Lerch: 1887

Meio século depois, em 1887, Mathias Lerch definiu função mais geral:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}.$$

Esse **Transcendente de Lerch** generaliza diversas funções clássicas: zeta de Hurwitz, polilogaritmo, zeta de Riemann, eta e beta de Dirichlet.

1.4 O Segredo de 140 Anos

Por mais de 140 anos, Lerch e Clausen foram estudados como temas separados. Mas a verdade era que eram duas facetas de um mesmo gêmeo. A **Função LLC** revela que a diversidade de integrais é ilusão.

2. Fondamenti / Fundamentos

2.1 La Transcendente di Lerch

Definison

La **Transcendente di Lerch** esas la serio

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

valida por $a \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$, o $|z| = 1$ kun $\text{Re}(s) > 1$.

Por altra valori, $\Phi(z, s, a)$ esas definata per **kontinuado analitika**:

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

Kiom komprenar? z esas butono ke kontrolas la rapideso di konvergado. Se $|z| < 1$, la potensi z^n divenas mikra rapide.

2.2 La Funcion di Klausen

2.1 O Transcendente de Lerch

Definição

O **Transcendente de Lerch** é definido pela série

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

válida para $a \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$, ou $|z| = 1$ com $\text{Re}(s) > 1$.

Para outros valores, $\Phi(z, s, a)$ é definido por **kontinuado analítica**:

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

Como entender? z é um botão que controla a rapidez de convergência. Se $|z| < 1$, as potências z^n ficam pequenas rapidamente.

2.2 A Função de Clausen

Definicion

La **Funcion di Klausen de duesma ordino** esas

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Tiu funcion havas reprezentacion integrala fundamentalala:

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Tiu identeso esas la kauzo pro ke Klausen aparas nature en integrali kun logaritmi di sinuso e kosinuso.

2.3 La Konexo Absoluta

Teorema 2.3

Por $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im} [e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1)].$$

Pruvo. De la polilogaritmo:

$$\text{Li}_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

La parto imaginara esas precize $\text{Cl}_2(\theta)$. Pro ke $\text{Li}_2(z) = z \Phi(z, 2, 1)$, la rezulto sequas.

Definição

A **Função de Clausen de segunda ordem** é

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Essa função possui representação integral fundamental:

$$\text{Cl}_2(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Essa identidade é a razão pela qual Clausen aparece naturalmente em integrais com logaritmos de seno e cosseno.

2.3 A Conexão Absoluta

Teorema 2.3

Para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im} [e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1)].$$

Demonstração. Do polilogaritmo:

$$\text{Li}_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

A parte imaginária é precisamente $\text{Cl}_2(\theta)$. Como $\text{Li}_2(z) = z \Phi(z, 2, 1)$, segue o resultado.

3. La Funcion LLC / A Função LLC

3.1 La Definicion

Definicion

Por $x > 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $s \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}_{\sigma}(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a).$$

La variablo $x^{2i} = e^{2i \ln x}$ esas punto en la sirklo unita. La faktoro x^b donas strukturo di serio di Dirichlet kun peso:

$$\mathcal{L}_{\sigma}(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

3.2 La Kvar Parametro li

3.1 A Definição

Definição

Para $x > 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $s \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}_{\sigma}(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a).$$

A variável $x^{2i} = e^{2i \ln x}$ é um ponto no círculo unitário. O fator x^b confere estrutura de série de Dirichlet com peso:

$$\mathcal{L}_{\sigma}(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

3.2 Os Quatro Parâmetros

Parametro	Signifo	Operado
x	Variablo originala	Argumento originala
s	Ordino di serio	Potenco $(n+a)^s$
a	Desplaso	Loko di poli
b	Ponderasion	Faktoro x^b de integrado

Parâmetro	Significado	Operacional
x	Variável original	Argumento original
s	Ordem da série	Potência $(n+a)^s$
a	Deslocamento	Posição dos polos
b	Ponderação	Fator x^b da integração

3.3 Estrutura da Série

3.3 Strukturo di Serio

Teorema 3.3

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

Pruvo. Sequas direkte de la definiso di Φ :

$$x^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma x^{2i})^n}{(n+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

Teorema 3.3

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

Demonstração. Segue diretamente da definição de Φ :

$$x^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma x^{2i})^n}{(n+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

4. Expanso Fundamenta / Expansão Fundamental

4.1 Serii di Fourier

Lema 4.1

Valida por $u \in \mathbb{R}$:

$$\tan u = -i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2inu},$$

$$\cot u = i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2inu},$$

$$\sec u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{i(2n+1)u}.$$

Kiom esas la magio? Ordinare, $\tan u$ esas komplikata. Ma Fourier montras ke ol esas nur sumo de termini simpla e^{2inu} . Kande ni integras, ni integras termino pos termino!

4.2 La Integralo Mestra

Teorema 4.2

Por $b, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int x^{b-1} e^{i\alpha \ln x} dx = \frac{x^{b+i\alpha}}{b+i\alpha} + C.$$

Kial tiu esas la “mestra”? Pro ke, kun $u = \ln x$, tota integrali divenas integrali di eksponenti, e la integralo di eksponento esas nur la sama eksponento dividata per koeficiento.

4.3 Formulo di Integrado LLC

Teorema 4.3

$$\int \mathcal{L}_\sigma(x; s-1, a, b-1) dx = \mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) + C.$$

4.1 Séries de Fourier

Lema 4.1

Válidas para $u \in \mathbb{R}$:

$$\tan u = -i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2inu},$$

$$\cot u = i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2inu},$$

$$\sec u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{i(2n+1)u}.$$

Qual é a magia? Ordinariamente, $\tan u$ é complicada. Mas Fourier mostra que é apenas soma de termos simples e^{2inu} . Quando integramos, integramos termo a termo!

4.2 A Integral Mestra

Teorema 4.2

Para $b, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int x^{b-1} e^{i\alpha \ln x} dx = \frac{x^{b+i\alpha}}{b+i\alpha} + C.$$

Por que essa é a “mestra”? Porque, com $u = \ln x$, todas as integrais se tornam integrais de exponenciais, e a integral de exponencial é apenas a mesma exponencial dividida pelo coeficiente.

4.3 Fórmula de Integração LLC

Teorema 4.3

$$\int \mathcal{L}_\sigma(x; s-1, a, b-1) dx = \mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) + C.$$

5.1 Clausen como Caso Particular

5. Unifikado / Unificação

5.1 Klausen Kom Kazo Partikulara

Teorema 5.1

Por $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im}[\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1)].$$

Pruvo. Prenante $x = e^{i\theta}$, $\sigma = 1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = 1$:

$$\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1) = e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1) = \text{Li}_2(e^{i\theta}).$$

Per Teorema 2.3, la parto imaginara esas $\text{Cl}_2(\theta)$.

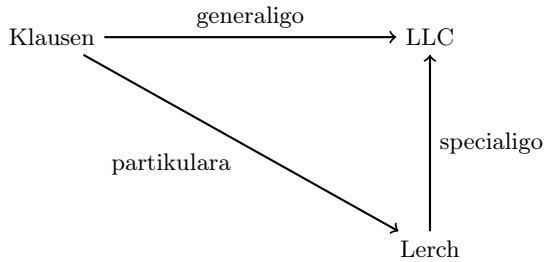
5.2 Lerch Kom Generaligo

Teorema 5.2

Por $s = 2$ e $a = 1$:

$$\text{Im}[\mathcal{L}_\sigma(x; 2, 1, 1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n \sin((2n+1) \ln x)}{(n+1)^2}.$$

5.3 Diagramo di Unifikado



Teorema 5.1

Para $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im}[\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1)].$$

Demonstração. Tomando $x = e^{i\theta}$, $\sigma = 1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = 1$:

$$\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1) = e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1) = \text{Li}_2(e^{i\theta}).$$

Pelo Teorema 2.3, a parte imaginária é $\text{Cl}_2(\theta)$.

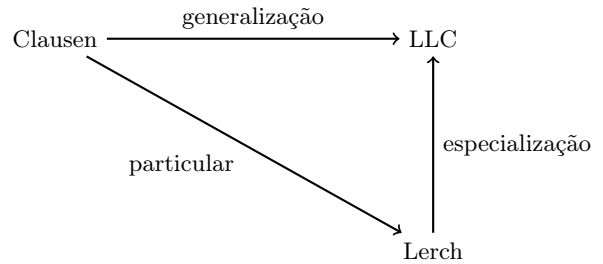
5.2 Lerch como Generalização

Teorema 5.2

Para $s = 2$ e $a = 1$:

$$\text{Im}[\mathcal{L}_\sigma(x; 2, 1, 1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n \sin((2n+1) \ln x)}{(n+1)^2}.$$

5.3 Diagrama de Unificação



6. Sink Integrali / Cinco Integraís

6.1 Tangento

Problema 6.1

$$\text{Kalkular } \int \tan(\ln x) dx.$$

Solusion. Kun $u = \ln x$:

$$\int e^u \tan u du = -ie^u + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{(1+2in)u}}{1+2in}.$$

Rekonocante la serio di Lerch:

$$\int \tan(\ln x) dx = \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.2 Kotangento

6.1 Tangente

Problema 6.1

$$\text{Calcular } \int \tan(\ln x) dx.$$

Solução. Com $u = \ln x$:

$$\int e^u \tan u du = -ie^u + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{(1+2in)u}}{1+2in}.$$

Reconhecendo a série de Lerch:

$$\int \tan(\ln x) dx = \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.2 Cotangente

Problema 6.2

$$\text{Calcular } \int \cot(\ln x) dx.$$

Problema 6.2

Kalkular $\int \cot(\ln x) dx$.

Solusion.

$$\int \cot(\ln x) dx = -\mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) + ix + C.$$

6.3 Sekanto**Problema 6.3**

Kalkular $\int \sec(\ln x) dx$.

Solusion.

$$\int \sec(\ln x) dx = -i \mathcal{L}_{-1}(x; 1, \frac{1-i}{2}, 1+i) + C.$$

6.4 Logaritmo di Kosinuso**Problema 6.4**

Kalkular $\int \ln(\cos(\ln x)) dx$.

Solusion. Per partes:

$$\int \ln(\cos(\ln x)) dx = x \ln(\cos(\ln x)) + \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) -$$

6.5 Logaritmo di Sinuso**Problema 6.5**

Kalkular $\int \ln(\sin(\ln x)) dx$.

Solusion.

$$\int \ln(\sin(\ln x)) dx = x \ln(\sin(\ln x)) + \mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

Solução.

$$\int \cot(\ln x) dx = -\mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) + ix + C.$$

6.3 Secante**Problema 6.3**

Calcular $\int \sec(\ln x) dx$.

Solução.

$$\int \sec(\ln x) dx = -i \mathcal{L}_{-1}(x; 1, \frac{1-i}{2}, 1+i) + C.$$

6.4 Logaritmo do Cosseno**Problema 6.4**

Calcular $\int \ln(\cos(\ln x)) dx$.

Solução. Por partes:

$$\int \ln(\cos(\ln x)) dx = x \ln(\cos(\ln x)) + \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.5 Logaritmo do Seno**Problema 6.5**

Calcular $\int \ln(\sin(\ln x)) dx$.

Solução.

$$\int \ln(\sin(\ln x)) dx = x \ln(\sin(\ln x)) + \mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

7. Konstanto Katalana / Constante Catalana

7.1 Definicion

La Konstanto Katalana G esas:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \approx 0.9159655941.$$

Teorema 7.1

$$\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G.$$

7.1 Definição

A Constante de Catalan G é:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \approx 0.9159655941.$$

Teorema 7.1

$$\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G.$$

Demonstração. Os termos pares dão zero. Os termos ímpares alternam sinal, dando precisamente a série de G .

7.2 Aplicação

Pruvo. La termini para donas nulo. La termini impara alternas signo, donante precize la serio di G .

7.2 Aplikason

Tiu valoro permissas kalkular:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\sec x) dx = \frac{G}{2} - \frac{\pi}{4} \ln 2 \approx 0.084572.$$

Esse valor permite calcular:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\sec x) dx = \frac{G}{2} - \frac{\pi}{4} \ln 2 \approx 0.084572.$$

8. Proprietati / Propriedades

8.1 Kontinuidad Analitika

Por $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \frac{x^b}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - \sigma x^{2i} e^{-t}} dt.$$

8.2 Simetria

Por $s = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; n, a, b) + (-1)^n \sigma^{-1} x^{-2i} \mathcal{L}_\sigma(x; n, 1-a, b-2i) = \frac{\pi(-1)^{n-1} x^b}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left[(\sigma x^{2i})^{-a} (\cot(\pi a) - i) \right].$$

8.3 Asimtotika

Por $x \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) \sim x^b \left[\frac{1}{a^s} + \frac{\sigma x^{2i}}{(a+1)^s} + \mathcal{O}(x^{4i}) \right].$$

8.1 Continuidade Analítica

Para $\operatorname{Re}(a) > 0$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \frac{x^b}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - \sigma x^{2i} e^{-t}} dt.$$

8.2 Simetria

Para $s = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; n, a, b) + (-1)^n \sigma^{-1} x^{-2i} \mathcal{L}_\sigma(x; n, 1-a, b-2i) = \frac{\pi(-1)^{n-1} x^b}{(n-1)!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \left[(\sigma x^{2i})^{-a} (\cot(\pi a) - i) \right].$$

8.3 Assíntota

Para $x \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) \sim x^b \left[\frac{1}{a^s} + \frac{\sigma x^{2i}}{(a+1)^s} + \mathcal{O}(x^{4i}) \right].$$

9. Konkluso / Conclusão

Ni prezentis la kompleta teoria di la **Funcion LLC**, demonstrante ke:

1. La transcendentio di Lerch e la funcion di Klausen esas kazi partikulari di un sola strukturo.
2. La funcion mestra solvas en formo sistematika tota integrali di la formo $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$.
3. La kvarteto (x, s, a, b) kodifikas komplete singula integralo.
4. Kvin fundamenta klasi di integrali ne-elementari recevis eksplicita solvi.

La unifikado revelas ke la aparenta diverseso kashas sub la surfaco simpla e eleganta strukturo.

Apresentamos a teoria completa da **Função LLC**, demonstrando que:

1. O transcendente de Lerch e a função de Clausen são casos particulares de uma única estrutura.
2. A função mestra resolve de forma sistemática todas as integrais da forma $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$.
3. O quarteto (x, s, a, b) codifica completamente cada integral.
4. Cinco classes fundamentais de integrais não elementares receberam solução explícita.

A unificação revela que a aparente diversidade esconde sob a superfície uma estrutura simples e elegante.

II. English / Русский

1. Introduction / Введение

1.1 The Genesis of the Idea

In mathematics, the greatest discoveries often hide in the space between two ideas that the world saw as separate. Such is the story of the **LLC Function**.

The author, Wilson Jacob Lebensztejn Gomes, worked for many years in the field of special integrals. The question that stimulated the entire theory was simple, yet profound:

How many integrals of logarithms with trigonometric functions can be solved by a single structure?

The answer was found in the language of infinite series and complex numbers.

1.2 The Era of Clausen: 1832

In 1832, the Danish mathematician Thomas Clausen published a paper in the *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. He studied strange series:

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Clausen did not know that this series would become an important tool for evaluating logarithmic integrals. This function, now known as the **Clausen function of second order**, was the first brick.

What is an infinite series? Think of a sum without end. The denominators n^2 grow fast, so the terms become small, and the sum converges.

1.3 The Era of Lerch: 1887

Half a century later, in 1887, Mathias Lerch defined a more general function:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}.$$

This **Lerch Transcendent** generalizes several classical functions: Hurwitz zeta, polylogarithm, Riemann zeta, Dirichlet eta and beta.

1.4 The Secret of 140 Years

For more than 140 years, Lerch and Clausen were studied as separate topics. But the truth was that they were two facets of the same twin. The **LLC Function** reveals that the diversity of integrals is an illusion.

1.1 Генезисидеи

В математике величайшие открытия часто скрываются в пространстве между двумя идеями, которые мир считал отдельными. Такова история **функции LLC**.

Автор, Уилсон Джейкоб Лебенштейн Гомес, работал много лет в области специальных интегралов. Вопрос, который стимулировал всю теорию, был прост, но глубок:

Сколько интегралов от логарифмов с тригонометрическими функциями может быть решено единой структурой?

Ответ был найден в языке бесконечных рядов и комплексных чисел.

1.2 ЭпохаКлаузена: 1832

В 1832 году датский математик Томас Клаузен опубликовал статью в *Journal für die reine und angewandte Mathematik*. Он изучал странные ряды:

$$\text{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Клаузен не знал, что этот ряд станет важным инструментом для вычисления логарифмических интегралов. Эта функция, ныне известная как **функция Клаузена второго порядка**, была первым кирпичиком.

Что такое бесконечный ряд? Представьте сумму без конца. Знаменатели n^2 растут быстро, поэтому члены становятся малыми, и сумма сходится.

1.3 ЭпохаЛерха: 1887

Полвека спустя, в 1887 году, Матиас Лерх определил более общую функцию:

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s}.$$

Эта **трансцендента Лерха** обобщает несколько классических функций: дзета-функцию Гурвица, полилогарифм, дзета-функцию Римана, эта и бета Дирихле.

1.4 Тайна140 лет

Более 140 лет Лерха и Клаузен изучали как отдельные темы. Но правда была в том, что они были двумя гранями одного близнеца. **Функция LLC** раскрывает, что разнообразие интегралов – иллюзия.

2. Foundations / Основы

2.1 The Lerch Transcendent

2.1 ТрансцендентаЛерха

Определение

Трансцендента Лерха – это ряд

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

Definition

The **Lerch Transcendent** is the series

$$\Phi(z, s, a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+a)^s},$$

valid for $a \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$, or $|z| = 1$ with $\operatorname{Re}(s) > 1$.

For other values, $\Phi(z, s, a)$ is defined by **analytic continuation**:

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

How to understand? z is a button that controls the speed of convergence. If $|z| < 1$, the powers z^n become small quickly.

2.2 The Clausen Function

Definition

The **Clausen function of second order** is

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

This function has a fundamental integral representation:

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

This identity is the reason why Clausen appears naturally in integrals with logarithms of sine and cosine.

2.3 The Absolute Connection

Theorem 2.3

For $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = \operatorname{Im} [e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1)].$$

Proof. From the polylogarithm:

$$\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

The imaginary part is precisely $\operatorname{Cl}_2(\theta)$. Since $\operatorname{Li}_2(z) = z \Phi(z, 2, 1)$, the result follows.

действительный при $a \neq 0, -1, -2, \dots$, $|z| < 1$ или $|z| = 1$ при $\operatorname{Re}(s) > 1$.

Для других значений $\Phi(z, s, a)$ определяется **аналитическим продолжением**:

$$\Phi(z, s, a) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - ze^{-t}} dt.$$

Как понять? z – это кнопка, контролирующая скорость сходимости. Если $|z| < 1$, степени z^n быстро становятся малыми.

2.2 Функция Клаузена

Определение

Функция Клаузена второго порядка – это

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Эта функция обладает фундаментальным интегральным представлением:

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = - \int_0^{\theta} \ln \left| 2 \sin \frac{t}{2} \right| dt.$$

Эта тождественность является причиной, по которой Клаузен естественным образом появляется в интегралах с логарифмами синуса и косинуса.

2.3 Абсолютная связь

Теорема 2.3

Для $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\operatorname{Cl}_2(\theta) = \operatorname{Im} [e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1)].$$

Доказательство. Из полилогарифма:

$$\operatorname{Li}_2(e^{i\theta}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n^2}.$$

Мнимая часть есть точно $\operatorname{Cl}_2(\theta)$. Поскольку $\operatorname{Li}_2(z) = z \Phi(z, 2, 1)$, результат следует.

3. The LLC Function / Функция LLC

3.1 The Definition

3.1 Определение

Определение

Для $x > 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $s \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}_{\sigma}(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a).$$

Переменная $x^{2i} = e^{2i \ln x}$ есть точка на единичной окружности. Фактор x^b придаёт структуру взвешен-

Definition

For $x > 0$, $\sigma \in \{-1, 1\}$, $s \in \mathbb{C}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $b \in \mathbb{C}$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = x^b \Phi(\sigma x^{2i}, s, a).$$

The variable $x^{2i} = e^{2i \ln x}$ is a point on the unit circle. The factor x^b gives the structure of a weighted Dirichlet series:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

3.2 The Four Parameters

Parameter	Meaning	Operational
x	Original variable	Original argument
s	Series order	Power $(n+a)^s$
a	Shift	Pole location
b	Weight	Factor x^b from integration

3.3 Series Structure

Theorem 3.3

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

Proof. Follows directly from the definition of Φ :

$$x^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma x^{2i})^n}{(n+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

ного ряда Дирихле:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

3.2 Четыре параметра

Параметр	Значение	Операционный
x	Исходная переменная	Исходный аргумент
s	Порядок ряда	Степень $(n+a)^s$
a	Сдвиг	Положение полюсов
b	Вес	Фактор x^b интегрирован

3.3 Структура ряда

Теорема 3.3

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

Доказательство. Следует непосредственно из определения Φ :

$$x^b \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sigma x^{2i})^n}{(n+a)^s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n x^{b+2in}}{(n+a)^s}.$$

4. Fundamental Expansion / Фундаментальное разложение

4.1 Fourier Series

Lemma 4.1

Valid for $u \in \mathbb{R}$:

$$\tan u = -i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2inu},$$

$$\cot u = i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2inu},$$

$$\sec u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{i(2n+1)u}.$$

What is the magic? Ordinarily, $\tan u$ is complicated. But Fourier shows it is merely a sum of simple terms e^{2inu} . When we integrate, we integrate term by term!

4.1 Ряды Фурье

Лемма 4.1

Верно для $u \in \mathbb{R}$:

$$\tan u = -i + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{2inu},$$

$$\cot u = i - 2i \sum_{n=0}^{\infty} e^{2inu},$$

$$\sec u = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{i(2n+1)u}.$$

В чём магия? Обычно $\tan u$ сложна. Но Фурье показывает, что это лишь сумма простых слагаемых e^{2inu} . Когда интегрируем, интегрируем почленно!

4.2 Мастер-интеграл

4.2 The Master Integral

Theorem 4.2

For $b, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int x^{b-1} e^{i\alpha \ln x} dx = \frac{x^{b+i\alpha}}{b+i\alpha} + C.$$

Why is this the “master”? Because, with $u = \ln x$, all integrals become integrals of exponentials, and the integral of an exponential is just the same exponential divided by the coefficient.

4.3 LLC Integration Formula

Theorem 4.3

$$\int \mathcal{L}_\sigma(x; s-1, a, b-1) dx = \mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) + C.$$

Теорема 4.2

Для $b, \alpha \in \mathbb{C}$,

$$\int x^{b-1} e^{i\alpha \ln x} dx = \frac{x^{b+i\alpha}}{b+i\alpha} + C.$$

Почему это “мастер”? Потому что при $u = \ln x$ все интегралы становятся интегралами от экспонент, а интеграл от экспоненты – это та же экспонента, делённая на коэффициент.

4.3 Формула интегрирования LLC

Теорема 4.3

$$\int \mathcal{L}_\sigma(x; s-1, a, b-1) dx = \mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) + C.$$

5. Unification / Унификация

5.1 Clausen as a Particular Case

Theorem 5.1

For $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im}[\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1)].$$

Proof. Taking $x = e^{i\theta}$, $\sigma = 1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = 1$:

$$\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1) = e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1) = \text{Li}_2(e^{i\theta}).$$

By Theorem 2.3, the imaginary part is $\text{Cl}_2(\theta)$.

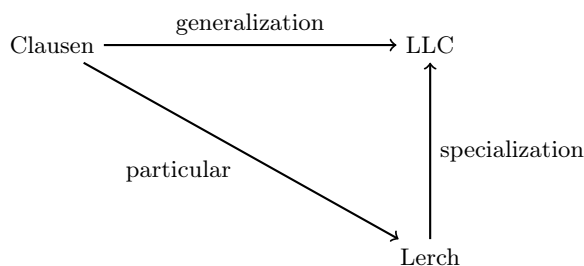
5.2 Lerch as Generalization

Theorem 5.2

For $s = 2$ and $a = 1$:

$$\text{Im}[\mathcal{L}_\sigma(x; 2, 1, 1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n \sin((2n+1) \ln x)}{(n+1)^2}.$$

5.3 Unification Diagram



5.1 Клаузен как частный случай

Теорема 5.1

Для $\theta \in \mathbb{R}$,

$$\text{Cl}_2(\theta) = \text{Im}[\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1)].$$

Доказательство. Принимая $x = e^{i\theta}$, $\sigma = 1$, $s = 2$, $a = 1$, $b = 1$:

$$\mathcal{L}_1(e^{i\theta}; 2, 1, 1) = e^{i\theta} \Phi(e^{i\theta}, 2, 1) = \text{Li}_2(e^{i\theta}).$$

По теореме 2.3 мнимая часть есть $\text{Cl}_2(\theta)$.

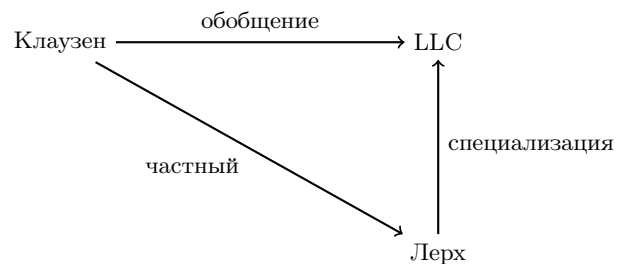
5.2 Лерх как обобщение

Теорема 5.2

Для $s = 2$ и $a = 1$:

$$\text{Im}[\mathcal{L}_\sigma(x; 2, 1, 1)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^n \sin((2n+1) \ln x)}{(n+1)^2}.$$

5.3 Диаграмма унификации



6.1 Тангенс

6. Five Integrals / Пять интегралов

6.1 Tangent

Problem 6.1

Calculate $\int \tan(\ln x) dx$.

Solution. With $u = \ln x$:

$$\int e^u \tan u du = -ie^u + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{(1+2in)u}}{1+2in}.$$

Recognizing the Lerch series:

$$\int \tan(\ln x) dx = \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.2 Cotangent

Problem 6.2

Calculate $\int \cot(\ln x) dx$.

Solution.

$$\int \cot(\ln x) dx = -\mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) + ix + C.$$

6.3 Secant

Problem 6.3

Calculate $\int \sec(\ln x) dx$.

Solution.

$$\int \sec(\ln x) dx = -i \mathcal{L}_{-1}(x; 1, \frac{1-i}{2}, 1+i) + C.$$

6.4 Logarithm of Cosine

Problem 6.4

Calculate $\int \ln(\cos(\ln x)) dx$.

Solution. By parts:

$$\int \ln(\cos(\ln x)) dx = x \ln(\cos(\ln x)) + \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) -$$

6.5 Logarithm of Sine

Problem 6.5

Calculate $\int \ln(\sin(\ln x)) dx$.

Задача 6.1

Вычислить $\int \tan(\ln x) dx$.

Решение. При $u = \ln x$:

$$\int e^u \tan u du = -ie^u + 2i \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{e^{(1+2in)u}}{1+2in}.$$

Распознавая ряд Лерха:

$$\int \tan(\ln x) dx = \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.2 Котангенс

Задача 6.2

Вычислить $\int \cot(\ln x) dx$.

Решение.

$$\int \cot(\ln x) dx = -\mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) + ix + C.$$

6.3 Секанс

Задача 6.3

Вычислить $\int \sec(\ln x) dx$.

Решение.

$$\int \sec(\ln x) dx = -i \mathcal{L}_{-1}(x; 1, \frac{1-i}{2}, 1+i) + C.$$

6.4 Логарифм косинуса

Задача 6.4

Вычислить $\int \ln(\cos(\ln x)) dx$.

Решение. По частям:

$$\int \ln(\cos(\ln x)) dx = x \ln(\cos(\ln x)) + \mathcal{L}_{-1}(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

6.5 Логарифм синуса

Задача 6.5

Вычислить $\int \ln(\sin(\ln x)) dx$.

Решение.

$$\int \ln(\sin(\ln x)) dx = x \ln(\sin(\ln x)) + \mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

Solution.

$$\int \ln(\sin(\ln x)) dx = x \ln(\sin(\ln x)) + \mathcal{L}_1(x; 1, -\frac{i}{2}, 1) - ix + C.$$

7. Catalan Constant / Постоянная Кatalана

7.1 Definition

The **Catalan constant** G is:

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \approx 0.9159655941.$$

Theorem 7.1

$$\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G.$$

Proof. Even terms vanish. Odd terms alternate in sign, giving precisely the series for G .

7.2 Application

This value allows one to calculate:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\sec x) dx = \frac{G}{2} - \frac{\pi}{4} \ln 2 \approx 0.084572.$$

7.1 Определение

Постоянная Кatalана G – это

$$G = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} = 1 - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \dots \approx 0.9159655941.$$

Теорема 7.1

$$\text{Cl}_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = G.$$

Доказательство. Чётные члены обращаются в нуль. Нечётные члены чередуют знак, давая в точности ряд для G .

7.2 Применение

Это значение позволяет вычислить:

$$\int_0^{\pi/4} \ln(\sec x) dx = \frac{G}{2} - \frac{\pi}{4} \ln 2 \approx 0.084572.$$

8. Properties / Свойства

8.1 Analytic Continuation

For $\text{Re}(a) > 0$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \frac{x^b}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - \sigma x^{2i} e^{-t}} dt.$$

8.2 Symmetry

For $s = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; n, a, b) + (-1)^n \sigma^{-1} x^{-2i} \mathcal{L}_\sigma(x; n, 1-a, b-2i) = \frac{\pi(-1)^{n-1}}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [(\sigma x^{2i})^{-a} (\cot(\pi a) - i)].$$

8.3 Asymptotics

For $x \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) \sim x^b \left[\frac{1}{a^s} + \frac{\sigma x^{2i}}{(a+1)^s} + \mathcal{O}(x^{4i}) \right].$$

8.1 Аналитическое продолжение

Для $\text{Re}(a) > 0$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) = \frac{x^b}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1} e^{-at}}{1 - \sigma x^{2i} e^{-t}} dt.$$

8.2 Симметрия

Для $s = n \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{L}_\sigma(x; n, a, b) + (-1)^n \sigma^{-1} x^{-2i} \mathcal{L}_\sigma(x; n, 1-a, b-2i) = \frac{\pi(-1)^{n-1} x^b}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1}}{\partial a^{n-1}} [(\sigma x^{2i})^{-a} (\cot(\pi a) - i)].$$

8.3 Асимптотика

$$\mathcal{L}_\sigma(x; s, a, b) \sim x^b \left[\frac{1}{a^s} + \frac{\sigma x^{2i}}{(a+1)^s} + \mathcal{O}(x^{4i}) \right].$$

9. Conclusion / Заключение

We presented the complete theory of the **LLC Function**, proving that:

1. The Lerch Transcendent and the Clausen function are particular cases of a single structure.

Мы представили полную теорию **функции LLC**, доказав, что:

1. Трансцендента Лерха и функция Клаузена – частные случаи единой структуры.
2. Мастер-функция систематически решает все интегралы вида $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$.
3. Квартет (x, s, a, b) полностью кодирует каж-

2. The master function systematically solves all integrals of the form $\int R(x, \ln x, \sin(\ln x), \cos(\ln x), \tan(\ln x)) dx$.
 3. The quartet (x, s, a, b) completely encodes each integral.
 4. Five fundamental classes of non-elementary integrals received explicit solution.
- дый интеграл.
 4. Пять фундаментальных классов неэлементарных интегралов получили явное решение.
 Унификация раскрывает, что кажущееся разнообразие скрывает под поверхностью простую и элегантную структуру.

The unification reveals that apparent diversity hides beneath the surface a simple and elegant structure.

References / Литература

Referências

- [1] T. Clausen, “Über die Function $\sin \varphi + (1/2^2) \sin 2\varphi + (1/3^2) \sin 3\varphi + \text{etc.}$ ”, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, vol. 8, pp. 298-300, 1832.
- [2] M. Lerch, “Sur la fonction $\zeta(s, a)$ et sur une fonction transcendante”, *Acta Mathematica*, vol. 11, pp. 19-24, 1887.
- [3] L. Lewin, *Polylogarithms and Associated Functions*, North-Holland, 1981.
- [4] E. M. Ferreira, A. K. Kohara, J. Sesma, “New properties of the Lerch’s transcendent”, *Journal of Number Theory*, vol. 172, pp. 21-31, 2017.
- [5] NIST Digital Library of Mathematical Functions, §25.14 “Lerch’s Transcendent”.
- [6] “Lerch transcendent”, Wikipedia, 2026.
- [7] “Clausen function”, Wikipedia, 2026.
- [8] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press.
- [9] A. Erdélyi et al., *Higher Transcendental Functions*, vol. I, McGraw-Hill, 1953.