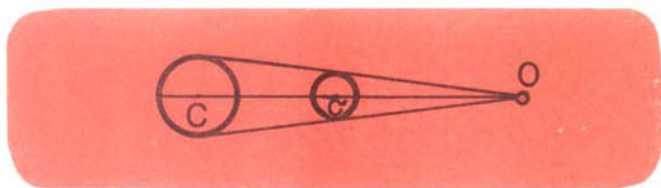
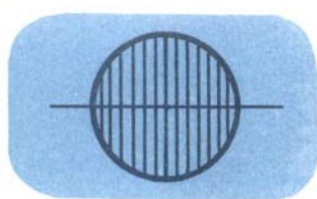
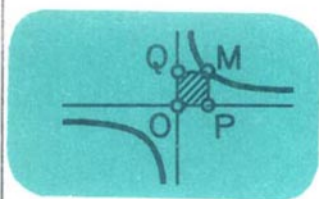


**Lecciones populares
de matemáticas**

**FUNCIONES
HIPERBOLICAS**

V. G. Shervátov



Editorial MIR



Moscú



ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. ШЕРВАТОВ

ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

V. G. SHERVÁTOV

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Impreso en la URSS

Primera edición 1975

Segunda edición 1984

Traducido del ruso por el ingeniero
K. P. Medkón

На испанском языке

© Traducción al español. Editorial Mir. 1975

INDICE

Prefacio 6

Capítulo I. Giro hiperbólico

§ 1. Contracción a una recta 7

§ 2. Giro hiperbólico 16

§ 3. Propiedades de la hipérbola 21

Capítulo II. Funciones hiperbólicas

1. Ecuación de la hipérbola referida a los ejes 31

§ 2. Definición y propiedades fundamentales
de las funciones hiperbólicas 32

§ 3. Fórmulas de adición 37

Capítulo III. Funciones hiperbólicas y logaritmos

§ 1. Teoría geométrica de logaritmos 46

§ 2. Expresiones analíticas para funciones hiperbólicas 55

§ 3. Fórmulas de Euler 61

PREFACIO

Este folleto comprende una exposición elemental de la teoría de las así llamadas funciones hiperbólicas que, en buena parte, son análogas a las funciones trigonométricas comunes. Las funciones hiperbólicas se utilizan, con frecuencia, en diversas investigaciones físicas y técnicas. Un papel muy importante desempeñan ellas en la geometría no euclídea, participando, prácticamente, en todas las dependencias trigonométricas de ésta (véase, por ejemplo, el libro «Introducción elemental a la geometría de Lobachevski» por A. P. Norden, edición de «Gostejizdat», 1953).

Además de la aplicación mencionada, la teoría de funciones hiperbólicas es de interés considerable para los alumnos y profesores de la enseñanza secundaria o preuniversitaria, puesto que la analogía entre las funciones trigonométricas e hiperbólicas ilustra muchos problemas de la trigonometría desde un punto de vista, diferente del común.

El folleto consta de tres capítulos. El primer capítulo está dedicado al giro hiperbólico y su aplicación al estudio de propiedades de la hipérbola. No obstante, por sí mismo puede representar un cierto interés. La atención especial ha sido atraída al capítulo segundo, en el cual son enunciados los elementos de la teoría de funciones hiperbólicas. El capítulo tercero establece una relación estrecha con la teoría de funciones hiperbólicas y de logaritmos.

Existe otra construcción de la teoría de funciones hiperbólicas que no recurre al giro hiperbólico como medio de razonamiento. Esta última teoría se expone en la obra «Teoría geométrica de funciones hiperbólicas» por D. I. Perepelkin. Se recomienda también al lector de obra «Geometría analítica» por B. N. Delone y D. A. Raikov, parte 1ª, Gostejizdat, 1948, la cual comprende una amplia exposición de los problemas considerados en la primera parte de este folleto.

En ninguna parte de este folleto se requieren del lector los conocimientos que no fueran dentro de los límites de la enseñanza media.

El autor.

CAPÍTULO I

GIRO HIPERBÓLICO

§ 1. Contracción a una recta

En la solución de ciertos problemas geométricos se usa, con frecuencia, una transformación que se denomina *contracción al punto* (*homotecia*). La contracción al punto O (llamado *centro de contracción*), realizada con el factor de contracción k , significa que cada punto A de un plano pasa al punto A' en el rayo OA , siendo $k = \frac{OA'}{OA}$, es decir, $OA' = k \cdot OA$ (fig. 1, a, b). Si el factor de contracción k es superior a 1, entonces $OA' > OA$ (fig. 1, b); en este caso la transforma-

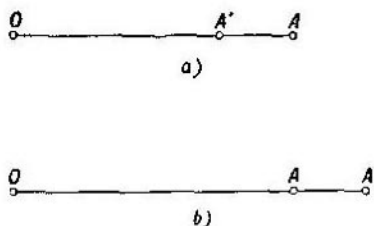


FIG. 1

ción debería llamarse «expansión desde el punto O ». El propio punto O en la transformación de contracción al punto O siempre queda en su lugar.

En la contracción al punto O cada figura F se transforma en la figura F^1 (fig. 2), semejante a la original, con el centro de semejanza en el punto O y factor de semejanza igual a k . Si $k > 1$, la figura se reduce en área; si $k < 1$, la figura se aumenta. Cada recta, al contraerse, se transforma también en una recta (fig. 3a); las rectas paralelas se transforman en las paralelas (fig. 3b). Cualquier circunferencia en la contracción al punto se convierte en una circunferencia (fig. 3c).

En la misma contracción todos los segmentos de un plano se reducen (o aumentan) por una relación constante de k .

Las áreas de todas las figuras también se reducen (o aumentan) por una relación constante, igual a k^2 (cuadrado del factor de contracción).

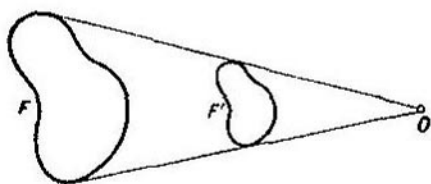


FIG. 2

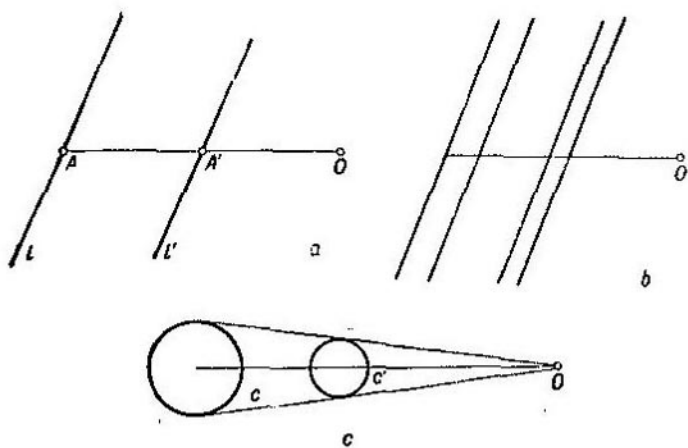


FIG. 3

En efecto, sea F una figura plana. Examinemos una retícula compuesta por un número de cuadrados pequeños (fig. 4). El área F es aproximadamente igual al número de los cuadrados, que se encuentran dentro de la figura F , multiplicado por el área de cuadrado. El error será tanto menor, cuanto mayor es el número de cuadrados en la retícula. Eligiendo cuadrados suficientemente pequeños, se

puede lograr que el error se haga inferior a cualquier número σ , tan insignificante como se desee. En la contracción al punto la retícula de cuadrados se transforma en una nueva retícula

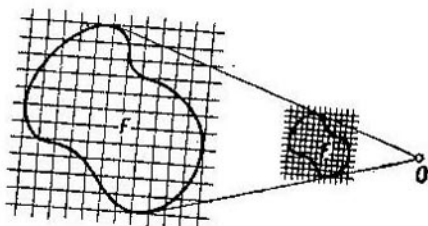


FIG. 4

de cuadrados, mientras que la figura F se transforma en la figura F' , dentro de la cual habrá tantos cuadrados de la nueva retícula (más pequeños en área si $k < 1$, y más grandes, si $k > 1$) cuantos los contenía la figura original F . El área F' es aproximadamente igual al número de cuadrados, que se contienen en ella, multiplicado por el área del cuadrado. Pero, el área de cada cuadrado nuevo es igual a la del cuadrado original, multiplicada por k^2 (dado que la longitud del lado de un cuadrado se multiplica por k). Por eso, el área F' es igual al área F multiplicada por k^2 .

Examinemos la resolución del siguiente problema que nos servirá de ejemplo de la aplicación práctica de la contracción al punto: *inscribir en el triángulo rectángulo ABC dado un rectángulo $BDEF$ (fig. 5) en el cual la relación entre sus lados está bien determinada.*

Al principio construyamos un rectángulo arbitrario $BD'E'F'$ de relación dada entre los lados, logrando que los vértices D' y F' se dispongan en los lados AB y BC , respectivamente. Designemos con E un punto en el que se cortan el rayo BE' y el lado AC del triángulo. Es fácil ver que en la contracción, realizada al centro B con el factor de tracción $k = \frac{BE}{BE'}$, el rectángulo $BD'E'F'$ se transforma en el rectángulo buscado $BDEF$. Haciendo uso de esta transformación, no es difícil construir el rectángulo mencionado.¹⁾

¹⁾ Del modo análogo se resuelve el problema para el caso en que el triángulo ABC no es rectángulo. Mas, este problema no se examinará aquí.

En la geometría resulta, a veces, más cómoda otra transformación, así llamada *contracción a una recta*. En la contracción a la recta o (denominada *eje de contracción*), con el *factor de contracción* k , cada punto A del plano pasa al punto A'

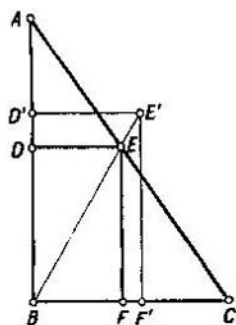


FIG. 5

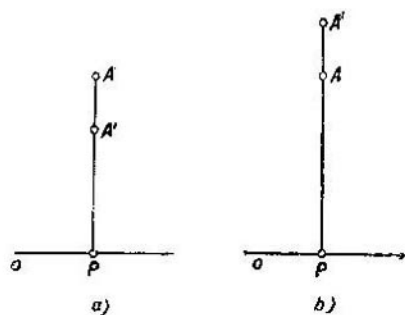


FIG. 6

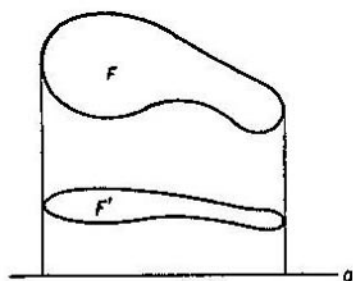


FIG. 7

del rayo PA , perpendicular a o , siendo $\frac{PA'}{AP} = k$ ó $PA' = k \cdot PA$ (fig. 6, a, b). Si el factor de contracción k es mayor a la unidad, entonces $PA' > PA$ (fig. 6, b). En este caso la transformación se debería llamar «expansión desde el eje o ». Todos los puntos de la recta o en la contracción quedan en su lugar. En la contracción a una recta la figura F se transforma en otra figura, F' , no semejante a F (fig. 7).

La contracción a la recta tiene un número de propiedades análogas a las de la contracción al punto:

a) *En la contracción a una recta cada recta se transforma también en la recta.*

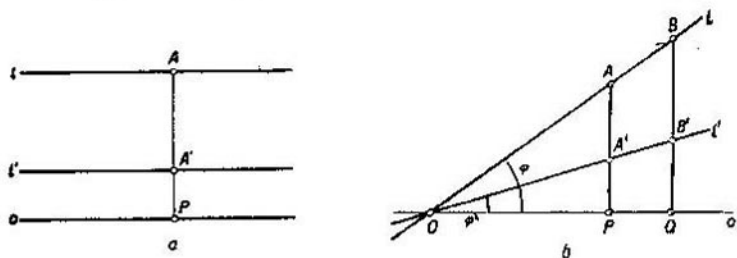


FIG. 8.

Si la recta l es paralela al eje o y d es la distancia entre estas rectas, la recta l se transforma en la recta l' , paralela al eje o , siendo igual a kd la distancia entre l' y o (fig. 8a).

Supongamos que l no es paralela al eje o y designemos por O el punto de intersección de l con o (fig. 8b). En la contracción a la recta o el punto O queda en su lugar.

Sean:

A , un punto arbitrario en la recta l (diferente de O);

A' , un punto en el cual pasa A en la contracción al eje o ;

$$PA' = k \cdot PA.$$

Elijamos en la recta l otro punto B . Si B' es un punto de intersección entre la recta OA' y la perpendicular BQ , trazada desde el punto B al eje o , entonces: $\frac{B'Q}{BA} = \frac{A'P}{AP} = k$ (lo que se deduce de la semejanza de los triángulos OQB y OPA , OQB' y OPA') o sea, $QB' = k \cdot QB$.

Vemos, por consiguiente, que en la contracción al eje o el punto B pasa al punto B' . Puesto que B es un punto arbitrario de la recta l , esta última pasa, en la contracción al eje o , a la recta OA' , la cual, naturalmente, debe designarse con l' ;

b) *En la contracción a una recta las rectas paralelas pasan a las rectas paralelas.*

Sean l y m rectas paralelas. Siendo paralelas, no tienen punto común. Las rectas l' y m' , en las que se transforman las rectas originales, tampoco tienen el punto común (el cual podría resultar del punto común de las rectas l y m). Esto significa que las rectas l' y m' son también paralelas (fig. 9)¹⁾.

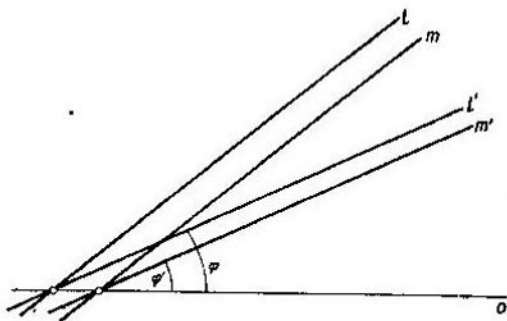


FIG. 9

c) En la contracción a una recta queda en vigor la relación entre los segmentos dispuestos en una misma recta.

Efectivamente, según la propiedad de rectas paralelas que cortan los rayos de un haz, tenemos (fig. 10):

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$$

d) En la contracción a una recta las áreas de todas las figuras cambian en una relación constante (igual al factor de contracción k).

¹⁾ Si φ y φ' son los ángulos, formados por la recta original l y la recta l' , contraída de la primera al eje o , entonces de la figura 8b se deduce con facilidad que

$$\operatorname{tg} \varphi' = \frac{PA'}{PO} = \frac{k \cdot PA}{PO} = k \frac{PA}{PO} = k \operatorname{tg} \varphi.$$

De la figura se infiere también que las rectas paralelas, que cortan el eje o bajo un mismo ángulo φ , se transforman en rectas paralelas que cortan el eje o bajo un mismo ángulo φ' .

Examinemos la figura F y la retícula compuesta por cuadrados. El área F es aproximadamente igual al número de los cuadrados dentro de la F , multiplicado por el área del cuadrado (fig. 11).

Convengamos en que una de las direcciones de las líneas de la retícula sea paralela al eje de contracción. En la contracción, la retícula de cuadrados se transformará en la retícula de rectángulos de áreas iguales, equivalentes al producto

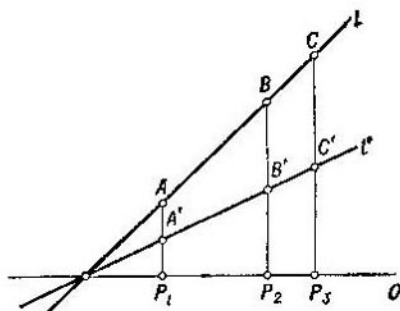


FIG 10.

del área cuadrada por el factor de contracción k (uno de los lados del cuadrado no cambia y la longitud del segundo lado se multiplica por k). Nuestro razonamiento posterior no se diferenciará del ya utilizado en la demostración del postulado que en la contracción al punto, realizada con el factor de contracción k , todas las áreas cambian k^2 veces (véanse las páginas 8—9).

Como ejemplo de la aplicación de la contracción hacia una recta examinemos la resolución del siguiente problema sobre la construcción geométrica: ¹⁾ *inscribir en el triángulo rectángulo ABC dado el rectángulo BDEF, en el cual el producto de los lados representa un valor bien determinado: $BD \cdot BF = d^2$ (en otras palabras, se debe inscribir un rectángulo de área dada)* (fig. 12). Para resolver el problema realicemos la contracción del triángulo ABC al lado BC , con el factor de contrac-

¹⁾ Compárese con el problema en la página 9.

ción $k = \frac{BC}{BA}$. El triángulo original se transformará en el triángulo isósceles rectángulo $A'BC$ en el cual $BA' = k \cdot BA = \frac{BC}{BA} \cdot BA = BC$. El área del triángulo $A'BC$ es igual a kS (donde S es el área del triángulo ABC). En virtud de la propiedad d , el rectángulo $BDEF$ se transformará, al ser con-

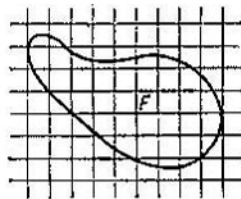


FIG. 11

traído, en el rectángulo $BD'E'F$ de área igual a kd^2 . Ahora, nos hace falta inscribir en el triángulo $A'BC$ el rectángulo $BD'E'F$ de área conocida kd^2 .

No es difícil hacerlo, dado que

$$S_{BF'E'D'} = S_{\Delta BCA'} - (S_{\Delta FCE'} + S_{\Delta A'D'E'})$$

y, por consiguiente,

$$S_{\Delta FCE'} + S_{\Delta A'D'E'} = S_{\Delta ECA'} - S_{BF'E'D'} = kS - kd^2.$$

Pero, por otra parte:

$$\begin{aligned} S_{\Delta FCE'} + S_{\Delta A'D'E'} &= \frac{1}{2} FE'^2 + \frac{1}{2} D'E'^2 = \\ &= \frac{1}{2} (FE'^2 + D'E'^2) = \frac{1}{2} BE'^2 \end{aligned}$$

(teniendo en cuenta que el triángulo $A'BC$ y, por lo tanto, los triángulos $A'D'E'$ y $E'FC$, semejantes al primero, son

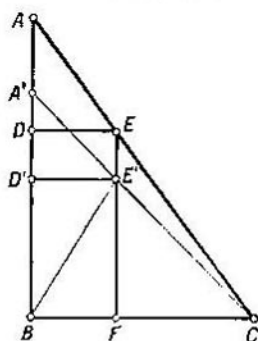


FIG. 12

todos isósceles). De este modo obtenemos:

$$\frac{1}{2} BE'^2 = kS - kd^2.$$

Ahora, conociendo la longitud del segmento BE' , encontramos sin dificultad alguna el punto E' , después de que construimos los rectángulos $BD'E'F$ y $BDEF$, inscritos en el triángulo $A'BC$ y el ABC , respectivamente.

El problema puede tener dos soluciones, una solución o ninguna, según sea el valor de la magnitud d .

No se conoce otra resolución geométrica de este problema que no usaría la transformación de contracción a una recta.¹⁾

¹⁾ Del modo análogo se resuelve el problema en el caso en que el triángulo dado ABC no sea rectángulo. Mas, este problema aquí no se examina.

Contrariamente a la contracción al punto, la contracción a una recta *no transforma* una circunferencia a otra circunferencia. Realizada la contracción a una recta, la circunferencia se transforma en una curva de otra índole, llamada

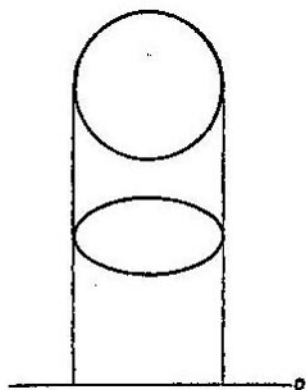


FIG. 13

elipse (fig. 13). Haciendo uso de las propiedades a) — d) de la contracción a una recta, se puede derivar una serie de propiedades geométricas de la elipse. No obstante, esta tarea se encuentra fuera de los marcos de esta obra.

§ 2. Giro hiperbólico

En adelante un gran papel desempeñará la gráfica que expresa una dependencia de la proporcionalidad inversa, es decir, la curva cuya ecuación tiene la forma:

$$y = \frac{a}{x} \text{ ó } xy = a.$$

Esta curva se denomina *hipérbola*. Está representada en la figura 14.

Es evidente que cuanto mayor es la magnitud absoluta de x , tanto menor es y , e, inversamente: si $x \rightarrow \infty$, entonces

$y \rightarrow 0$; si $y \rightarrow \infty$, entonces $x \rightarrow 0$. En lenguaje geométrico esto significa que la hipérbola se aproxima indefinidamente a los ejes de coordenadas sin cortarlos en ningún punto (de la ecuación $xy=a$ se deduce que x e y no pueden ser nulos).

Se llama *asíntota* de una curva a la recta hacia la cual se aproxima indefinidamente la curva mencionada, sin cortar

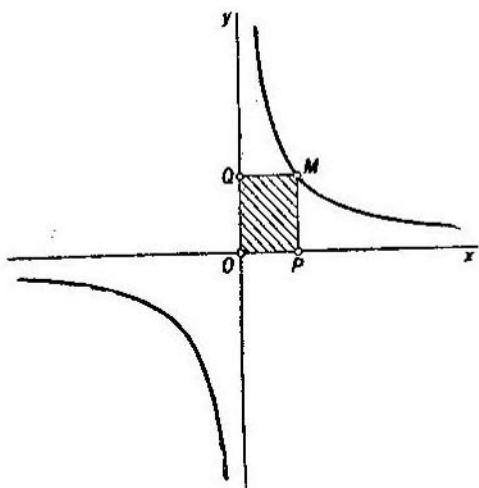


FIG. 14

a la recta en ningún punto. Así pues, los ejes de coordenadas sirven de *asíntotas* para la hipérbola.

La hipérbola consta de dos ramas que para $a > 0$ se disponen en el primer cuadrante de los ejes de coordenadas (x e y son positivos) y en el tercer cuadrante (x e y son negativos).

La ecuación $xy=a$ tiene el sentido geométrico muy simple; el área del rectángulo $MQOP$, limitado por los ejes de coordenadas y las rectas trazadas por un punto M de la hipérbola paralelamente a los ejes, es igual a a (fig. 14) y no depende de la elección del punto M . En efecto, es evidente que $OP=x$, $PM=y$

$$S_{MQOP} = OP \cdot PM = x \cdot y = a.$$

Si al rectángulo $MQOP$ le damos el nombre de *rectángulo de coordenadas* del punto M , podríamos determinar la *hipérbola como lugar geométrico de los puntos (dispuestos en los cuadrantes primero y tercero del sistema de coordenadas) cuyos rectángulos de coordenadas tienen un área constante.*

La hipérbola cuenta con el *centro de simetría*: ambas ramas de la hipérbola son simétricas con relación al origen de coordenadas O . Esta afirmación se comprueba por el hecho de que

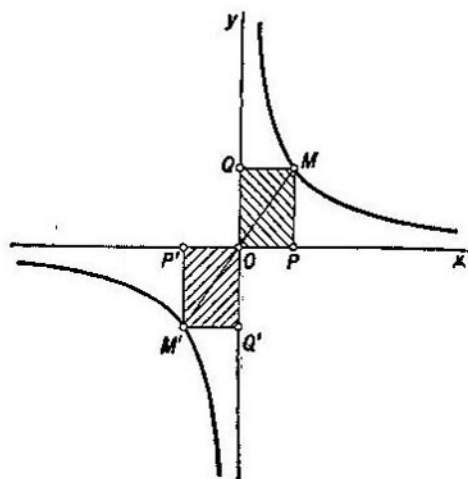


FIG. 15

los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M'Q'OP'$ (fig. 15) simétricos con relación a O , tienen áreas iguales. La hipérbola tiene también dos *ejes de simetría* que son representados por las bisectrices de los ángulos de coordenadas aa y bb (fig. 16). En efecto, los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M_1Q_1OP_1$, simétricos referidos a la bisectriz aa , tienen áreas iguales. También tienen áreas iguales los rectángulos de coordenadas $MQOP$ y $M_2Q_2OP_2$, simétricos con relación a bb . El centro de simetría O y los ejes de simetría aa y bb se llaman, con frecuencia, *centro* y *ejes* de la hipérbola. Los

puntos A y B , en los cuales la hipérbola corta el eje aa , reciben el nombre de *vértices* de la hipérbola.

Sea una hipérbola $xy=a$. Realicemos la contracción del plano al eje x , con el factor de contracción k . La hipérbola $xy=a$ se transformará en la hipérbola $xy=ak$, dado que la abscisa x de cada punto quedará invariable y la ordenada y

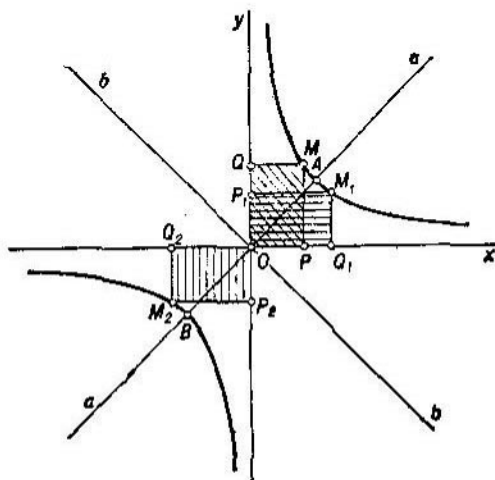


FIG. 18

se sustituirá por la $y \cdot k$ (fig. 17). Realicemos, luego, una contracción más, esta vez al eje y , con el factor de contracción, igual a $\frac{1}{k}$. En esta transformación la hipérbola $xy=ak$ se convertirá en la hipérbola $xy=\frac{ak}{k}=a$. En efecto, la ordenada y de cualquier punto queda invariable en esta última contracción, mientras que la abscisa x se convierte en $\frac{x}{k}$. Resulta, pues, que la *contracción consecutiva de un plano, primero al eje x , con el factor de contracción k , y la segunda vez, al eje y , con el factor igual a $\frac{1}{k}$, transforma la hipérbola $xy=a$ en sí misma*. La sucesión de estas dos contracciones de un

plano a la recta constituye una transformación, llamada *giro hiperbólico*. El nombre «giro hiperbólico» se debe al género de la transformación, durante la cual todos los puntos de la hipérbola «resbalan por la curva»: así, en el dibujo 17 el punto M pasa, al principio, al punto M_1 y luego este último

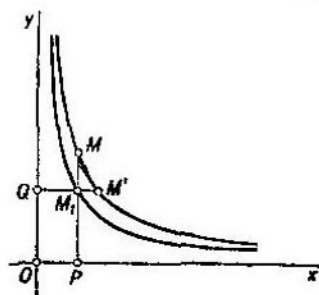


FIG. 17

se convierte en el punto M' , y, en definitiva, el giro hiperbólico transforma el punto M de la hipérbola al punto M' de la misma hipérbola. Este giro es análogo al giro de una circunferencia: parece que la hipérbola como si diera vuelta.

Señalemos las siguientes propiedades del giro hiperbólico en el cual:

a) *cada recta se transforma en la recta* (corolario de la propiedad a), § 1);

b) *los ejes de coordenadas (asíntotas de la hipérbola) se transforman en sí mismos* (lo que se hace durante dos contracciones consecutivas que forman un giro hiperbólico);

c) *las rectas paralelas se transforman en rectas paralelas* (corolario de la propiedad b), § 1);

d) *queda constante la relación entre los segmentos de una misma recta* (corolario de la propiedad c), § 1);

e) *las áreas de las figuras no varían su valor*, dado que en la primera contracción a una recta las áreas de todas las figuras se multiplican por k , mientras que en la segunda contracción ellas se dividen por k (véase la propiedad d), § 1)

Es muy importante observar que el giro hiperbólico nos permite trasladar cada punto de la hipérbola en otro punto

cualquiera. En efecto, la primera contracción hace pasar el punto (x, y) de la hipérbola $xy=a$ al punto (x, yk) de la hipérbola $xy=ak$; en la segunda contracción el punto (x, yk) de la hipérbola $xy=ak$ pasa al punto $(\frac{x}{k}, yk)$ de la hipérbola original (véase la fig. 17). De este modo, como resultado del giro hiperbólico el punto (x, y) pasa al punto $(\frac{x}{k}, yk)$. Resulta, por consiguiente, que con la ayuda del giro hiperbólico adecuado el punto (x, y) de la hipérbola se transforma en cualquier otro punto (x_1, y_1) , de la misma hipérbola: es suficiente para ello escoger k de tal manera que sea $x_1 = \frac{x}{k}$ ó $k = \frac{x}{x_1}$.

§ 3. Propiedades de la hipérbola

Haciendo uso del giro hiperbólico, se puede obtener una serie de propiedades de la hipérbola, muy interesantes. No obstante, determinemos, previamente, una cuerda y una tangente a la hipérbola.

Una recta, que corta a la hipérbola en dos puntos, se denomina *secante* de la hipérbola. El segmento de la secante, limitado por los puntos de la hipérbola, se denomina *cuerda* de la hipérbola. Existen dos géneros de las secantes (como también de las cuerdas). Las secantes de primer género cortan a una sola rama de hipérbola, las de segundo género cortan a ambas ramas (fig. 18a).

Examinemos una secante de primer género. Entre las rectas paralelas a esta secante habrá unas cuantas que cortan a la hipérbola en dos puntos, habrá rectas que no cortan la hipérbola y, por fin, dos de las rectas paralelas, llamadas tangentes a la hipérbola, tendrán un punto común con la misma (fig. 18b).¹⁾

En el giro hiperbólico la cuerda UV de la hipérbola se transforma en la nueva cuerda $U'V'$; si U y V son los puntos de una misma rama (de ramas diferentes) de la hipérbola,

¹⁾ Una tangente a la hipérbola puede ser definida también como recta que tiene con la hipérbola un punto común, y no paralela a la asíntota (toda recta, paralela a la asíntota corta a la hipérbola en un solo punto, pero no es tangente).

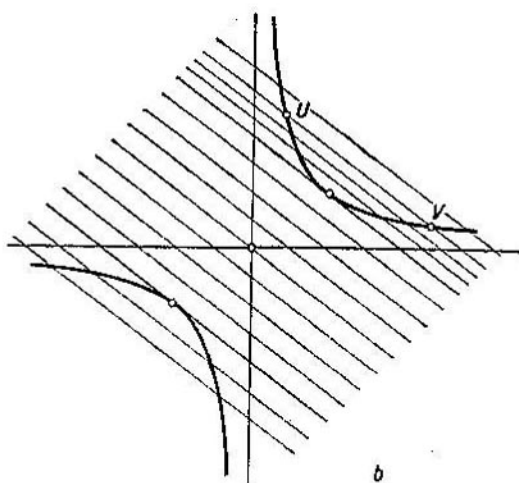
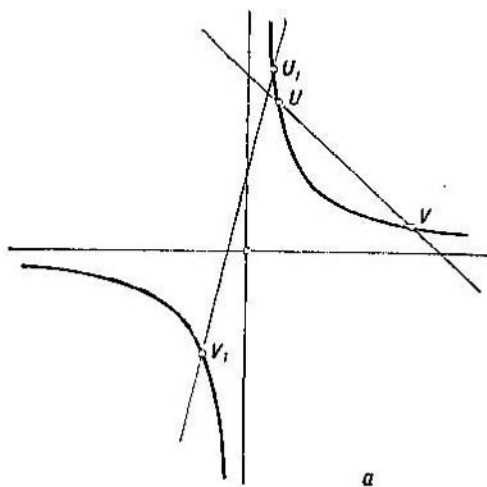


FIG. 18

entonces U' y V' pertenecen también a una rama (a ramas diferentes). En efecto, los puntos U y V de la hipérbola se transforman en los puntos U' y V' , perteneciendo, por ejemplo, U' y U a la misma rama (fig. 19).

En el giro hiperbólico, que traslada el punto M al M' , la tangente a la hipérbola en el punto M se transforma en la

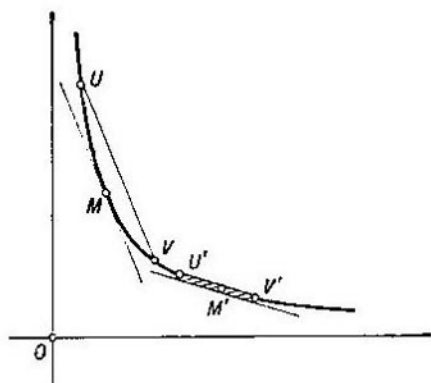


FIG. 19

tangente a la nueva curva en el punto M' . Para demostrarlo examinemos la cuerda UV , paralela a la primera tangente. Es evidente que la cuerda UV se transformará en la $U'V'$. Al mismo tiempo una recta, que es paralela a UV y tiene el único punto común M con la hipérbola, se transformará en la recta que será paralela a $U'V'$ y tendrá con la hipérbola el único punto común M' (fig. 19).

Ahora, procedamos con la demostración de las propiedades de la hipérbola.

1. *El segmento de la tangente a la hipérbola, encerrado entre asíntotas por la curva, se divide por el punto de tangencia en dos partes iguales.*

Dado que la bisectriz aa del ángulo de coordenadas sirve de eje de simetría de la hipérbola (fig. 20), el segmento E_0L_0 de la tangente en el vértice A , encerrado entre los ejes de coordenadas, se divide por el punto A por la mitad: los

segmentos AK_0 y AL_0 , si son simétricos con relación al eje aa , pasan uno a otro.

Sea KL un segmento de la tangente a la hipérbola en cualquier otro punto M . Realicemos el giro hiperbólico que traslada el punto M al punto A .

La tangente en el punto M se transformará, al mismo tiempo a la tangente en el punto A , mientras que el segmento KL

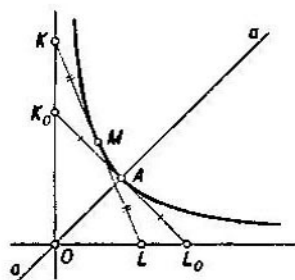


FIG. 20

se convertirá en el K_0L_0 (véanse las propiedades a) y b), § 2). Como en el giro hiperbólico el centro del segmento pasa al punto medio del segmento (véase la propiedad d), § 2), el punto M es el centro del segmento KL , lo que se trataba de demostrar.

2. Las áreas de los triángulos, que se obtienen al cortar el ángulo de coordenadas por las tangentes a la hipérbola $xy=a$, son todas iguales.

Para comprobar esta propiedad examinemos el triángulo KOL , que se obtiene al cortar el ángulo de coordenadas por una tangente a la hipérbola $xy=a$ en algún punto M de ésta (fig. 20).

El giro hiperbólico, que traslada el punto M al punto A , transforma el triángulo KOL en el K_0OL_0 , en el cual K_0L_0 es la tangente a la hipérbola en el punto A . De aquí se deduce en virtud de la propiedad e), § 2, que $S_{\Delta KOL} = S_{\Delta K_0OL_0}$, es decir, el área del triángulo KOL no depende de la elección del punto M , lo que se trataba de demostrar.

De las propiedades 1 y 2 se desprende que una rama de la hipérbola puede ser determinada como lugar geométrico de los puntos medios de los segmentos que, al cortar el ángulo recto dado, forman triángulos de área igual (fig. 21).

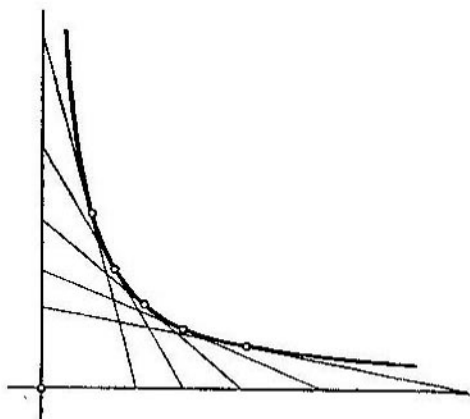


FIG. 21

3. Los centros de todas cuerdas paralelas de la hipérbola se ubican en una recta que pasa por el punto medio de la hipérbola.

Sean: UV , la cuerda cualquiera de la hipérbola;

S centro de la cuerda;

T punto de intersección de la recta OS con la hipérbola (fig. 22a).¹⁾

Realicemos el giro hiperbólico que convierte el punto T en el vértice A de la hipérbola. Con esto la recta OT se transformará en el eje aa de la hipérbola, mientras que la cuerda UV , en la cuerda U_0V_0 , la cual se divide por la mitad por el eje de simetría aa . Mas, esto es posible sólo cuando U_0V_0 sea per-

¹⁾ Aquí nos limitamos al caso en que la cuerda UV es de primer género (véase la pág. 21), es decir, los puntos U y V pertenecen a una misma rama (sólo este caso nos va a ser útil en lo posterior). Recomendamos que el mismo lector considere el caso en que los puntos U y V pertenezcan a las ramas distintas de la hipérbola.

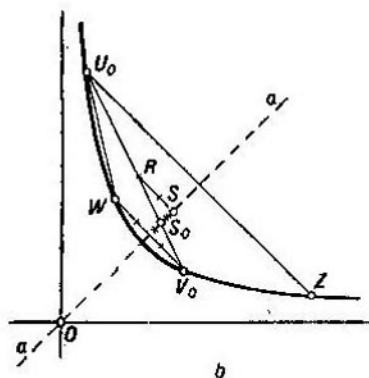
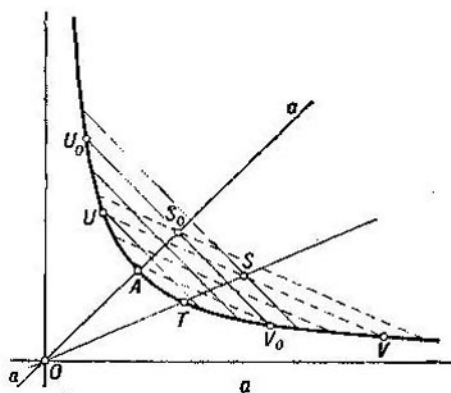


FIG. 22

pendicular a aa . En efecto, supongamos que U_0V_0 no es perpendicular a aa . Tracemos las cuerdas U_0Z y V_0W , perpendiculares a aa . Como aa es el eje de simetría de la hipérbola, $U_0ZV_0W_0$ es un trapecio equilátero para el cual aa sirve de eje de simetría. Pero, el eje de simetría del trapecio equilátero no puede dividir por la mitad su diagonal (por ejemplo, en la figura 22b tenemos: $V_0S_0 = S_0R < S_0U_0$, lo que conduce a una contradicción). Todas las cuerdas paralelas a UV se transforman en las cuerdas, paralelas a U_0V_0 , es decir, perpendiculares al eje de simetría aa de la hipérbola. Los centros de

todas las cuerdas están en la recta aa . De aquí se desprende que los centros de todas las cuerdas, paralelas a UV , se disponen en la recta OT , lo que se trataba de demostrar.

Se llama *diámetro* de la hipérbola a cada recta que pasa por el centro de la hipérbola (igual que los diámetros de una circunferencia son las rectas que pasan por el punto medio

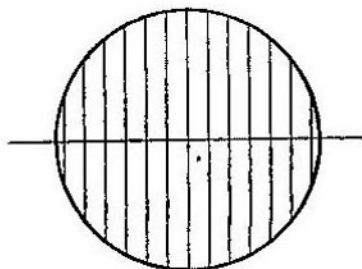


FIG. 23

de ésta).¹⁾ El diámetro de la hipérbola que divide por la mitad todas las cuerdas de una dirección dada se denomina *diámetro conjugado* con estas últimas; inversamente, las cuerdas se llaman *conjugadas* con el diámetro que las divide en dos partes iguales. En adelante conoceremos el concepto del *radio* de la hipérbola, sobreentendiendo bajo éste un segmento del diámetro, comprendido entre el centro de la hipérbola y el punto de intersección del diámetro con la curva (es decir, los radios de la hipérbola se determinan de la manera igual a los de una circunferencia).

Observemos que la circunferencia posee una propiedad análoga a la propiedad 3 de la hipérbola: *los puntos medios de todas las cuerdas paralelas de la circunferencia se ubican en una misma recta que pasa por el centro de la circunferencia*

¹⁾ En este folleto bajo el diámetro se entiende toda la recta, y no el segmento de ella.

(a saber, en el diámetro de la circunferencia, perpendicular a las cuerdas, fig. 23).

4. Las rectas, trazadas por los extremos de una cuerda arbitraria de la hipérbola paralelamente a las asíntotas de ésta, se cortan en el diámetro, conjugado con la cuerda.

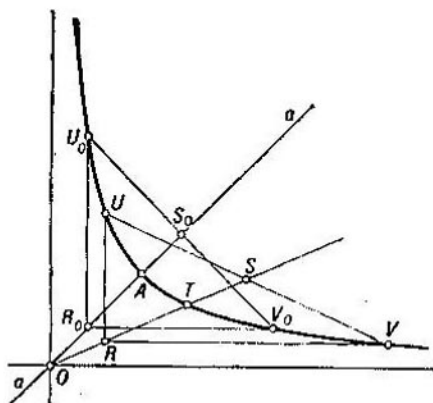


FIG. 24

Sean: UV , la cuerda arbitraria de la hipérbola;

S , el punto medio de la cuerda;

T , el punto de intersección de la recta OS con la hipérbola (fig. 24).

Realicemos el giro hiperbólico que transforma el punto T al vértice A de la hipérbola. Es evidente que la cuerda UV se transformará en la cuerda U_0V_0 , perpendicular al eje aa (véase la demostración de la propiedad 3). Las rectas UR y VR , paralelas a las asíntotas, se transformarán en las rectas U_0R_0 y V_0R_0 que son también paralelas a las asíntotas (véanse las propiedades b) y c), § 2).

Como aa es el eje de simetría de la hipérbola y, a la vez, bisectriz del ángulo formado por las asíntotas, el punto R_0 de la intersección de las rectas U_0R_0 y V_0R_0 se dispone en el eje aa .

De aquí se deduce que el punto de intersección R de las rectas UR y VR se dispone en el diámetro OT , lo que se trataba de demostrar.

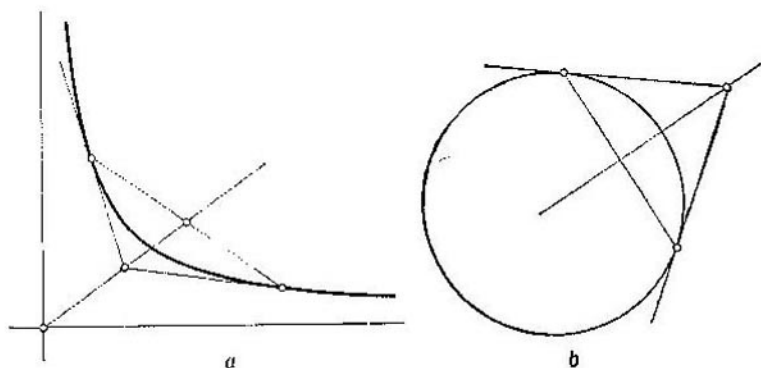


FIG. 25

5. Las tangentes a la hipérbola en los extremos de una cuerda, elegida arbitrariamente, se cortan en el diámetro conjugado con esta cuerda (fig. 25a).

Recomendamos que el lector mismo lleve a cabo la demostración de la propiedad 5, que es plenamente análoga a la de la propiedad 4 de la hipérbola.

Observemos que la circunferencia también tiene una propiedad análoga: las tangentes a la circunferencia en los extremos de una cuerda arbitraria se cortan en el diámetro, perpendicular a la cuerda (fig. 25b).

CAPITULO II

FUNCIONES HIPERBÓLICAS

§ 1. Ecuación de la hipérbola referida a los ejes

Sean x e y las coordenadas del punto M de la hipérbola en el sistema de coordenadas cuyos ejes coinciden con las asíntotas. En este caso la ecuación de la hipérbola tiene la forma: $xy=a$ (fig. 26). Tomemos los ejes aa y bb de la hipérbola por los ejes nuevos de coordenadas. Designemos con

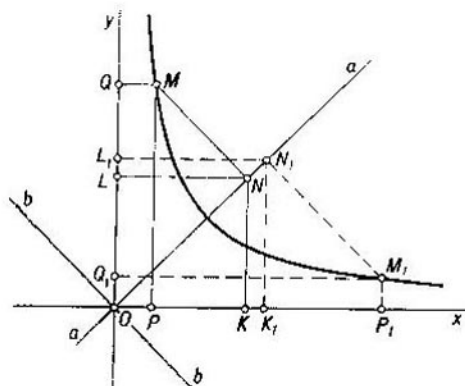


FIG. 26

X e Y las coordenadas del punto M en el nuevo sistema de coordenadas. Expresemos las coordenadas viejas x e y por las nuevas X e Y .

Sea N la proyección del punto M al eje aa . Las proyecciones de los puntos M y N a los ejes Ox , Oy , las designemos, respectivamente, por P , Q y K , L (fig. 26). Entonces:

$$OP = OK - PK = ON \cos 45^\circ - NM \cos 45^\circ,$$

$$OQ = OL + LQ = ON \cos 45^\circ + NM \cos 45^\circ$$

(puesto que la proyección de un segmento a una recta que forma con el segmento el ángulo de 45° , es igual a la longitud

del segmento multiplicada por el $\cos 45^\circ$). Pero:

$OP=x$, $OQ=y$, $ON=X$, $NM=Y$, y obtenemos ¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} x &= (X-Y) \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y &= (X+Y) \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (*)$$

Sustituyamos en la fórmula $xy=a$ los valores obtenidos de x e y . Tendremos:

$$(X^2 - Y^2) \frac{1}{2} = a, \text{ o sea } X^2 - Y^2 = 2a$$

Esta es la ecuación de la hipérbola referida a los ejes o a las asíntotas

La hipérbola

$$X^2 - Y^2 = 1$$

se llama *hipérbola unidad*. Su ecuación es análoga a la ecuación de la circunferencia unidad ²⁾ (circunferencia de radio unidad):

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

¹⁾ Para el punto M_1 (fig. 26) tenemos:

$$\begin{aligned} x_1 = OP_1 &= OK_1 + K_1P_1 = ON_1 \cos 45^\circ + N_1M_1 \cos 45^\circ = \\ &= X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 = OQ_1 &= OL_1 - Q_1L_1 = ON_1 \cos 45^\circ - N_1M_1 \cos 45^\circ = \\ &= X_1 \frac{\sqrt{2}}{2} - (-Y_1) \frac{\sqrt{2}}{2}, \end{aligned}$$

es decir, las mismas fórmulas (*). Que el mismo lector compruebe que estas fórmulas son válidas también para los puntos de la segunda rama de la hipérbola, dispuesta en el tercer cuadrante del sistema de coordenadas x , y (aunque esta demostración no la necesitaremos).

²⁾ Sea M un punto cualquiera de la circunferencia de radio 1 con el centro en el origen de coordenadas (fig. 27a). Supongamos que X e Y son las coordenadas del punto M . Según el teorema de Pitágoras tenemos: $OP^2 + PM^2 = OM^2$, pero $OP = X$, $PM = Y$, $OM = 1$. Por consiguiente, la ecuación $X^2 + Y^2 = 1$ es válida para cualquier punto de la circunferencia.

La ecuación de la hipérbola unidad en el sistema de coordenadas, cuyos ejes coinciden con las asíntotas, tiene la forma $xy = \frac{1}{2}$

(en este caso $2a=1$ y, por lo tanto, $a = \frac{1}{2}$).

§ 2. Definición y propiedades fundamentales de las funciones hiperbólicas

Procedamos ahora con la exposición de la teoría de *funciones hiperbólicas* (se llaman también *funciones hiperbólicas trigonométricas*), que en muchos aspectos es análoga a la de funciones trigonométricas comunes, es decir, circulares. Para

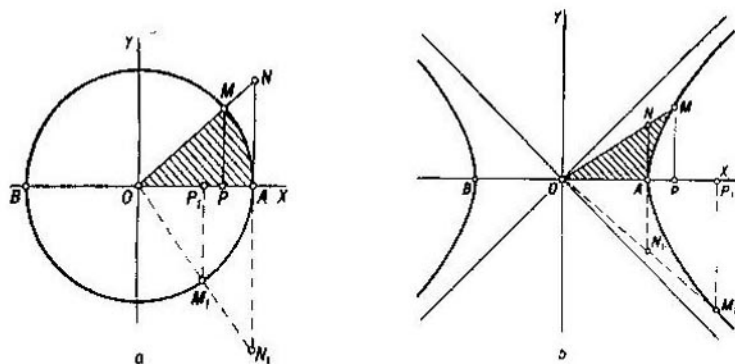


FIG. 27

recaltar la analogía entre las funciones circulares e hiperbólicas, se le da a la exposición una forma en dos columnas: en la columna izquierda se exponen los conocidos postulados de la teoría de funciones trigonométricas circulares, en la columna derecha, la teoría de funciones hiperbólicas.

Examinemos una circunferencia unidad (fig. 27a)

$$X^2 + Y^2 = 1.$$

Se llama *ángulo* α (en radianes), formado por los

Examinemos una hipérbola unidad (fig. 27b)

$$X^2 - Y^2 = 1.$$

Se llama *ángulo hiperbólico* t , formado por dos

radios OA y OM de la circunferencia, a un número igual a la longitud del arco AM , o al doble del área del sector OAM , limitado por los radios mencionados y el arco de la circunferencia.

Tracemos una perpendicular MP del punto M de la circunferencia al diámetro OA ; tracemos también una tangente a la circunferencia en el punto A , procurando que se corten la tangente y el diámetro OM en el punto N . Entonces, el segmento PM de la perpendicular será *línea del seno*. El segmento OP del diámetro será *línea del coseno* y el AN , *línea de la tangente*.

Las longitudes de los segmentos PM , OP y AN son iguales al *seno*, *coseno* y *tangente* del ángulo α , respectivamente:

$$PM = \text{sen } \alpha, OP = \text{cos } \alpha, \\ AN = \text{tg } \alpha.$$

radios OA y OM de la hipérbola, al número igual al doble del área del sector, limitado por estos radios y el arco de la hipérbola.¹⁾

Tracemos una perpendicular MP del punto M de la hipérbola al diámetro OA que es el eje de simetría de la hipérbola que corta a ésta en el vértice A ; tracemos también una tangente a la hipérbola en el punto A , procurando que la tangente corte el diámetro OM en el punto N . El segmento PM de la perpendicular se llama *línea del seno hiperbólico*, el segmento OP del diámetro se llama *línea del coseno hiperbólico* y el AN , *línea de la tangente hiperbólica*.

Las longitudes de los segmentos PM , OP y AN se llaman, respectivamente, *seno hiperbólico*, *coseno hiperbólico* y *tangente hiperbólica* del ángulo hiperbólico t , y se designan²⁾:

$$PM = \text{sh } t, OP = \text{ch } t, \\ AN = \text{th } t.$$

¹⁾ La principal propiedad del ángulo α consiste en la invariabilidad de su valor al girar el sector AOM alrededor de O . Análogamente, el ángulo hiperbólico t no varía su valor en el *giro hiperbólico* de la figura AOM (véase la propiedad e, § 2, capítulo 1).

²⁾ Las relaciones $\frac{1}{PN}$, $\frac{1}{OP}$ y $\frac{1}{AN}$ se denominan, a veces, *cosecante hiperbólica*, *secante hiperbólica* y *cotangente hiperbólica* del ángulo hiperbólico t .

Se conoce que las funciones trigonométricas del ángulo varían periódicamente, con el período igual a 2π . Las funciones hiperbólicas son *aperiódicas*. El ángulo hiperbólico t puede variar en los límites desde 0 hasta ∞ . Para comprobarlo (o, en otras palabras, comprobar que el área del sector

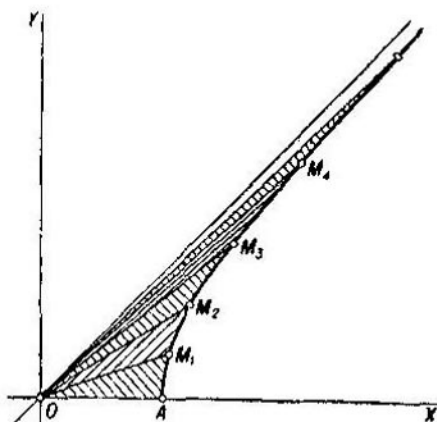


FIG. 28

hiperbólico AOM puede ser tan grande como se quiera) examinemos el ángulo hiperbólico AOM_1 cuyo valor designaremos con t_1 . Realicemos el giro hiperbólico que traslada el punto A al punto M_1 ; el punto M_1 pasará, con ello, al punto M_2 , M_2 en el M_3 , M_3 en el M_4 , etc. (fig. 28). En virtud de la propiedad e) § 2, capítulo I, las áreas de los sectores hiperbólicos AOM_1 , M_1OM_2 , M_2OM_3 , M_3OM_4 ... son todas iguales, razón por la cual los ángulos hiperbólicos AOM_1 , AOM_2 , AOM_3 , AOM_4 son iguales, respectivamente, a t_1 , $2t_1$, $3t_1$, $4t_1$... De aquí se deduce que el ángulo hiperbólico puede ser tan grande como se quiera.

De la definición de funciones hiperbólicas se desprende que (fig. 27b) al variar el ángulo hiperbólico t desde 0 hasta ∞ , el seno hiperbólico $\text{sh } t$ varía desde 0 hasta ∞ , $\text{ch } t$ varía desde 1 hasta ∞ , $\text{th } t$ varía desde 0 hasta 1. Si, rigiéndose por la analogía completa con funciones circulares, consideramos

el ángulo AOM_1 (fig. 76b) negativo, igual a $-t_1$, (t_1 es el doble del área del sector AOM_1) y admitamos que

$$\text{sh}(-t_1) = -M_1P_1 = -\text{sh}t_1,$$

$$\text{ch}(-t_1) = OP_1 = \text{ch}t_1,$$

$$\text{th}(-t_1) = -N_1A = -\text{th}t_1,$$

entonces las gráficas de funciones hiperbólicas tendrán la forma representada en la figura 29. Observemos, además,

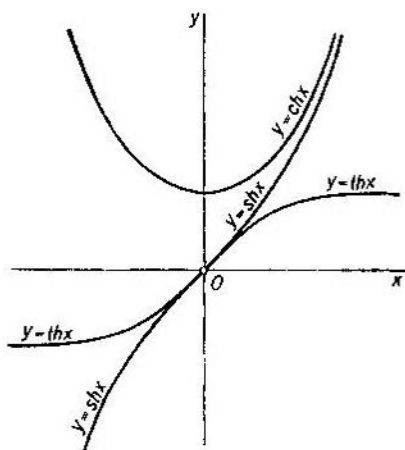


FIG. 29

que $\text{sh } 0 = \text{th } 0 = 0$ y $\text{ch } 0 = 1$ (de modo igual que $\text{sen } 0 = \text{tg } 0 = 0$ y $\text{cos } 0 = 1$).

Deduzcamos, ahora, las dependencias principales entre las funciones trigonométricas (tanto circulares como hiperbólicas).

De la semejanza de los triángulos OMP y ONA (fig. 27a) se deduce:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

De la semejanza de los triángulos OMP y ONA (fig. 27b) se deduce:

$$\frac{AN}{OA} = \frac{PM}{OP}.$$

Pero $\frac{AN}{OA} = \operatorname{tg} \alpha$ (dado que $OA = 1$) y

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}.$$

De este modo obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{cos} \alpha}. \quad (1)$$

Luego, las coordenadas del punto M de la circunferencia son: $OP = X$, $PM = Y$.

La ecuación de la circunferencia unidad tiene la forma: $X^2 + Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$OP^2 + PM^2 = 1,$$

ó bien,

$$\operatorname{cos}^2 \alpha + \operatorname{sen}^2 \alpha = 1. \quad (II)$$

Al dividir ambos miembros de la identidad (II) primero por $\operatorname{cos}^2 \alpha$, y luego, por $\operatorname{sen}^2 \alpha$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha}, \quad (III)$$

$$\operatorname{cotg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \alpha}, \quad (IV)$$

Pero $\frac{AN}{OA} = \operatorname{th} t$ (dado que $OA = 1$; para el punto A la coordenada $Y = 0$, por lo que $OA^2 = X^2 = 1 + Y^2 = 1$)

y

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}.$$

De este modo obtenemos:

$$\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}. \quad (1)$$

Luego, las coordenadas del punto M de la hipérbola son $OP = X$, $PM = Y$.

La ecuación de la hipérbola tiene la forma $X^2 - Y^2 = 1$. Por consiguiente,

$$OP^2 - PM^2 = 1,$$

ó bien,

$$\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1. \quad (II)$$

Al dividir ambos miembros de la identidad (II) primero por $\operatorname{ch}^2 t$, y luego, por $\operatorname{sh}^2 t$, obtenemos dos fórmulas más:

$$1 - \operatorname{th}^2 t = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}, \quad (III)$$

$$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} - 1 = \frac{1}{\operatorname{sh}^2 t}. \quad (IV)$$

§ 3. Fórmulas de adición

Deduzcamos las fórmulas de adición para las funciones circulares e hiperbólicas.

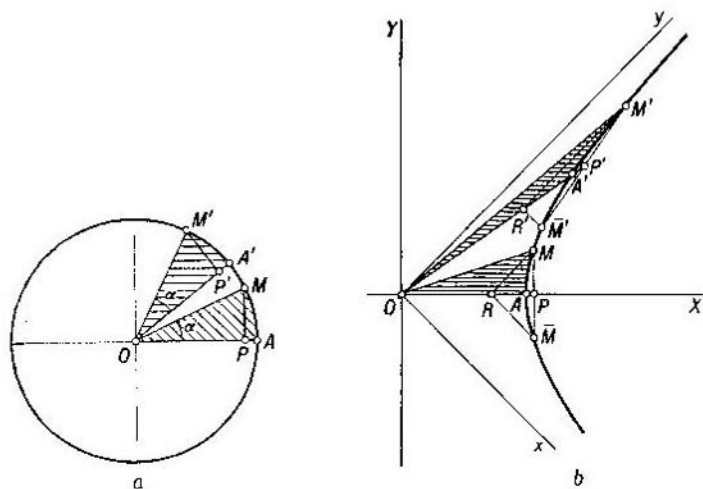


FIG. 30

Supongamos que el giro alrededor del punto O traslada los radios OA y OM de la circunferencia (el ángulo $AOM = \alpha$) a la posición de los radios OA' y OM' (fig. 30a). Las líneas PM y OP del seno y coseno del ángulo MOP se trasladarán a los segmentos $P'M'$ y OP' . Es evidente que el segmento $M'P'$ es perpendicular al diámetro OA' . Puesto que $P'M' = PM$

Supongamos que el giro hiperbólico traslada los radios OA y OM de la hipérbola (A es el vértice, t es el ángulo hiperbólico AOM) en los radios OA' y OM' (fig. 30b, véase la referencia en la página 33). Las líneas PM y OP del seno y coseno (hiperbólicos) del ángulo t se trasladarán en los segmentos $P'M'$ y OP' . Si \bar{M} y \bar{M}' , son los segundos puntos, en los que MP

y $OP' = OP$ (en el giro no cambia la longitud del segmento), las igualdades $\text{sen } \alpha = PM$ y $\text{cos } \alpha = OP$ nos dan:
 $\text{sen } \alpha = P'M'$; $\text{cos } \alpha = OP'$.

y $M'P'$ cortan la hipérbola, entonces podemos decir que $MP = P\bar{M}$ (dado que OA es el eje de simetría de la hipérbola) y $M'P' = P'\bar{M}'$ (lo que se deduce de la igualdad $MP = P\bar{M}$, en virtud de la propiedad d), § 2, capítulo I). En otras palabras, las cuerdas $M\bar{M}$ y $M'\bar{M}'$ son conjugadas con los diámetros OP y OP' , respectivamente (véase la página 27).

Las igualdades $\text{sh } t = P$, $\text{ch } t = OP$ se pueden escribir en la forma $\text{sh } t = \frac{PM}{OA}$,
 $\text{ch } t = \frac{OP}{OA}$ (puesto que $OA = 1$; véase la página 30). Demostremos que

$$\text{sh } t = \frac{P'M'}{OA'}, \quad \text{ch } t = \frac{OP'}{OA'}.$$

Tracemos por los puntos M y \bar{M} , M' y \bar{M}' las rectas paralelas a las asíntotas:

$$MR \parallel M'R' \parallel Oy.$$

$$\bar{M}R \parallel \bar{M}'R' \parallel Ox$$

(fig. 30b). En virtud de la propiedad 4, § 3, capítulo I, los puntos R y R' pertenecen, respectivamente, a los diámetros OA y OA' . Como

$$\begin{aligned} \angle MR\bar{M} &= \angle M'R'\bar{M}' = \\ &= \angle yOx = 90^\circ. \end{aligned}$$

los triángulos $MR\bar{M}$ y $M'R'\bar{M}'$ son rectángulos.

Los puntos P y P' son medios de las hipotenusas de estos triángulos; al mismo tiempo sirven de puntos medios de las circunferencias circunscritas alre-

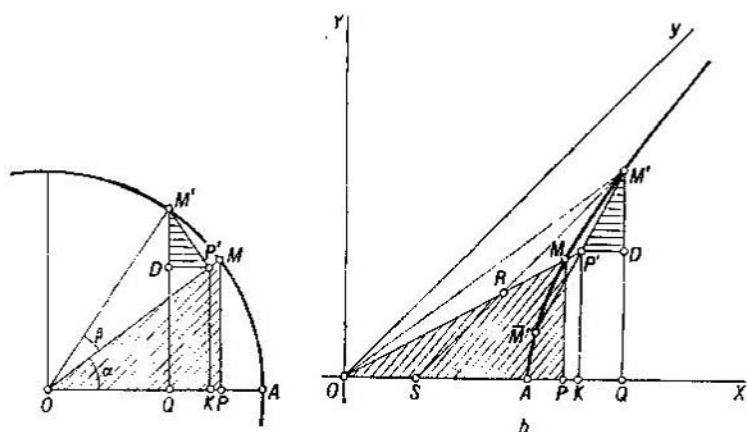


FIG. 31

dedor de los triángulos.

Por consiguiente,

$$PM = \overline{MP} = RP,$$

$$P'M' = \overline{M'P'} = R'P'.$$

Ahora se puede escribir:

$$\operatorname{sh} t = \frac{RP}{OA}, \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP}{OA}.$$

Mas, según la propiedad d), § 2, cap. I), tenemos

$$\frac{RP}{OA} = \frac{R'P'}{OA'}; \quad \frac{OP}{OA} = \frac{OP'}{OA'}.$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t &= \frac{R'P'}{OA'} = \frac{P'M'}{OA'}, \\ \operatorname{ch} t &= \frac{OP'}{OA'} \end{aligned}$$

lo que se trataba de demostrar.

Supongamos ahora que $\angle AOM = \alpha$ y $\angle MOM' = \beta$ (fig. 31a). Tracemos las perpendiculares MP y $M'Q$ de los puntos M y M' a OA . Del punto M' tracemos la perpendicular $M'P'$ al radio OM , y del punto P' tracemos dos perpendiculares: $P'D$ al segmento $M'Q$ y $P'K$, a OA . En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \alpha &= PM, & \operatorname{cos} \alpha &= OP; \\ \operatorname{sen} \beta &= P'M', & \operatorname{cos} \beta &= OP'; \\ \operatorname{sen} (\alpha + \beta) &= QM', \\ \operatorname{cos} (\alpha + \beta) &= OQ. \end{aligned}$$

Los triángulos OMP y $OP'K$ son semejantes: ambos son rectángulos y tienen un ángulo común.

Los triángulos OMP y $M'P'D$ también son semejantes, dado que ambos son rectángulos y, además, $\angle MOP = \angle P'M'D$, como

Supongamos ahora que los ángulos hiperbólicos AOM y MOM' son iguales a t y u , respectivamente (fig. 31b). Tracemos las perpendiculares MP y $M'Q$ de los puntos M y M' a OA . Luego, del punto M' tracemos la cuerda $M'\bar{M}'$. Conjugada con OM (véase la pág. 27). La cuerda $M'\bar{M}'$ corta a OM en el punto P' ; de este punto tracemos dos perpendiculares: $P'D$ al $M'Q$ y $P'K$ al segmento OA . En este caso tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} t &= PM, & \operatorname{ch} t &= OP; \\ \operatorname{sh} u &= \frac{P'M'}{OM}, & \operatorname{ch} u &= \frac{OP'}{OM} \\ \operatorname{sh} (t + u) &= QM', \\ \operatorname{ch} (t + u) &= OQ. \end{aligned}$$

Los triángulos OMP y $OP'K$ son semejantes: ambos son rectángulos y tienen un ángulo común.

Los triángulos OMP y $M'P'D$ también son semejantes, dado que ambos son rectángulos y, además, $\angle MOP = \angle P'M'D$. En

ángulos con los lados recíprocamente perpendiculares.

Es evidente que (fig. 31a):

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= QM' = \\ &= KP' + DM', \\ \operatorname{cos}(\alpha + \beta) &= OQ = | \\ &= OK - DP' .\end{aligned}$$

De la semejanza de los triángulos OMP y $OP'K$ se deduce:

$$\begin{aligned}\frac{KP'}{OP'} &= \frac{PM}{OM}, KP' = \frac{OP'}{OM} PM; \\ \frac{OK}{OP'} &= \frac{OP}{OM}, OK = \frac{OP'}{OM} OP.\end{aligned}$$

De la semejanza de los triángulos OMP y $M'P'D$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{DM'}{P'M'} &= \frac{OP}{OM}, DM' = \frac{P'M'}{OM} OP, \\ \frac{DP'}{P'M'} &= \frac{PM}{OM}, \\ DP' &= \frac{P'M'}{OM} PM.\end{aligned}$$

efecto, la recta $M'R$, paralela a la asíntota Oy de la hipérbola, corta el diámetro OM en el punto R y al eje OA , en el punto S . Entonces, $\angle QM'S = \angle QSM' = 45^\circ$. Luego, $\angle P'M'R = \angle M'RP'$, dado que $P'M' = RP'$ (véase la pág 39).

Pero,

$$\begin{aligned}\angle MOP &= \angle M'SQ - \\ &- \angle SRO = \angle M'SQ - \\ &- \angle M'RP', \quad \angle P'M'D = \\ &= \angle SM'Q - \angle RM'P' .\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\angle MOP = \angle P'M'D.$$

Es evidente que (fig. 31b):

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(t + u) &= QM' = \\ &= KP' + DM', \\ \operatorname{ch}(t + u) &= OQ = OK + P'D.\end{aligned}$$

De la semejanza de los triángulos OMP y $OP'K$ se deduce:

$$\begin{aligned}\frac{KP'}{OP'} &= \frac{PM}{OM}, KP' = \frac{OP'}{OM} PM; \\ \frac{OK}{OP'} &= \frac{OP}{OM}, OK = \frac{OP'}{OM} OP.\end{aligned}$$

De la semejanza de los triángulos OMP y $M'P'D$ tenemos:

$$\begin{aligned}\frac{DM'}{P'M'} &= \frac{OP}{OM}, DM' = \frac{P'M'}{OM} OP; \\ \frac{P'D}{P'M'} &= \frac{PM}{OM}, \\ P'D &= \frac{P'M'}{OM} PM.\end{aligned}$$

Tomando en consideración que

$$\begin{aligned} PM &= \operatorname{sen} \alpha, & OP &= \operatorname{cos} \alpha; \\ \frac{P'M'}{OM} &= \operatorname{sen} \beta, & \frac{OP'}{OM} &= \operatorname{cos} \beta \end{aligned}$$

tenemos en difinitiva:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(\alpha + \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \operatorname{cos} \beta + \\ &\quad + \operatorname{cos} \alpha \operatorname{sen} \beta, \quad (\text{V}) \\ \operatorname{cos}(\alpha + \beta) &= \operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta - \\ &\quad - \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta. \quad (\text{VI}) \end{aligned}$$

De las fórmulas (V), (VI) y de las (I) y (II) del párrafo anterior se deducen todas las fórmulas restantes de la trigonometría.

Así, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) &= \frac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{\operatorname{cos}(\alpha + \beta)} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta + \operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{cos} \alpha \cdot \operatorname{cos} \beta - \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta}. \end{aligned}$$

Al dividir por $\operatorname{cos} \alpha \operatorname{cos} \beta$ el numerador y denominador de la fracción en el segundo miembro, obtenemos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{VII})$$

Si $\beta = \alpha$, las fórmulas (V), (VI) y (VII) toman la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} 2\alpha &= 2 \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{cos} \alpha, \quad (\text{VIII}) \\ \operatorname{cos} 2\alpha &= \operatorname{cos}^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha, \quad (\text{IX}) \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha} \quad (\text{X}) \end{aligned}$$

Tomando en consideración que

$$\begin{aligned} PM &= \operatorname{sh} t, & OP &= \operatorname{ch} t; \\ \frac{P'M'}{OM} &= \operatorname{sh} u, & \frac{OP'}{OM} &= \operatorname{ch} u \end{aligned}$$

tenemos en difinitiva:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(t + u) &= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} u + \operatorname{ch} t \times \\ &\quad \times \operatorname{sh} u, \quad (\text{V}) \\ \operatorname{ch}(t + u) &= \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} t \times \\ &\quad \times \operatorname{sh} u. \quad (\text{VI}) \end{aligned}$$

De las fórmulas (V), (VI) y de las (I) y (II) del párrafo anterior se pueden obtener todas las fórmulas restantes de la trigonometría hiperbólica. Así, por ejemplo, tenemos:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(t + u) &= \frac{\operatorname{sh}(t + u)}{\operatorname{ch}(t + u)} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} u + \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u}{\operatorname{ch} t \operatorname{ch} u + \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u}. \end{aligned}$$

Al dividir por $\operatorname{ch} t \operatorname{ch} u$ el numerador y denominador de la fracción en el segundo miembro, obtenemos:

$$\operatorname{th}(t + u) = \frac{\operatorname{th} t + \operatorname{th} u}{1 + \operatorname{th} t \operatorname{th} u}. \quad (\text{VII})$$

Si $u = t$, los fórmulas (V), (VI) y (VII) toman la forma:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} 2t &= 2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t, \quad (\text{VIII}) \\ \operatorname{ch} 2t &= \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t, \quad (\text{IX}) \\ \operatorname{th} 2t &= \frac{2 \operatorname{th} t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}. \quad (\text{X}) \end{aligned}$$

De las fórmulas (V), (VI) encontramos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \cos \beta - \\ &\quad - \cos(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta, \\ \cos \alpha &= \cos(\alpha + \beta) \cos \beta + \\ &\quad + \operatorname{sen}(\alpha + \beta) \operatorname{sen} \beta.\end{aligned}$$

Si en las últimas fórmulas sustituimos $(\alpha + \beta)$ por α , y α por $(\alpha - \beta)$, obtendremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(\alpha - \beta) &= \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \beta - \\ &\quad - \cos \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta, \quad (\text{XI}) \\ \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \\ &\quad + \operatorname{sen} \alpha \cdot \operatorname{sen} \beta. \quad (\text{XII})\end{aligned}$$

Al dividir, miembro por miembro, la fórmula (XI) por la (XII), resulta:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}. \quad (\text{XIII})$$

Representamos $\operatorname{sen} \alpha$, $\cos \alpha$ y $\operatorname{tg} \alpha$ por la tangente de medioángulo.

De las fórmulas (VIII) — (X) y (III) se deduce:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \alpha &= 2 \operatorname{sen} \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \frac{\operatorname{sen} \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}} \cos \frac{\alpha}{2} = \\ &= 2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{\sec^2 \frac{\alpha}{2}} = \\ &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{XIV})\end{aligned}$$

De las fórmulas (V), (VI), encontramos que

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} t &= \operatorname{sh}(t + u) \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{ch}(t + u) \operatorname{sh} u, \\ \operatorname{ch} t &= \operatorname{ch}(t + u) \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{sh}(t + u) \operatorname{sh} u.\end{aligned}$$

Si en las últimas fórmulas sustituimos $(t + u)$ por t , y t , por $(t - u)$, obtendremos:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh}(t - u) &= \operatorname{sh} t \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{ch} t \operatorname{sh} u, \quad (\text{XI}) \\ \operatorname{ch}(t - u) &= \operatorname{ch} t \operatorname{ch} u - \\ &\quad - \operatorname{sh} t \operatorname{sh} u. \quad (\text{XII})\end{aligned}$$

Al dividir, miembro por miembro, la fórmula (XI) por la (XII), resulta:

$$\operatorname{th}(t - u) = \frac{\operatorname{th} t - \operatorname{th} u}{1 - \operatorname{th} t \operatorname{th} u}. \quad (\text{XIII})$$

Representamos $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$ y $\operatorname{th} t$ por la tangente (hiperbólica) de medioángulo.

De las fórmulas (VIII) — (X) y (III) se deduce:

$$\begin{aligned}\operatorname{sh} t &= 2 \operatorname{sh} \frac{t}{2} \operatorname{ch} \frac{t}{2} = \\ &= 2 \frac{\operatorname{sh} \frac{t}{2}}{\operatorname{ch} \frac{t}{2}} \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} = 2 \operatorname{th} \frac{t}{2} \times \\ &\quad \times \frac{1}{1/\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}, \quad (\text{XIV})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \cos \alpha &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2} = \\
 &= \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{\sec^2 \frac{\alpha}{2}} \left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} \right) = \\
 &= \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{XV})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \operatorname{ch} t &= \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} + \operatorname{sh}^2 \frac{t}{2} = \\
 &= \operatorname{ch}^2 \frac{t}{2} \left(1 + \frac{\operatorname{sh}^2 \frac{t}{2}}{\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} \right) = \\
 &= \frac{1}{1/\operatorname{ch}^2 \frac{t}{2}} \left(1 + \operatorname{th}^2 \frac{t}{2} \right) = \\
 &= \frac{1 + \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}} \quad (\text{XV})
 \end{aligned}$$

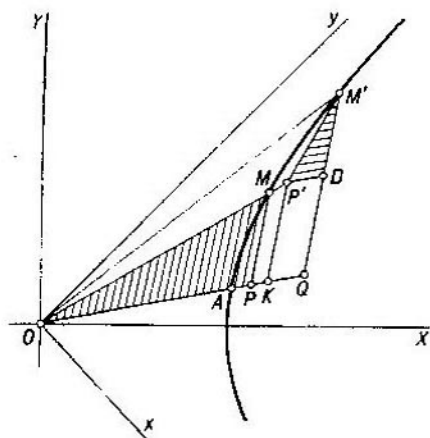


FIG. 32

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad (\text{XVI})$$

$$\operatorname{th} t = \frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 + \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}}. \quad (\text{XVI})$$

Observemos que al deducir las fórmulas de adición para funciones hiperbólicas no tuvimos la necesidad de medir el primer ángulo t a partir del eje de simetría OA de la hipérbola. De una manera, casi igual a la

expuesta arriba, podemos deducir las fórmulas V y VI para el caso en que el diámetro OA ocupa una posición arbitraria (fig. 32):

— los ángulos hiperbólicos AOM y MOM' son iguales a t y u , respectivamente;

— MP y $M'Q$ son conjugadas con el eje OA ;

— $M'P'$ es conjugada con la OM ,

y, por consiguiente,

$$\operatorname{sh} t = \frac{PM}{OA}; \quad \operatorname{ch} t = \frac{OP}{OA};$$

$$\operatorname{sh} u = \frac{P'M'}{OM}; \quad \operatorname{ch} u = \frac{OP'}{OM};$$

$$\operatorname{sh}(t+u) = \frac{QM'}{OA};$$

$$\operatorname{ch}(t+u) = \frac{OQ}{OA},$$

de lo cual se deducen las fórmulas V y VI.

CAPÍTULO III

FUNCIONES HIPERBÓLICAS Y LOGARITMOS

§ 1. Teoría geométrica de logaritmos

Examinemos la hipérbola $xy=1$ (fig. 33). Tomemos en esta curva dos puntos arbitrarios M y N y bajemos las perpendiculares MP y NQ al eje x . Consideremos un trapecio curvilíneo $PQNM$ ¹⁾. El área S_{PQNM} de este trapecio depende

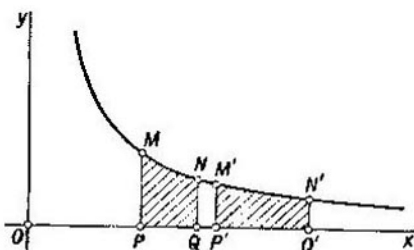


FIG. 33

de las abscisas $OP=x_1$ y $OQ=x_2$ de los puntos M y N ($x_2 > x_1$). Aclaremos ¿cómo depende S_{PQNM} de las abscisas x_1 y x_2 , es decir, cómo calcular esta área, conociendo x_1 y x_2 ?

Ante todo demos que *el área S_{PQNM} depende sólo de la relación $\frac{x_2}{x_1}$* . En otras palabras, señalemos que si dos trapecios curvilíneos, $PQNM$ ($OP=x_1$, $OQ=x_2$) y $P'Q'N'M'$ ($OP'=x'_1$, $OQ'=x'_2$), son tales que se verifica la correlación

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x'_2}{x'_1},$$

entonces, las áreas de estos trapecios son iguales (fig. 33). Realicemos el giro hiperbólico que traslada MP a $M'P'$. En

¹⁾ Recibe el nombre de trapecio curvilíneo una figura limitada por dos ordenadas (abscisas), segmento del eje de abscisas (ordenadas), comprendido entre las ordenadas (abscisas) mencionadas, y por el arco de una curva.

virtud de la propiedad d), § 2, capítulo I, el punto Q se transformará en punto \bar{Q} tal que será válida la relación $\frac{O\bar{Q}}{OP'} = \frac{OQ}{OP}$, es decir, el punto Q pasa al punto Q' (dado que $\frac{x_2'}{x_1'} = \frac{x_2}{x_1}$).

Esto quiere decir que NQ se transformará en $N'Q'$, mientras que el trapecio curvilíneo $PQNM$ se convertirá en trapecio $P'Q'N'M'$. Por consiguiente, según la propiedad e), § 2, capítulo I, $S_{PQNM} = S_{P'Q'N'M'}$.

Así pues, vemos que el área S_{PQNM} depende sólo de la relación $\frac{x_2}{x_1} = z$, es decir es una *función* de z . Designemos esta función por $S(z)$:

$$S_{PQNM} = S\left(\frac{x_2}{x_1}\right) = S(z).$$

Es evidente que $S(z)$ es el área del trapecio limitado por la hipérbola, eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=z$ (puesto que $\frac{z}{1} = z$).

La función $S(z)$ está explícita para cada z mayor que 1. Del sentido geométrico no se proviene que es la función *creciente* (si $z_1 > z_2$, entonces $S(z_1) > S(z_2)$) y *continua* (a los valores próximos de z les corresponden valores próximos en magnitud de la función $S(z)$). Es natural que $S(1) = 0$ (el trapecio se degenera en segmento). Para los valores de z suficientemente grandes la expresión $S(z)$ puede hacerse tan grande como se desee (lo que se demuestra por el procedimiento igual al ya utilizado para demostrar que el ángulo hipérbólico puede ser tan grande como se quiera; véase la pág. 34). De aquí se deduce que existe un número $z > 1$ tal que $S(z) = 1$. Este número en adelante juega un papel importante; designémoslo por e . De este modo, $S(e) = 1$ (fig. 34).

Deduzcamos, ahora, una fórmula para la función $S(z)$. Ante todo demostraremos que para dos números z_1 y z_2 cualesquiera, mayores que 1, se verifica la ecuación:

$$S(z_1) + S(z_2) = S(z_1 z_2)$$

(si, por ejemplo, $z_1 = 1$, esta relación se pone evidente, dado que $S(1) = 0$).

En efecto, $S(z_1)$ es el área del trapecio curvilíneo KP_1M_1A en el que $OK=1$, $OP_1=z_1$ (fig. 35); $S(z_2)$ es el área del trapecio curvilíneo KP_2M_2A en el cual $OP_2=z_2$, es decir, el área equivalente del trapecio curvilíneo P_1QNM_1 , donde $OQ=z_1z_2$ (dado que $\frac{z_1z_2}{z_1} = z_2$). De aquí inmediatamente proviene que

$$S(z_1) + S(z_2) = S_{KP_1M_1A} + S_{P_1QNM_1} = S_{KQNA} = S(z_1z_2),$$

o que se trataba de demostrar.

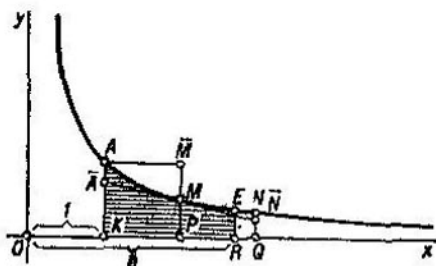


FIG. 34

Haciendo uso de la relación obtenida, se puede demostrar que para cualquier número α positivo se verifica la igualdad

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Examinemos unos cuantos casos posibles.

Si $\alpha = n$ y n es un número entero, entonces tenemos:

$$\begin{aligned} S(z^n) &= S(z \cdot z^{n-1}) = S(z) + S(z^{n-1}) = \\ &= S(z) + S(z \cdot z^{n-2}) = 2S(z) + S(z^{n-2}) = 2S(z) + \\ &\quad + S(z \cdot z^{n-3}) = 3S(z) + S(z^{n-3}) = \dots = (n-2) \times \\ &\quad \times S(z) + S(z^2) = (n-2)S(z) + S(z \cdot z) = nS(z). \end{aligned}$$

Si $\alpha = \frac{1}{m}$, donde m es un número entero, entonces, según lo demostrado, tenemos:

$$S(z) = S\left[\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^m\right] = mS\left(z^{\frac{1}{m}}\right) \text{ de donde: } S\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = \frac{1}{m}S(z).$$

Si $\alpha = \frac{m}{n}$ es racional, según lo demostrado, tenemos:

$$S\left(z^{\frac{n}{m}}\right) = S\left[\left(z^{\frac{1}{m}}\right)^n\right] = nS\left(z^{\frac{1}{m}}\right) = n \cdot \frac{1}{m} S(z) = \frac{n}{m} S(z).$$

En fin, si α es irracional, entonces z^α se determina como límite de los números $z^{\frac{n_1}{m_1}}$, $z^{\frac{n_2}{m_2}}$, ..., $z^{\frac{n_k}{m_k}}$..., en que las fracciones racionales $\frac{n_1}{m_1}$, $\frac{n_2}{m_2}$, ..., $\frac{n_k}{m_k}$ tienden al número α .

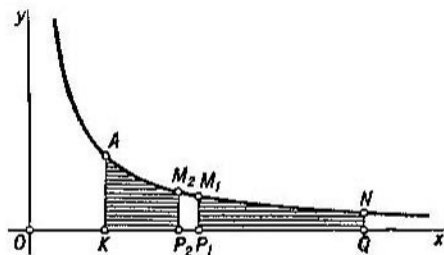


FIG. 36

Dado que, según lo demostrado,

$$S\left(z^{\frac{n_1}{m_1}}\right) = \frac{n_1}{m_1} S(z), \quad S\left(z^{\frac{n_2}{m_2}}\right) = \frac{n_2}{m_2} S(z),$$

$$\dots, \quad S\left(z^{\frac{n_k}{m_k}}\right) = \frac{n_k}{m_k} S(z), \quad \dots$$

en el límite obtenemos ¹⁾

$$S(z^\alpha) = \alpha S(z).$$

Supongamos, ahora, que z es un número arbitrario, mayor que 1. Es evidente que $z = e^{\log_e z}$, donde $\log_e z$ es un logaritmo del número z de base e . Como $e > 1$ (véase la pág. 47) y

¹⁾ Recordemos que la función $S(z)$ es continua.

$\log_e z > 0$ (dado que $z > 1$), resulta:

$$S(z) = S(e^{\log_e z}) = \log_e z \cdot S(e) = \log_e z$$

[$S(e) = 1$, según la definición del número e].

En definitiva tenemos:

$$S(z) = \log_e z.$$

Esta es precisamente la fórmula que queríamos obtener. De la fórmula se deduce que el área del trapecio curvilíneo $PQNM$ limitado por la hipérbola $y = \frac{1}{x}$, eje de abscisas y las rectas $x = x_1$ y $x = x_2$, ($x_2 > x_1$) es igual a $\log_e \frac{x_2}{x_1}$.

Así pues de las consideraciones geométricas relacionadas con las áreas, hemos llegado a los logaritmos. Observemos que la base de logaritmos no es arbitraria (tal como ocurre en la aplicación ordinaria de los logaritmos) sino que es un cierto número determinado e . A esta circunstancia se le debe el hecho de que Neper y Bourgui, inventores de la teoría de logaritmos, trabajando independientemente, llegaron a los logaritmos de una misma base e (y no de base decimal 10 que, al parecer, habría sido más fácil).

La misma definición «geométrica» de logaritmos tiene un gran sentido por la razón de que los logaritmos de base e aparecen, con frecuencia, en los problemas matemáticos y físicos que, a primera vista, no tienen nada que ver con las funciones logarítmicas ¹⁾.

Evaluemos el número e . El área $S(2)$ del trapecio curvilíneo $KPMA$ ($OK=1$, $OP=2$) es menor que el área del rectángulo $KPMA$, la cual es igual al producto $KA \cdot KP = 1 \times 1 = 1$ (véase la fig. 34). Por tanto, $S(2) < 1$. Por otra parte, el área $S(3)$ del trapecio curvilíneo $KQNA$ ($OQ=3$) es mayor que el área del trapecio $KQNA$ (AN es tangente a la hipérbola en el punto M), igual a $PM \cdot KQ = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$. De este modo, $S(3) > 1$. De las desigualdades $S(2) < 1 < S(3)$ se infiere ²⁾ que

$$2 < e < 3.$$

¹⁾ A la historia de los logaritmos es dedicado un libro popular de I. B. Abelson «Nacimiento de los logaritmos», Gostejizdat, M.—L., 1948. Véase también el folleto de A. I. Markushévich «Áreas y logaritmos», Gostejizdat, M.—L., 1952, (Lecciones populares de matemáticas).

²⁾ $S(z)$ es una función creciente.

Estas últimas desigualdades permiten evaluar e con cualquier grado de exactitud: basta poner en ellas n lo suficientemente grande. Así por ejemplo, haciendo $n=100$, obtenemos

$$2,704 < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} < e < \left(1 + \frac{1}{100}\right)^{101} < 2,732$$

de donde

$$e \approx 2,7.$$

Tomando en consideración la desigualdad

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

y de que para $n \rightarrow \infty$, la relación

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \frac{1}{n}$$

tiende a la unidad, tenemos:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (*)$$

Esta fórmula se toma, con frecuencia, por la definición del número e .

Observemos, además, que la fórmula (*) puede ser generalizada de la manera siguiente:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a. \quad (**)$$

La demostración de la fórmula (**) casi no se diferencia de la deducción de la fórmula (*). Supongamos que en la figura 36 $OP = 1 + \frac{a}{n}$

donde a es positivo. En este caso tenemos $S_{KPM\bar{A}} = \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right)$,

$$S_{KPM\bar{A}} = KA \cdot KP = 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n}$$

$$S_{KPM\bar{A}} = KP \cdot PM = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{a}{n}} = \frac{a}{n} \cdot \frac{n}{n+a} = \frac{a}{n+a},$$

de donde

$$\frac{a}{n} > \log_e \left(1 + \frac{a}{n}\right) > \frac{a}{n+a}.$$

Razonando del modo igual que arriba, obtenemos:

$$a > n \log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right) = \log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n,$$

$$a < (n+a) \log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right) = \log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a},$$

es decir,

$$\log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n < a < \log_e \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a},$$

o bien,

$$\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n < e^a < \left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a}$$

Tomando en consideración las últimas desigualdades y que la relación

$$\left(1 + \frac{a}{n} \right)^{n+a} : \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = \left(1 + \frac{a}{n} \right)^a \text{ tiende a la unidad para } n \rightarrow \infty,$$

deducimos la fórmula (**).

De un modo plenamente igual se puede demostrar que la fórmula (**) es válida también para a negativos.

Supongamos que en la figura 36 el segmento $OQ = 1 - \frac{a}{n}$, donde $a > 0$.

$$\text{En este caso el área } S_{QKAN} = \log_e \frac{OK}{OQ} = \log_e \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = -\log_e \left(1 - \frac{a}{n} \right)$$

se encuentra comprendida entre

$$S_{QKAN} = 1 \cdot \frac{a}{n} = \frac{a}{n} \quad \text{y} \quad S_{QKAN} = \frac{a}{n} \cdot \frac{1}{1 - \frac{a}{n}} = \frac{a}{n-a}.$$

Deducimos, como antes, que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{n} \right)^n = e^{-a}.$$

En conclusión determinemos el área del trapecio $FQNM$, limitada por una hipérbola $xy=a$, eje de abscisas y las rectas $x=x_1$, $x=x_2$ (fig. 37). Realicemos la contracción al origen de coordenadas con el factor de contracción $k = \frac{1}{\sqrt{a}}$ (véase la pág. 7). Evidentemente, la hipérbola $xy=a$ se transformará en la hipérbola $xy=1$ (el punto (x, y) pasará al punto $\left(\frac{a}{\sqrt{a}}x, \frac{1}{\sqrt{a}}y \right)$), mientras que la curva $xy=a$ se convertirá en la curva

$xy=1$) y el trapecio curvilíneo $PQNM$, en el trapecio $P'Q'N'M'$, también curvilíneo.

Como ya sabemos,

$$S_{P'Q'N'M'} = \log_e \left(\frac{OQ'}{OP'} \right);$$

por otra parte, en virtud de las propiedades de contracción

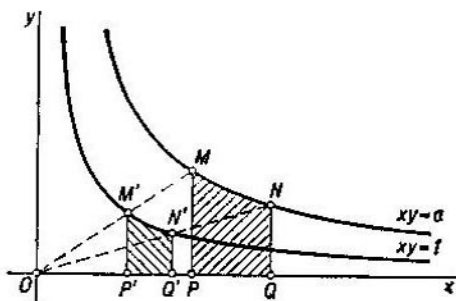


FIG. 37

al punto (véanse las págs. 7—9) tenemos:

$$S_{P'Q'N'M'} = k^2 S_{PQNM} = \frac{1}{a} S_{PQNM}, \quad \frac{OQ'}{OP'} = \frac{OQ}{OP} = \frac{x_2}{x_1}.$$

De aquí obtenemos:

$$S_{PQNM} = a \log_e \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

En un caso particular, si $a = \lg e \approx 0,43$, es decir, un logaritmo decimal del número e , entonces resulta:

$$S_{PQNM} = \lg e \cdot \log_e \left(\frac{x_2}{x_1} \right) = \lg \left(\frac{x_2}{x_1} \right).$$

De la igualdad

$$z = e^{\lg e \cdot z} = (10^{\lg e})^{\lg e \cdot z} = 10^{\lg e \cdot \log_e z}$$

y $z = 10^{\lg z}$ se deduce que $\lg z = \lg e \cdot \log_e z$. De este modo, el logaritmo decimal del número z se puede definirlo como área del trapecio curvilíneo $KPMA$, limitado por la hipérbola $xy = \lg e \approx 0,43$, eje de abscisas y las rectas $x=1$, $x=z$ («definición geométrica de logaritmos decimales»).

§ 2. Expresiones analíticas para funciones hiperbólicas

Volvamos a examinar la hipérbola unidad $X^2 - Y^2 = 1$. Sea M un punto arbitrario de esta hipérbola; el ángulo (hiperbólico) AOM es igual a t (fig. 38). Es evidente que las coordenadas de los puntos M y A en el sistema de coordenadas, cuyos ejes coinciden con los ejes de la hipérbola son, respectivamente: $OP = \text{ch } t$; $PM = \text{sh } t$ y $OA = 1$; 0 . Las coordenadas de estos mismos puntos en el sistema de coordenadas con los ejes coincidentes con las asíntotas de la hipérbola se determinan según las fórmulas (*), § 1, capítulo II (pág. 31) y son, respectivamente, iguales a

$$OQ = (\text{ch } t - \text{sh } t) \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OR = (\text{ch } t + \text{sh } t) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$OK = (1 - 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$OL = (1 + 0) \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Es fácil ver que las áreas de los trapecios curvilíneos $QKAM$ y $RLAM$ son iguales entre sí y al área del sector hiperbólico OAM . En efecto, según la definición de hipérbola (véase la pág. 17) las áreas de los rectángulos de coordenadas de los puntos M y A son iguales: $S_{OQMR} = S_{OKAL}$. Por consiguiente, $S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{OKAL} + S_{OQMR} = S_{RLAM}$. Por otra parte, $S_{\Delta MOQ} = S_{\Delta AOK}$ (dado que $S_{\Delta MOQ} = \frac{1}{2} S_{OQMR}$, $S_{\Delta AOK} = \frac{1}{2} S_{OKAL}$).

De aquí tenemos:

$$S_{QKAM} = S_{QKAM} - S_{\Delta AOK} + S_{\Delta MOQ} = S_{OAM}.$$

Como, según la definición del ángulo hiperbólico, $S_{OAM} = \frac{1}{2}t$, entonces:

$$S_{QKAM} = S_{RLAM} = \frac{1}{2}t.$$

Ya sabemos que en el sistema de coordenadas de ejes coincidentes con las asíntotas la ecuación de la hipérbola

unidad es $xy = \frac{1}{2}$ (pág. 31). Por eso (véase la parte final del párrafo anterior)

$$\begin{aligned} S_{QKAM} &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{OK}{OQ} \right) = \frac{1}{2} \log_e \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{(\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t) \frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= -\frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t), \end{aligned}$$

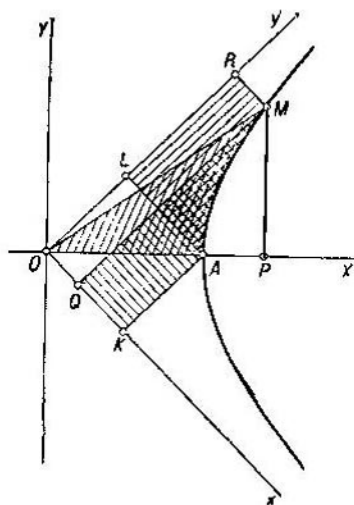


FIG. 38

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} t &= -\frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t), \\ -t &= \log_e (\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t). \end{aligned} \quad (*)$$

Del modo igual tenemos:

$$\begin{aligned} S_{OAM} = S_{RLAM} &= \frac{1}{2} \log_e \left(\frac{OR}{OL} \right) = \frac{1}{2} \log_e \frac{(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \\ &= \frac{1}{2} \log_e (\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t), \end{aligned}$$

de donde

$$t = \log_e(\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t).$$

Por las fórmulas (*) y (**) se relacionan las funciones hiperbólicas y los logaritmos de base e . De estas fórmulas obtenemos:

$$\operatorname{ch} t - \operatorname{sh} t = e^{-t}, \quad \operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t = e^t;$$

por consiguiente,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \quad (1)$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}. \quad (2)$$

Dado que $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$, tenemos:

$$\operatorname{th} t = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}. \quad (3)$$

Estas son las expresiones analíticas de las funciones hiperbólicas. Como regla se usan en el curso de la escuela superior para determinar las funciones hiperbólicas.

Así, por ejemplo:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = 1, \end{aligned} \quad (I)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t &= \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 + \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2 = \\ &= \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} + \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = \\ &= \frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch} 2t, \end{aligned} \quad (IX)$$

$$2 \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t = 2 \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \frac{(e^t - e^{-t})(e^t + e^{-t})}{2} =$$

$$= \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2} = \operatorname{sh} 2t, \quad (\text{VIII})$$

$$\frac{2 \operatorname{th} \frac{t}{2}}{1 - \operatorname{th}^2 \frac{t}{2}} = \frac{2 \frac{\frac{t}{2} e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}}}{1 - \left[\frac{\frac{t}{2} e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}}}{e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}}} \right]^2} =$$

$$= \frac{2 \left(\frac{t}{2} e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \right) \cdot \left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \right)^2}{\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \right) \left[\left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 - \left(e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \right)^2 \right]} =$$

$$= \frac{2 \left(\frac{t}{2} e^{\frac{t}{2}} - e^{-\frac{t}{2}} \right) \left(e^{\frac{t}{2}} + e^{-\frac{t}{2}} \right)}{4} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \operatorname{sh} t. \quad (\text{XIV})$$

De un modo análogo se pueden obtener otras fórmulas.

Con el fin de obtener de las fórmulas (1)–(2) algunos corolarios necesarios, transformemos la fórmula (***) del párrafo anterior (pág. 53):

$$\lim \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = e^a.$$

Según la fórmula del binomio de Newton tenemos:

$$\left(1 + \frac{a}{n} \right)^n = 1 + \frac{n}{1} \frac{a}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{a^2}{n^2} +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{a^3}{n^3} + \dots + \frac{n(n-1)\dots[n-(n-1)]}{n!} \times$$

$$\times \frac{a^n}{n^n} = 1 + \frac{a}{1} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \frac{a^2}{2!} + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \times$$

$$\times \frac{a^3}{3!} + \dots + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) \frac{a^n}{n!} =$$

$$= 1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n,$$

donde:

$$u_k = \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n} \right) \frac{a^k}{k!} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

En la suma $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ omitimos todos los términos u_{k+1} , u_{k+2} , \dots , u_n después de cierto término u_k .

El error cometido será igual a

$$u_{k+1} + u_{k+2} + u_{k+3} + \dots + u_n.$$

Pero de la definición de valores u_n proviene:

$$|u_k| \leq \frac{|a^k|}{k!},$$

$$|u_{k+1}| = \left(1 - \frac{k}{n}\right) \frac{|a|}{k+1} |u_k| < \frac{|a|}{k+1} |u_k|,$$

$$|u_{k+2}| = \left(1 - \frac{k+1}{n}\right) \frac{|a|}{k+2} |u_{k+1}| < \frac{|a|}{(k+1)} |u_{k+1}| < \frac{|a|^2}{(k+1)^2} |u_k|,$$

$$|u_{k+3}| = \left(1 - \frac{k+2}{n}\right) \frac{|a|}{k+3} |u_{k+2}| < \frac{|a|}{k+1} |u_{k+2}| < \frac{|a|^3}{(k+1)^3} |u_k|,$$

.....

(con rayas verticales se designan valores absolutos de un número).

Por eso, el valor absoluto de la suma $u_{k+1} + u_{k+2} + \dots + u_n$ no es superior a

$$\begin{aligned} |u_k| \frac{|a|}{k+1} + |u_k| \frac{|a|^2}{(k+1)^2} + |u_k| \frac{|a|^3}{(k+1)^3} + \dots \\ \dots + |u_k| \frac{|a|^{n-k}}{(k+1)^{n-k}} = |u_k| \frac{|a|}{k+1} \frac{|a|^{n-k+1}}{(k+1)^{n-k+1}} \\ \frac{1}{1 - \frac{|a|}{k+1}}. \end{aligned}$$

Supongamos, ahora que $k+1 > |a|$, considerando n lo suficientemente grande para poder elegir k de la manera indicada. En este caso la última expresión es menor que

$$|u_k| \frac{\frac{|a|}{k+1}}{1 - \frac{|a|}{k+1}} = |u_k| \frac{|a|}{k+1-|a|} \leq \frac{|a|^k}{k!} \frac{|a|}{k+1-|a|}$$

(dado que $|u_k| \leq \frac{|a|^k}{k!}$).

Así pues, sustituyendo $(1 + \frac{a}{n})^n$ por la suma $1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k$, cometemos un error cuyo valor absoluto no es superior a $\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}$, es decir, para cualquier n superior a k

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - (1 + u_1 + u_2 + \dots + u_k) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}.$$

En la última expresión pasemos al límite $n \rightarrow \infty$. Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a$$

(fórmula (**), pág. 53) y

$$u_1 = \frac{a}{1}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_2 = \frac{a^2}{2!}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} u_3 = \frac{a^3}{3!}, \quad \dots$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_k = \frac{a^k}{k!}$$

(véase la fórmula que determina el valor u_k), resulta entonces:

$$\left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}\right) \right| < \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)}$$

En esta expresión pasemos al límite $k \rightarrow \infty$.

Demostremos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)} = 0$$

Introduzcamos la designación

$$\frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)} = V_k.$$

En este caso

$$V_{k+1} = \frac{|a|^{k+1+1}}{(k+1)!(k+1+1-|a|)} = \frac{|a|^{k+1}}{k!(k+1-|a|)} \times$$

$$\times \frac{k+1-|a|}{k+1+1-|a|} \frac{|a|^1}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)} < V_k \frac{|a|^l}{(k+1)^l}$$

(el factor $\frac{k+1-|a|}{k+1+1-|a|}$ es menor que la unidad, lo hemos prescindido; en el factor $\frac{|a|^l}{(k+1)(k+2)\dots(k+l)}$ hemos sustituido por $(k+1)$ todos los factores del denominador). Antes nos hemos convenido en que $k+1 > |a|$. Por consiguiente, la relación $\frac{|a|}{k+1} = \alpha$ es menor que la unidad.

Dado que $V_{k+l} < V_k \alpha^l$, $\alpha < 1$, resulta: $V_{k+l} \rightarrow 0$ para $l \rightarrow \infty$, ó

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V_k = 0.$$

En definitiva, la fórmula

$$\left| \left(1 + \frac{a}{n} \right)^n - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) \right| < V_k$$

nos da:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| e^a - \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right) \right| = 0$$

o bien:

$$e^a = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!} \right).$$

En conclusión, e^a es igual a la suma de una serie infinita

$$e^a = 1 + \frac{a}{1} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots \quad (***)$$

Esta es la fórmula que queríamos obtener.

Poniendo en la fórmula (***) $a=t$ y $a=-t$, tenemos:

$$e^t = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \dots,$$

$$e^{-t} = 1 - \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} - \dots$$

Ahora, tomando en cuenta las fórmulas (1) y (2) obtenemos:

$$\operatorname{ch} t = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \frac{t^6}{6!} + \dots, \quad (4)$$

$$\operatorname{sh} t = \frac{t}{1} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \quad (5)$$

Las fórmulas (4) y (5) permiten calcular, con cualquier grado de exactitud, los valores de $\operatorname{sh} t$ y $\operatorname{ch} t$ (y, por tanto, $\operatorname{th} t = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t}$) para cada valor determinado de t . Para ello es necesario que el número de términos de las series infinitas correspondientes sea suficientemente grande. Las tablas de funciones hiperbólicas se componen precisamente con la ayuda de estas fórmulas.

§ 3. Fórmulas de Euler

En el curso de álgebra destinado para la escuela secundaria se define la potencia real de un número; las expresiones tipo 2^i ó e^{2-4^i} no están definidas hasta ahora y, por eso, deberían considerarse privadas de

sentido. Definamos, ahora, una potencia *compleja* a del número e , sirviéndonos de la fórmula (**), pág. 53:

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n \quad (**)$$

Para calcular este límite hagamos uso de la fórmula de Moivre:

$$(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n = \cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi.$$

Si $a = \beta + i\alpha$, β y α son reales, entonces:

$$1 + \frac{a}{n} = \left(1 + \frac{\beta}{n}\right) + i \frac{\alpha}{n} = r_n (\cos \varphi_n + i \operatorname{sen} \varphi_n),$$

donde

$$r_n = \sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha}{n}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}}$$

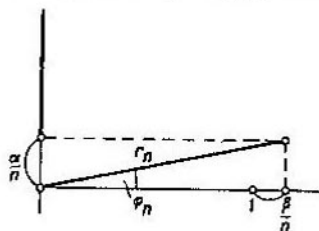


FIG. 39

fig. 39). De aquí obtenemos:

$$\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = r_n^n (\cos n\varphi_n + i \operatorname{sen} n\varphi_n)$$

y, por consiguiente,

$$e^a = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = R (\cos \Phi + i \operatorname{sen} \Phi),$$

donde

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n, \quad \Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n).$$

Determinemos R и Φ . Tenemos que

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{n^2}} \right)^n.$$

Comparemos esta expresión con

$$\begin{aligned} e^{\beta} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\beta}{n} \right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\left(1 + \frac{\beta}{n} \right)^2} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n \end{aligned}$$

(véase la fórmula (**)). Luego tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{R}{e^{\beta}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{n^2}} \right)^n}{\left(\sqrt{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}} \right)^n} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2 + \alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n \end{aligned}$$

Cuando $\beta \geq 0$ y n es suficientemente grande, tenemos:

$$1 \leq \left(1 + \frac{\beta}{n} \right)^2 < \left(1 + \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{9}{4},$$

y, por tanto,

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \right)^n &\geq \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right)^n = \\ &= \left(\sqrt{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{\left(1 + \frac{\beta}{n} \right)^2}} \right)^n > \left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}} \right)^n, \quad (a) \end{aligned}$$

Nos queda sólo por apreciar las expresiones

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{\alpha^2}{n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{\frac{n}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2}} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2} \right)^{n^2} \right]^{\frac{1}{2n}}$$

En virtud de la fórmula (***) para grandes n tenemos:

$$\left(1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \right)^{n^2} \approx e^{\alpha^2} \quad \text{y} \quad \left(1 + \frac{4\alpha^2}{9n^2} \right)^{n^2} \approx e^{\frac{4\alpha^2}{9}}$$

Dado que¹⁾

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (e^{\alpha^2})^{\frac{1}{2n}} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{\frac{4\alpha^2}{9}} \right)^{\frac{1}{2n}} = 1$$

resulta, pues, que los dos límites que nos interesan deben ser iguales a la unidad.

· Cuando $\beta < 0$ y n es suficientemente grande, tenemos:

$$1 \geq \left(1 + \frac{\beta}{n} \right)^2 > \left(1 - \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

y en la fórmula, análoga a la (a), los signos de desigualdades se deben cambiar por los contrarios.

La demostración posterior queda la misma que antes.

De este modo, para β cualquiera

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n]{1 + \frac{\frac{\alpha^2}{n^2}}{1 + \frac{2\beta}{n} + \frac{\beta^2}{n^2}}} \right) = 1$$

¹⁾ Esto se deduce, por ejemplo, de que para cada número a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\log a^{\frac{1}{2n}} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log a}{2n} \rightarrow 0;$$

por consiguiente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{2n}} = 1.$$

y, por consiguiente,

$$\frac{R}{e^\beta} = 1, \quad R = e^\beta.$$

Procedamos ahora con la definición de Φ . Tenemos:

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} (n\varphi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot n \operatorname{tg} \varphi_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} \right).$$

Pero, $\varphi_n \rightarrow 0$, cuando $n \rightarrow \infty$ (dado que, en este caso

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{\frac{\alpha}{n}}{1 + \frac{\beta}{n}} \rightarrow 0).$$

Por esto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\operatorname{tg} \varphi} = \lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} \cdot \cos \varphi = 1,$$

puesto que

$$\lim_{\varphi \rightarrow 0} \frac{\varphi}{\sin \varphi} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{\varphi \rightarrow 0} \cos \varphi = 1.$$

Y como, además,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} = \alpha,$$

entonces, resulta:

$$\Phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\varphi_n}{\operatorname{tg} \varphi_n} \cdot \frac{\alpha}{1 + \frac{\beta}{n}} \right) = \alpha.$$

Así pues, $R = e^\beta$, $\Phi = \alpha$, y, por consiguiente,

$$e^{\beta + i\alpha} = e^\beta (\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

Ahora, llegamos a la convención que nuestra definición de potencia compleja (e^a) del número e ha sido bastante acertada. En efecto, esta definición satisface a los dos requisitos que de antemano pudieron ser levantados:

1°. Con a real esta definición coincide con la común (dado que para a reales la fórmula (**)) fue ya demostrada más arriba);

2°. De esta manera ciertas potencias complejas satisfacen a la regla principal de operaciones con potencias del número

$$e^{a_1} \cdot e^{a_2} = e^{a_1 + a_2}.$$

Efectivamente, si $\alpha_1 = \beta_1 + i\alpha_1$, $\alpha_2 = \beta_2 + i\alpha_2$, entonces:

$$\begin{aligned} e^{\alpha_1} \cdot e^{\alpha_2} &= e^{\beta_1 + i\alpha_1} \cdot e^{\beta_2 + i\alpha_2} = e^{\beta_1} (\cos \alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) e^{\beta_2} (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2) = \\ &= e^{\beta_1} e^{\beta_2} (\cos (\alpha_1 + i \operatorname{sen} \alpha_1) (\cos \alpha_2 + i \operatorname{sen} \alpha_2)) = \\ &= e^{\beta_1 + \beta_2} [\cos (\alpha_1 + \alpha_2) + i \operatorname{sen} (\alpha_1 + \alpha_2)] = \\ &= e^{\beta_1 + \beta_2 + i(\alpha_1 + \alpha_2)} = e^{\alpha_1 + \alpha_2} \end{aligned}$$

En la expresión obtenida para e^a pongamos los valores $a = i\alpha$ y $a = -i\alpha$. Obtendremos:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= \cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha, \\ e^{-i\alpha} &= \cos \alpha - i \operatorname{sen} \alpha. \end{aligned}$$

De estas dos fórmulas inmediatamente se deduce que

$$\cos \alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \quad (1')$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i} \quad (2')$$

y, por consiguiente (como $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$):

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{i(e^{i\alpha} + e^{-i\alpha})} \quad (3')$$

Estas son las *fórmulas de Euler*¹⁾ que expresan la relación entre las funciones trigonométricas y la función exponencial.

De las fórmulas (1) y (2) se pueden sacar ulteriores corolarios. En efecto, sustituylamos en la fórmula (***) (pág. 60) los valores $a = i\alpha$ y $a = -i\alpha$. Obtendremos:

$$\begin{aligned} e^{i\alpha} &= 1 + \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} - \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} + \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} - \dots, \\ e^{-i\alpha} &= 1 - \frac{i\alpha}{1} - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{i\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{i\alpha^5}{5!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots \end{aligned}$$

¹⁾ Leonardo Euler (1707—1783), destacado matemático del siglo XVIII, miembro de la Academia de ciencias rusa. Vivía y trabajaba en Petersburgo.

²⁾ La deducción de la fórmula (***) partiendo de la (***) (véanse las páginas 59—60), conserva plenamente su validez para valores complejos de a (tomando sólo en cuenta que las rayas verticales significan magnitud absoluta o módulo del número complejo, es decir, raíz cuadrada de la suma de cuadrados de la parte real del número y el factor de su parte imaginaria).

Tomando en consideración (1') y (2'), obtenemos:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2!} + \frac{\alpha^4}{4!} - \frac{\alpha^6}{6!} + \dots, \quad (4')$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{\alpha}{1} - \frac{\alpha^3}{3!} + \frac{\alpha^5}{5!} - \dots \quad (5')$$

Las fórmulas (4')—(5') permiten calcular con cualquier grado de exactitud los valores de $\operatorname{sen} \alpha$ y $\cos \alpha$ (y, por tanto, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha}$) para cualquier α determinado. Para ello basta tomar el número suficiente de términos de las correspondientes series infinitas. En el caso particular, estas fórmulas se usan para hacer las llamadas tablas de funciones trigonométricas.

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción.

Dirijan sus opiniones a Editorial «Mir»,
1 Rízhski per., 2, 129820, Moscú, I-110, GSP, URSS.

Ya está en la venta las siguientes obras de esta serie publicadas por MIR:

Áreas y logaritmos
de Markushévich A.

Este trabajo del vice-presidente de la Academia de Ciencias Pedagógicas de la URSS, doctor en ciencias físico-matemáticas, catedrático Aleksey Markushévich, fue enunciado primeramente en la Universidad de Moscú ante los alumnos de grados superiores de las escuelas secundarias.

En la obra se expone la teoría geométrica de los logaritmos en la que los últimos aparecen como ciertas áreas. Las propiedades de logaritmos se obtienen del análisis de las propiedades respectivas de las áreas. Junto con esto el libro proporciona las más simples nociones y propiedades del cálculo integral.

No es forzosamente necesario que el lector sepa qué es un logaritmo. No obstante, el lector debe tener conocimientos primarios sobre las funciones y su representación gráfica, progresión geométrica y un límite.

En el caso de que el lector desee obtener la mayor información sobre los logaritmos podría referirse a la obra "Series" del mismo autor.

El libro será útil como libro de lectura para escolares, y aquellos lectores que estén interesados por los problemas que en el mismo se exponen.

**Análisis matemático en el intervalo
de las funciones racionales**

de Shilov G.

Este libro es una introducción al curso general "Análisis matemático" escrito por el eminente matemático G. Shilov.

Las nociones de derivada e integral, siendo fundamentales para el análisis matemático están muy lejos de ser elementales; en el curso sistemático les preceden la teoría de los límites, la teoría de los números reales y la teoría de las funciones continuas. Tal preparación preliminar es necesaria para formular las nociones de la derivada e integral en una forma bastante generalizada, aplicándolos a un círculo de problemas lo más amplio posible. Sin embargo, si nos limitamos a una clase relativamente estricta de las funciones racionales y utilizamos la lengua evidente de las gráficas, se puede contar de una manera substancial y estricta sobre la derivada e integral casi al mismo tiempo.

Esto se hace en el libro de texto destinado para los escolares y estudiantes que no aspiran a especializarse en las matemáticas.

Método de la inducción matemática

de Sominiski I.

Este libro trata acerca del método de la inducción matemática que es aplicado ampliamente en distintas ramas de las matemáticas, desde el curso de la matemática elemental hasta las más complejas esferas de las investigaciones matemáticas. Es imposible estudiar las matemáticas sin tener previo conocimiento acerca de este método.

Al mismo tiempo, la idea de la inducción matemática tiene gran importancia para la instrucción general; debido a eso presenta interés para la masa de lectores que no tienen suficiente preparación en la rama de matemáticas.

El libro está dedicado a los escolares de los últimos años de la secundaria. Se recomienda también a los estudiantes menores de los centros de enseñanza superior.

La máquina de Post

V. Uspenski

El libro narra acerca de una máquina calculadora abstracta (es decir, inexistente en el arsenal de la técnica actual), la llamada máquina de Post. Los cálculos en esta máquina reflejan muchos rasgos esenciales de cómputo en las calculadoras electrónicas reales. La enseñanza de los principios de programación en la máquina de Post y la explicación de las posibilidades de esta máquina, se realizan en ejemplos elementales que, pese a la extraordinaria sencillez, resultan bastante extensos.

No es necesario que el lector posea conocimientos de matemáticas que rebasen el marco de la escuela primaria. El libro ofrecido, en cierta medida, habrá de contribuir a la introducción de tales conceptos como "algoritmo", "máquina calculadora universal", "programación" en la escuela de enseñanza secundaria, incluso en sus primeros cursos. Hasta los escolares de los primeros grados y los niños en edad preescolar pueden efectuar sin trabajo operaciones en la máquina de Post, según un programa dado. Este folleto se basa en las conferencias dictadas por el autor para los estudiantes de enseñanza media y de la Universidad de Moscú. El folleto está destinado a los estudiantes de enseñanza media y a todos los amantes de las matemáticas.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

Yu. I. Lyúbich, L.A. Shor

Método cinemático en problemas geométricos

N.Ya Vilenkin

Método de aproximaciones sucesivas

V.A. Uspenski

Algunas aplicaciones de la
mecánica a las matemáticas

G.E. Shílov

Gama simple

Cómo construir las gráficas

A.S. Solodóvnikov

Sistemas de desigualdades lineales

Editorial MIR



Moscú