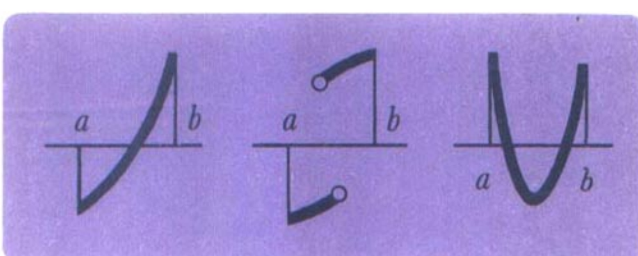
Lecciones populares de matemáticas

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

N. Ya. Vilenkin



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Н. Я. ВИЛЕНКИН

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

N. YA. VILENKIN

MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCU

TRADUCIDO DEL RUSO POR EL INGENIERO
K. MEDKOV

Primera edición 1978
Segunda edición 1984

На испанском языке

Impreso en la URSS

CONTENIDO

PREFACIO A LA SEGUNDA EDICIÓN

En la segunda edición este folleto fue sometido a una modificación. El método de iteraciones está expuesto aquí en la base del concepto de la aplicación contraída lo que hizo posible relatar de ella antes de introducir el concepto de la derivada. Se ha ampliado considerablemente la parte del libro dedicada a la resolución aproximada de los sistemas de ecuaciones. Por fin, todos los problemas van acompañados de las indicaciones sobre la resolución de ellas.

PREFACIO A LA PRIMERA EDICIÓN

El objeto principal de este folleto es exponer varios métodos de la resolución aproximada de las ecuaciones. El valor práctico de estos métodos es indiscutible. No obstante, se les da poca atención, como en las escuelas medias tanto en la escuela superior. Por esta razón ocurre con frecuencia que un graduado de la escuela superior, en la que él cursó las matemáticas, experimenta dificultades encontrándose ante la necesidad de resolver una ecuación transcendente más sencilla. Con la resolución de las ecuaciones tropiezan no sólo los ingenieros, sino también los técnicos, obreros-racionalizadores y los representantes de muchas otras profesiones. El conocer los métodos de la resolución aproximada de las ecuaciones es también útil para los escolares de clases superiores.

Puesto que la mayoría de los métodos de la resolución aproximada de las ecuaciones está ligada con el concepto de la derivada, nos vimos obligados a introducir este concepto. Tomamos por base, para ello, los evidentes razonamientos geométricos. De este modo, para leer la presente obra son suficientes los conocimientos de las matemáticas en los límites del noveno grado de la escuela secundaria.

Para el libro fue utilizado el curso de las conferencias dictadas por el autor ante los alumnos de las clases 9 y 10, que asistían el circulo matemático escolar adjunto a la Universidad Estatal M. V. Lomonosov de Moscú.

El contenido de estas conferencias fue aplicado por S. I. Schwarzburg*), profesor de la escuela secundaria No. 425 de Moscú, para

*) Profesor, doctor en ciencias pedagógicas, miembro correspondiente de la Academia de las ciencias pedagógicas de la URSS.

el trabajo fuera de clase con los alumnos de novena clase. El autor expresa su gratitud a S. I. Schvarzburg por haber elaborado y prestado a la disposición del autor los problemas que se resuelven por el método de iteraciones y que fueron utilizados al escribir este libro.

La profunda gratitud el autor expresa para V. G. Boltyánski cuyas observaciones contribuyeron en un grado considerable a reforzar el carácter práctico de la variante original del manuscrito.

§ 1
INTRODUCCIÓN

Al estudiar las matemáticas en el curso escolar, mucho tiempo se dedica a la resolución de las ecuaciones y de los sistemas de ecuaciones. Primero se abordan las ecuaciones de primer grado y los sistemas de éstas. Luego aparecen las ecuaciones cuadráricas, bicuadráticas e irracionales. Y por fin, un alumno se entera de las ecuaciones exponenciales, logarítmicas y trigonométricas.

Esta atención para las ecuaciones no puede considerarse casual. Se explica por la importancia que tienen las ecuaciones para las aplicaciones prácticas de las matemáticas. Sea cual fuese la aplicación, para obtener una respuesta definitiva, se debe resolver, con mayor frecuencia, las ecuaciones o los sistemas de ecuaciones.

En las clases escolares recurren frecuentemente a las ecuaciones para resolver problemas físicos. Examinemos, por ejemplo, el problema siguiente:

Una piedra se deja caer en un pozo. Hállese la profundidad del pozo, si se conoce que el sonido provocado por la caída de la piedra se ha captado T segundos después de darse la piedra al fondo del pozo.

Si designamos por x la profundidad del pozo, para determinar x obtenemos la ocuación

$$\sqrt{\frac{2x}{g}} + \frac{x}{v} = T,$$

donde v es la velocidad de propagación del sonido en el aire $\left(\sqrt{\frac{2x}{g}}\right.$ es el tiempo que dura la caída, y $L\frac{x}{v}$ es el tiempo que transcurre hasta el momento de captar el sonido$\left.\right)$.

Es una ecuación irracional. Haciendo $\sqrt{x} = y$, reducímosla a la ecuación cuadrática

$$\frac{y^2}{v} + \sqrt{\frac{2}{g}}\, y - T = 0,$$

que se resuelve según la fórmula conocida.

Las ecuaciones también se aplican para resolver problemas geométricos. Por ejemplo, el problema de división del segmento AB de longitud l en la razón media y extrema (es decir, en los segmentos AC y CB tales que $AB : AC = AC : CB$) conduce a la resolución de la ecuación cuadrática

$$x^2 + lx - l^2 = 0,$$

donde con x está designada la longitud del segmento AC.

A una ecuación más compleja se reduce el problema de división del ángulo α en tres partes. Esta ecuación tiene la forma

$$4x^3 - 3x - \cos\alpha = 0,$$

donde $x = \cos\frac{\alpha}{3}$. Las ecuaciones de este tipo, llamadas *cúbicas*, no se estudian en las escuelas, pero en el curso del álgebra superior se demuestra que la fórmula para resolver las ecuaciones cúbicas también existe (véase más abajo la fórmula (3)).

Sin embargo, en la física surgen frecuentemente los problemas que conducen a las ecuaciones más complejas para las cuales no se dan fórmulas de resolución en la escuela média, ni aun en la Universidad. Tomemos, por ejemplo, una barra de hierro (viga, como dicen los técnicos) con extremos empotrados. Sometida a un golpe, la barra empezará a efectuar oscilaciones transversales. Como se demuestra en la física matemática, con el fin de hallar la frecuencia de estas oscilaciones se debe resolver la ecuación

$$e^x + e^{-x} = \frac{2}{\cos x}, \tag{1}$$

donde $e = 2{,}71828\ldots$

Las escuelas no dan ningunas reglas para resolver la ecuación de esta índole. No se debe pensar que esto se explica por la brevedad del programa escolar respecto a las matemáticas. **No existe**, en general, la fórmula para resolver la ecuación (1) en el sentido escolar. Precisemos esta afirmación.

Suele decirse que para cierta ecuación existe la fórmula de resolución, siempre que las raíces de la ecuación puedan ser expresadas en términos de las magnitudes, que figuran en ella, por medio de las operaciones aritméticas, la extracción de raíces o con ayuda de las funciones exponencial, logarítmica, trigonométricas y trigonométricas inversas. En este sentido la ecuación cuadrática $x^2 + px + q = 0$ tiene la fórmula de resolución que tiene por expresión

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}. \tag{2}$$

Existe también la fórmula de resolución para la ecuación cúbica *)

$$x^3 + px + q = 0.$$

Ella tiene la forma

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{3}$$

No obstante, la aplicación práctica de la fórmula (3) está obstaculizada con toda una serie de inconvenientes y requiere el empleo de los números complejos.

Existe también la fórmula para resolver las ecuaciones de cuarto grado, pero ésta es tan compleja que aqui no la vamos a indicar.

Para las ecuaciones de quinto grado y de grados superiores el asunto es peor todavia. Abel **), un matemático noruego, demostró en el año 1826 que para $n \geqslant 5$ no exist ía fórmula que expresara la solución de la ecuación algebraica

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n = 0$$

por medio de las operaciones aritméticas y la extracción de raices.

---

*) A esta fórma se reduce cualquier ecuación cúbica

$$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0,$$

mediante la sustitución $x + \dfrac{a_1}{3a_0} = y$.

**) Sobre la vida y el trabajo creador de Abel véase el libro de O. Ore "Notable matemático Niels Hendrik Abel". Los trabajos de Abel fueron desarrollados por el matemático francés E. Galois. De éste hay un libro "Favorito de los Dioses" escrito por L. Infeld.

Pueden haber fórmulas de resolución[*] sólo en algunos casos particulares de las ecuaciones algebraicas cuyo grado es superior a cuarto.

Si los matemáticos se limitaran al estudio de las ecuaciones que admiten una solución exacta, es decir, la solución obtenida a base de cierta fórmula, podríamos imaginarnos una conversación de un ingeniero con el matemático.

Ingeniero: Al calcular la construcción, he llegado a una ecuación de este tipo (le muestra al matemático la ecuación). Tengo que resolverla urgentemente, pues dentro de un mes debo tener terminado el proyecto.

Matemático: Con mucho gusto quisiera ayudarle, pero para las ecuaciones de este tipo no hay fórmula de resolución.

Ingeniero: ¿Y no podría Ud. deducir la fórmula?

Matemático: No vale la pena. Hace tiempo se demostró que para estas ecuaciones no existía la fórmula de resolución.

Como resultado de semejante conversación la opinión del ingeniero sobre los matemáticos y sus posibilidades se empeoraría, probablemente, en el grado considerable. Afortunadamente, tal conversación no puede tener lugar. El hecho es que, habitualmente, al ingeniero no le es necesaria la fórmula para resolver tal o cual ecuación. Lo que él necesita es la respuesta obtenida con el determinado grado de precisión y no le interesa el modo por cuyo intermedio se obtiene la respuesta. La propia fórmula sólo sirve para que se pueda calcular la respuesta con el grado necesario de precisión.

Supóngase, por ejemplo, que la fórmula está obtenida, pero la respuesta, hallada según esta fórmula, se representa en la forma $x = 3 + \sqrt{13}$. Está claro que esta respuesta no puede ser usada inmediatamente (sería absurdo pedir que un ajustador haga una pieza de longitud igual a $3 + \sqrt{13}$cm). Para los fines prácticos se debe expresar $\sqrt{13}$ en el sistema decimal de cálculo, tomando tal número de signos decimales que se requiera para el problema práctico dado.

Así pues, el ingeniero será totalmente satisfecho, si el matemático le indica tal o cual modo de calcular la raíz de la ecua-

---

[*] De las ecuaciones algebraicas pueden leerse los libros de la serie "Lecciones populares de matemáticas" (en ruso): **A. G. Kúrosh**, "Ecuaciones algebraicas de grado arbitrario", Editorial Mir, 1976.
I. R. Shafarevich, "Acerca de la resolución de las ecuaciones de grados superiores", Gostejizdat, 1954.

ción con el grado necesario de precisión. En las matemáticas está elaborada toda una serie de los métodos para el cálculo aproximado de las ecuaciones. Esta obra se dedica precisamente a la descripción de algunos de estos métodos.

§ 2
APROXIMACIONES SUCESIVAS

La mayor parte de los métodos de la resolución aproximada de las ecuaciones se basa en la idea de las *aproximaciones sucesivas*. Esta idea se usa para solucionar no sólo las ecuaciones, sino también algunos problemas prácticos.

El método de aproximaciones sucesivas se emplea, por ejemplo, por los artilleros. Si se necesita batir algún objetivo, en la pieza de artillería se establecen las graduaciones correspondientes de elevación y deriva, después de lo cual se efectúa un disparo. Fallado el tiro, a base de la observación del punto de explosión del proyectil se introducen correcciones en las graduaciones de elevación y deriva, después de lo que se efectúa el disparo siguiente. Realizadas unas cuantas aproximaciones, la elevación y la deriva se gradúan de tal manera que el objetivo resulta derribado.

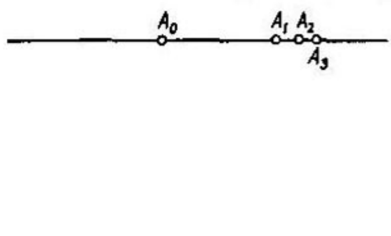


Fig. 1

A veces las aproximaciones sucesivas se necesitan para determinar el punto de puntería. Supongamos que un cañón antiaéreo, ubicado en el punto O, efectúa el tiro contra un avión en vuelo (fig. 1). Si apuntamos el cañón al punto A_0, donde se encuentra el avión en el instante dado, tendremos tiro fallado: mientras el proyectil vuela, el avión se desplazará al otro punto A_1. Este punto se determina de una manera bastante fácil, si se conocen las velocidades del proyectil y del avión. No obstante, si dirigimos el proyectil al punto A_1, de nuevo podemos errar el blanco. En efecto, como resultado del cambio en la inclinación del tubo del cañón se altera la ley de movimiento del proyectil. Por esta razón, el tiempo que tarda el proyectil en cubrir la distancia OA_0 se diferencia del tiempo que se necesita para alcanzar el punto A_1. De resultas, el proyectil no dará en el blanco. Sin embargo, el error será menor en comparar con el caso de puntería en el punto A_0. Para que el error sea aún menor, hace falta determinar el tiempo durante el cual el proyectil cubre la distancia OA_1 y, además, hallar el punto en que, al pasar este lapso, se ubicará el avión. Este punto A_2 será la aproximación siguiente para el punto de puntería buscado. Después de esto se debe determinar el tiempo durante el cual el proyectil alcanza el punto A_2 y calcular el punto A_3 en el que se ubicará el avión, pasado este tiempo. Realizadas unas cuantas aproximaciones, encontraremos, con el grado necesario de precisión, el punto de puntería.

El método de aproximaciones sucesivas se emplea también para la resolución de muchos otros problemas.

Supongamos, por ejemplo, que se necesita transportar la arena desde las canteras de arena $A_1, \ldots, A_n$ hacia varias obras de construcción $B_1, \ldots, B_m$. Sea a_j el rendimiento de la cantera A_j, medido en toneladas por día. Supongamos que la obra B_k consume b_k toneladas por día y que el coste de la transportación de una tonelada de arena desde la cantera A_j hacia la obra B_k es igual a c_{jk} (esta magnitud depende de la distancia entre A_j y B_k, el estado de caminos, etc.).

Con el fin de elaborar el plan del transporte, compongamos la tabla 1. En esta tabla con x_{jk} está designada la cantidad de arena que se traslada desde la cantera A_j hacia la obra B_k.

Tabla 1

	B_1	B_2	...	B_m
A_1	x_{11}	x_{12}	...	x_{1m}
A_2	x_{21}	x_{22}	...	x_{2m}
...	.	...	...	...
A_n	x_{n1}	x_{n2}	...	x_{nm}

Está claro que los números x_{jk} deben satisfacer las siguientes correlaciones

$$x_{j1} + x_{j2} + \ldots + x_{jm} \leqslant a_j$$

(desde la cantera A_j no puede transportar más que a_j toneladas de arena por día),

$$x_{1k} + x_{2k} + \ldots + x_{nk} = b_k$$

(a la obra B_k se debe llevar b_k toneladas de arena por día).

Según el plan proporcionado por la tabla 1, el coste del transporte de arena es igual a

$$\begin{aligned} C = {} & c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \\ & + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + \ldots + c_{2n}x_{2n} + \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \ldots + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned} \tag{4}$$

El plan se debe elaborar de una manera tal que el valor de C sea mínimo. Con este fin se compone primeramente un plan preliminar. Se procede, por ejemplo, de tal modo:

A la cantera de arena A_1 se le atribuye una obra de construcción más próxima a la cantera. Si esta cantera produce más arena que se necesita para la obra dada, se le agrega a la cantera otra obra, que entre las restantes obras es más próxima a la misma cantera. Realizados unos cuantos pasos, el rendimiento de la cantera A_1 resultará agotado. Después de esto, a la cantera A_2 se le concede aquella de las obras restantes que es más próxima a A_2, etc. Al fin y al cabo, cada obra resultará atribuida a alguna de las canteras.

Sin embargo, el plan elaborado de este modo no es el mejor, puesto que al final quedarán unas pocas obras y ellas pueden estar muy alejadas de las canteras restantes. Por eso nos veremos obligados a cambiar el plan elaborado. Algunas de las obras designadas a las canteras de pequeños números serán tomadas de éstas últimas y atribuidas a las otras canteras de números mayores.

Los métodos de la alteración del plan, que tienen por objeto disminuir el coste del transporte, se consideran en el apartado de las matemáticas, llamado *programación lineal* *).

---

*) Sobre la programación lineal véase "Introducción en la Algebra lineal y la programación lineal" por A. S. Solodovnikov. Editorial "Prosvescheniye", Moscú, 1966.

Después de unas cuantas aproximaciones, realizadas en conformidad con estos métodos, obtendremos un plan según el cual la suma (4) será mínima o poco se diferenciará de la mínima.

En general, al elaborar un plan (o bien un horario) cualquiera, se toma al principio una aproximación basta la que, después, se mejora de manera sucesiva logrando, al fin y al cabo, el resultado requerido.

El maquinado de una pieza en los talleres de una planta puede considerarse también como la aproximación sucesiva a la forma requerida. Primero se toma una aproximación basta, esto es, una pieza de fundición o cualquier otra pieza bruta. Esta pieza es trabajada en un torno y se le comunica una forma próxima a la deseada. Luego, la pieza se transmite al otro torno de mayor precisión. Realizadas unas cuantas etapas del maquinado, es decir, unas cuantas aproximaciones, aparece, por fin, la pieza que deseábamos obtener.

La idea general del método de aproximaciones sucesivas está bien expresada en uno de los versos de Piet Hein, un sabio y poeta danés, los cuales él mismo denominó "gruks":

"Espinoso es el camino a la verdad,
Pero, síguelo y no te demores,
Fallo, fallo, otra vez fallo,
Pero cada vez menos y menos".

§ 3
AQUILES Y LA TORTUGA

Por primera vez las aproximaciones sucesivas se mencionan en los razonamientos del Zenón de Elea, filósofo griego, que vivió 500 años antes de nuestra era. Este filósofo trataba de demostrar la ausencia del movimiento en la naturaleza (recuérdense los versos de Pushkin llamados "Movimiento": "El movimiento no existe, dijo un sabio barbudo..."). La demostración suya fue como sigue: si Aquiles, un hombre más rápido de todos los griegos, hubiera tratado de alcanzar corriendo a una tortuga, nunca podría hacerlo. Efectivamente, sea la distancia entre Aquiles y la tortuga 1000 pasos y supongamos que Aquiles hace corriendo 10 pasos por 1 segundo, mientras que la tortuga cubre 1 paso por segundo. Transcurridos 100 segundos, Aquiles habrá recorrido 1000 pasos que le distan de la tortuga, pero durante este tiempo la tortuga se alejará a 100 pasos. Transcurridos 10 segundos más, Aquiles cubrirá corriendo estos 100 pasos, pero la tortuga estará 10 pasos avanzada. Para superar estos 10 pasos Aquiles necesita 1 segundo, durante el cual la tortuga se desplazará un paso más. De este modo, razonada Zenón, la tortuga siempre irá delante y Aquiles nunca la alcanzará. Por consiguiente, el movimiento no existe.

Este razonamiento de Zenón es, por supuesto, nada más que una paradoja graciosa. El movimiento es una propiedad imprescriptible de la materia. Es que los versos de Pushkin sobre Zenón son como sigue:

"El otro viejo se puso a andar silencioso,
No podría ser la objeción más curiosa,
Elogiaban todos la respuesta ingeniosa".

Todo escolar calculará sin dificultad el tiempo que es necesario para que Aquiles alcance la tortuga. Para ello sería suficiente escribir la ecuación

$$10x - x = 1000, \tag{5}$$

en la que con x está designado el tiempo buscado.

De esta ecuación se obtiene

$$x = \frac{1000}{9} s = 111\frac{1}{9} s.$$

No obstante, el razonamiento de Zenón puede considerarse como un método original de la resolución aproximada de la ecuación (5).

Para concretar, en la ecuación (5) pasemos x al segundo miembro y dividamos ambos miembros de la ecuación entre 10. Obtendremos la ecuación

$$x = 100 + \frac{x}{10}. \tag{6}$$

Si prescindimos en el segundo miembro del sumando $\frac{x}{10}$ (es pequeño al comparar con x), obtendremos para x un valor aproximado $x_1 = 100$. Ahora podemos precisar la respuesta, sustituyendo en el segundo miembro la aproximación hallada de $x_1 = 100$ en lugar de x. Obtendremos para x el valor más exacto, a saber, $x_2 = 100 + 10 = 110$. Sustituyendo este valor en el segundo miembro de la ecuación, encontraremos la aproximación siguiente $x_3 = 100 +$

$+ \frac{110}{10} = 111$. De este modo obtenemos las aproximaciones

$$x_1 = 100,\ x_2 = 110,\ x_3 = 111,\ x_4 = 111{,}1\ \ldots$$

es decir, los mismos números que se obtenían en el razonamiento de Zenón. Estos números están ligados entre sí por la correlación

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10}, \tag{7}$$

que permite calcularlos uno tras otro. Con el aumento de n ellos se aproximan a la solución exacta, $x = 111\frac{1}{9}$, de la ecuación (5).

El método que acabamos de exponer ha sido coronado por éxito, porque el sumando $\frac{x}{10}$ era pequeño comparando con x. De lo contrario, obtendríamos los números que no se aproximarían a la solución buscada. Supongamos, por ejemplo, que Aquiles compite no con una tortuga lenta, sino con un antílope que es capáz de correr con la velocidad de 20 pasos por segundo. Con el fin de determinar el tiempo necesario para que Aquiles alcance al animal, hace falta resolver la ecuación

$$10x - 20x = 1000. \tag{8}$$

La solución es $x = -100$. Esto significa que Aquiles y el antílope estaban al lado hace 100 segundos y en el momento dado el animal está a la cabeza de Aquiles y la distancia entre ellos sólo va a aumentar en lo ulterior.

Trataremos de resolver la ecuación (8) del mismo modo que la ecuación (5). Pasemos el sumando $20x$ al segundo miembro y dividamos los dos miembros de la ecuación entre 10. Obtendremos la ecuación

$$x = 100 + 2x. \tag{9}$$

Hagamos en el segundo miembro $x_0 = 0$. Resulta que $x_1 = 100$. Sustituyendo este valor en el segundo miembro de la ecuación (9), obtenemos la aproximación siguiente $x_2 = 300$. Continuando este proceso, obtendremos los números

$$x_0 = 0;\ x_1 = 100;\ x_2 = 300;\ x_3 = 700,\ \ldots$$

Vemos que estos números no tienden a la solución exacta, $x_1 = -100$, de la ecuación (8).

§ 4
DIVISIÓN EN LAS COMPUTADORAS

Es posible que el lector de este libro quede asombrado: ¿cuál es la razón de resolver la ecuación (5) por el método de aproximaciones sucesivas, si se puede obtener la respuesta exacta de manera muy sencilla? Nos interesa, por supuesto, no la propia ecuación (5), sino el método de aproximaciones sucesivas el cual nos proponemos aplicar en adelante a las ecuaciones más complejas.

Por lo demás, hay que decir que el empleo del método de aproximaciones sucesivas para resolver las ecuaciones parecidas a la (5) se necesitó hace muy poco tiempo, cuando aparecieron las computadoras de acción rápida. Existen modelos de las máquinas que son capaces de ejecutar sólo tres operaciones aritméticas: adición, sustracción y multiplicación. Además, ellos permiten dividir entre los números del tipo 2^n. ¿De qué manera estas máquinas hacen la división entre números cualesquiera?

Dividir el número b entre el número a significa resolver la ecuación $ax = b$. Puesto que la máquina puede multiplicar y dividir entre 2^n, se puede considerar que $^1/_2 \leqslant a < 1$ (de lo contrario multipliquemos o dividamos los dos miembros de la ecuación $ax = b$ entre la potencia correspondiente del número 2).

Escribamos la ecuación $ax = b$ en la forma

$$x = (1 - a)x + b. \tag{10}$$

Tomemos por la primera aproximación del número x el valor $x_1 = b$. Designemos con α_1 el error de esta aproximación, es decir, supongamos que $x_1 + \alpha_1 = b/a$. Entonces, de la ecuación (10) obtenemos

$$x_1 + \alpha_1 = (1 - a)(x_1 + \alpha_1) + b = (1 - a)x_1 + b + (1 - a)\alpha_1. \tag{11}$$

Como $^1/_2 \leqslant a < 1$, resulta que

$$0 < 1 - a \leqslant {}^1/_2.$$

Puesto que el coeficiente $1 - a$ es comparativamente pequeño, en el segundo miembro de la ecuación (11) despreciemos el sumando $(1 - a)\alpha_1$, el cual es, por lo menos, dos veces menor que α_1. Obtendremos:

$$x_1 + \alpha_1 \approx (1 - a)x_1 + b.$$

El número

$$x_2 = (1 - a)x_1 + b$$

lo tomaremos por la siguiente aproximación para x.

Designemos por α_2 el error de la aproximación x_2, es decir, hagamos $x_2 + \alpha_2 = b/a$. En este caso, de la ecuación (10) se infiere que

$$x_2 + \alpha_2 = (1 - a)x_2 + b + (1 - a)\alpha_2.$$

Despreciando en el segundo miembro de esta ecuación el sumando $(1 - a)\alpha_2$, obtendremos la igualdad aproximada

$$x_2 + \alpha_2 \approx (1 - a)x_2 + b.$$

Así pues, a título de la siguiente aproximación se puede tomar

$$x_3 = (1 - a)x_2 + b.$$

Siguiendo con este mismo procedimiento, encontraremos que la siguiente aproximación tiene la forma

$$x_4 = (1 - a)x_3 + b,$$

etc. Los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, calculados sucesivamente según la fórmula

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + b, \tag{12}$$

van aproximándose al número b/a. Más, en esta fórmula se utilizan sólo las operaciones de adición, sustracción y multiplicación lo que significa que la máquina puede operar conforme a ella.

El método de división descrito se basa, de hecho, en la fórmula para la suma de una progresión geométrica infinita decreciente. Para concretar, escribimos la fracción b/a en la forma

$$\frac{b}{a} = \frac{b}{1 - (1 - a)}.$$

Pero, según la fórmula citada tenemos:

$$\frac{b}{1 - (1 - a)} = b + b(1 - a) + b(1 - a)^2 + \ldots + \\ + b(1 - a)^{n-1} + \ldots \tag{13}$$

Designemos con x_n la suma de n primeros términos de esta progresión:

$$x_n = b + b(1 - a) + \ldots + b(1 - a)^{n-1}$$

Es evidente que

$$x_{n+1} = b + b(1-a) + \ldots + b(1-a)^n =$$
$$= b + (1-a)[b + b(1-a) + \ldots + b(1-a)^{n-1}] =$$
$$= b + (1-a)x_n.$$

Ésta fórmula y la fórmula (12) coinciden. De este modo, sustituyendo la fracción b/a por el valor aproximado de x_n, sustituimos la suma infinita en la fórmula (13) por la suma de los primeros n términos. Al aumentar el número de los sumandos n, esta suma va aproximándose a la suma de toda la progresión (el decrecimiento de la progresión (13) se deduce de lo que $^1/_2 \leqslant a < 1$, y, por tanto, $0 < 1 - a \leqslant {}^1/_2$).

§ 5
EXTRACCIÓN DE RAÍCES CUADRADAS POR EL MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Mostremos ahora, cómo se emplea el método de aproximaciones sucesivas para la extracción de raíces cuadradas. En las escuelas se estudia un método de extracción de raíces cuadradas que permite hallar, uno tras otro, los signos de la raíz buscada. Se lo puede considerar también como el método de aproximación sucesiva hacia la respuesta. Sin embargo, es bastante complicado y muy frecuentemente los alumnos lo usan mecánicamente, sin darse cuenta completa de lo esencial en la operación. Vamos a describir aquí el otro método de extracción de raíces cuadradas que se utilizaba ya en Babilonia antigua mucho tiempo antes de la era nuestra. Lo empleaba también Herón, un matemático de Alejandría. Después, este método fue abandonado, pero en nuestros tiempos se le recurre a veces para extraer raíces cuadradas en las máquinas de cómputo.

Supongamos, por ejemplo, que se necesita extraer una raíz cuadrada del número 28. Elijamos primero algún valor aproximado de esta raíz, haciendo, por ejemplo, $x_1 = 5$. Designemos por α_1 el error de este valor aproximado, es decir, hagamos $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$. Para hallar el valor de α_1, elevemos al cuadrado los dos miembros de esta igualdad. Obtendremos:

$$28 = 25 + 10\alpha_1 + \alpha_1^2,$$

es decir,

$$\alpha_1^2 + 10\alpha_1 - 3 = 0.$$

Obtuvimos, de este modo, una ecuación cuadrática para α_1. Si tratamos de resolver esta ecuación con exactitud, obtendremos el valor de $\alpha_1 = -5 \pm \sqrt{28}$. Así pues, para hallar el valor exacto de α_1 se debe calcular $\sqrt{28}$. Pareciera que estamos dentro de un círculo vicioso: para hallar $\sqrt{28}$ se necesita calcular α_1, y para hallar α_1 se debe calcular $\sqrt{28}$.

La siguiente consideración viene a ayudarnos. El error α_1 del valor aproximado $x_1 = 5$ no es significante; de antemano se sabe que es menor que 1. Es menor aun el número α_1^2. Por esto, hagamos una tentativa de hallar el valor aproximado de α_1, despreciando en la igualdad (14) el sumando pequeño α_1^2. En este caso, para α_1 se obtiene la ecuación aproximada $10\alpha_1 - 3 \approx 0$. De ella se deduce que $\alpha_1 \approx 0{,}3$.

Por consiguiente, el valor aproximado de la corrección α_1 lo tenemos. Puesto que $\sqrt{28} = 5 + \alpha_1$, la segunda aproximación x_2 para $\sqrt{28}$ tiene por expresión

$$x_2 = 5 + 0{,}3 = 5{,}3.$$

Repitamos el procedimiento descrito con el fin de hallar la aproximación para $\sqrt{28}$ más exacta todavía. A saber, designemos con α_2 el error del valor $x_2 = 5{,}3$, es decir, hagamos $\sqrt{28} = x_2 + \alpha_2$. Elevemos ambos miembros de esta igualdad al cuadrado y despreciemos el pequeño sumando α_2^2. Obtendremos: $28 \approx x_2^2 + 2x_2\alpha_2$, y, por lo tanto,

$$\alpha_2 \approx \frac{28 - x^2{}_2}{2x_2}.$$

Esto significa que la tercera aproximación para $\sqrt{28}$ se expresa mediante la fórmula

$$x_3 = x_2 + \frac{28 - x_2^2}{2x_2} = \frac{28 + x_2^2}{2x_2}.$$

Puesto que $x_2 = 5{,}3$, de aquí se infiere que $x_3 = 5{,}2915...$ De un modo igual, partiendo del valor aproximado $x_3 = 5{,}2915$, encontramos la siguiente aproximación x_4, expresada mediante la fórmula

$$x_4 = \frac{28 + x_3^2}{2x_3} = 5{,}2915...$$

En general, una vez hallado el valor aproximado x_n para $\sqrt{28}$, la aproximación siguiente tendrá por expresión

$$x_{n+1} = \frac{28 + x_n^2}{2x_n}. \qquad (15)$$

Con ello, todo paso consecutivo del procedimiento conduce a las aproximaciones para $\sqrt{28}$, que son cada vez más exactas. El proceso de las aproximaciones se da por terminado cuando la diferencia entre x_{n+1} y x_n se hace menos que la precisión predeterminada de los cálculos. Por ejemplo, si es preciso calcular $\sqrt{28}$ con un error inferior a 0,0001, será suficiente tomar cuatro aproximaciones y hacer $\sqrt{28} = 5{,}2915$ (en efecto, $x_3 = 5{,}2915...$ y $x_4 = 5{,}2915...$).

De la manera sumamente igual se extrae la raíz cuadrada de cualquier número positivo. A saber, calculando $\sqrt{a}$, eligimos alguna aproximación inicial x_1, y luego determinamos las aproximaciones siguientes, valiéndonos de la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{a + x_n^2}{2x_n}. \qquad (16)$$

La fórmula (16) se puede deducirla también de los razonamientos algo diferentes de los que hemos aplicado al extraer $\sqrt{28}$. Supongamos que ya hayamos hallado la n-ésima aproximación x_n para $\sqrt{a}$. Dado que $\sqrt{a} = \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}}$, entonces $\sqrt{a}$ es el promedio geométrico de los números x_n y $\frac{a}{x_n}$. En calidad del valor aproximado para este promedio geométrico tomemos el promedio aritmético de los números x_n y $\frac{a}{x_n}$, es decir, hagamos

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = \frac{x_n^2 + a}{2x_n}.$$

Esta es precisamente la fórmula (16).

De este modo, *el método aproximado de la extracción de raíces cuadradas escrito más arriba consiste en lo que en cada paso de las aproximaciones el promedio geométrico de los números* x_n *y* $\frac{a}{x_n}$ *se sustituye por el promedio aritmético de los mismos.*

Aclaremos ahora: ¿es que siempre el proceso de las aproximaciones sucesivas lleva al objetivo al extraer raíces cuadradas, es decir, siempre será el asunto tal como lo observábamos cuando. Aquiles corría tras la tortuga o, quizás, a veces el asunto recordará su competición con el antílope? En el primer caso los matemáticos dicen que el proceso de las aproximaciones es convergente; en el segundo caso el proceso diverge. Vamos a demostrar que al extraer las raíces cuadradas nunca nos tropezamos con complicaciones algunas: el proceso de las aproximaciones siempre converge, siempre lleva al objetivo.

Para ello comparemos los errores $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ y $\alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1}$ de dos aproximaciones que siguen una tras otra. Valiéndonos de la fórmula (16), el error α_{n+1} puede ser escrito en la forma

$$\alpha_{n+1} = \sqrt{a} - x_{n+1} = \sqrt{a} - \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = -\frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n}.$$

Pero,

$$x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a = (x_n - \sqrt{a})^2 = \alpha_n^2$$

y por esto

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n^2}{2x_n}. \tag{17}$$

Consideramos sólo las aproximaciones positivas x_n para $\sqrt{a}$. Por esta razón, de la igualdad (17) se puede sacar la deducción de que todos los errores $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_n, \ldots$ son negativos. En otras palabras, *todas las aproximaciones x_n, a partir de la segunda, son aproximaciones por exceso* *); la primera aproximación x_1 puede ser tanto por exceso como por defecto.

Con ayuda de la fórmula (17) se demuestra con facilidad que *el valor absoluto del error de la aproximación aproximado de x_n disminuye con cada paso al menos en dos veces*. En efecto, la igualdad (17) se puede escribir así:

$$\alpha_{n+1} = -\frac{\alpha_n}{2x_n}\alpha_n = \frac{x_n - \sqrt{a}}{2x_n}\alpha_n = \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right)\alpha_n.$$

Por esto

$$|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| |\alpha_n|. \tag{18}$$

*) Esto se explica por el hecho de que el promedio aritmético es siempre mayor que el promedio geométrico.

Pero, como $x_n > 0$, entonces

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} < \frac{1}{2}.$$

Por otra parte, según lo mostrado más arriba, para $n \geqslant 2$ tenemos $x_n > \sqrt{a}$, y por tanto

$$\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n} > 0.$$

De aquí se deduce la desigualdad

$$\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| < \frac{1}{2}. \tag{19}$$

Explorando las correlaciones (18) y (19), nos convencemos de que

$$|\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2}|\alpha_n|.$$

Esto precisamente demuestra la validez de nuestra afirmación: con cada paso de las aproximaciones el valor absoluto del error va disminuyendo por lo menos en doble. De esto se deduce que después del segundo paso de las aproximaciones el valor absoluto del error disminuirá al menos en cuatro veces, después del tercer paso, al menos en ocho veces, etc. Está claro que al crecer n, el valor absoluto del error $\alpha_n = \sqrt{a} - x_n$ va disminuyendo y tiende a cero. Pero, esto significa que los números x_n tienden a $\sqrt{a}$ cuando n crece.

Ahora pondremos en claro, cómo influye la elección de la aproximación inicial x_1 en el proceso de las aproximaciones. En primer lugar indiquemos que esta elección no tiene influencia alguna en el resultado final. Es que ya hemos demostrado que con cualquier aproximación inicial x_1 los errores $\alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$ de las aproximaciones ulteriores tienden a cero cuando $n \to \infty$. De este modo, si la precisión necesaria de cálculos está prefijada, se obtendrá el mismo valor para $\sqrt{a}$ con la precisión predeterminada, cualquiera que sea la aproximación inicial x_1. Si incluso la elección de la aproximación inicial no es acertada, llegaremos por fin al resultado correcto. Realizados 10 pasos de la aproximación, el valor absoluto del error disminuirá más que en mil veces ($2^{10} = 1024 \approx 1000$); realizados 40 pasos, por lo menos en mil millones (10^{12}) veces. Por ejemplo, si, al calcular $\sqrt{2}$, ponemos $x_1 = 10^6$, entonces $\alpha_1 \approx 10^6$, y por tanto, $|\alpha_{40}| < 10^{-6}$. En otras palabras, al principio del proceso el error era cerca de un millón; al final, su valor absoluto se hizo menos que una millonésima.

No obstante, la elección de la aproximación inicial influye en la duración del proceso de aproximaciones. Si la elección de la aproximación inicial no es acertada, tendremos que esperar mucho hasta que la diferencia entre x_{n+1} y x_n se haga menos que la precisión dada de los cálculos. La elección acertada de la aproximación inicial contribuye considerablemente a la aceleración del proceso. Por esta razón, se procede con frecuencia de la manera siguiente: la aproximación inicial x_1 se toma de las tablas de raíces cuadradas y la fórmula

$$x_2 = \frac{a + x_1^2}{2x_1} \tag{20}$$

sólo se emplea para precisar el valor obtenido.

Este procedimiento es de comodidad particular porque la velocidad de disminución del error crece considerablemente cuando x_n va aproximándose a $\sqrt{a}$. En efecto, al deducir la desigualdad

$$|\alpha_{n+1}| < \frac{1}{2}|\alpha_n|,$$

en la fórmula (18) hemos sustituido el factor $\left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right|$ por el número $\frac{1}{2}$. Pero, si x_n es próximo a $\sqrt{a}$, la fracción $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}$ será muy pequeña, por lo que $|\alpha_{n+1}| = \left|\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{a}}{2x_n}\right| |\alpha_n|$ es considerablemente inferior a $\frac{1}{2}|\alpha_n|$.

Precisemos esta afirmación. Examinemos, a la par con el error absoluto $|\alpha_n| = |\sqrt{a} - x_n|$, un error relativo β_n del valor aproximado x_n, es decir, la razón del error absoluto $|\alpha_n|$ al valor exacto de la raíz $\sqrt{a}$. Este error tiene por expresión

$$\beta_n = \frac{|\alpha_n|}{\sqrt{a}} = \left|1 - \frac{x_n}{\sqrt{a}}\right|.$$

De la igualdad (17) obtenemos la siguiente fórmula para la magnitud β_{n+1}:

$$\beta_{n+1} = \frac{|\alpha_{n+1}|}{\sqrt{a}} = \frac{|\alpha_n|^2}{2x_n\sqrt{a}}.$$

Puesto que $x_n > \sqrt{a}$, tenemos:

$$\beta_{n+1} < \frac{|\alpha_n|^2}{2(\sqrt{a})^2} = \frac{1}{2}\beta_n^2.$$

Así pues, para los errores relativos β_n de los valores aproximados se cumple la desigualdad

$$\beta_{n+1} < \frac{\beta_n^2}{2}. \tag{21}$$

Por ejemplo, si el error relativo de la aproximación x_n es igual a 0,01, entonces para la aproximación x_{n+1} él no supera a 0,00005, y para x_{n+2} no es superior a 0,0000000013. Vemos que la precisión de las aproximaciones crece cada vez más rápido. Se puede mostrar que estando ya cercanos a $\sqrt{a}$, con cada aproximación ulterior el número de signos exactos se dobla.

Ejemplo. Calcúlese $\sqrt{238}$ con un error inferior a 0,00001.

Rigiéndonos por las tablas de I. N. Bronstein y K. A. Semendiaev*), encontramos $\sqrt{238} = 15{,}43$. Tomemos 15,43 por x_1 y hallaremos x_2 según la fórmula

$$x_2 = \frac{15{,}43^2 + 238}{30{,}86} = 15{,}42725...$$

Evaluemos la precisión de la respuesta obtenida. Como el error del valor 15,43 no supera a 0,01, entonces $\alpha_1 = 0{,}01$, y por eso

$$\beta_1 \approx \frac{0{,}01}{15{,}43} < 0{,}001.$$

Pero, en este caso

$$\beta_2 < \frac{0{,}001^2}{2} = 0{,}0000005.$$

Esto significa que el error absoluto de la aproximación x_2 no es superior a $15{,}43 \cdot 0{,}0000005 < 0{,}00001$. En otras palabras, en el valor $\sqrt{238} = 15{,}42725...$ son exactos todos los siete signos.

Si deseáramos obtener catorce signos exactos, la tercera aproximación ya nos daría la respuesta requerida. Sin embargo, esta precisión es casi siempre supérflua.

En conclusión señalemos la siguiente particularidad del método

---

*) I. N. Bronstein y K. A. Semendiaev, "Manual de Matemáticas para ingenieros y estudiantes", Editorial Mir, 1977.

de aproximaciones sucesivas. Al emplear el método ordinario de la extracción de las raíces cuadradas, cualquier error cometido en alguna operación hace completamente inválidos los cálculos ulteriores. Otra cosa es, cuando se usa el método de aproximaciones sucesivas. Supongamos, por ejemplo, que como resultado del error cometido, en lugar del valor correcto de la n-ésima aproximación x_n obtuvimos el valor falso y_n. Entonces, todos los cálculos ulteriores pueden considerarse como obtención de $\sqrt{a}$ con la aproximación inicial y_n. Ya hemos visto anteriormente que cualquiera que sea la aproximación inicial, el método de aproximaciones sucesivas lleva, al fin y al cabo, al valor de $\sqrt{a}$ con el grado deseado de precisión. De este modo, el error cometido va a tender en lo ulterior a cero. El único inconveniente que afecta la operación consiste en lo que nos veremos obligados a tomar unas cuantas aproximaciones de sobra.

Gracias a la particularidad descrita del proceso de aproximaciones, al principio del procedimiento se puede calcular las aproximaciones con menor precisión y tomar la precisión dada sólo para las últimas aproximaciones. Esta circunstancia reduce el tiempo necesario para los cálculos.

§ 6
APLICACIÓN DEL MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS A LA EXTRACCIÓN DE RAÍCES CON EXPONENTE NATURAL

El método de la extracción de raíces cuadradas expuesto más arriba, se lo puede emplear también para extraer raíces con cualquier exponente natural. Para ello sirve la fórmula siguiente*)

$$(x+\alpha)^k = x^k + kx^{k-1}\alpha + \ldots, \tag{22}$$

en la que con los puntos están designados los términos que contienen α^2, α^3, etc.

Demostremos esta fórmula. Del curso escolar sabemos que

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \alpha^2,$$
$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3.$$

*) Esta fórmula se deduce del binomio de Newton, pero no se supone aquí dar a conocer al lector la fórmula del binomio.

Se puede escribir estas igualdades en la forma siguiente

$$(x+\alpha)^2 = x^2 + 2x\alpha + \ldots, \qquad (23)$$

$$(x+\alpha)^3 = x^3 + 3x^2\alpha + \ldots \qquad (24)$$

De este modo, la fórmula (22) está demostrada para $k = 2$ y $k = 3$. Multipliquemos, ahora, ambos miembros de la fórmula (24) por $x + \alpha$. Obtendremos:

$$(x+\alpha)^4 = (x^3 + 3x^2\alpha + \ldots)(x+\alpha).$$

Si en esta expresión abrimos paréntesis, se obtendrán un sumando x^4 que no contiene α y dos sumandos, $3x^3\alpha$ y $x^3\alpha$, en los que α interviene en la primera potencia; en cuanto a los sumandos restantes, éstos contienen α en las potencias segunda y superiores. Por eso, se puede escribir que

$$(x+\alpha)^4 = x^4 + 3x^3\alpha + x^3\alpha + \ldots = x^4 + 4x^3\alpha + \ldots \qquad (25)$$

(igual que antes, con los puntos están designados los términos que contienen α^2, α^3, etc.).

Así pues, la fórmula (22) queda también demostrada para $k = 4$. Del mismo modo, de la fórmula (25) se deduce que

$$(x+\alpha)^5 = x^5 + 5x^4\alpha + \ldots \qquad (26)$$

Es evidente que siguiendo este procedimiento se puede demostrar la fórmula (22) para cualquier exponente k entero y positivo.

Volvamos ahora a la extracción de la raíz de cualquier exponente natural k. Supongamos que ya está encontrada alguna aproximación x_1 para la raíz buscada $\sqrt[k]{a}$. Designemos con α_1 el error de esta aproximación, es decir, supongamos que $x_1 + \alpha_1 = \sqrt[k]{a}$. Entonces, $(x_1 + \alpha_1)^k = a$. Pero, valiéndose de la fórmula (22), se puede escribir esta igualdad en la forma siguiente:

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 + \ldots = a,$$

donde con puntos están designados los términos que contienen α_1^2, α_1^3, etc.

Si la aproximación elegida x_1 es suficientemente cercana a $\sqrt[k]{a}$, entonces el error α_1 de esta aproximación es pequeño, por lo que se puede despreciar los términos que contienen las potencias superiores del error. Obtenemos, de esta manera, una igualdad aproximada

$$x_1^k + kx_1^{k-1}\alpha_1 \approx a.$$

De esta igualdad se infiere que

$$\alpha_1 \approx \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}},$$

y, por ello, a título de la aproximación ulterior para $\sqrt[k]{a}$ se puede tomar el número

$$x_2 = x_1 + \frac{a - x_1^k}{kx_1^{k-1}} = \frac{a + (k-1)x_1^k}{kx_1^{k-1}}.$$

Del mismo modo, partiendo de la aproximación x_2, hallamos la aproximación siguiente:

$$x_3 = \frac{a + (k-1)x_2^k}{kx_2^{k-1}}.$$

Y, en general, una vez hallada la aproximación x_n para $\sqrt[k]{a}$, la aproximación posterior se definirá por la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{a + (k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}} \qquad (27)$$

Igual que en el caso de la extracción de raíces cuadradas, se puede mostrar que el proceso citado converge con elección cualquiera de la aproximación inicial x_1 (con tal de que esta aproximación sea un número positivo). En otras palabras, cualquiera que sea la elección de x_1, los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ se aproximan a $\sqrt[k]{a}$. El proceso de aproximaciones se lleva a cabo hasta que coincidan, dentro de los límites de precisión dada, los números x_n y x_{n+1}.

Ejemplo. Hállese el valor de $\sqrt[3]{970}$ con un error inferior a 0,001. Para $k = 3$, la fórmula de aproximaciones (27) adquiere la forma

$$x_{n+1} = \frac{a + 2x_n^3}{3x_n^2}. \qquad (28)$$

En nuestro caso $a = 970$. Hagamos $x_1 = 10$. De la fórmula (28) se deduce que

$$x_2 = \frac{970 + 2 \cdot 10^3}{3 \cdot 10^2} = \frac{2970}{300} = 9{,}900,$$

$$x_3 = \frac{970 + 2 \cdot 9{,}9^3}{3 \cdot 9{,}9^2} = \frac{2910{,}60}{294{,}03} = 9{,}899.$$

Vemos que dentro de los límites de la precisión dada los valores de x_2 y x_3 coinciden. Por ello, con un error inferior a 0,001 tenemos

$$\sqrt[3]{970} = 9{,}899.$$

§ 7
MÉTODO DE ITERACIONES

Todos los ejemplos expuestos más arriba son los casos particulares de la aplicación de un método general para la resolución de las ecuaciones. Este último se denomina *método de iteraciones* o *método de aproximaciones sucesivas*. La esencia de este método consiste en lo siguiente.

Una ecuación a ser resuelto, $f(x) = 0$, se escribe en la forma

$$x = \varphi(x). \tag{29}$$

Luego se elige la aproximación inicial x_1 y se sustituye en el segundo miembro de la ecuación (29). El valor obtenido de $x_2 = \varphi(x_1)$ se toma por la segunda aproximación para la raíz. En general, si se conoce la aproximación x_n, la aproximación posterior x_{n+1} se halla según la fórmula

$$x_{n+1} = \varphi(x_n).$$

Supongamos que después de realizar unas cuantas aproximaciones llegamos a la conclusión de que con el grado dado de precisión se cumple la igualdad $x_n \approx x_{n+1}$. Sabemos que $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Esto significa que con el grado dado de precisión se cumple la igualdad $x_n \approx \varphi(x_n)$, es decir, que x_n es un valor aproximado de la raiz de la ecuación $x = \varphi(x)$.

Por ejemplo, al resolver el problema sobre Aquiles y la tortuga, escribimos la ecuación

$$10x - x = 1000$$

en la forma

$$x = 100 + \frac{x}{10}$$

y buscábamos las aproximaciones según la fórmula

$$x_{n+1} = 100 + \frac{x_n}{10}.$$

En el problema sobre la división con ayuda de una computadora escribimos la ecuación

$$ax = b$$

en la forma

$$x = (1 - a)x + b$$

y buscábamos las aproximaciones por medio de la fórmula

$$x_{n+1} = (1 - a)x_n + b.$$

Por fin, al extraer la raíz de k-ésima potencia, transformamos la ecuación

$$x^k = a$$

a la fórmula

$$x = \frac{a + (k - 1)x^k}{kx^{k-1}},$$

después de lo cual buscábamos las aproximaciones según la fórmula

$$x_{n+1} = \frac{a + (k - 1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}.$$

Demos a conocer un ejemplo de la ecuación más compleja que se resuelve por el método de iteraciones.

Ejemplo. Resuélvese la ecuación

$$10x - 1 - \cos x = 0 \tag{30}$$

con un error inferior a 0,001.

Escribamos la ecuación (30) en la forma

$$x = \frac{1 + \cos x}{10}. \tag{31}$$

Elijamos alguna aproximación inicial, por ejemplo $x_1 = 0$, y sustituyámosla en el segundo miembro de la igualdad (31). El valor obtenido

$$x_2 = \frac{1 + \cos 0}{10} = 0{,}2$$

lo tomaremos por la segunda aproximación de la raiz buscada. Sustituyendo el valor de x_2 en el segundo miembro de la igualdad (31), obtendremos la tercera aproximación

$$x_3 = \frac{1 + \cos 0{,}2}{10} \approx \frac{1 + 0{,}98}{10} = 0{,}198$$

Luego hallamos

$$x_4 = \frac{1 + \cos 0{,}198}{10} \approx 0{,}198$$

Vemos que con un error inferior a 0,001 se cumple la igualdad $x_3 = x_4$. Puesto que $x_4 = \frac{1 + \cos x_3}{10}$, esto significa que con un error inferior a 0,001 el número $x_3 = 0{,}198$ es la raiz de la ecuación $x = \frac{1 + \cos x}{10}$.

En relación con el método descrito de iteraciones surge toda una serie de preguntas.

1. ¿Siempre converge hacia un cierto número ξ la sucesión $x_1, \ldots, x_n, \ldots$, obtenida según el método de iteraciones?

2. Si se verifica la igualdad $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \zeta$, ¿será el numero ζ la solución de la ecuacion $x = \varphi(x)$?

3. ¿Con cuál rapidez los números $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ se aproximan a la raiz ξ de la ecuación $x = \varphi(x)$?

Con mayor facilidad puede ser obtenida la respuesta a la segunda pregunta. Supongamos que los números $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ se aproximan al número ξ. Examinemos la igualdad $x_{n+1} = \varphi(x)$, que nos proporciona la expresión para la aproximación posterior a través de la antecedente. Al aumentar n, el miembro primero se aproxima a ξ, mientras que el segundo miembro se aproxima a $\varphi(\xi)$ *). Por consiguiente, en límite obtendremos $\xi = \varphi(\xi)$, es decir, ξ es la raiz de la ecuación $x = \varphi(x)$.

---

*) Suponemos que $\varphi(x)$ es una función continua

La respuesta a la primera pregunta es negativa. Efectivamente, exploremos, por ejemplo, la ecuación

$$x = 10^x - 2.$$

Si hacemos $x_1 = 1$, obtendremos:

$$x_2 = 8,\ x_3 = 10^8 - 2, \ldots$$

Con el aumento de n los números x_n van creciendo y no tienden a ningún límite. Al mismo tiempo, si escribimos la ecuación en la forma $x = \lg(x + 2)$, el proceso de aproximaciones va a converger y, después de tres aproximaciones, obtenemos que $x = 2{,}38$.

De este modo, la primera pregunta se la debe cambiar por otra que sigue: ¿cómo debe ser la función $\varphi(x)$ para que la sucesión de los números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ converja?

Antes de contestar a esta pregunta demos a conocer la interpretación geométrica del método de iteraciones.

§ 8
SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL MÉTODO DE ITERACIONES

Es evidente que la búsqueda de la raíz ξ de la ecuación $x = \varphi(x)$ significa nada más que la tentativa de la abscisa del punto M en el que se intersecan la curva $y = \varphi(x)$ y la recta $y = x$. Sea x_1 (fig. 2) un cierto valor inicial. Entonces, el punto M_1 con coordenadas M_1 $(x_1, \varphi(x_1))$ se ubica en la curva $y = \varphi(x)$. Tracemos por este punto una recta horizontal. Esta cortará la recta $y = x$ en el punto N_1 $(\varphi(x_1), \varphi(x_1))$. Designemos $\varphi(x_1)$ mediante x_2. En este caso el punto N_1 tendrá las coordenadas N_1 (x_2, x_2). A continuación tracemos por el punto N_1 una recta vertical. Esta cortará la curva $y = \varphi(x)$ en el punto M_2 $(x_2, \varphi(x_2))$. Repitiendo este procedimiento, obtenemos el punto N_2 en la recta $y = x$ con las coordenadas $N_2(x_3, x_3)$, donde $x_3 = \varphi(x_2)$, y luego el punto M_3 en la curva $y = \varphi(x)$ con las coordenadas $M_3(x_3, \varphi(x_3))$, etc. Si el proceso de aproximaciones converge, los puntos $M_1, M_2, \ldots, M_n, \ldots$ van aproximándose al punto de intersección buscado.

De esta manera, el significado geométrico del método de aproximaciones sucesivas consiste en lo que nos desplazamos al punto buscado de la intersección de la curva con la recta a lo largo de una quebrada cuyos vértices se ubican alternativamente en la curva y en la recta, mientras que los lados tienen alternativamente las direcciones horizontal y vertical (fig. 2, *a*).

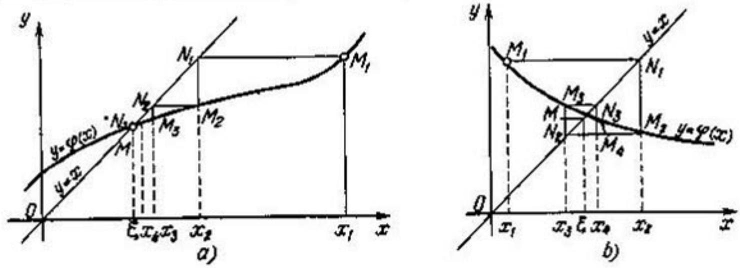


Fig. 2

Si la curva y la recta están dispuestas tal como las muestra la fig. 2, *a*, la quebrada se parece a una escalera. En el caso representado por la fig. 2, *b* la línea quebrada es parecida a una espiral.

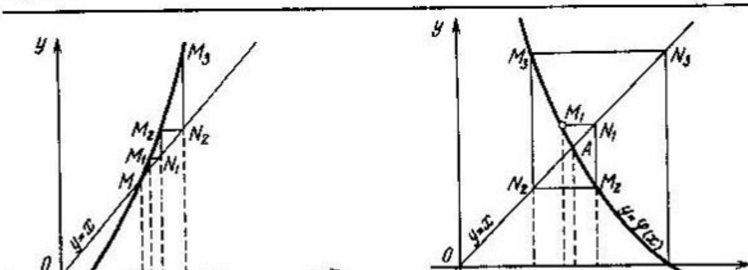


Fig. 3

El proceso descrito de aproximaciones puede también divergir y no conducir a ningún resultado (igual que en el caso del problema sobre Aquiles y la tortuga). Gráficamente esto implica que los escalones de la escalera (o los eslabones de la espiral) se hacen cada vez mayores, por lo que los puntos $M_1, \ldots, M_n, \ldots$ no se aproximan al punto M sino se alejan de él (fig. 3).

La diferencia entre las figs. 2 y 3 consiste en lo siguiente. Tracemos por el punto M, en el que se intersecan la recta $y = x$ y la curva $y = \varphi(x)$, una recta que forme con el eje de abscisas un ángulo de 135°. Esta última recta junto con la recta $y = x$ divide el plano en cuatro partes. Si la curva, que pasa en algún entorno del punto M, está dispuesta en los cuadrantes izquierdo y derecho del plano y la aproximación inicial se toma en este entorno, entonces el proceso de iteraciones converge. Si en cambio, la curva está dispuesta en los cuadrantes superior e inferior del plano, el proceso de aproximaciones diverge.

No obstante, para poder emplear esta regla, es preciso dibujar primero la gráfica de la función $y = \varphi(x)$, lo que no siempre parece conveniente. Por esta razón se debe establecer otro indicio de la convergencia del proceso de iteraciones que permitiría juzgar sobre la convergencia o la divergencia basándose en los cálculos analíticos y no de las construcciones geométricas. Esta condición será dada en el § 10 Pero al principio demos a conocer el concepto de una aplicación contraída.

§ 9
APLICACIONES CONTRAÍDAS

Examinemos la función $y = \varphi(x)$, definida en el segmento $[a, b]$. A todo x_0 de este segmento le corresponde un punto y_0 en el eje de ordenadas, a saber, el punto $y_0 = \varphi(x_0)$. Para obtener este punto se debe trazar por el punto x_0 del eje de abscisas una recta vertical hasta que ésta corte la gráfica de la función $y = \varphi(x)$, y luego trazar por el punto de intersección una recta horizontal hasta que se corten esta recta y el eje de ordenadas (fig. 4). De este modo, la función $y = \varphi(x)$ nos da la aplicación del segmento $[a, b]$ en el eje de ordenadas. El conjunto de todos los puntos del eje de ordenadas correspondientes a los puntos del segmento $[a, b]$, se denomina imagen de este segmento. Por ejemplo, la imagen del segmento $[2,5]$ en la aplicación $y = x^2$ será el segmento $[4,25]$; la imagen del segmento $[-1,6]$ en la misma aplicación será el segmento $[0,36]$ (sea al cargo del lector construir la gráfica de la función $y = x^2$). Se puede demostrar que si la función $y = \varphi(x)$ es continua en el segmento $[a, b]$, la imagen de este último será un segmento del eje de ordenadas. En el caso en que la función $y = \varphi(x)$ sea, además, monótona creciente, la imagén del segmento $[a, b]$ se representará por el segmento $[\varphi(a), \varphi(b)]$, y si sea monótona decreciente, por el segmento $[\varphi(b), \varphi(a)]$ (fig. 5).

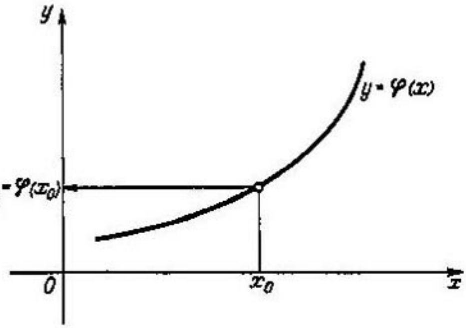


Fig. 4

En lugar de la aplicación del segmento $[a, b]$ en el eje de ordenadas se puede considerar la aplicación suya en el eje de

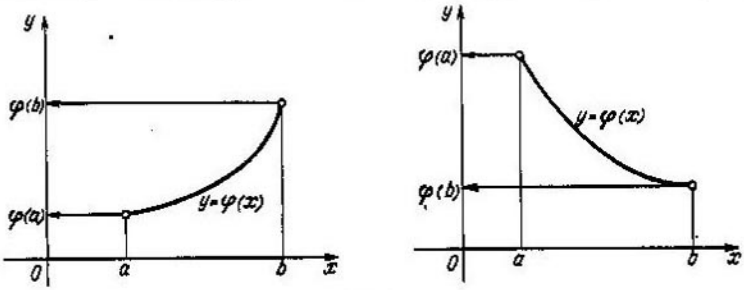


Fig. 5

abscisas. Para ello, después de aplicarlo en el eje de ordenadas hagamos girar el eje mencionado 90° en el sentido horario. De resultas, los puntos del segmento $[a, b]$ se aplicarán primero en ciertos puntos del eje de ordenadas y luego, en puntos del eje de abscisas. De este modo, la función $\varphi(x)$ determina la aplicación del segmento $[a, b]$ en el eje de abscisas. Esta aplicación la vamos a escribir así: $x \to \varphi(x)$. Si $\varphi(x)$ es una función continua, obtendremos, como resultado, algún segmento del eje de abscisas.

Puede ocurrir que la imagen $[a_1, b_1]$ del segmento $[a, b]$ sea una parte de $[a, b]$. Por ejemplo, en la aplicación $y = \sqrt{x} + 1$ el segmento $[0,4]$ pasa a ser su propia parte $[1,3]$. Suele decirse en este caso que la aplicación $\varphi(x)$ transforma el segmento $[a, b]$ en la parte de éste. Si $\varphi(x)$ transforma el segmento $[a, b]$ en la parte de él $[a_1, b_1]$, entonces cualquier parte del segmento $[a, b]$ se convierte en la parte del segmento $[a_1, b_1]$. En particular, el propio segmento $[a_1, b_1]$ pasa, realizándose la aplicación $\varphi(x)$, en la parte de él mismo $[a_2, b_2]$. Del mismo modo, el segmento $[a_2, b_2]$ se transforma en la misma aplicación a la parte propia $[a_3, b_3]$, etc. De resultas, obtendremos el sistema de segmentos $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, ... $[a_n, b_n]$, ..., cada uno de los cuales es una parte del segmento antecedente y de los segmentos tales que en la aplicación $\varphi(x)$ el segmento $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ sea la imágen del $[a_n, b_n]$.

Por ejemplo, la aplicación $x \to 1 - \dfrac{1}{x+2}$ transforma el segmento $[0,4]$ en la parte de él $[{}^1/_2, {}^5/_6]$. Aplicando esta aplicación al segmento $[{}^1/_2, {}^5/_6]$ obtendremos el segmento $[{}^3/_5, {}^{11}/_{17}]$, etc. Cada segmento siguiente constituye una parte del antecedente.

Se consideran dos casos eventuales: o bien existe el segmento $[c, d]$, perteneciente a todos los segmentos $[a_n, b_n]$, o bien estos segmentos tienen un solo punto común ξ. En el último caso se dice que el sistema de segmentos $[a_n, b_n]$ *se encoge al punto* ξ.

Más abajo enunciaremos la condición en la que se encoge el sistema de segmentos $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... Para ello introduciremos un concepto importante de aplicación contraída. Una aplicación $\varphi(x)$ que transforma el segmento $[a, b]$ en su parte $[a_1, b_1]$, se llama *contraída*, si ella disminuye la distancia entre dos puntos cualesquiera de este segmento al menos en M veces, donde $M > 1$. Puesto que la distancia entre los puntos x_1 y x_2 mide $|x_2 - x_1|$, la condición de contracción se puede enunciar así:

Existe un número q tal que $0 < q < 1$ y para cualesquiera dos puntos x_1, x_2 del segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < q\,|x_2 - x_1| \qquad (32)$$

(aquí, $q = 1/M$).

La longitud de una parte arbitraria $[c, d]$ del segmento $[a, b]$ disminuye, en la aplicación contraída $\varphi(x)$, por lo menos en $M = 1/q$ veces. Efectivamente, sea $[c_1, d_1]$ la imagen del segmento $[c, d]$. Entonces, c_1 y d_1 serán las imágenes de ciertos puntos x_1 y x_2 del segmento $[c, d]$,

$$c_1 = \varphi(x_1), \quad d_1 = \varphi(x_2).$$

Pero, en este caso

$$|d_1 - c_1| = |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant q\,|x_2 - x_1|.$$

Ya que los puntos x_1 y x_2 están dispuestos en el segmento $[c, d]$, la distancia entre ellos $|x_2 - x_1|$ es inferior a la longitud $|d - c|$ del segmento $[c, d]$. Quiere decir,

$$|d_1 - c_1| \leqslant q\,|d - c|.$$

Nuestra afirmación queda demostrada.

Ahora podemos enunciar la condición para que un sistema de segmentos $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$, que se obtienen del segmento $[a, b]$ aplicando sucesivamente la aplicación $\varphi(x)$, se encoja.

Si la aplicación $\varphi(x)$, que transforma el segmento $[a, b]$ en una parte suya $[a_1, b_1]$, contrae dicho segmento, entonces el sistema de segmentos $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ se encoje a cierto punto ξ del segmento $[a, b]$.

Efectivamente, siendo contraída la aplicación $\varphi(x)$, para todo n tenemos

$$|b_n - a_n| \leqslant q\,|b_{n-1} - a_{n-1}|.$$

De modo igual

$$|b_{n-1} - a_{n-1}| \leqslant q\,|b_{n-2} - a_{n-2}|.$$

Pero, en este caso

$$|b_n - a_n| \leqslant q^2\,|b_{n-2} - a_{n-2}|.$$

Repitiendo este razonamiento, obtenemos

$$|b_n - a_n| \leqslant q^n\,|b - a|.$$

Ya que $0 < q < 1$, la sucesión de los números $q, q^2, \ldots, q^n, \ldots$ tiende a cero, por lo cual las longitudes $|b_n - a_n|$ de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden a cero cuando n tiende a infinito. Pero, en esté caso no puede haber un segmento $[c, d]$ que pertenezca a todos los segmentos $[a_n, b_n]$. Por consiguiente, el sistema de los segmentos

$$[a, b], [a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$$

se encoje.

En conclusión examinemos las aplicaciones $\varphi(x)$ para las cuales la desigualdad (32)

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < q|x_2 - x_1|,$$

donde $0 < q < 1$, se cumple para cualquier par de números x_1 y x_2. Estas aplicaciones son contraídas en todo el eje numérico. Mostremos que en este caso existe un segmento que es contraído mediante la aplicación $\varphi(x)$. Dado que la condición (32) se cumple para cualesquiera dos puntos x_1 y x_2, es suficiente demostrar que existe un segmento que es transformado en sí mismo por medio de la aplicación $\varphi(x)$. Tomemos un número a cualquiera y hagamos $b = \varphi(a)$. Elejamos el número $q_1 < 1$ tal que $q < q_1$.

Pongamos

$$R = \frac{|b - a|}{1 - q_1}$$

y mostremos que el segmento $[a - R, a + R]$ pasa, realizándose la aplicación $\varphi(x)$, en una parte de él mismo. En efecto, sea x un punto de este segmento. Entonces, $|x - a| < R$. Debido a la desigualdad (32) encontramos que

$$|\varphi(x) - b| = |\varphi(x) - \varphi(a)| < q|x - a| \leqslant qR.$$

Pero, en este caso

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - a| &= |\varphi(x) - b + b - a| \leqslant \\ &\leqslant |\varphi(x) - b| + |b - a| \leqslant qR + |b - a| = \\ &= qR + (1 - q_1)R = (1 + q - q_1)R < R. \end{aligned}$$

Esto precisamente nos convence de que todo punto del segmento $[a - R, a + R]$ se transforma en la aplicación $\varphi(x)$ a un punto del mismo segmento, razón por la cual la aplicación $\varphi(x)$ contrae el segmento $[a - R, a + R]$.

§ 10
APLICACIONES CONTRAÍDAS Y EL MÉTODO DE ITERACIONES

Volvamos ahora al método de iteraciones. Este método se emplea para resolver las ecuaciones del tipo $x = \varphi(x)$. Si ξ es la raíz de esta ecuación, $\xi = \varphi(\xi)$, entonces, en la aplicación x $\varphi(x)$

el punto ξ se queda en su lugar. De este modo, **el problema de la resolución de la ecuación** $x = \varphi(x)$ **es equivalente al problema de la búsqueda de los puntos inmóviles de la aplicación** $\varphi(x)$.

Si la aplicación $\varphi(x)$ es contraída en el segmento $[a, b]$, en este segmento siempre hay un punto inmóvil. Con el fin de convencernos de esto, tomemos una sucesión de los segmentos

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots,$$

que se obtienen del segmento $[a, b]$ como resultado de efectuar sucesivamente la aplicación $\varphi(x)$. Ya que $\varphi(x)$ es la aplicación contraída del segmento $[a, b]$, existe, por tanto, un punto único ξ, que es común para todos los segmentos $[a_n, b_n]$. Este es el punto inmóvil de la aplicación $\varphi(x)$.

Efectivamente, la aplicación $\varphi(x)$ transforma todo segmento $[a_n, b_n]$ en su parte $[a_{n+1}, b_{n+1}]$. Por esto, la imagen $\varphi(x)$ de todo punto c del segmento $[a_n, b_n]$ se ubica en su parte $[a_{n+1}, b_{n+1}]$, y, con mayor razón, en el propio segmento $[a_n, b_n]$. Dado que el punto ξ pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$, también su imagen $\varphi(\xi)$ debe pertenecer a todos estos segmentos. Pero, el único punto que pertenece a todos los segmentos $[a_n, b_n]$ es el punto ξ. Por consiguiente, $\varphi(\xi) = \xi$, es decir, ξ es el punto inmóvil de la imagen $\varphi(x)$.

Así pues, para las aplicaciones que contraen el segmento $[a, b]$, siempre existe un punto inmóvil ubicado en el mismo segmento. Es el punto único. En efecto, si hubiera otro punto inmóvil η, $\eta = \varphi(\eta)$, debería cumplirse la desigualdad

$$|\eta - \xi| = |\varphi(\eta) - \varphi(\xi)| < q|\eta - \xi|$$

Como $0 < q < 1$, esta desigualdad sólo puede tener lugar cuando $|\eta - \xi| = 0$, es decir, cuando $\eta = \xi$.

Podemos, ahora, enunciar la condición suficiente para la convergencia del proceso de iteraciones.

Supongamos que la función $\varphi(x)$ *prefija la aplicación contraída del segmento* $[a, b]$. *Entonces, para cualquier punto* x_0 *de este segmento, la sucesión de números* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, *donde* $x_{n+1} = \varphi(x)$, *converge hacia la raíz* ξ *de la ecuación* $x = \varphi(x)$, *ubicada en este segmento.*

Efectivamente, sea $[a_n, b_n]$, $n = 1, 2, \ldots$, una sucesión de los segmentos que se obtienen de $[a, b]$ como resultado de efectuar sucesivamente la aplicación $\varphi(x)$. Como el punto x_0 se ubica en el segmento $[a, b]$, su imagen $x_1 = \varphi(x_0)$ está en el segmento $[a_1, b_1]$, la imagen $x_2 = \varphi(x_1)$ del punto x_1 se encuentra en el segmento $[a_2, b_2]$, etc. Así pues, para todo n, el punto x_n se ubica en el segmento $[a_n, b_n]$. Puesto que las longitudes de los segmentos $[a_n, b_n]$ tienden, con n creciente, a cero, la sucesión de los puntos $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ tiende al punto común ξ de estos segmentos.

El razonamiento realizado enseña que por el punto inicial x_0 puede tomarse cualquier punto del segmento $[a, b]$.

Aclaremos, ¿a qué velocidad tienden los puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$ al punto ξ? Como $\xi = \varphi(\xi)$, para cualquier punto c del segmento $[a, b]$ tenemos

$$|\varphi(c) - \xi| = |\varphi(c) - \varphi(\xi)| < q|c - \xi|. \tag{33}$$

Apliquemos la desigualdad (33) a los puntos $x_0, \ldots, x_n, \ldots$ Ya que $x_n = \varphi(x_{n-1})$, entonces

$$|x_n - \xi| = |\varphi(x_{n-1}) - \xi| < q|x_{n-1} - \xi|.$$

Pero, en este caso, para todo n tenemos

$$|x_n - \xi| < q|x_{n-1} - \xi| < q^2|x_{n-2} - \xi| < \ldots < q^n|x_0 - \xi|.$$

De este modo, *al crecer n, el error $|x_n - \xi|$ va disminuyendo al menos a la velocidad de una progresión geométrica con la razón q.*

Demos algunos ejemplos de la aplicación demostrada.

Ejemplo 1. Puede aplicarse el método de iteraciones para resolver la ecuación

$$x = \frac{1}{4 + x^2}\ ? \tag{34}$$

En este caso

$$\varphi(x) = \frac{1}{4 + x^2}.$$

Para cualesquiera x_1 y x_2 tenemos

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\frac{1}{4 + x_2^2} - \frac{1}{4 + x_1^2}\right| =$$
$$= \frac{|x_1^2 - x_2^2|}{(4 + x_2^2)(4 + x_1^2)} = \frac{|x_1 + x_2|}{|4 + x_1^2||4 + x_2^2|}|x_2 - x_1|.$$

Pero, según la desigualdad entre el medio aritmético y el medio geométrico

$$|x| = \frac{1}{2}\sqrt{4x^2} \leqslant \frac{4 + x^2}{4}.$$

Por esta causa

$$|x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| \leqslant \frac{(4 + x_1^2) + (4 + x_2^2)}{4} =$$

$$= 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{4} \leqslant 2 + \frac{x_1^2 + x_2^2}{2} + \frac{x_1^2 x_2^2}{8} = \frac{1}{8}(4 + x_1^2)(4 + x_2^2).$$

Hemos demostrado que para cualesquiera x_1 y x_2 se cumple la desigualdad

$$\frac{x_1 + x_2}{(4 + x_1^2)(4 + x_2^2)} \leqslant \frac{1}{8},$$

y, por tanto,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant \frac{1}{8}|x_2 - x_1|.$$

Esto significa que la aplicación $\varphi(x)$ es contraída a lo largo de todo el eje.

Ya sabemos que en este caso existe un segmento que en esta aplicación se transforma en sí mismo. Para hallarlo, hagamos $a = 0$. En la aplicación $\varphi(x)$ el punto $a = 0$ se transforma en el punto $b = 1/4$. Luego, en nuestro caso $q = {}^1/_8$. Hagamos $q_1 = 1/4$ y designemos por R el número $\frac{|b - a|}{1 - q_1} = \frac{1}{3}$. El segmento $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ se transforma, realizándose la aplicación $\varphi(x)$, en sí mismo. Esto quiere decir que en este segmento existe un punto inmóvil, es decir, la raíz de la ecuación (34). Para hallar este punto, tomemos cualquier punto del segmento $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, sea por ejemplo, $x_0 = 0$. Empleando el método de iteraciones, obtenemos

$$x_1 = \frac{1}{4} = 0{,}25,$$

$$x_2 = \frac{1}{4 + 0{,}25^2} = \frac{1}{4{,}0625} = 0{,}2461,$$

$$x_3 = \frac{1}{4 + 0{,}2461^2} = \frac{1}{4{,}0605} = 0{,}2463,$$

$$x_4 = \frac{1}{4 + 0{,}2463^2} = \frac{1}{4{,}0605} = 0{,}2463.$$

Con un error inferior a 0,0001 tenemos $x_3 = x_4$. Por consiguiente, la raíz de la ecuación (34), ubicada en el segmento $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ es igual a 0,2463 con un error inferior a 0,0001. Ya que la aplicación $\varphi(x)$ es contraída en todo el eje, la ecuación (34) no tiene otras raíces.

Ejemplo 2. ¿Puede aplicarse el método de aproximaciones secesivas para resolver la ecuación

$$x = 1 + \sqrt[3]{x}$$

en el segmento $[-1,8]$?

Aquí, $\varphi(x) = 1 + \sqrt[3]{x}$. Ya que $\varphi(-1) = 0$, $\varphi(8) = 3$, entonces, la aplicación $\varphi(x)$ transforma el segmento $[-1,8]$ en sí mismo. Sin embargo, la aplicación dada no es contraída en este segmento, puesto que, por ejemplo, para $x_1 = 0{,}008$, $x_2 = 0{,}0008$

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\sqrt[3]{0{,}008} - \sqrt[3]{-0{,}008}\right| = 0{,}4 > |x_2 - x_1|.$$

Al demostar el hecho de que la aplicación en el ejemplo 1 fue contraída, empleamos la desigualdad $\sqrt{ab} < \frac{a+b}{2}$. Ahora deduciremos

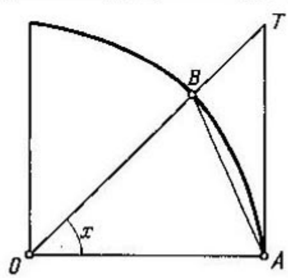


Fig. 6

algunas desigualdades las cuales se usan con frecuencia para la demostración de que dicha aplicación es contraída.

Demostremos que para $x > 0$ tiene lugar la desigualdad

$$\operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg}(x). \qquad (35)$$

Notemos, para ello, que en la fig. 6 el área S_{OAB} del sector OAB con el ángulo central x está comprendida entre las áreas de los triángulos OAB y OAT:

$$S_{\triangle OAB} < S_{\text{sector } OAB} < S_{\triangle OAT}$$

Pero,

$$S_{\triangle OAB} = \frac{R^2 \operatorname{sen} x}{2}, \quad S_{\triangle OAT} = \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}$$

(R es el radio del círculo). Mientras tanto, el área del sector OAB es igual a $\frac{R^2 x}{2}$ (medimos el ángulo en radianes). Por esto,

$$\frac{R^2 \operatorname{sen} x}{2} < \frac{R^2 x}{2} < \frac{R^2 \operatorname{tg} x}{2}.$$

Al reducir por $\frac{R^2}{2}$, llegamos a la desigualdad (35). De la desigualdad (35) se desprende que para $0 < x < 1$, tenemos

$$x < \operatorname{arc sen} x,$$

y para $x > 0$, tenemos

$$x > \operatorname{arctg} x.$$

Indiquemos también las desigualdades

$$e^x > 1 + x, \quad x > 0,$$

$$\ln(1 + x) < x, \quad 0 < x < 1,$$

cuya demostración es un poco más complicada.

Ejemplo 3. Aclárese, si puede resolverse mediante el método de iteraciones la ecuación

$$x = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \tag{36}$$

Dado que para todo valor de x se tiene $1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x > 0$, entonces la ecuación sólo puede tener las raíces positivas. Tenemos:

$$\varphi(x) = 1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x. \tag{37}$$

Por esto,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| = \left|\left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x_2\right) - \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x_1\right)\right| =$$

$$= \frac{1}{2} |\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1|.$$

Pero, para $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$

$$\operatorname{arctg} x_2 - \operatorname{arctg} x_1 = \operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}$$

y, por lo tanto,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \frac{1}{2}\left|\operatorname{arctg} \frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}\right| < \frac{1}{2}\left|\frac{x_2 - x_1}{1 + x_1 x_2}\right| < \frac{1}{2}|x_2 - x_1|.$$

Esto significa que la aplicación (37) es contraída en el semieje $[0, \infty]$. Esta aplicación transforma el segmento $[0, \sqrt{3}]$ en su parte $[1, 1 + \pi/6]$. Por esta razón, existe una raíz única de la ecuación (36), ubicada en el segmento $[1, 1 + \pi/6]$. Para hallar esta raíz, hagamos $x_1 = 1$. En este caso,

$$x_2 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = 1 + \frac{\pi}{8} \simeq 1{,}39,$$

$$x_3 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}39 = 1{,}474,$$

$$x_4 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}474 = 1{,}487,$$

$$x_5 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}487 = 1{,}489,$$

$$x_6 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}489 = 1{,}490,$$

$$x_7 = 1 + \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1{,}490 = 1{,}490.$$

Vemos que la igualdad $x_6 = x_7 = 1{,}490$ se cumple con un error inferior a 0,001. Quiere decir que con esta precisión la raíz de nuestra ecuación es igual a 1,490. Ya que la aplicación $\varphi(x)$ es contraída en todo el semieje $0 \leqslant x < \infty$, resulta que la ecuación (36) no tiene otras raíces.

Ocurre con frecuencia que la ecuación $x = \varphi(x)$, la cual no se resuelve por el método de iteraciones, puede transformarse a una ecuación del tipo que admite este método. Tomemos, por ejemplo, la ecuación

$$x = x^3 - 2. \qquad (38)$$

Puesto que aquí

$$\varphi(1) = -1 < 1, \ \varphi(2) = 6 > 2,$$

esta ecuación tiene una raíz en el segmento [1, 2]. Pero, la aplicación $x^3 - 2$ no es contraída en este segmento, ya que no aplica este segmento en su parte. Escribamos la ecuación (38) en la forma

$$x = \sqrt[3]{x + 2}.$$

Aquí, $\psi(x) = \sqrt[3]{x+2}$ y, por tanto,

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| = \left|\sqrt[3]{x_2 + 2} - \sqrt[3]{x_1 + 2}\right| =$$

$$= \left|\frac{x_2 - x_1}{\sqrt[3]{(x_2 + 2)^2} + \sqrt[3]{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} + \sqrt[3]{(x_1 + 2)^2}}\right|.$$

En el segmento [1, 2] tenemos $x_1 \geqslant 1$, $x_2 \geqslant 1$. Por consiguiente, en este segmento

$$|\psi(x_2) - \psi(x_1)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{9}}|x_2 - x_1|.$$

Hemos demostrado, pues, que la aplicación $\psi(x)$ es contraída en el segmento [1, 2]. Hagamos $x_1 = 1$ y apliquemos el método de iteraciones.

Obtendremos

$$x_2 = \sqrt[3]{3} = 1{,}442,$$
$$x_3 = \sqrt[3]{3{,}442} = 1{,}510,$$
$$x_4 = \sqrt[3]{3{,}510} = 1{,}520,$$
$$x_5 = \sqrt[3]{3{,}520} = 1{,}521,$$
$$x_6 = \sqrt[3]{3{,}521} = 1{,}521.$$

Así pues, la raíz de la ecuación (38), ubicada en el segmento [1, 2] es, con un error inferior a 0,0001, el número 1,521. Esta ecuación no tiene otras raíces.

Vemos que la transformación acertada de la ecuación de partida la llevó a la de otro tipo que admite usar el método de iteraciones.

El criterio de convergencia del método de iteraciones, descrito aquí, no es muy cómodo para el empleo, dado que requiere la demostración de las desigualdades bastante complejas. A continuación (en el § 21) vamos a conocer un corolario de este criterio, que simplifica considerablemente el procedimiento de demostrar la convergencia del proceso de iteraciones.

§ 11
MÉTODO DE CUERDAS

El método de iteraciones es uno de los métodos más generales de la resolución aproximada de ecuaciones. Muchos otros métodos para la resolución aproximada de ecuaciones representan casos particulares del método de iteraciones. Ahora, demos a conocer uno de estos métodos, llamado *método de cuerdas*.

Supongamos que se necesita resolver la ecuación $f(x)=0$. Este problema es equivalente al de búsqueda de los puntos, en los cuales la curva de la función $y=f(x)$ corta el eje de abscisas.

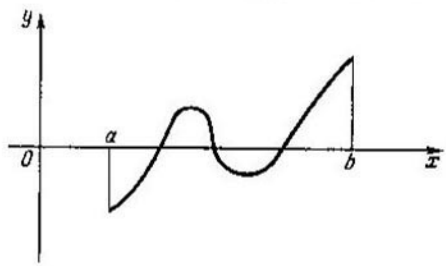


Fig. 7

Supongamos también que la función $f(x)$ es continua y en los puntos a y b tiene valores de signos contrarios. Entonces, al menos en un punto del segmento $[a, b]$ esta función se anula. En otras palabras, al menos en un punto del segmento $[a, b]$ el gráfico de la función $y=f(x)$ corta el eje de abscisas. En general, pueden haber unos cuantos de tales puntos (fig. 7). No obstante, si la función $y=f(x)$ es *monótona* en el segmento $[a, b]$ y tiene en sus extremos los valores de signos opuestos, el gráfico de la función en este segmento se interseca con el eje de abscisas sólo en un único punto ξ. Para hallar aproximadamente este punto, sustituyamos en el segmento $[a, b]$ el arco de la curva $y=f(x)$ por la cuerda correspondiente MN y encontraremos el punto de intersección de esta cuerda con el eje Ox (fig. 8).

Examinemos con este fin los triángulos semejantes MM_1T y NN_1T. De la semejanza de estos triángulos se deduce que

$\frac{M_1T}{MM_1} = \frac{TN_1}{N_1N}$. Pero, de la fig. 8 se ve que $M_1T = a_1 - a$, $TN_1 = b - a_1$, $MM_1 = -f(a)$ y $N_1N = f(b)$, donde mediante a_1 está designada la abscisa del punto de intersección de la cuerda

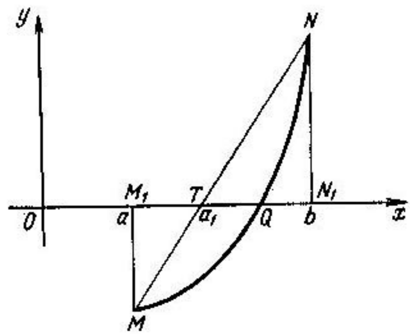


Fig. 8

MN con el eje Ox. Por esta causa

$$\frac{a_1 - a}{-f(a)} = \frac{b - a_1}{f(b)}.$$

Al resolver esta ecuación, encontramos que

$$a_1 = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Esta igualdad puede escribirse también en la forma

$$a_1 = b - f(b)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \tag{39}$$

o bien

$$a_1 = a - f(a)\frac{b - a}{f(b) - f(a)} \tag{40}$$

(compruébese, reduciendo los segundos miembros en las fórmulas (39) y (40) a un mismo denominador).

El número a_1 es precisamente el valor aproximado de la raíz de la ecuación $f(x) = 0$, que se encuentra entre los puntos a y b.

Como los signos de los números $f(a)$ y $f(b)$ son opuestos, entonces, o bien el signo de $f(a)$ o bien el de $f(b)$ se diferencian del signo de $f(a_1)$. Si en los puntos a y a_1 la función $f(x)$ tiene signos contrarios, se aplica al segmento $[a, a_1]$ la fórmula (39) y se obtiene la aproximación siguiente para la raíz buscada:

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \frac{a_1 - a}{f(a_1) - f(a)}. \tag{41}$$

Si la función $f(x)$ asume los valores de signos opuestos en los puntos a_1 y b, se aplica la fórmula (40) al segmento $[a_1, b]$ y se supone

$$a_2 = a_1 - f(a_1) \frac{b - a_1}{f(b) - f(a_1)}. \tag{42}$$

Al hallar el valor a_2, se aplica la fórmula (39) al segmento $[a, a_2]$ (o, correspondientemente, la fórmula (40) al segmento $[a_2, b]$) y se halla la siguiente aproximación a_3. En general, una vez hallada la aproximación a_n, se busca la siguiente aproximación según la fórmula

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n) \frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)} \tag{43}$$

o, según la fórmula

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n) \frac{b - a_n}{f(b) - f(a_n)}. \tag{44}$$

Hemos obtenido dos fórmulas (43) y (44). Veamos, ahora, en qué caso debe ser usada una y otra fórmula. Supongamos que la curva gira su concavidad hacia la parte positiva del eje de ordenadas. En este caso se deben unir los puntos de la curva con aquel extremo M o N, en el que la función es positiva. Si, en cambio, la curva gira su concavidad hacia la parte negativa del eje de ordenadas, los puntos de la curva se unen con aquel extremo, en el cual la función es negativa. En la figura 9 aparecen los diferentes casos posibles. Estos dibujos hacen evidente geométricamente la afirmación siguiente.

Supongamos que en el segmento $[a, b]$ la función $f(x)$ es continua, monótona, gira su concavidad hacia la dirección constante y admite en los extremos del segmento los valores de signos opuestos. En este caso, con la elección adecuada de la fórmula de aproximaciones el método de cuerdas da una sucesión de puntos convergente hacia la raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

En el caso de que la elección de la fórmula no sea acertada, el método de cuerdas puede llevar a que el punto a_2 resulte fuera de los límites del segmento $[a, b]$. Esto se ilustra en la fig. 10.

El método descrito de cuerdas es un caso particular del método

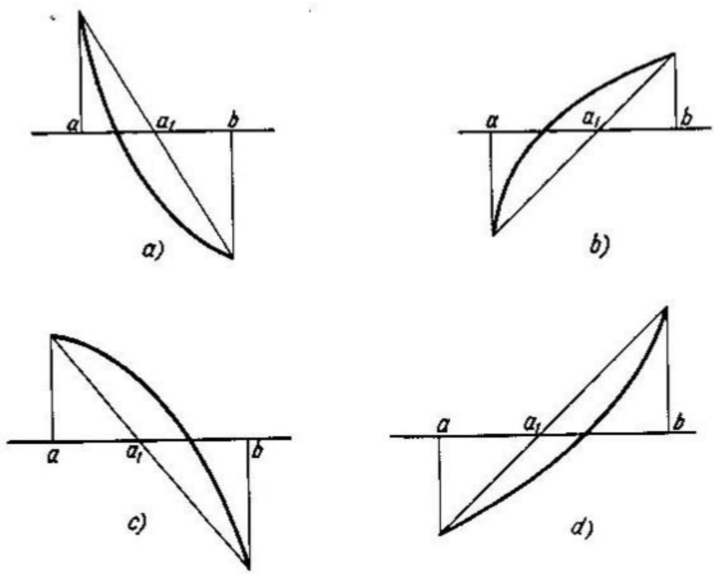


Fig. 9

de iteraciones. Supongamos que la función $f(x)$ no se reduce a cero, cuando $x = a$. Entonces, la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$x = x - f(x)\frac{x - a}{f(x) - f(a)}. \tag{45}$$

En efecto, si $f(\xi) = 0$, entonces

$$\xi = \xi - f(\xi)\frac{\xi - a}{f(\xi) - f(a)}. \tag{46}$$

Inversamente, si $\xi > a$ y se cumple la igualdad (46), entonces $f(\xi) = 0$.

Pero, la ecuación (45) tiene por expresión $x = \varphi(x)$, donde

$$\varphi(x) = x - f(x)\frac{x-a}{f(x)-f(a)} = \frac{af(x) - xf(a)}{f(x)-f(a)}.$$

Hagamos $x_0 = b$ y apliquemos el método de iteraciones. Obtendremos la misma sucesión de números $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, que tuvimos al emplear el método de cuerdas:

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n)\frac{a_n - a}{f(a_n) - f(a)}.$$

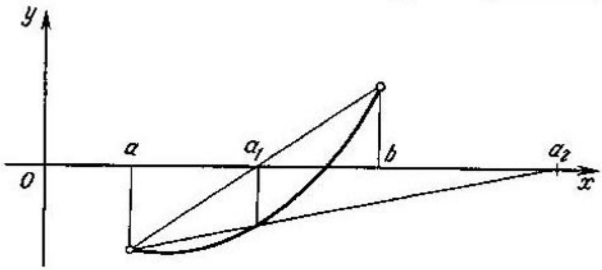


Fig. 10

Como ejemplo, resolvamos, por el método de cuerdas, la ecuación

$$x^3 + 3x - 1 = 0. \tag{47}$$

Aquí, $f(x) = x^3 + 3x - 1$. Dado que $f(0) = -1$, $f(1) = 3$, entonces la ecuación (47) tiene por lo menos una raíz en el segmento $[0, 1]$. Si dibujamos el gráfico de la función $y = x^3 + 3x - 1$, veremos que en el segmento $[0, 1]$ él gira su concavidad hacia la parte positiva del eje de ordenadas. Por esta razón aplicamos la fórmula (39). Según la fórmula (39), la primera aproximación para esta raíz es el número

$$x_1 = b - f(b)\frac{b-a}{f(b)-f(a)} = 1 - 3\cdot\frac{1-0}{3-(-1)} = 0{,}25.$$

La segunda aproximación se halla por medio de la fórmula

$$x_2 = b - f(b)\frac{b - x_1}{f(b) - f(x_1)} = 1 - 3\cdot\frac{1 - 0{,}25}{3 + 0{,}23} = 0{,}31$$

A continuación,

$$x_3 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}31}{3 + 0{,}040} = 0{,}319,$$

$$x_4 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}319}{3 + 0{,}010} = 0{,}322,$$

$$x_5 = 1 - 3 \cdot \frac{1 - 0{,}322}{3 + 0{,}0006} = 0{,}322.$$

De este modo, con un error inferior a 0,001, la raiz de la ecuación, ubicada en el segmento 0,1, es igual a 0,322.

§ 12
MÉTODO DE CUERDAS PERFECCIONADO

Si el método de cuerdas converge, la velocidad de la convergencia será la misma que es propia para el método de iteraciones: el error en el valor de la raiz disminuye como una progresión geométrica. El perfeccionamiento del método de cuerdas da la convergencia mucho más rápida. En el método de cuerdas habitual se usa, en cada paso, uno de los extremos del segmento $[a, b]$ y la última aproximación obtenida. En lugar de esto pueden ser empleadas dos últimas aproximaciones, pues, ellos son, comúnmente, más cercanas a la raíz buscada que los extremos del segmento $[a, b]$.

La fórmula, en la cual se utilizan dos últimas aproximaciones, tiene la forma siguiente (fig. 11, *a*):

$$a_{n+1} = a_n - f(a_n) \cdot \frac{a_n - a_{n-1}}{f(a_n) - f(a_{n-1})} \tag{48}$$

Con ello, a_1 se calcula por medio de la fórmula (39) y a_2, mediante las fórmulas (41) ó (42), según sean los signos de $f(a)$, $f(b)$, $f(a_1)$: si $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, entonces para $f(a_1) < 0$ se toma la fórmula (42), y cuando $f(a_1) > 0$, se elige la fórmula (41).

Si, por casualidad, llegamos a que el punto a_3, calculado por medio de la fórmula (48), está fuera de los límites del segmento $[a, b]$, entonces, realizando el paso siguiente, en lugar de este punto se debe tomar el extremo del segmento $[a, b]$ que sea más próximo al punto citado (fig. 11, b).

Resulta pues, que la convergencia del método perfeccionado de cuerdas es más rápida que la del método ordinario. A saber,

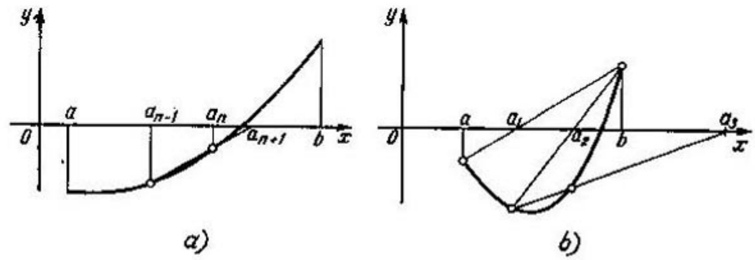


Fig. 11

si ξ es una raíz de la ecuación $f(x) = 0$, entonces

$$|a_{n+1} - \xi| < C|a_n - \xi|^t, \tag{49}$$

donde

$$t = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \simeq 1{,}618.$$

A título de ejemplo usaremos este método para resolver la misma ecuación

$$x^3 + 3x - 1 = 0,$$

que antes resolvíamos con ayuda del método de cuerdas. Las primeras aproximaciones, $a_1 = 0{,}25$ y $a_2 = 0{,}31$, son las mismas que en el método habitual de cuerdas.

La siguiente aproximación calculamos por medio de la fórmula

$$a_3 = a_2 - f(a_2)\frac{a_2 - a_1}{f(a_2) - f(a_1)} = 0{,}31 + 0{,}040\,\frac{0{,}31 - 0{,}25}{-0{,}40 + 0{,}234} = 0{,}3223.$$

Obtenemos que $f(0{,}3223) = 0{,}0004$. Está claro que $x = 0{,}3223$ nos da la raíz buscada con un error inferior a 0,0001.

§ 13
DERIVADA DE UN POLINOMIO

Al resolver la ecuación $f(x) = 0$ por el método de iteraciones, mucho depende del método por el cual la ecuación citada fue reducida a la forma $x = \varphi(x)$. En muchas circunstancias resulta más conveniente el método propuesto por Newton. Este método se basa en el concepto de la derivada. En este párrafo vamos a relatar qué es la derivada de un polinomio. Esto nos permitirá aplicar el método de Newton a la resolución de las ecuaciones algebraicas, es decir de las ecuaciones del tipo

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \tag{50}$$

Sea

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k$$

– cierto polinomio. Examinemos el polinomio $f(x + \alpha)$, es decir, la expresión

$$a_0(x+\alpha)^k + a_1(x+\alpha)^{k-1} + \ldots + a_k. \tag{51}$$

Si abrimos paréntesis en la expresión (51), en algunos sumandos α faltará, en otros sumandos figurará en el primer grado, en los terceros en el segundo grado, etc. Reunamos los términos que contienen α de un mismo grado. Entonces, el polinomio $f(x + \alpha)$ tendrá por expresión

$$f(x+\alpha) = f_0(x) + f_1(x)\alpha + f_2(x)\alpha^2 + \ldots + f_k(x)\alpha^k \tag{52}$$

(ya que el grado del polinomio $f(x)$ es igual a k, el grado superior de α en el desarrollo (52) también es igual a k). Es evidente, además, que $f_0(x), \ldots, f_k(x)$ también son polinomios de x.

Ejemplo. Sea

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1.$$

Entonces,

$$f(x+\alpha) = 2(x+\alpha)^3 - 3(x+\alpha)^2 + 6(x+\alpha) - 1 =$$
$$= 2(x^3 + 3x^2\alpha + 3x\alpha^2 + \alpha^3) - 3(x^2 + 2x\alpha + \alpha^2) + 6(x+\alpha) - 1 =$$
$$= (2x^3 - 3x^2 + 6x - 1) + (6x^2 - 6x + 6)\alpha + (6x - 3)\alpha^2 + 2\alpha^3.$$

Por lo tanto, en este caso

$$f_0(x) = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1,$$

$$f_1(x) = 6x^2 - 6x + 6,$$

$$f_2(x) = 6x - 3,$$

$$f_3(x) = 2.$$

Vemos que el sumando $f_0(x)$ coincide con $f(x)$. Esta coincidencia no es casual. Si en la igualdad (52) ponemos $\alpha = 0$, obtendremos que $f(x) = f_0(x)$.

Exploremos, ahora, el siguiente sumando $f_1(x)\alpha$. El coeficiente de α, esto es, el polinomio $f_1(x)$, se denomina *derivada del polinomio* $f(x)$. Por ejemplo, la derivada del polinomio $2x^3 - 3x^2 + 6x - 1$ tiene por expresión $6x^2 - 6x - 6$. La derivada del polinomio $f(x)$ se designa mediante el símbolo $f(x)$.

Así pues, *la derivada $f'(x)$ del polinomio $f(x)$ se llama el coeficiente de α en el desarrollo del polinomio $f(x + \alpha)$ según los grados de α.*

Al emplear las designaciones introducidas, la fórmula (52) puede escribirse en la forma

$$f(x + \alpha) = f(x) + f'(x)\alpha + \dots \tag{53}$$

Los puntos en esta fórmula denotan los términos que contienen $\alpha^2, \alpha^3, \dots, \alpha^k$. Por ejemplo,

$$2(x + \alpha)^3 - 3(x + \alpha)^2 + 6(x + \alpha) - 1 = 2x^3 - 3x^2 + 6x - 1 + \\ + (6x^2 - 6x + 6)\alpha + \dots$$

Hemos introducido el concepto de la derivada de un polinomio $f(x)$. Señalemos, ahora, cómo se calcula esta derivada. Examinemos con este fin el polinomio

$$f(x + \alpha) = a_0(x + \alpha)^k + a_1(x + \alpha)^{k-1} + \dots + a_{k-1}(x + \alpha) + \alpha_k.$$

Sustituyendo cada sumando según la fórmula $(x + \alpha^m = x^m + mx^{m-1}\alpha + \dots$ (véase § 6), obtendremos

$$f(x + \alpha) = a_0(x^k + kx^{k-1}\alpha + \dots) + \\ + a_1[x^{k-1} + (k-1)x^{k-2}\alpha^2 + \dots] + \dots + a_{k-1}(x + \alpha) + a_k = \\ = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k + \\ + \alpha[ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} + \dots + a_{k-1}] + \dots$$

Comparemos esta igualdad con la (53):

$$f(x + \alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \dots$$

Obtenemos la siguiente afirmación:

La derivada del polinomio

$$f(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_{k-1}x + a_k \tag{54}$$

tiene por expresión

$$f'(x) = ka_0x^{k-1} + (k-1)a_1x^{k-2} + \ldots + a_{k-1} \tag{55}$$

Por ejemplo, la derivada del polinomio

$$f(x) = 6x^7 + 8x^3 - 3x^2 - 1$$

es

$$f'(x) = 42x^6 + 24x^2 - 6x.$$

§ 14
MÉTODO DE NEWTON PARA LA RESOLUCIÓN APROXIMADA DE LAS ECUACIONES ALGEBRAICAS

Volvamos a la resolución aproximada de las ecuaciones algebraicas. Sea dada la ecuación

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \tag{56}$$

Supongamos que de una u otra manera fue hallado el valor aproximado x_1 de la raíz de esta ecuación y señalemos cómo se puede hallar el valor de esta raíz más exacto. Designemos con α_1 el error del valor x_1, es decir, supongamos que $x_1 + \alpha_1$ es la raíz de la ecuación (56). En este caso tiene lugar la igualdad

$$a_0(x_1 + \alpha_1)^k + a_1(x_1 + \alpha_1)^{k-1} + \ldots + a_k = 0. \tag{57}$$

En otras palabras,

$$f(x_1 + \alpha_1) = 0,$$

donde con $f(x)$ está designado el polinomio

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Pero, según la fórmula (31), tenemos

$$f(x_1 + \alpha_1) = f(x_1) + \alpha_1 f'(x_1) + \ldots,$$

donde por medio de los puntos están designados los términos que contienen $\alpha_1^2, \ldots, \alpha_1^k$. De este modo, para determinar α_1

nos disponemos de la ecuación

$$f(x_1+\alpha_1)=f(x_1)+\alpha_1 f'(x_1)+\ldots=0. \qquad (58)$$

Si la aproximación inicial x_1 fue suficientemente acertada, el error α_1 de esta aproximación es pequeño. En este caso, los términos en la igualdad (58), designados con puntos, serán pequeños en comparación con α_1. Despreciando estos términos, obtendremos la igualdad aproximada para determinar α_1

$$f(x_1)+\alpha_1 f'(x_1)\approx 0. \qquad (59)$$

De esta igualdad se deduce que

$$\alpha_1 \approx -\frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \qquad (60)$$

Por eso, el valor mejorado x_2 para la raíz de nuestra ecuación se define por medio de la fórmula

$$x_2=x_1-\frac{f(x_1)}{f'(x_1)}. \qquad (61)$$

Después de esto, puede ser mejorada de nuevo la aproximación hallada. La tercera aproximación para la raíz se da por medio de la fórmula

$$x_3=x_2-\frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

En general, una vez determinada la n-ésima aproximación x_n de la raíz buscada, la siguiente aproximación se da por medio de la fórmula

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \qquad (62)$$

En la forma desarrollada esta fórmula se escribe así:

$$x_{n+1}=x_n-\frac{a_0x_n^k+a_1x_n^{k-1}+\ldots+a_{k-1}x_n+a_k}{ka_0x_n^{k-1}+(k-1)a_1x_n^{k-2}+\ldots+a_{k-1}}. \qquad (63)$$

Si, en los límites de la precisión prefijada, los valores aproximados x_n y x_{n+1} coinciden, nuestro proceso (en los límites de la precisión prefijada) se considera terminado, y el valor buscado de la raíz está determinado.

El método descrito de la resolución de las ecuaciones se debe a Newton, famoso matemático inglés.

El método de Newton está estrechamente ligado con el método de iteraciones. A saber, si las funciones $y=f(x)$ e $y=f'(x)$ no tienen raíces comunes, la ecuación $f(x) = 0$ es equivalente a la ecuación

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}. \tag{64}$$

Al aplicar a esta ecuación el método de iteraciones, obtendremos una sucesión de números $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ligados con la misma correlación

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{65}$$

que teníamos, al operar con el método de Newton. En otras palabras el método de Newton consiste en lo que la ecuación $f(x) = 0$ se escribe en la forma (64) y a él se le aplica el método de iteraciones.

Ejemplo. Resuélvase por el método de Newton, la ecuación

$$x^3 - 3x - 5 = 0$$

con un error inferior a 0,001, tomando por la primera aproximación $x_1 = 3$.

Como la derivada del polinomio

$$f(x) = x^3 - 3x - 5$$

es el polinomio

$$f'(x) = 3\,x^2 - 3,$$

entonces, la fórmula (62) tomará, en este caso, la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^3 - 3x_n - 5}{3x_n^2 - 3}.$$

Por esta causa,

$$x_2 = 3 - \frac{27 - 9 - 5}{27 - 3} = 3 - \frac{13}{24} = 2{,}46,$$

$$x_3 = 2{,}46 - \frac{14{,}89 - 7{,}38 - 5}{18{,}16 - 3} = 2{,}46 - 0{,}165 = 2{,}295$$

$$x_4 = 2{,}295 - \frac{12{,}088 - 6{,}885 - 5}{15{,}801 - 3} = 2{,}295 - 0{,}016 = 2{,}279,$$

$$x_5 = 2{,}279 - \frac{11{,}837 - 6{,}807 - 5}{15{,}582 - 3} = 2{,}279$$

Vemos que la igualdad

$$x_4 = x_5$$

se cumple con un error inferior a 0,001. Por esta causa, la raíz de la ecuación $x^3 - 3x - 5 = 0$ es igual a 2,279 con un error inferior a 0,001.

El método del cálculo aproximado de raíces, expuesto en el § 6, es un caso particular del método de Newton. Efectivamente, la búsqueda de $\sqrt[k]{a}$ no es otra cosa que la resolución de la ecuación

$$x^k - a = 0.$$

Pero, la derivada del polinomio $x^k - a$ es igual a kx^{k-1}, y, por tanto, para la ecuación

$$x^k - a = 0$$

la fórmula (62) tendrá por expresión

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^k - a}{kx_n^{k-1}} = \frac{a + (k-1)x_n^k}{kx_n^{k-1}}.$$

Esta es la fórmula, según la cual se calculan las aproximaciones para $\sqrt[k]{a}$.

Indiquemos la siguiente diferencia esencial que existe entre las soluciones de la ecuación $x^k - a = 0$ y de la ecuación algebraica general

$$a_0x^k + a_1x^{k-1} + \ldots + a_k = 0.$$

Para la ecuación $x^k - a = 0$, la elección de la aproximación inicial x_1 no tenía mucha importancia. Sea cual fuera el valor de x_1, al haber realizado unos cuantos pasos, llegaremos al valor de $\sqrt[k]{a}$ con la precisión prefijada. No es así, cuando resolvemos la ecuación (56). En este caso, algunos valores iniciales llevan a ciertas raíces de la ecuación, otros valores iniciales conducen a las raíces diferentes, y ciertos valores iniciales no llevan a ningún valor determinado de la raíz: la sucesión de números $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, calculada por medio de la fórmula (62), no tiende a ningún límite determinado, es decir, es divergente.

§ 15
SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DE LA DERIVADA

El método de Newton lo expusimos sólo para las ecuaciones algebraicas. Con el fin de extenderlo a las ecuaciones de forma arbitraria, es necesario generalizar el concepto de la derivada, introduciéndolo para cualesquiera funciones. Con este objeto

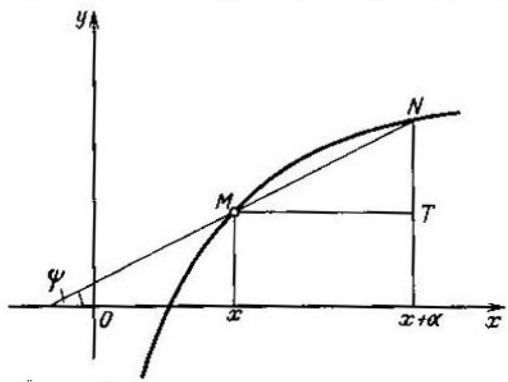


Fig. 12

aclaremos el significado geométrico de la derivada. Examinemos el gráfico del polinomio

$$y = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$$

y escojamos en este gráfico dos puntos M y N (fig. 12). Supongamos que la abscisa del punto M es x, y en el punto N la abscisa es igual a $x + \alpha$. Entonces, las ordenadas en los puntos M y N se definen, respectivamente, por las expresiones

$$f(x) = a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \ldots + a_k$$

y

$$f(x + \alpha) = a_0 (x + \alpha)^k + a_1 (x + \alpha)^{k-1} + \ldots + a_k.$$

Tracemos por los puntos M y N. una secante y calculemos el coeficiente angular k_{sec} [*] de esta secante. Del dibujo se ve que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{TN}{MT}.$$

Pero, el segmento MT es igual a la diferencia entre las abscisas de los puntos M y N, y, por tanto,

$$MT = (x + \alpha) - x = \alpha.$$

El segmento TN es igual a la diferencia entre las ordenadas de estos puntos y, por tanto,

$$TN = f(x + \alpha) - f(x).$$

Por consiguiente,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{TN}{MT} = \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}$$

Pero, según la fórmula (53),

$$f(x + \alpha) = f(x) + \alpha f'(x) + \ldots,$$

donde con los puntos están designados los términos que contienen α^2, α^3, ...

Por esta causa

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\alpha f'(x) + \ldots}{\alpha} = f'(x) + \ldots,$$

donde con los puntos están designados esta vez los sumandos que contienen α, α^2, ...

Así pues, el coeficiente angular de la secante MN se expresa por medio de la fórmula

$$k_{sec} = \operatorname{tg}\psi = f'(x) + \ldots \tag{66}$$

Vamos ahora a disminuir el valor de α. La secante MN girará, en este caso, alrededor del punto M. En límite, para $\alpha = 0$, la secante se transformará en una tangente a la curva en el punto M. La fig. 13 ilustra las posiciones de la secante para $\alpha = 1$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$.

[*] Se llama *coeficiente angular de una recta* a la tangente del ángulo que forma esta recta con el sentido positivo del eje Ox. Por ejemplo, si la recta forma con el eje Ox el ángulo de 60°, el coeficiente angular de la recta es igual a $\sqrt{3}$.

Pero, todos los términos, designados en la fórmula (66) con puntos, se anulan cuando $\alpha = 0$. Por eso, el coeficiente angular de la tangente al gráfico del polinomio $y = f(x)$ en el punto de abscisa x se expresa por la fórmula

$$k_{sec} = f'(x). \tag{67}$$

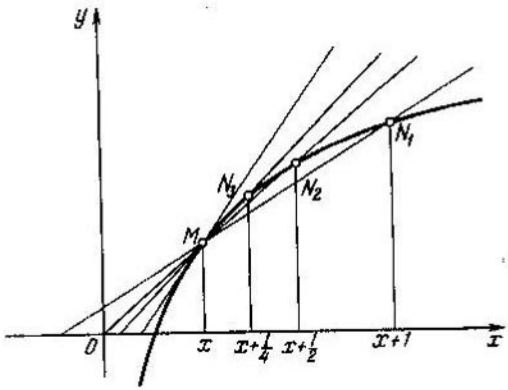


Fig. 13

Así pues, *la derivada del polinomio $f(x)$ es igual al coeficiente angular de la tangente al gráfico de este polinomio, trazado en el punto de abscisa x.*

Ejemplo. Hállese el ángulo que forma con el eje Ox la recta tangente al gráfico del polinomio

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1,$$

trazado en el punto de abscisa $x = 2$.

Dado que $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, entonces $f'(2) = 1$. Por consiguiente, $\operatorname{tg} \psi = 1$, de lo que se deduce que el ángulo de inclinación φ es igual a $45°$.

§ 16
SIGNIFICADO GEOMÉTRICO DEL MÉTODO DE NEWTON

Ahora podemos aclarar el significado geométrico del método de Newton para la resolución aproximada de las ecuaciones algebraicas. Supongamos que se necesita resolver la ecuación $f(x) = 0$, donde $f(x)$ es un cierto polinomio. Desde el punto de vista geométrico es un problema en que se buscan los puntos de intersección del gráfico de la función $y = f(x)$ con el eje Ox, es decir, los puntos donde $y = 0$.

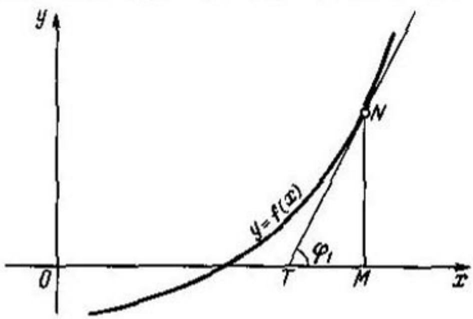


Fig. 14

Supongamos que el valor aproximado x_1 de la raíz de esta ecuación ya está conocido. Tracemos por el punto N de abscisa x_1 una tangente a la curva $y = f(x)$. Siendo acertada la elección del valor x_1, el punto T de la intersección de la tangente con el eje Ox será más próximo al punto en que se cortan la curva $y = f(x)$ y el eje Ox que el punto M (fig. 14).

Para hallar la abscisa x_2 del punto T, examinemos el triángulo TMN. El cateto MN de este triángulo no es otra cosa que el valor de la función $y = f(x)$ en el punto x_1, es decir, $MN = f(x_1)$. Mientras tanto, el cateto TM es igual a $x_1 - x_2$. De aquí se deduce que la tangente del ángulo φ_1 que forma la recta tangente con el eje Ox se expresa por medio de la fórmula

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2}. \tag{68}$$

De la igualdad (68) se desprende que

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{\operatorname{tg} \varphi_1}. \tag{69}$$

Pero $\operatorname{tg} \varphi_1$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$, trazada por el punto de abscisa x_1. Por esta razón, en virtud del significado geométrico de la derivada, $\operatorname{tg} \varphi_1 = f'(x_1)$.

Esto significa que la fórmula (69) puede ser escrita así:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'^1(x_1)}.$$

Por consiguiente, hemos hallado la segunda aproximación para la raíz buscada. Tracemos, ahora, una tangente a la curva $y = f(x)$

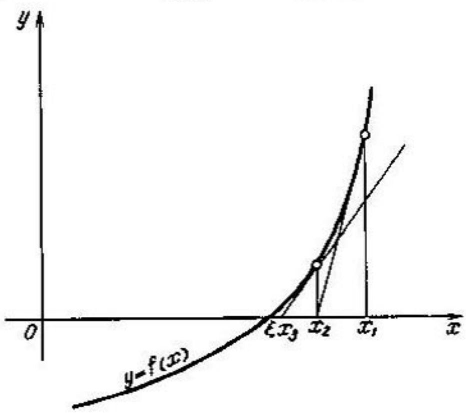


Fig. 15

por el punto, donde la abscisa es x_2. La abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox se da por medio de la fórmula

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)}.$$

En general, una vez hallada la aproximación x_n, entonces, para obtener la aproximación siguiente x_{n+1}, se debe trazar una tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_n. La abscisa del punto de intersección de esta tangente con el eje Ox nos da x_{n+1}.

La fórmula para calcular x_{n+1} es:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \tag{70}$$

o, lo que es lo mismo,

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\operatorname{tg} \varphi_n}, \tag{70'}$$

donde φ_n es el ángulo de inclinación de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_n. Esta fórmula coincide con la fórmula (62) del método de Newton. Pusimos en claro, pues, el significado geométrico del método de Newton. El consiste en que el arco de la curva $y = f(x)$ se sustituye por la tangente a esta curva. Por eso, el método de Newton se llama también *método de las tangentes*. En la fig. 15 se ve como los puntos $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, que se obtienen por el método de Newton, van aproximándose al punto ξ, donde se cortan la curva $y = f(x)$ y el eje Ox.

§ 17
DERIVADAS DE LAS FUNCIONES CUALESQUIERA

El significado geométrico expuesto del método de Newton permite generalizarlo sin dificultad alguna para cualesquiera ecuaciones del tipo $f(x) = 0$, donde $f(x)$ ya puede no ser un polinomio. A saber, para hallar la solución de esta ecuación, tomemos algún valor aproximado x_1 de la raíz. Tracemos una tangente a la curva $y = f(x)$ por el punto de abscisa x_1 y designemos con x_2 el punto donde la tangente corta el eje Ox. Por el punto de abscisa x_2 tracemos de nuevo una tangente a la curva $y = f(x)$, etc. Al igual que en el caso en que $f(x)$ sea un polinomio, es fácil establecer que

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{\operatorname{tg} \varphi_n}, \tag{71}$$

donde $\operatorname{tg} \varphi_n$ es el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ en el punto de abscisa x_n.

Por el momento la fórmula (71) no sirve para los cálculos, puesto que todavía no sabemos determinar $\operatorname{tg} \varphi_n$. Por consiguiente, debemos aprender a calcular los coeficientes angulares de las tangentes a los gráficos de cualesquiera funciones $y = f(x)$ (y no sólo a los gráficos de los polinomios). Hallemos primero el coeficiente angular de una secante. Sea M un punto en el gráfico de la función $y = f(x)$, y MN, una secante que pasa por este punto. Razonando igual que en el caso de los polinomios, obtenemos que el coeficiente angular de la secante se expresa mediante la fórmula

$$k_{sec} = \operatorname{tg} \psi = \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}, \tag{72}$$

donde x es la abscisa del punto M, y $x + \alpha$, la abscisa del punto N. Si hacemos disminuir α, la secante va a girar alrededor del punto M y tender a ocupar la posición de la tangente a la curva $y = f(x)$ en este punto (véase fig. 12). Por esto, podemos escribir que

$$k_{tg} = \operatorname{tg} \varphi = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}. \tag{73}$$

El límite en el segundo miembro de esta igualdad lo llamaremos *derivada* de la función $f(x)$ y lo designaremos por el símbolo $f'(x)$, es decir, hagamos

$$f'(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}. \tag{74}$$

Podemos, ahora, escribir la igualdad (73) en la forma

$$k_{tg} = \operatorname{tg} \varphi = f'(x). \tag{75}$$

De este modo, también para las funciones cualesquiera (y no sólo para los polinomios), la derivada de la función $f(x)$ en cierto punto es igual al coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$ en este punto*).

Puesto que $\operatorname{tg} \varphi_n = f'(x_n)$, la fórmula (71) puede ser escrita en la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{76}$$

Esta fórmula coincide con la fórmula (62). De este modo, el método de Newton queda generalizado para todas las ecuaciones del tipo $f(x) = 0$.

*) Si por algún punto de abscisa x no puede ser trazada una tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ (por ejemplo, si en este punto el gráfico sufre un viraje), entonces la función $y = f(x)$ no tiene derivada en dicho punto.

§ 18
CÁLCULO DE LAS DERIVADAS

Hemos visto en el párrafo anterior que para hallar el coeficiente angular de la tangente a la curva $y = f(x)$, se debe calcular el límite

$$f'(x) = \lim_{\alpha \to 0} \frac{f(x + \alpha) - f(x)}{\alpha}.$$

Este cálculo, en general, es bastante dificultoso. Pero, este límite está calculado para muchos casos importantes. En otras palabras, para las funciones que se encuentran con mayor frecuencia, sus derivadas están conocidas. Abajo vienen dadas derivadas más usadas:

1. $(a)' = 0.$
2. $(x^k)' = kx^{k-1}$
3. $(a^x)' = a^x \ln a.$
4. $(\operatorname{sen} ax)' = a \cos ax.$
5. $(\cos ax)' = -a \operatorname{sen} ax.$
6. $(\operatorname{tg} ax)' = \dfrac{a}{\cos^2 ax}.$
7. $(\operatorname{ctg} ax)' = -\dfrac{a}{\operatorname{sen}^2 ax}.$
8. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$
9. $(\operatorname{arcsen} ax)' = \dfrac{a}{\sqrt{1 - a^2x^2}}.$
10. $(\operatorname{arctg} ax)' = \dfrac{a}{1 + a^2x^2}.$

(En las fórmulas 3 y 8 mediante $\ln a$ está designado el logaritmo que tiene por base el número $e = 2{,}71828\ldots$, o sea, el *logaritmo natural*). Señalemos que en la fórmula 2 el exponente k puede ser no sólo un número natural, sino también cualquier número real. Por ejemplo,

$$(\sqrt{x})' = (x^{\frac{1}{2}}) = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2} - 1} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}.$$

Las fórmulas 1 – 10 son aún insuficientes para el cálculo de las derivadas de unas funciones cualesquiera. Sin embargo, si la función $f(x)$ se compone, mediante las operaciones aritméticas, de las funciones para las cuales nosotros sabemos calcular las derivadas, resulta fácil hallar la derivada de $f(x)$. Con este fin se emplean las siguientes reglas que se demuestran (así como también las fórmulas $1-10$) en el curso de las matemámicas superiores.

1. *La derivada de la suma de dos funciones es igual a la suma de las derivadas de estas funciones, es decir,*

$$[f_1(x)+f_2(x)]' = f'_1(x)+f'_2(x).$$

2. *El factor constante puede ser sacado fuera del signo de la derivada*

$$[af(x)]' = af'(x).$$

3. *La derivada del producto de dos funciones se calcula por medio de la fórmula*

$$[f_1(x)f_2(x)]' = f'(x)f_2(x) + f_1(x)f'_2(x).$$

4. *La derivada de una fracción se calcula por la fórmula*

$$\left[\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right]' = \frac{f'_1(x)f_2(x)-f_1(x)f'_2(x)}{[f_2(x)]^2}.$$

La regla para calcular derivadas de un polinomio, expuesta en el § 13, es un corolario de las reglas 1 y 2, y de la fórmula 2 de la lista de las derivadas.

Ejemplo 1. Hállese la derivada de la fracción

$$f(x) = \frac{3x^2-x+1}{2x^3+5}.$$

Haciendo uso de la regla 4, encontramos

$$f'(x) = \frac{(3x^2-x+1)'(2x^3+5)-(3x^2-x+1)(2x^3+5)'}{(2x^3+5)^2}.$$

A continuación, según la regla para derivar polinomios

$$(3x^2-x+1)' = 6x-1$$

y

$$(2x^3+5)' = 6x^2,$$

y, por esta razon,

$$f'(x)=\frac{(2x^3+5)(6x-1)-(3x^2-x+1)6x^2}{(2x^3+5)^2}=$$

$$=\frac{-6x^4+4x^3+6x^2+30x-5}{(2x^3+5)^2}.$$

Ejemplo 2. Hállese la derivada de la función

$$f(x)=\frac{1}{10}\left(\operatorname{arcsen}3x-\frac{1}{x^2}\right).$$

Resolución. Según las fórmulas 2 y 9 y las reglas 1 y 2, tenemos

$$f'(x)=\frac{1}{10}\,\frac{3}{\sqrt{1-9x^2}}-\frac{1}{10}\left(\frac{-2}{x^3}\right)=\frac{3}{10\sqrt{1-9x^2}}+\frac{1}{5x^3}.$$

Ejemplo 3. Hállese la derivada de la función

$$f(x)=10^x\operatorname{sen}2x.$$

Según la regla 3 y las fórmulas 3 y 4, tenemos

$$f'(x)=(10^x)'\operatorname{sen}2x+10^x(\operatorname{sen}2x)'=$$

$$=10^x\operatorname{sen}2x\ln 10+10^x\cdot 2\cos 2x=$$

$$=10^x(\operatorname{sen}2x\ln 10+2\cos 2x).$$

Las reglas indicadas permiten hallar las derivadas en muchos casos. Existe una regla más que es muy importante: la regla para calcular la derivada de una función compuesta. Esta regla se enuncia así:

Si la función $y=f(x)$ puede ser escrita en la forma $y=F(z)$, donde $z=\varphi(x)$, entonces su derivada se define por medio de la fórmula

$$f'(x)=F'(z)\,\varphi'(x),\qquad (77)$$

donde $z=\varphi(x)$.

Ejemplo. Hállese la derivada de la función $y=\operatorname{sen}(x^3)$. Esta función puede ser escrita en la forma $y=\operatorname{sen}z$, donde $z=x^3$. La derivada de la función $F(z)=\operatorname{sen}z$ es igual a $F'(z)=\cos z$, y la derivada de la unción $\varphi(x)=x^3$ es igual a $\varphi'(x)=3x^2$. Aplicando la fórmula (77), obtenemos

$$[\operatorname{sen}(x^3)]'=F'(z)\,\varphi'(x)=\cos z\cdot 3x^2.$$

Sustituyendo, en lugar de z, el valor $z = x^3$, tenemos

$$[\mathrm{sen}\,(x^3)]' = 3x^2 \cos(x^3)$$

La exposición más detallada del concepto de la derivada el lector puede encontrar, por ejemplo, en el libro "Matemáticas superiores para los primerizos" por Ya. B. Zeldovich, "Fizmatguiz", 1960.

§ 19
ELECCIÓN DE LAS PRIMERAS APROXIMACIONES

Examinemos, ahora, el problema de la elección de las aproximaciones iniciales. Al resolver la ecuación $f(x) = 0$, la búsqueda de la primera aproximación puede efectuarse por el método gráfico.

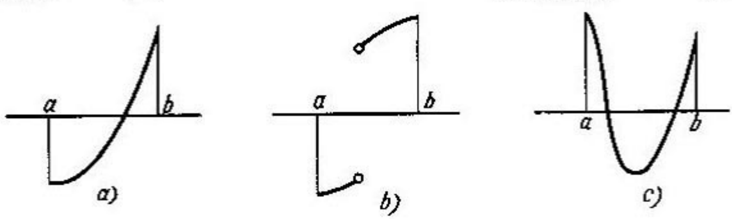


Fig. 16

Para ello es menester dibujar el gráfico de la función $y = f(x)$ y encontrar los puntos de intersección de este gráfico con el eje Ox (en estos puntos $y = 0$, y, por tanto, $f(x) = 0$).

Si, debido a ciertas circunstancias, resulta incómodo dibujar el gráfico (digamos, si la ecuación se resuelve con ayuda de una máquina calculadora), recurren al otro método de determinar la primera aproximación. Con este fin, se calcula el valor de la función para ciertos valores del argumento (por ejemplo, para los valores enteros del argumento ubicados dentro de los límites determinados). Si la función $y = f(x)$ es continua (es decir, su gráfico no tiene puntos de discontinuidad), entonces, entre los valores a y b, en los que la función tiene signos contrarios (fig. 16, a), se encuentra la raíz de la ecuación $f(x) = 0$ (si el gráfico de la función sufre discontinuidades, puede ocurrir que ella pasa de salto de los valores negativos a los positivos, sin reducirse a cero (fig. 16, *b*)). Los valores *a* y *b* se pueden tomar por las primeras aproximaciones para la raíz de la ecuación $f(x) = 0$.

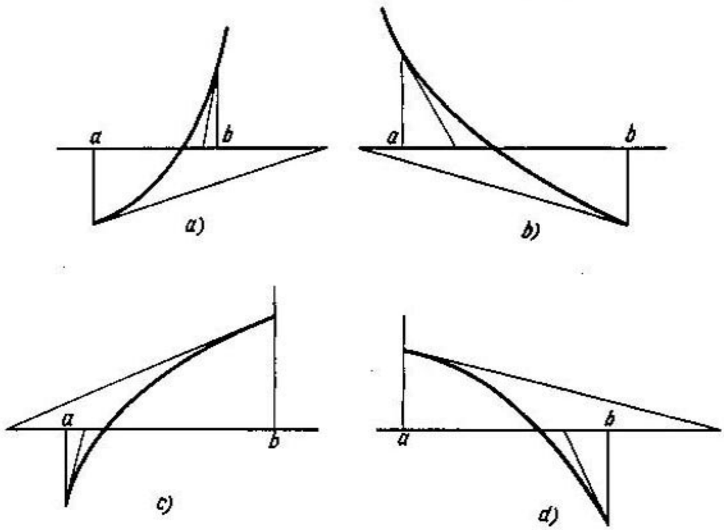


Fig. 17

Observemos que en este caso se puede omitir algunas raíces de la ecuación. Así por ejemplo, la fig. 16, *c* ilustra el caso en que la función $y = f(x)$ tiene en dos puntos los valores de un mismo signo, pero se anula entre estos valores.

Hemos obtenido, de esta manera, dos puntos: *a* y *b*. Con el objeto de aclarar, cuál de ellos puede tomarse por la aproximación inicial x en el método de Newton, examinemos la fig. 17. Las figuras 17, *a* y 17, *b* nos muestran que *si la curva gira su concavidad hacia la parte positiva del eje de ordenadas, por la aproximación inicial se tomará aquel de los puntos a y b, en el que la función $f(x)$ es positiva. La otra elección de la primera aproximación* puede incluso conducir a que el punto x_2 se encuentre fuera del segmento $[a, b]$. *Del mismo modo, si la curva gira su concavidad hacia la parte negativa del eje de ordenadas, por la aproxima-*

ción inicial se tomará el punto, donde la función $f(x)$ es negativa (fig. 17, *c*, *d*).

Esta regla es cómoda para usar, si se conoce el gráfico de la función $y = f(x)$. Si, en cambio, el gráfico de la función no está dibujado, se necesitan cálculos adicionales para determinar la dirección en que la curva gira su concavidad. Para ello se debe encontrar la segunda derivada de la función $f(x)$. Se denomina *segunda derivada de la función* $f(x)$ la derivada de la primera derivada.

Por ejemplo, sea dada la función

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x - 1,$$

entonces, su primera derivada es

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 3,$$

y su segunda derivada es

$$f''(x) = 6x - 8.$$

En el curso de las matemáticas superires se demuestra que si en el segmento $[a, b]$ la segunda derivada es positiva, la curva en dicho segmento gira su concavidad hacia la parte positiva del eje de ordenadas. Si, en cambio, la segunda derivada en el segmento $[a, b]$ es negativa, la curva gira su concavidad hacia la parte negativa del eje de ordenadas. Al hacer uso de esta circunstancia, obtenemos la siguiente regla para aplicar el método de Newton:

Supongamos que en los puntos a y b la función $f(x)$ tiene signos contrarios, con la particularidad de que en el segmento $[a, b]$ la segunda derivada de la función $f(x)$ es positiva. Entonces, por la primera aproximación x_1 se debe elegir aquel de los puntos a y b, en el que la función $f(x)$ toma un valor positivo. Si en el segmento $[a, b]$ la segunda derivada es negativa, por la aproximación inicial se escogerá el punto, donde la función $f(x)$ toma un valor negativo.

§ 20
MÉTODO COMBINADO PARA RESOLVER LAS ECUACIONES

Al resolver las ecuaciones, con frecuencia recurren a la combinación de los métodos de cuerdas y de Newton. Si el gráfico de la función $y = f(x)$ gira su concavidad hacia la parte positiva del eje de ordenadas, los puntos a_1 y x_1 se hallan por medio de las fórmulas

$$a_1 = a - f(a)\frac{b-a}{f(b)-f(a)}, \tag{78}$$

$$x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}. \tag{79}$$

Si el gráfico de la función gira su concavidad hacia la parte negativa del eje de ordenadas, el punto a_1 se halla por la fórmula (78), mientras que el punto x_1 se obtiene de la expresión

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \tag{80}$$

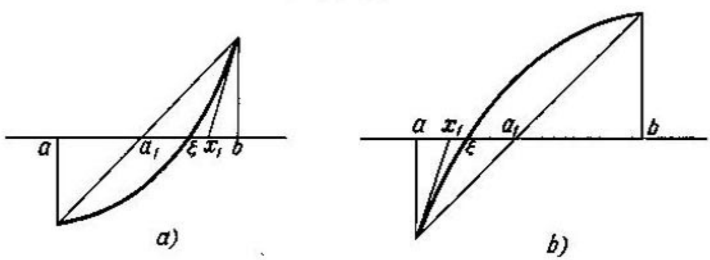


Fig. 18

Como lo muestran las figuras 18, *a* y 18, *b*, la raíz ξ de la ecuación $f(x) = 0$ se ubica, comúnmente, entre los puntos obtenidos a_1 y x_1. Aplicando, nuevamente, a estos puntos las fórmulas de los métodos de cuerdas y de Newton, se obtiene otro par de puntos, a_2 y x_2, etc.

De este modo se obtienen dos sucesiones de puntos a_1, a_2, ..., a_n, ... y x_1, x_2, ..., x_n, ... que van aproximándose hacia la raíz buscada ξ desde las direcciones opuestas. La ventaja del método descrito consiste en lo que en este caso se obtienen los valores aproximados tanto por exceso como por defecto.

Ejemplo. Resuélvase por el método combinado la ecuación

$$x - \operatorname{sen} x - 0{,}5 = 0$$

con un error inferior a 0,001.

Compongamos una tabla de valores de una función continua

$$f(x) = x - \operatorname{sen} x - 0{,}5.$$

x	-1	0	1	2
$f(x)$	$-0{,}659$	$-0{,}5$	$-0{,}341$	$0{,}591$

De esta tabla se desprende que la raíz de la ecuación se ubica entre 1 y 2. Haciendo uso de las fórmulas 2 y 4 del § 18, tenemos

$$f'(x) = 1 - \cos x.$$

Por ello, la fórmula de Newton toma en nuestro caso la forma

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - \operatorname{sen} x_n - 0{,}5}{1 - \cos x_n}. \tag{81}$$

Para determinar, cuál de los valores, 1 ó 2, hay que tomar por x_0, hallemos la segunda derivada de la función $f(x)$. Según la fórmula 5, § 18, la derivada tiene la forma $f''(x) = \operatorname{sen} x$. Mas, en el segmento $[1, 2]$ la función sen x es positiva*). Por consiguiente, rigiéndonos por la regla citada anteriormente, por x_0 se debe tomar el valor 2, para el cual también es positiva la función $f(x)$.

Según la fórmula (81) tenemos

$$x_1 = 2 - \frac{2 - \operatorname{sen} 2 - 0{,}5}{1 - \cos 2} = 2 - \frac{2 - 0{,}909 - 0{,}5}{1 + 0{,}416} = 1{,}583.$$

Por otra parte, según la fórmula (78) tenemos

$$a_1 = 1 - (-0{,}341)\frac{2 - 1}{0{,}591 - (-0{,}341)} = 1{,}366.$$

Siguiendo a aplicar las fórmulas (81) y (78) al segmento $[a_1, x_1]$, obtenemos

$$x_2 = 1{,}583 - \frac{1{,}583 - 1{,}000 - 0{,}5}{1 + 0{,}012} = 1{,}501$$

y

$$a_2 = 1{,}366 + 0{,}113\frac{1{,}583 - 1{,}366}{0{,}083 + 0{,}113} = 1{,}491$$

A continuación, encontramos

$$x_3 = 1{,}498,$$

$$a_3 = 1{,}498.$$

---

*) Sen x es positivo en el segmento $[0; \pi] = [0; 3{,}141\ldots]$. Por lo tanto, sen x es también positivo en la parte $[1, 2]$ de este segmento.

Así pues, la raíz de nuestra ecuación con un error inferior a 0,001 es 1,498.

§ 21
CRITERIO DE LA CONVERGENCIA DEL PROCESO DE ITERACIONES

Emplearemos, ahora, el concepto de la derivada para obtener un nuevo criterio de la convergencia del proceso de iteraciones. Nos hará falta, para ello, una fórmula, llamada fórmula de Lagrange (Lagrange es un matemático del siglo XVIII, que vivió en Francia).

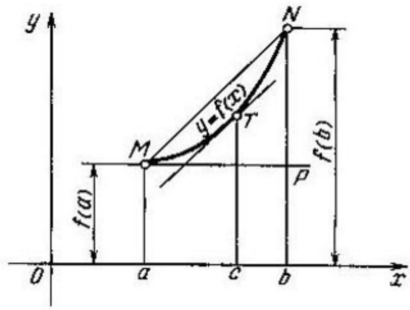


Fig. 19

Examinemos en el segmento [a, b] la curva $y = f(x)$. Designemos con M el punto inicial de esta curva, y con N, su punto final, y tracemos la cuerda MN. El coeficiente angular de esta cuerda tiene por expresión

$$k_{\text{cuerda}} = \operatorname{tg} \psi = \frac{PN}{MP}$$

(fig 19). Pero, $MP = b - a$, y $PN = f(b) - f(a)$, por lo que

$$k_{\text{cuerda}} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Designemos por T un punto del arco MN que sea más alejado de la cuerda MN. Si por este punto trazamos una recta, paralelamente a la cuerda, ella será tangente a la curva: en el caso de intersección, en la curva habrían puntos más alejados de la cuerda MN, que el punto T. En otras palabras, la tangente a la curva, trazada en el punto T, es paralela a la cuerda MN y por esta razón tiene el mismo coeficiente angular que la cuerda. Más, el coeficiente angular de la tangente es igual a $f'(c)$, donde c es la abscisa del punto T. Por ello, resulta válida la fórmula

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{82}$$

Esta es la fórmula de Lagrange. Indiquemos que el punto c en la fórmula de Lagrange siempre se ubica entre los puntos a y b. La fórmula de Lagrange puede ser escrita también en la forma siguiente

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \tag{83}$$

Volvamos ahora a la resolución de la ecuación $x = \varphi(x)$ por el método de iteraciones. Supongamos que la aplicación $y = \varphi(x)$ transforma el segmento $[a, b]$ en sí mismo, con la particularidad de que en este segmento se cumple la desigualdad $|\varphi'(x)| < q$, donde q es un número menor que la unidad, $q < 1$. En el segmento $[a, b]$ tomemos dos cualesquiera puntos x_1 y x_2. En este caso, los puntos $\varphi(x_1)$ y $\varphi(x_2)$ también pertenecen al segmento $[a, b]$. Según la fórmula de Lagrange tenemos

$$\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(c)(x_2 - x_1),$$

donde c es un punto que se ubica entre x_1 y x_2, y, por tanto, pertenece al segmento $[a, b]$. Es válida la desigualdad $|\varphi'(c)| < q < 1$, y, por esto,

$$|\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| \leqslant q\,|x_2 - x_1|. \tag{84}$$

La desigualdad (84) muestra que $\varphi(x)$ prefija una aplicación contraída. Pero, ya sabemos que si $x \to \varphi(x)$ es la aplicación que contrae el segmento $[a, b]$ en sí mismo, para todo punto x_0 de este segmento la sucesión $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, donde $x_{n+1} = \varphi(x_n)$, converge la raíz de la ecuación $x = \varphi(x)$. De este modo, hemos demostrado el siguiente teorema:

Teorema. *Supongamos que la función $y = \varphi(x)$ define la aplicación del segmento $[a, b]$ en sí mismo y que en este segmento se cumple la desigualdad $|\varphi'(x)| < q$, donde $q < 1$. Entonces, sea cual fuese el punto x_0 del segmento $[a, b]$, la sucesión de puntos $x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots$, donde $x_{n+1} = \varphi(x_n)$ converge hacia la raíz de la ecuación $x = \varphi(x)$.*

En términos generales el sentido del teorema demostrado consiste en lo que el proceso de aproximaciones sucesivas permite hallar aquellas raíces ξ de la ecuación $x = \varphi(x)$, en las cuales se cumple la desigualdad $|\varphi'(\xi)| < 1$. Puede decirse que estos puntos atraen hacia sí una quebrada que representa geométricamente el proceso de iteraciones (véase el § 8), y los puntos, donde $|\varphi'(\xi)| > 1$, repelen de sí la quebrada citada.

Si la desigualdad $|\varphi'(x)| < q < 1$ se cumple en todo el eje numérico, el proceso de iteraciones converge con cualquier elección de la aproximación inicial x_0 (véase el § 10).

Ejemplo 1. ¿Puede emplearse el método de iteraciones para resolver la ecuación

$$x = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{4}?$$

En el caso dado

$$\varphi(x) = \frac{\cos x + \operatorname{sen} x}{4}.$$

Por eso

$$\varphi'(x) = \frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{4},$$

Pero, $|\operatorname{sen} x| \leqslant 1$, $|\cos x| \leqslant 1$, por lo que

$$|\varphi'(x)| = \left|\frac{-\operatorname{sen} x + \cos x}{4}\right| \leqslant \frac{|\operatorname{sen} x| + |\cos x|}{4} < \frac{1}{2},$$

y, por tanto, el proceso de iteraciones es aplicable.

Ejemplo 2. ¿Es aplicable el proceso de iteraciones para resolver la ecuación

$$x = 4 - 2^x? \tag{85}$$

La raíz buscada se ubica en el segmento $[1, 2]$, puesto que la función continua $y = x - 4 + 2^x$ en este segmento cambia de signo:

$$1 - 4 + 2^1 < 0 \text{ y } 2 - 4 + 2^2 > 0.$$

Pero, en el caso dado tenemos

$$\varphi'(x) = -2^x \ln 2.$$

Acotemos la expresión $2^x \ln 2$ en el segmento $[1, 2]$. Si

$$1 \leqslant x \leqslant 2, \text{ entonces } 2 \leqslant 2^x \leqslant 4,$$

y, por esto,

$$2\ln 2 \leqslant 2^x \ln 2 \leqslant 4\ln 2.$$

De las tablas de logaritmos naturales (cuya base es el número $e \approx 2{,}78\ldots$) tenemos $\ln 2 = 0{,}69\ldots$ Esto significa que en el segmento $[1, 2]$ se cumple la desigualdad

$$1{,}38\ldots \leqslant 2^x \ln 2 \leqslant 2{,}76\ldots$$

y el proceso de iteraciones no es aplicable.

Para aplicar el proceso de iteraciones, transformemos la ecuación (85). Escribámosla en la forma

$$2^x = 4 - x$$

y tomemos logaritmos en ambos miembros según la base 2. Entonces obtendremos

$$x = \log_2 (4 - x).$$

En este caso

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{(4 - x)\ln 2}$$

y en el segmento $[1, 2]$ está cumplida la desigualdad

$$|\varphi'(x)| < \frac{1}{2\ln 2} = \frac{1}{1{,}38} < 1.$$

(El lector mismo puede deducir con facilidad esta desigualdad).

Por esto, escrita la ecuación en esta forma, el proceso de iteración converge.

§ 22
RAPIDEZ DE LA CONVERGENCIA DEL PROCESO DE ITERACIONES*)

Hagamos uso de la derivada de la función $\varphi(x)$ para estimar la rapidez de la convergencia de iteraciones al resolver la ecuación $x = \varphi(x)$. Nuestra tarea es evaluar la velocidad con la cual disminuyen los errores $\alpha_n = \xi - x_n$ de valores aproximados $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ de la raiz ξ.

*) Este párrafo puede ser omitido en la primera lectura.

Observemos que son válidas las igualdades $\xi = \varphi(\xi)$ y $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. De éstas se deduce

$$\alpha_{n+1} = \xi - x_{n+1} = \varphi(\xi) - \varphi(x_n).$$

Pero, según la fórmula de Lagrange tenemos

$$\varphi(\xi) - \varphi(x_n) = \varphi'(c_n)(\xi - x_n) = \varphi'(c_n)\alpha_n,$$

donde c_n es un punto ubicado entre los puntos x_n y ξ. Por esta causa

$$\alpha_{n+1} = \varphi'(c_n)\alpha_n. \tag{86}$$

De la igualdad (86) se deduce la afirmación siguiente:

Supongamos que ξ es la raíz de la ecuación $x = \varphi(x)$, se ubica en el segmento $[a, b]$. Si en este segmento se cumple la desigualdad $|\varphi'(x)| < q < 1$, y la aproximación inicial x_1 también está elegida en el segmento $[a, b]$, entonces para todo n se verifica la correlación

$$|\alpha_{n+1}| < q^n |\alpha_1|. \tag{87}$$

Efectivamente, de la igualdad (86) tenemos

$$\alpha_2 = |\varphi'(c_1)||\alpha_1|.$$

Pero, el punto c_1 se encuentra en el segmento $[a, b]$ (fig. 20) y, por lo tanto,

$$|\varphi'(c_1)| < q.$$

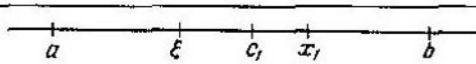


Fig. 20

De aquí se deduce que

$$|\alpha_2| < q|\alpha_1|.$$

Del mismo modo obtenemos que

$$|\alpha_3| = |\varphi'(c_2)||\alpha_2| < q|\alpha_2| < q^2|\alpha_1|$$

y, en general,

$$|\alpha_{n+1}| < q^n |\alpha_1|.$$

Con esto queda demostrada nuestra afirmación.

Puesto que, para $0 < q < 1$, la sucesión de números q, q^2, ..., q^n, ... tiende a cero, también a_{n+1} tiende a cero cuando n crece. En otras palabras, hechas las suposiciones indicadas anteriormente, los números $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ se aproximan al número ξ, con la particularidad de que la diferencia $|\xi - x_{n+1}|$ decrece con mayor rapidez que $|\alpha_1|q^n$.

Del modo igual se puede demostrar que si en el segmento $[a, b]$ se cumple la desigualdad

$$|\varphi'(x)| > 1,$$

el proceso de iteraciones diverge.

El proceso de aproximaciones sucesivas converge con una rapidez particular, cuando en el punto ξ la derivada de la función $\varphi(x)$ se reduce a cero. En este caso, el valor de $\varphi'(x)$ tiende a cero a medida que nos aproximamos a ξ.

Dado que

$$|\alpha_{n+1}| = |\varphi'(c_n)||\alpha_n|,$$

la convergencia del proceso se hace más rapida con la aproximación al punto ξ.

Ya nos tropezamos con esta circunstancia al extraer raíces cuadradas por el método de iteraciones. Recordemos que en esta operación sustituimos la ecuación $x^2 = a$ por la ecuación $x = \frac{x^2 + a}{2x}$. Pero, la función arbitraria $\varphi(x) = \frac{x^2 + a}{2x}$ es igual a la expresión

$$\varphi'(x) = \frac{(x^2 + a)' 2x - (x^2 + a)(2x)'}{4x^2} =$$

$$= \frac{2x \cdot 2x - (x^2 + a)2}{4x^2} = \frac{x^2 - a}{2x^2}$$

(véase la regla 4 del § 18 y la fórmula (55) del § 13), y, por lo tanto,

$$\varphi'(\sqrt{a}) = \frac{(\sqrt{a})^2 - a}{2(\sqrt{a})^2} = 0.$$

De este modo, en el punto $x = \sqrt{a}$ la derivada de la función $\varphi(x)$ se reduce a cero y esto provoca la aceleración de la convergencia del proceso a medida que nos aproximamos al punto $x = \sqrt{a}$.

El fenómeno de la aceleración del proceso con la aproximación a la raíz de la ecuación se observa también al emplear el método de Newton (el método indicado de la extracción de raíces es un caso particular del método de Newton). Efectivamente, ya indicamos que el método de Newton está relacionado con la sustitución de la ecuación $f(x) = 0$ por la ecuación

$$x = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

y la resolición posterior de la última por el método de aproximaciones sucesivas. En este caso tenemos

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

pero

$$\varphi'(x) = 1 - \left[\frac{f(x)}{f'(x)}\right]' = 1 - \frac{f'(x)[f(x)]' - f(x)[f'(x)]'}{[f'(x)]^2} =$$

$$= 1 - \frac{[f'(x)]^2 - f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2} = \frac{f(x)f''(x)}{[f'(x)]^2}.$$

Ya que en el punto ξ se cumple la igualdad $f(\xi) = 0$, entonces $\varphi'(\xi) = 0$. Y esto, según lo mostrado, asegura la aceleración de la convergencia del proceso de aproximaciones a medida que nos acercamos al punto ξ.

§ 23
RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES POR EL MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

Hasta este momento resolvíamos las ecuaciones con una incógnita. Pasemos ahora a la resolución de los sistemas de ecuaciones. Iniciemos con la consideración de los sistemas de primer grado.

Sean dadas m ecuaciones del primer grado con m incógnitas*)

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mm}x_m &= b_m \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

Tales sistemas intervienen en diferentes aplicaciones. Por ejemplo, cuando los geodestas nivelan los resultados de las mediciones de las grandes partes de la superficie terrestre, ellos tienen que, a veces, resolver los sistemas de ecuaciones que se componen de muchas centenas de ecuaciones. Los mismos sistemas de ecuaciones aparecen ante los ingenieros, al calcular las construcciones de vigas, y ante otros especialistas.

La resolución de tales sistemas por los métodos habituales (por ejemplo, usando el método de eliminación de las incógnitas) suele ser con frecuencia extremadamente dificultosa. Más cómodo resulta el método de aproximaciones sucesivas. Al principio mostremos con un ejemplo, cómo se hace esto.

Sea dado el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 10x_1 - 2x_2 + x_3 &= 9, \\ x_1 + 5x_2 - x_3 &= 8, \\ 4x_1 + 2x_2 + 8x_3 &= 39. \end{aligned}$$

Es necesario hallar las incógnitas x_1, x_2, x_3 con un error inferior a 0,01.

Despojamos x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda y x_3 de la tercera ecuación. El sistema tomará la forma

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0{,}9 + 0{,}2x_2 - 0{,}1x_3, \\ x_2 &= 1{,}6 - 0{,}2x_1 + 0{,}2x_3, \\ x_3 &= 4 - 0{,}5x_1 - 0{,}2x_2. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Tomemos cualesquiera valores de x_1, x_2, x_3 a título de las aproximaciones iniciales, por ejemplo, hagamos $x_1^{(0)} = 0$, $x_2^{(0)} = 0$,

*) En estas ecuaciones las incógnitas se designan por las letras $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y los coeficientes con las letras a_{ij}. Aquí, el primer signo indica el número de la ecuación y el segundo, el número de la incógnita. Por ejemplo, a_{47} significa que esto es el coeficiente de la séptima incógnita en la cuarta ecuación.

$x_3^{(0)} = 0$. Sustituyamos estos valores en los segundos miembros de la igualdad (89) y tomemos los valores de x_1, x_2, x_3 que se obtienen por los siguientes valores aproximados. Obtenemos

$$x_1^{(1)} = 0{,}9;$$
$$x_2^{(1)} = 1{,}6;$$
$$x_3^{(1)} = 4.$$

Los valores hallados los sustituyamos de nuevo en los segundos miembros de la ecuación (89). Obtenemos las aproximaciones

$$x_1^{(2)} = 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 1{,}6 - 0{,}1 \cdot 4 = 0{,}82,$$
$$x_2^{(2)} = 1{,}6 - 0{,}2 \cdot 0{,}9 + 0{,}2 \cdot 4 = 2{,}22,$$
$$x_3^{(2)} = 4 - 0{,}5 \cdot 0{,}9 - 0{,}25 \cdot 1{,}6 = 3{,}15.$$

En general, una vez hallados los valores de $x_1^{(n)}$, $x_2^{(n)}$, $x_3^{(n)}$, las siguientes aproximaciones se calculan según las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(n+1)} &= 0{,}9 + 0{,}2x_2^{(n)} - 0{,}1x_3^{(n)}, \\ x_2^{(n+1)} &= 1{,}6 - 0{,}2x_1^{(n)} + 0{,}2x_3^{(n)}, \\ x_3^{(n+1)} &= 4 - 0{,}5x_1^{(n)} - 0{,}25x_2^{(n)}. \end{aligned}\right\} \qquad (90)$$

Los resultados de los cálculos se exponen en la Tabla 2.

Tabla 2

n	1	2	3	4	5	6
$x_1^{(n)}$	0,9	0,82	1,03	1,01	1,00	1,00
$x_2^{(n)}$	1,6	2,22	2,07	2,00	1,99	2,00
$x_3^{(n)}$	4,0	3,15	3,03	2,97	3,00	3,00

Vemos que en los límites de la precisión prefijada se cumplen las igualdades

$$x_1^{(5)} = x_1^{(6)},\ x_2^{(5)} = x_2^{(6)},\ x_3^{(5)} = x_3^{(6)}. \qquad (91)$$

Haciendo en las igualdades (90) $n = 5$ y tomando en consideración las igualdades (91), obtenemos que en los límites de la precisión prefijada

$$x_1^{(5)} \approx 0{,}9 + 0{,}2\,x_2^{(5)} - 0{,}1\,x_3^{(5)},$$
$$x_2^{(5)} \approx 1{,}6 - 0{,}2\,x_1^{(5)} + 0{,}2\,x_3^{(5)},$$
$$x_3^{(5)} \approx 4 - 0{,}5\,x_1^{(5)} + 0{,}25\,x_2^{(5)}$$

(en realidad, estas igualdades se cumplen exactamente, pero esto no es esencial). De aquí se deduce que los números $x_1^{(5)} = 1{,}00$; $x_2^{(5)} = 2{,}00$; $x_3^{(5)} = 3{,}00$ son (en los límites de la precisión prefijada) las soluciones del sistema dado de ecuaciones.

De un modo sumamente igual se procede en el caso general *). Sea dado el sistema de ecuaciones (88). Despojemos x_1 de la primera ecuación, x_2 de la segunda ecuación, etc. Entonces, el sistema (88) tomará la forma

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{b_1}{a_{11}} \qquad\qquad - \frac{a_{12}}{a_{11}}x^2 - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m, \\
x_2 &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1 - \ldots \qquad\qquad - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1 - \frac{a_{m2}}{a_{mm}}x_2 - \ldots - \frac{a_{m,\,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}.
\end{aligned}
\tag{92}
$$

Sean $x_1^{(1)}, \ldots, x_m^{(1)}$ ciertas aproximaciones iniciales para las incógnitas $x_1, \ldots, x_m$.

Sustituyendo estos valores aproximados en los segundos miembros de las igualdades (92), obtendremos las segundas aproximaciones $x_1^{(2)}, \ldots, x_m^{(2)}$ para las incógnitas buscadas:

$$
\begin{aligned}
x_1^{(2)} &= \frac{b_1}{a_{11}} \qquad\qquad - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2^{(1)} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}}x_m^{(1)}, \\
x_2^{(2)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}}x_1^{(1)} \qquad\qquad - \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}}x_m^{(1)}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_m^{(2)} &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}}x_1^{(1)} - \ldots \qquad\qquad - \frac{a_{m,\,m-1}}{a_{mm}}x_{m-1}^{(1)}
\end{aligned}
$$

Del mismo modo, una vez halladas las n-ésimas aproximaciones $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_m^{n}$ para las incógnitas, el siguiente paso se

*) El texto ulterior hasta el fin de este párrafo puede ser omitido en la primera lectura.

efectúa según las fórmulas

$$
\begin{aligned}
x_1^{(n+1)} &= \frac{b_1}{a_{11}} - \qquad\qquad - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2^{(n)} - \ldots - \frac{a_{1m}}{a_{11}} x_m^{(n)},\\
x_2^{(n+1)} &= \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x_1^{(n)} - \qquad\qquad \ldots - \frac{a_{2m}}{a_{22}} x_m^{(n)},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_m^{(n+1)} &= \frac{b_m}{a_{mm}} - \frac{a_{m1}}{a_{mm}} x_1^{(n)} - \qquad\qquad \ldots - \frac{a_{m,\,m-1}}{a_{mm}} x_{m-1}^{(n)}.
\end{aligned}
\tag{93}
$$

Estudiemos, ahora, el problema en el que se trata no de la resolución del sistema de ecuaciones lineales por el método de aproximaciones sucesivas, sino al revés, resolviendo un sistema de ecuaciones se debe hallar un estado límite de cierto proceso de aproximaciones.

Se tienen tres cubos. El primer cubo contiene 12 *litros de agua, los cubos segundo y tercero son vacíos. Del primer cubo se trasiega la mitad del agua en el segundo; luego, la mitad del agua se trasiega del segundo cubo en el tercero y de éste último la mitad del agua se trasiega en el primer cubo. Este ciclo se repite* 20 *veces. Hace falta determinar (con un error inferior a* 0,0001 *l), ¿cuánto agua, después de esto, habrá en cada uno de los cubos?*

Está claro que aquí se trata de las aproximaciones sucesivas hacia cierta distribución límite del agua. Esta distribución límite se caracteriza por lo que ella no cambia después de realizarse uno de los ciclos de trasegar descrito más arriba. Si al principio del ciclo en el primer cubo están contenidos x litros de agua, en el segundo y litros y en el tercer cubo, $12 - x - y$ litros (el volumen general del agua no se altera durante el proceso de trasegar), entonces el ciclo descrito se da por medio de la siguiente tabla:

	1-r cubo	2-do cubo	3-r cubo
Estado inicial	x	y	$12 - x - y$
Después del primer trasiego	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2} + y$	$12 - x - y$
Después del segundo trasiego	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{4} + \frac{y}{2}$	$12 - \frac{3}{4}x - \frac{y}{2}$
Después del tercer trasiego	$6 + \frac{x}{8} - \frac{y}{4}$	$\frac{x}{4} + \frac{y}{2}$	$6 - \frac{3}{8}x - \frac{y}{4}$

Para que este ciclo de los trasiegos no cambie la cantidad del agua en cada cubo, se deben cumplir las siguientes ecuaciones

$$x = 6 + \frac{x}{8} - \frac{y}{4},$$
$$y = \frac{x}{4} + \frac{y}{2}.$$

Al resolverlas, encontramos que $x = 6$, $y = 3$. Esto significa que la distribución límite se caracteriza por lo que en el primer cubo se encuentran 6 litros del agua, el segundo contiene 3 litros y en el tercer cubo habrán 3 litros del agua.

Aclaremos, a qué velocidad la distribución dada del agua se aproxima a la distribución límite. Supongamos que el primer cubo contiene a litros y el segundo cubo, b litros. Realizado el primer ciclo, en el primer cubo habrán

$$a_1 = 6 + \frac{a}{8} - \frac{b}{4} \tag{94}$$

litros, en el segundo cubo

$$b_1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} \tag{95}$$

litros.

Designemos $a - 6$ con α, $b - 3$ con β; $a_1 - 6$ mediante α_1, y $b_1 - 3$, mediante β_1. Entonces, de las igualdades (94) y (95) proviene que

$$\alpha_1 = a_1 - 6 = \frac{a-6}{8} - \frac{b-3}{4} = \frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}$$

y

$$\beta_1 = b_1 - 3 = \frac{a-6}{4} + \frac{b-3}{2} = \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}.$$

Acabado el segundo ciclo, los errores tendrán por expresión

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1}{8} - \frac{\beta_1}{4} = \frac{1}{8}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = -\frac{3}{64}\alpha - \frac{5}{32}\beta,$$
$$\beta_2 = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\beta_1}{2} = \frac{1}{4}\left(\frac{\alpha}{8} - \frac{\beta}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2}\right) = \frac{5}{32}\alpha - \frac{3}{16}\beta.$$

Por esto, si $|\alpha| < \varepsilon$ y $|\beta| < \varepsilon$, entonces

$$|\alpha_2| < \frac{13}{64}\varepsilon \simeq 0{,}2\,\varepsilon,$$

$$|\beta_2| < \frac{11}{32}\varepsilon \simeq 0{,}34\,\varepsilon.$$

Esto quiere decir, que dos ciclos de los trasiegos disminuyen los errores α y β por lo menos en tres veces. Por ello, después de 20 ciclos el error disminuirá por lo menos en $3^{10} \simeq 70\,000$ veces. Por lo tanto, realizados 20 ciclos de los trasiegos, con un error inferior a 0,0001 l, en el primer cubo habrán 6 litros de agua, en el segundo cubo, 3 litros, y en el tercer cubo, 3 litros.

§ 24
RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES NO LINEALES POR EL MÉTODO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS

El método de aproximaciones sucesivas (de iteraciones) se emplea también para la resolución de algunos sistemas de ecuaciones no lineales.

Consideremos, por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= 2 + \frac{x^2 + y}{20}, \\ y &= 1 + \frac{x + y^2}{20}. \end{aligned}\right\} \qquad (96)$$

A título de las primeras aproximaciones tomemos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$. Sustituyendo estas aproximaciones en lugar de x e y en los segundos miembros de las ecuaciones, obtendremos las aproximaciones siguientes: $x_1 = 2$, $y_1 = 1$. Sustituyendo estas aproximaciones en los segundos miembros de las ecuaciones (96), obtenemos

$$x_2 = 2 + \frac{2^2 + 1}{20} = 2{,}25,$$

$$y_2 = 1 + \frac{2 + 1^2}{20} = 1{,}15.$$

Continuando este proceso, obtendremos

$$x_3 = 2 + \frac{2,25^2 + 1,15}{20} = 2,31,$$

$$y_3 = 1 + \frac{2,25 + 1,15^2}{20} = 1,18,$$

$$x_4 = 2 + \frac{2,31^2 + 1,18}{20} = 2,33,$$

$$y_4 = 1 + \frac{2,31 + 1,18}{20} = 1,18,$$

$$x_5 = 2 + \frac{2,33^2 + 1,18^2}{20} = 2,33,$$

$$y_5 = 1 + \frac{2,33 + 1,18^2}{20} = 1,18.$$

Vemos que con un error inferior a 0,01 se cumplen las igualdades $x_4 = x_5 = 2,33$ y $y_4 = y_5 = 1,18$. Por esto, con la precisión indicada tenemos $x = 2,33$ e $y = 1,18$.

En general, si se da el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x, y), \\ y &= \psi(x, y), \end{aligned}\right\} \tag{97}$$

donde $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son ciertas funciones, entonces eligimos las aproximaciones iniciales x_0 e y_0, los sustituimos en los segundos miembros de las ecuaciones (97) y luego hacemos los cálculos según las fórmulas

$$\left.\begin{aligned} x_{n+1} &= \varphi(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= \psi(x_n, y_n). \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Si para cierto número n, con el grado dado de precisión se cumplen las igualdades $x_{n+1} \approx x_n$, $y_{n+1} \approx x_n$, entonces con el mismo grado de precisión tenemos $x \approx x_n$, $y \approx y_n$.

De esta misma manera se resuelven los sistemas de ecuaciones con tres y mayor número de las incógnitas.

Aclaremos, ahora, en que condiciones puede ser garantizada la convergencia del proceso de aproximaciones sucesivas al resolver los sistemas.

Vamos a considerar que las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ en el sistema de ecuaciones (97) están definidas en cierto dominio cerrado y limitado D en el plano x, y. En otras palabras, consideremos que el dominio D se encuentra enteramente dentro de un cuadrado y que le pertenecen todos sus puntos límites. Como ejemplo de tales dominios pueden servir un círculo, un polígono (tomado junto con una quebrada límite), una elipse, etc. Además, vamos a considerar que las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ son continuas en el dominio D. Las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ determinan la aplicación del dominio D en algún otro dominio ubicado en el mismo plano. Para hallar el punto en el cual se transforma el punto $M_0(x_0, y_0)$ del dominio D, es necesario sustituir sus coordenadas, en lugar de x e y, en $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$. Los resultados de la sustitución nos darán las coordenadas de la imagen del punto M_0. Por ejemplo, si

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2,$$
$$\psi(x, y) = 2xy,$$

entonces el punto $M_0(1, 3)$ se transforma en el punto $N_0(10, 6)$.

En lo sucesivo designaremos con la letra Φ la aplicación dada por las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$ y mediante $\Phi(M)$, la imagen del punto M para esta aplicación. Por $\Phi(D)$ designaremos la imagen de todo el dominio D.

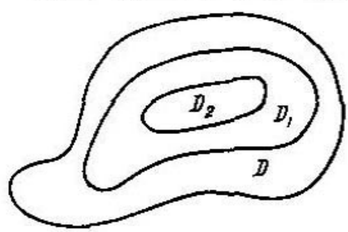


Fig. 21

Supongamos que la aplicación Φ transforma el dominio D en una parte de éste $D_1 = \Phi(D)$. Entonces, podemos realizar reiteradamente la misma aplicación. En este caso, el dominio D_1 se transformará en su parte $D_2 = \Phi(D_1)$, la cual también se ubica, por supuesto, en el dominio D. Continuando este proceso, obtendremos un sistema de los dominios $D, D_1, \ldots, D_n, \ldots$, encajados uno en otro (fig. 21).

Llamaremos la aplicación Φ *contraída*, si existe un número q tal que $0 < q < 1$ y que para dos puntso cualesquiera M_1 y M_2 del dominio D se cumple la desigualdad

$$r(\Phi(M_1), \Phi(M_2)) \leqslant q r(M_1, M_2).$$

Aquí con $r(M, N)$ está designada la distancia entre los puntos M y N.

Igual que en el caso de una sola variable también se demuestra la siguiente afirmación.

Supongamos que la aplicación Φ transforma el dominio D en una parte de éste y que es contraída. Entonces, en el dominio D existe un único punto N tal que $N = \Phi(N)$. Este punto pertenece a todos los dominios D_n. Las coordenadas ζ, η del punto N satisfacen el sistema de ecuaciones (97), *es* decir

$$\xi = \varphi(\xi, \eta),$$

$$\eta = \psi(\zeta, \pi).$$

Como en el caso de una sola variable, los valores ζ y η se calculan aproximadamente por el método de iteraciones. Si $M_0(x_0, y_0)$ es un punto cualquiera del dominio D y $M_{n+1} = \Phi(M_n)$ (es decir, $x_{n+1} = \varphi(x_n, y_n)$, $y_{n+1} = \psi(x_n, y_n)$), entonces, la sucesión de los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n \ldots$ converge hacia el punto inmóvil N de la aplicación Φ

§ 25
DISTANCIA MODIFICADA

La condición de que la aplicación Φ es contraída nos presta el criterio suficiente para la convergencia del proceso de iteraciones. Más, este criterio no es necesario. La aplicación Φ puede no ser contraída y el proceso de iteraciones, no obstante, es convergente. Por ejemplo, la aplicación Φ, dada por las funciones $\varphi(x, y) =$

$= 1 + 2y$, $\psi(x, y) = 3 + \frac{x}{8}$, no es contraída. Si tomamos $A\,(8, 0)$, $B\,(8, 4)$, entonces

$$r(A, B) = 4, \ \Phi(A) = (1, 4) \ \Phi(B) = (9,4)$$

y

$$r(\Phi(A), \Phi(B)) = 8 > r(A, B).$$

Sin embargo, cualquiera que sea el punto M_0 eligido, la sucesión de los puntos $M_0, M_1, \ldots, M_n, \ldots$ converge hacia el punto

$$N\left(9\frac{1}{3},\ 4\frac{1}{6}\right).$$

En ciertos casos se logra establecer la convergencia del proceso de iteraciones al modificar la manera en que se determina la distancia entre los puntos de un plano. El hecho es que la distancia entre los puntos puede medirse a la manera diferente. Para un viajero es natural medir la distancia en las unidades del tiempo que se tarda para llegar al punto B, partiendo del punto A. En este caso, la distancia entre los puntos A y B en la fig. 22, *a* se determina

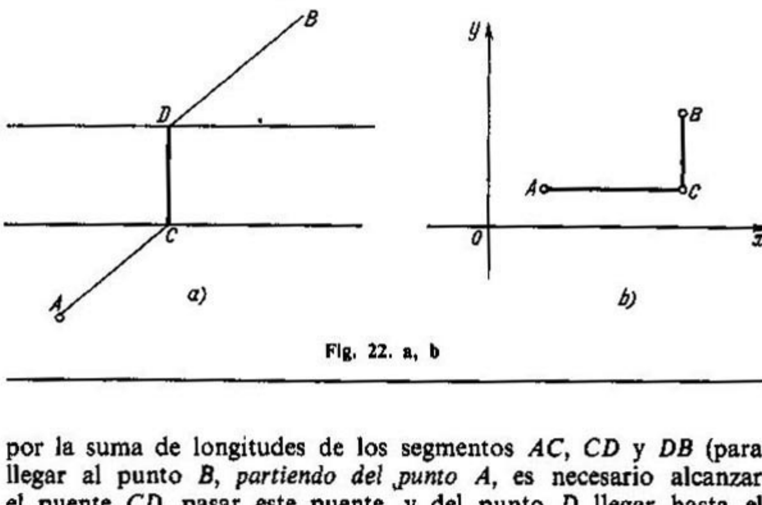


Fig. 22. a, b

por la suma de longitudes de los segmentos AC, CD y DB (para llegar al punto B, *partiendo del punto A*, es necesario alcanzar el puente CD, pasar este puente, y del punto D llegar hasta el punto B). Si el movimiento en un plano sólo puede realizarse en dos direcciones mutuamente perpendiculares, entonces por la distancia entre los puntos A y B en la fig. 22, *b* se debe tomar la suma de los segmentos AC y CB. En otros casos es más cómodo considerar como la "distancia" entre los puntos A y B la longitud del mayor de los segmentos AC y CB. Pueden también idearse otras definiciones de la "distancia" entre los puntos de un plano. (Los mayores detalles sobre diferentes modos de medir las distancias se puede sacar del libro "¿Qué es la distancia?", escrito por Yu. A. Schreider.)

Habitualmente se requiere que la distancia $r(A, B)$ entre los puntos posea las siguientes propiedades:

1. La distancia $r(A, B)$ entre dos cualesquiera puntos A y B es *no negativa*, con la particularidad de que ella es nula sólo en el caso cuando A y B *coinciden*.

2. Para dos cualesquiera puntos A y B se cumple la *condición de simetría*

$$r(A, B) = r(B, A).$$

3. Para tres cualesquiera puntos A, B, C se cumple la *desigualdad triangular*

$$r(A, B) \leqslant r(A, C) + r(C, B).$$

Si en algún conjunto de objetos queda determinada una distancia provista de estas propiedades, dicho conjunto se denomina *espacio métrico*, y los elementos del conjunto son puntos de este espacio. El papel de los puntos de un espacio métrico incluso pueden desempeñar las funciones. Para las funciones continuas $\varphi(x)$ y $\psi(y)$ en el segmento $[a, b]$ la distancia se determina como el valor máximo en este segmento de la función $|\varphi(x) - \psi(x)|$:

$$r(\varphi, \psi) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\varphi(x) - \psi(x)|.$$

Ya vimos más arriba, que un plano puede ser transformado en un espacio métrico por los métodos diferentes: para todos los métodos de determinar las distancias, citados anteriormente, se cumplen las condiciones 1) – 3).

He aquí un ejemplo interesante en que las condiciones 1) y 3) están cumplidas, mientras que la condición de simetría 2) no se cumple. Vamos a medir la distancia entre los puntos A y B en *un terreno montañoso* en las unidades de tiempo necesario para llegar del punto A al punto B. Puesto que el tiempo para subir la montaña se diferencia del tiempo del descenso, entonces, $r(A, B) \neq r(B, A)$.

Resulta que para la convergencia del proceso de aproximaciones sucesivas al resolver el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(x, y) \\ y &= \psi(x, y) \end{aligned}\right\} \qquad (99)$$

es suficiente que se cumpla la siguiente condición:

La aplicación Φ, prefijada por las funciones $\varphi(x, y)$ y $\psi(x, y)$, transforma el dominio D en sí mismo y es contraída respecto a siquiera una sola "distancia" $r(A, B)$. En otras palabras, debe existir tal número q que $0 < q < 1$, y para cualesquiera dos puntos M_1 y M_2 de D se cumple la desigualdad

$$r(\Phi(M_1),\ \Phi(M_2)) \leqslant qr(M_1,\ M_2).$$

Tomemos, por ejemplo, las funciones $\varphi(x,\ y) = 1 + 2y$ y $\psi(x,\ y) = 3 + \frac{x}{8}$. Resulta que la aplicación Φ, definida por ellas, es contraída y tiene el coeficiente 1/2, si la distancia $r(A,\ B)$ entre los puntos $A(x_1,\ y_1)$ y $B(x_2,\ y_2)$ es determinada por medio de la fórmula

$$r(A,\ B) = \left|\frac{1}{2}(x_2 - x_1) + 2(y_2 - y_1)\right| + \left|\frac{1}{2}(x_2 - x_1) - 2(y_2 - y_1)\right|.$$

Por ejemplo, para los puntos $A(8,\ 0)$ y $B(8,\ 4)$ tenemos $r(A,\ B) = 16$, y para sus imágenes $\Phi(A)$ y $\Phi(B)$ tenemos

$$r(\Phi(A),\ \Phi(B)) = 8.$$

Realizada la aplicación Φ, la "distancia" se disminuyó dos veces. Precisamente por esto se explica que el proceso de iteraciones para la resolución del sistema de ecuaciones

$$x = 1 + 2y,$$
$$y = 3 + \frac{x}{8}$$

converge, aunque la aplicación Φ no es contraída respecto a la distancia ordinaria (véase la página 91).

§ 26
CRITERIOS DE LA CONVERGENCIA DEL PROCESO DE APROXIMACIONES SUCESIVAS PARA LOS SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Apliquemos el criterio de convergencia obtenido a los sistemas de ecuaciones lineales. Al elegir de manera diferente las "distancias", obtendremos los criterios de convergencia para estos sistemas expresados mediante las propiedades de sus coeficientes.

Examinemos primero un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Sea $a_{11} \neq 0$ y $a_{22} \neq 0$. Resolvamos la primera ecuación respecto a x, y la segunda, respecto a y. Obtendremos el sistema de ecuaciones

$$x = \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} y,$$

$$y = \frac{b_2}{a_{22}} - \frac{a_{21}}{a_{22}} x.$$

Para abreviar, hagamos $\frac{b_1}{a_{11}} = \beta_1$, $-\frac{a_{12}}{a_{11}} = \alpha_1$, $\frac{b_2}{a_{12}} = \beta_2$, $-\frac{a_{21}}{a_{22}} = \alpha_2$.

Entonces, el sistema tomará la forma

$$\left.\begin{aligned} x = \alpha_1 y + \beta_1 \\ y = \alpha_2 x + \beta_2 \end{aligned}\right\} \tag{100'}$$

En este caso las funciones que prefijan la aplicación Φ, tienen por expresión

$$\varphi(x,\ y) = \alpha_1 y + \beta_1,\ \psi(x,\ y) = \alpha_2 x + \beta_2.$$

Aclaremos, cuáles deben ser los coeficientes α_1 y α_2 para que esta aplicación sea contraída.

Como sabemos, la distancia $r(A, B)$ entre los puntos $A(x_1, y_1)$ y $B(x_2, y_2)$ se expresa por medio de la fórmula

$$r(A,\ B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

La aplicación Φ pasa el punto A en el, punto $A_1(\alpha_1 y_1 + \beta_1, \alpha_2 x_1 + \beta_2)$, y el punto B, en el punto $B_1(\alpha_1 y_2 + \beta_1,\ \alpha_2 x_2 + \beta_2)$.

La distancia entre estos puntos se calcula según la fórmula

$$r(A_1, B_1) = \sqrt{(\alpha_1 y_2 - \alpha_1 y_1)^2 + (\alpha_2 x_2 - \alpha_2 x_1)^2} =$$
$$= \sqrt{\alpha_1^2 (y_2 - y_1)^2 + \alpha_2^2 (x_2 - x_1)^2}. \quad (101)$$

El mayor de los números $|\alpha_1|$ y $|\alpha_2|$ lo designemos con q:

$$q = \text{máx}(|\alpha_1|, |\alpha_2|).$$

Entonces, de la fórmula (101) se desprende la desigualdad

$$r(A_1, B_1) \leqslant q \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = qr(A, B).$$

Quiere decir que si $q < 1$, la aplicación Φ es contraída en todo el plano. Entonces, como sabemos, el proceso de aproximaciones sucesivas converge.

Hemos, pues, demostrado que si

$$\text{máx}(|\alpha_1|, |\alpha_2|) < 1, \quad (102)$$

el proceso de aproximaciones sucesivas, al resolver el sistema de ecuaciones (100') siempre converge.

Expresemos el criterio de convergencia obtenido directamente en términos de los coeficientes del sistema de ecuaciones (100). Para esto recordemos que

$$\alpha_1 = -\frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \alpha_2 = -\frac{a_{21}}{a_{22}}.$$

Sustituyendo estas expresiones en la condición (102), obtenemos la siguiente deducción:

Para que el proceso de aproximaciones sucesivas, al resolver el sistema de ecuaciones lineales

$$a_{11}x + a_{12}y = b_1,$$
$$a_{21}x + a_{22}y = b_2,$$

sea convergente, es suficiente que se cumpla la condición

$$\text{máx}\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) < 1.$$

Esta condición implica que los coeficientes diagonales deben ser mayores que los coeficientes no diagonales dispuestos en la misma línea. Por ello, por ejemplo, al resolver el sistema

$$x - 3y = -11,$$
$$6x + y = 10$$

la primera ecuación tiene que ser resuelta respecto a y, y la segunda, respecto a x:

$$y = \frac{11}{3} + \frac{1}{3}x, \quad x = \frac{5}{3} - \frac{y}{6}.$$

A veces resulta útil transformar de antemano el sistema de ecuaciones, habiendo sustituido las incógnitas x e y por unas incógnitas proporcionales. Tomemos, por ejemplo, el sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} 12x + y &= 14. \\ 3x - 2y &= -1. \end{aligned}\right\} \qquad (103)$$

Para este sistema

$$\text{máx}\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) = \text{máx}\left(\frac{1}{12}, \frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2},$$

y, por tanto, no se cumple el criterio suficiente par la convergencia del proceso de aproximaciones. Pero, si hacemos $x = \frac{1}{3}z$, entonces obtendremos el sistema

$$\left.\begin{aligned} 4z + y &= 14, \\ z - 2y &= -1, \end{aligned}\right\} \qquad (104)$$

para el cual

$$\text{máx}\left(\left|\frac{a_{12}}{a_{11}}\right|, \left|\frac{a_{21}}{a_{22}}\right|\right) = \text{máx}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}.$$

Esto significa que el sistema (104) puede resolverse por el método de aproximaciones sucesivas.

Por supuesto, la idea de emplear el método de aproximaciones sucesivas para resolver tales sistemas sencillos como es el sistema (104) no va a ocurrir a nadie. Sin embargo, este método suele ser muy útil para los sistemas que tienen gran número de incógnitas. Los criterios suficientes de la convergencia para el sistema

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{105}$$

se establecen de una manera aproximadamente igual que para el sistema de ecuaciones con dos incógnitas. No obstante, en este caso los diferentes métodos de hallar la distancia entre los puntos conducen a los resultados diferentes. A saber, subsiste la siguiente afirmación.

El proceso de aproximaciones sucesivas para el sistema (105) *converge, si se cumple una de las siguientes condiciones:*

$$1)\quad \max_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \tag{106}$$

$$2)\quad \max_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right| < 1, \tag{107}$$

$$3)\quad \max_k \sum_{i,\,j=1}^{n}{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1. \tag{108}$$

Una raya en las sumas (106) y (107) significa que está omitido el sumando para el cual $i = j$. En la suma (108) el signo (k) significa que están omitidos no sólo los sumandos para los cuales $i = j$, sino también aquellos para los cuales $i = k$. Observemos que la condicion 3) se cumple a ciencia cierta, si

$$\sum_{i,\,j=1}^{n}{}' \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 < 1, \tag{109}$$

donde la raya significa que están omitidos los sumandos para los cuales $i = j$. En la mayoria de los libros sobre las matemáticas de cálculo esta condición interviene precisamente en la forma (109).

Como ya hemos indicado, las condiciones (106) – (108) se obtienen si exigimos que la aplicación

$$x_1 \to \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n$$

. . . .

$$x_n \to \frac{b_n}{a_{nn}} - \frac{a_{n1}}{a_{nn}}x_1 - \frac{a_{n2}}{a_{nn}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1,n-1}}{a_{nn}}x_{n-1}$$

sea contraída respecto a cierta distancia.
A saber, la condición (106) corresponde a la distancia

$$r(A, B) = \text{máx}(|x_1 - y_1|, \ldots, |x_n - y_n|),$$

la condición (107) corresponde a la distancia $r(A, B) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$, y la condición (108) corresponde a la distancia $r(A, B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ entre los puntos $A(x_1, \ldots, x_n)$ y $B(y_1, \ldots, y_n)$.

Como en el caso de dos variables, a veces resulta útil sustituir las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$ por las incógnitas proporcionales a éstas, $y_1 = p_1x_1, \ldots, y_n = p_nx_n$, donde $p_1 > 0, \ldots, p_n > 0$.

En este caso, las condiciones (106), (107), (108) tomarán la forma

$$1') \quad \text{máx}_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \frac{p_i}{p_j} < 1, \qquad (106')$$

$$2') \quad \text{máx}_j \sum_{i=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \frac{p_i}{p_j} < 1, \qquad (107')$$

$$3') \quad \text{max} \sum_{i,\, j=1}^{n}{}^{(k)} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right|^2 \frac{p_i^2}{p_j^2} < 1 \qquad (108')$$

En particular, cuando $p_i = |a_{ii}|$, estas condiciones toman la forma

$$1'') \quad \text{máx}_i \sum_{j=1}^{n}{}' \left|\frac{a_{ij}}{a_{jj}}\right| < 1, \qquad (106'')$$

$$2'')\quad \max_j \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right| < 1, \tag{107''}$$

$$3'')\quad \max_k \sum_{i,\,j=1}^{n}{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{jj}} \right|^2 < 1. \tag{108''}$$

A título de ejemplo examinemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x - 0{,}6y - 0{,}5z &= -2{,}6, \\ -0{,}2x + y - 0{,}4z &= 3, \\ -0{,}1x + 0{,}5y + z &= 3{,}9. \end{aligned}$$

Las condiciones 1), 2), como también 1'), 2') para este sistema no se cumplen. Del modo igual para él no tiene lugar la desigualdad (109): la suma de los cuadrados de elementos no diagonales es igual a 1,07. Pero

$$\max_k \sum{}^{(k)} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \right|^2 = \max(0{,}6^2 + 0{,}5^2 + 0{,}2^2 + 0{,}4^2;\ 0{,}6^2 + 0{,}5^2 + $$
$$+ 0{,}1^2 + 0{,}5^2;\ 0{,}2^2 + 0{,}4^2 + 0{,}1^2 + 0{,}5^2) = 0{,}87 < 1,$$

y, por tanto, el sistema puede ser resuelto por el método de aproximaciones sucesivas.

Indiquemos que todas las condiciones, enunciadas más arriba, son suficientes para la convergencia del proceso de aproximaciones sucesivas, pero de ninguna manera no son necesarias. Eligiendo otros métodos para medir la distancia entre los puntos y apuntando la condición de contracción, obtenemos otras condiciones de la convergencia. Sin embargo, ahora no vamos a considerar este problema.

Para los sistemas de ecuaciones lineales son válidas las mismas observaciones que hemos mencionado en el § 5. Por ejemplo, el resultado de las aproximaciones no depende de la elección de la aproximación inicial. Por esto, si en el transcurso de los cálculos fue cometido un error, éste no desvaloriza los cálculos ulteriores sino sólo demora la obtención del resultado final.

Existen varios métodos de las aproximaciones sucesivas para resolver los sistemas de ecuaciones lineales. Por ejemplo, en algunos de ellos, al hallar el valor aproximado $x_1^{(n+1)}$, para encontrar $x_2^{(n+1)}$, sustituyen los valores $x_1^{(n+1)}$, $x_3^{(n)}$, $x_4^{(n)}$, ..., $x_m^{(n)}$; a continuación, para encontrar $x_3^{(n+1)}$ sustituyen los valores $x_1^{(n+1)}$, $x_2^{(n+1)}$, $x_4^{(n)}$, ..., $x_m^{(n)}$, etc. La descripción de todos los métodos posibles de las aproximaciones para los sistemas de ecuaciones lineales podría constituir el objeto de otro libro.

§ 27
APROXIMACIONES SUCESIVAS EN LA GEOMETRÍA

Hemos descrito las aplicaciones del método de aproximaciones sucesivas para resolver las ecuaciones y los sistemas de ecuaciones. Este método también se emplea en algunas ramas de la geometría, por ejemplo, al calcular la longitud de una circunferencia. Como sabemos, para calcular la longitud de una circunferencia, primero se halla el perímetro del cuadrado, inscrito en ésta, luego el perímetro del octógono regular inscrito, luego el perímetro de un polígono regular de 16 lados, etc. El límite de estos perímetros es precisamente la longitud de la circunferencia. Con ello, cada perímetro ulterior se calcula con ayuda del perímetro anterior. Esto se hace del modo siguiente:

Designemos por A_n un lado del polígono regular de 2^n lados y por P_n, el perímetro de éste. Por ejemplo, A_2 es un lado de un cuadrado, y por lo tanto, $A_2 = R\sqrt{2}$, $P_2 = 4R\sqrt{2}$. Supongamos que ya encontramos P_n. Entonces, evidentemente,

$$A_n = \frac{P_n}{2^n}.$$

En la geometría se demuestra que el lado a_{2n} de un polígono regular inscrito de $2n$ lados se expresa a través del lado a_n del polígono regular inscrito de n lados y del radio R de la circunferencia según la fórmula *)

*) Esta fórmula se deduce con mayor facilidad con ayuda de la trigonometría. Es evidente que si a_n es el lado de un polígono regular inscrito de n lados, y a_{2n} es el lado de un polígono regular

$$a_{2n} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}}. \tag{110}$$

Esto quiere decir que el lado A_{n+1} del polígono regular de 2^{n+1} lados se expresa mediante el lado A_n del polígono regular de 2^n lados según la fórmula

$$A_{n+1} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{A_n^2}{R^2}}}.$$

Como $A_n = \frac{P_n}{2^n}$ y $A_{n+1} = \frac{P_{n+1}}{2^{n+1}}$, entonces

$$P_{n+1} = 2^{n+1} R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{P_n^2}{2^{2n} R^2}}}. \tag{110'}$$

La sucesión de los números $P_2, P_3, \ldots, P_n \ldots$ tiende a la longitud de la circunferencia, es decir, al valor $2\pi R$. Por esta

---

inscrito de $2n$ lados, entonces

$$a_n = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{n} \text{ y } a_{2n} = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}$$

(véase el dibujo). Puesto que

$$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

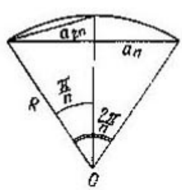


Рис. 22a

$$a_{2n} = 2R \operatorname{sen}\frac{\pi}{2n} = 2R\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{2}} =$$

$$= R\sqrt{2 - 2\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\frac{\pi}{n}}} = R\sqrt{2 - \sqrt{4 - \frac{a_n^2}{R^2}}}.$$

razón, la fórmula (110) puede considerarse como la fórmula para el cálculo del valor de $2\pi R$ por el método de aproximaciones sucesivas. Empleando este método, se puede hallar el valor de π con cualquier número de signos decimales.

Existe otro método del cálculo aproximado de π, denominado método de perímetros iguales. Al aplicar este método, el polígono regular de 2^n lados se sustituye por el polígono regular de 2^{n+1} lados que tiene el mismo perímetro. Designemos por l_n la apotema del polígono de 2^n lados y por r_n, el radio de la circunferencia circunscrita. La apotema del polígono regular de 2^{n+1} lados que tiene el mismo perímetro que el polígono de 2^n lados la designemos por l_{n+1} y el radio de la circunferencia circunscrita, por r_{n+1}.

Sea AB (fig. 23) un lado del polígono de 2^n lados, inscrito en la circunferencia de radio r_n. Unamos el centro C del arco AB con

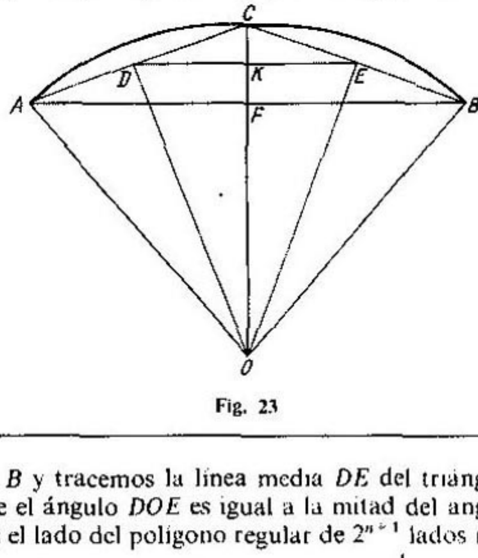


Fig. 23

los puntos A y B y tracemos la línea media DE del triángulo ACB. Es evidente que el ángulo DOE es igual a la mitad del ángulo AOB. Por esto, DE es el lado del polígono regular de 2^{n+1} lados inscrito en la circunferencia de radio OD. Puesto que $DE = \frac{1}{2} AB$, entonces el perímetro del polígono de 2^{n+1} lados es igual al perímetro del polígono de 2^n lados. Esto quiere decir que $r_{n+1} = OD$, $l_{n+1} = OK$.

Es fácil calcular que

$$l_{n+1} = OK = \frac{r_n + l_n}{2} \tag{111}$$

Luego, del triángulo rectangular *ODC* encontramos

$$r_{n+1} = \sqrt{r_n l_{n+1}}. \tag{112}$$

Las fórmulas (111) y (112) expresan r_{n+1} y l_{n+1} en términos de r_n y l_n.

Al crecer n, los perímetros de los polígonos no cambian y los números r_n y l_n van aproximándose a un mismo límite. Este límite es igual al radio de la circunferencia cuya longitud es igual al perímetro de nuestros polígonos. Si elegimos el polígono inicial de una manera tal que su perímetro sea igual a dos, entonces tanto r_n como l_n tienden al número $\frac{1}{\pi}$.

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \frac{1}{\pi}; \quad \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{\pi}.$$

Por ejemplo, si tomamos por el primer polígono un cuadrado de lado 1/2, entonces $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $l_2 = \frac{1}{4}$. Por esta causa subsiste la siguiente afirmación: si hacemos $r_2 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $l_2 = \frac{1}{4}$ y calculamos los valores r_{n+1}, l_{n+1}, $n = 2, 3, \ldots$ según las fórmulas (111) y (112), entonces

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} l_n = \frac{1}{\pi}.$$

Por medio de estas fórmulas podemos hallar aproximadamente el valor de $\frac{1}{\pi}$. Con este fin se debe realizar los cálculos hasta que los valores de r_n y l_n coincidan en los límites de la precisión escogida. Este valor general de r_n y l_n será el valor de $\frac{1}{\pi}$ con la precisión prefijada.

§ 28
CONCLUSIÓN

Hemos conocido en este libro el empleo del método de aproximaciones sucesivas en la resolución de diferentes problemas: la elaboración de los planes, la extracción de raíces, resolución de las ecuaciones, cálculo de la longitud de la circunferencia. Con estos problemas no se agota la diversidad del uso de este método. Muchos problemas llevan a las ecuaciones diferenciales (en las que figuran las derivadas de las funciones buscadas), las ecuaciones integrales, y a las ecuaciones del tipo aún más complejo. El método de aproximaciones sucesivas también constituye uno de los métodos más acertados para la resolución aproximada de dichas ecuaciones. Por supuesto, en estos casos el uso del método de aproximaciones sucesivas es mucho más complejo en comparar con el caso de las ecuaciones algebraicas. No obstante, se puede afirmar que sin el empleo del método de aproximaciones sucesivas no sería posible resolver ni uno de aquellos grandiosos problemas físicos y técnicos que hoy día se resuelven. Este método es de amplio uso en los cálculos, del movimiento de los sputniks, de los reactores nucleares, en la exploración de la estructura del átomo. Sin embargo, el relato sobre el empleo del método de aproximaciones sucesivas fuera de los límites de las matemáticas elementales no es la tarea de esta obra.

EJERCICIOS

Para que el lector pueda comprobar en qué grado él se apoderó de los métodos de la resolución aproximada de las ecuaciones, expuestos en este libro, damos a continuación unos cuantos ejemplos de la resolución aproximada de ecuaciones.

Resuélvanse por el método de iteraciones las ecuaciones *

1. $x = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.
2. $x = (x+1)^3$.
3. $x = 4 + \sqrt[3]{\dfrac{x-1}{x+1}}$.
4. $x = 2 \pm \sqrt[4]{x}$
5. $x = \sqrt[3]{5-x}$.
6. $4 - x = \operatorname{tg} x$.
7. $x^2 = \operatorname{sen} x$.
8. $x^3 = \operatorname{sen} x$.
9. $x = \operatorname{arcsen} \dfrac{x+1}{4}$.
10. $x = \cos x$.
11. $x = \dfrac{1}{\cos x}$.
12. $x = 1 + \dfrac{1}{10} \operatorname{sen} x$.
13. $x = \pm \sqrt{\lg(x+2)}$.
14. $x^2 = \ln(x+1)$.
15. $\ln x = 4 - x^2$.
16. $\ln x = 2 - x$.
17. $x^2 = e^x + 2$.
18. $\ln x = 0{,}1\, x$.
19. $\operatorname{tg} x = \lg x$.
20. $x = \dfrac{1}{10} e^{-x}$.

Resuélvanse por el método de Newton las ecuaciones.

21. $x^3 - 5x + 1 = 0$.
22. $x^3 - 9x^2 + 20x - 11 = 0$.
23. $x^3 - 3x^2 + 11 = 0$.
24. $x^5 + 5 + 1 = 0$.
25. $\operatorname{sen} x + x = 1$.
26. $x^2 - 10 \lg x - 3 = 0$.

27. Haciendo uso del método de las aproximaciones sucesivas, resuélvanse con un error inferior a 0,001 los sistemas de ecuaciones

$$a) \begin{cases} x = 0{,}2y - 0{,}1\, z + 0{,}898, \\ y = 0{,}3\, x + 0{,}15z + 1{,}383, \\ z = 0{,}25\, x - 0{,}4\, y + 3{,}677; \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} x = \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x+y) + 0{,}336, \\ y = -\dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(x-y) + 0{,}362; \end{cases} \qquad c) \begin{cases} x = \sqrt{x+2y} - 0{,}710, \\ y = \sqrt{y-x} + 1. \end{cases}$$

---

*) En unos de los ejemplos dados es necesario, primeramente, reducir la ecuación al tipo $x = \varphi(x)$.

RESOLUCIONES

1. Hagamos $\varphi(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$. Entonces $\varphi'(x) = \frac{-2}{(1+x)^3}$. Tenemos $\varphi(0) = 1 > 0$, $\varphi(1) = \frac{1}{4} < 1$. Por ello, el segmento $[0, 1]$ contiene la raíz de la ecuación dada. Sin embargo, no podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas al segmento dado, puesto que $|\varphi'(0)| = 2 > 1$. Para hacer el segmento más estrecho, indiquemos que $\varphi(0,4) = \frac{1}{1{,}96} > 0{,}4$. Por esta razón, la ecuación tiene raíz en el segmento $[0{,}4, 1]$. Además, $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{1{,}4^3} < 1$, siempre que $0{,}4 \leqslant x \leqslant 1$, y, por lo tanto, puede emplearse el método de aproximaciones sucesivas. Haciendo $x_1 = 0{,}4$, obtenemos, después de 11 pasos de la aproximación, que $x_{11} \approx \varphi(x_{11}) \approx \approx 0{,}4655$.

Por consiguiente, con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = 0{,}4655$.

2. Hagamos $\varphi(x) = (x+1)^3$. Entonces, $\varphi'(x) = 3(x+1)^2$. Tenemos $\varphi(-2) = -1 > -2$, $\varphi(-3) = -8 < -3$. Por lo tanto, el segmento $[-3, -2]$ contiene la raíz de la ecuación dada. Sin embargo, no podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas, puesto que en el segmento $[-3, -2]$ tenemos $|\varphi'(x)| > 1$. Escribamos la ecuación dada en la forma

$$x = \sqrt[3]{x} - 1.$$

Entonces, $\psi(x) = \sqrt[3]{x} - 1$ y $\psi'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$. En el segmento $[-3, -2]$ tenemos $|\psi'(x)| \leqslant \frac{1}{3\sqrt[3]{x}} < 1$, y, por lo tanto, puede emplearse el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = -2$, obtenemos $x_6 \approx \psi(x_6) \approx \approx -2{,}325$. Esto quiere decir que con un error inferior a 0,001 tenemos $x = -2{,}325$.

3. Hagamos $\varphi(x) = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. Tenemos

$$\varphi'(x) = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x-1)^2(x+1)^4}}$$

La fig. 24 muestra que la recta $y = x$ corta la curva $y = 4 + \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$ en dos puntos, ubicados, respectivamente, en los segmentos $[-1, 0]$ y $[4{,}5]$.

En el segmento [4,5] tenemos $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{2}{15\sqrt[3]{45}} < 1$. Haciendo $x_1 = 4$, tenemos $x_3 \approx \varphi(x_3) \approx 4{,}870$. Esto quiere decir que con un error inferior a 0,001 obtenemos $x_3 = 4{,}870$.

En el segmento $[-1, 0]$ el método de aproximaciones sucesivas no puede emplearse directamente. Escribamos en este segmento la ecuación en la forma $(x-4)^3 = \frac{x-1}{x+1}$, de donde $\frac{x-1}{(x-4)^3} = x+1$ y $x = \frac{x-1}{(x-4)^3} - 1$.

Aquí, $\psi(x) = \frac{x-1}{(x-4)^4} - 1$ y $\psi'(x) = \frac{-2x-1}{(x-4)^4}$. Está claro que para $-1 \leqslant x \leqslant 0$ tenemos $|\psi'(x)| \leqslant \frac{1}{256} < 1$, y ahora podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 0$, tenemos $x_2 \approx \psi(x_2) \approx -0{,}9840$. Por consiguiente, con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = -0{,}9840$.

Hemos encontrado dos raíces: $x = -0{,}9840$, $x = 4{,}870$.

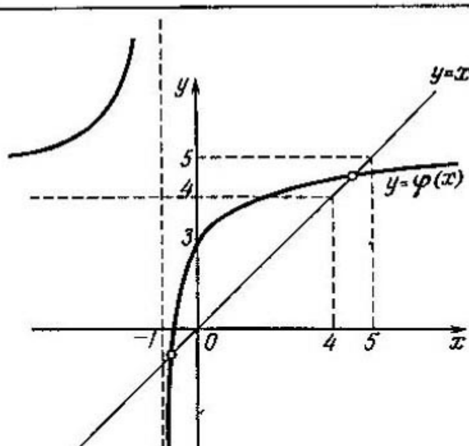


Fig. 24

4. Aquí, $\varphi_1(x) = 2 + \sqrt[4]{x}$ y $\varphi_2(x) = 2 - \sqrt[4]{x}$. De la figura 25 se ve que la ecuación $x = 2 + \sqrt[4]{x}$ tiene raíz en el segmento [3, 4]. En este segmento

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} < 1$$

Empleamos el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 4$, tenemos $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 3{,}353$. Por lo tanto, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 3{,}353$.

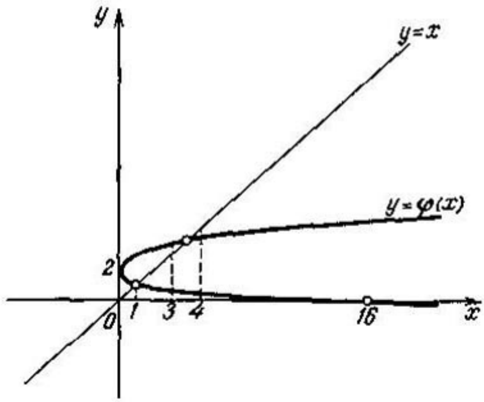


Fig. 25

Ahora resolvamos la ecuación $x = 2 - \sqrt[3]{x}$. Tiene la raíz $x = 1$. Así pues, las raíces de la ecuación son iguales a 1 y a 3,353.

5. Aquí, $\varphi(x) = \sqrt[3]{5 - x}$ y $\varphi(x) = \dfrac{-1}{3\sqrt[3]{(5 - x)^2}}$.

Tenemos

$$\varphi(1) = \sqrt[3]{4} < 2, \quad \varphi(2) = \sqrt[3]{3} > 1.$$

Por esto, en el segmento $[1, 2]$ existe la raíz de la ecuación. En este segmento $|\varphi'(x)| \leqslant \dfrac{1}{3\sqrt[3]{9}} < 1$. Al hacer $x_1 = 1$, tenemos $x_5 \approx \varphi(x_5) \approx 1{,}516$. Por consiguiente, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 1{,}516$.

6. Escribamos la ecuación en la forma

$$x = \operatorname{arctg}(4 - x).$$

Aquí, $\varphi(x) = \operatorname{arctg}(4 - x)$. Tenemos $\varphi(1) = \operatorname{arctg} 3 \approx 1{,}25$, $\varphi(2) = \operatorname{arctg} 2 \approx \approx 1{,}10$. De aquí se deduce que existe la raíz de esta ecuación ubicada en el segmento $[1, 2]$. En este segmento tenemos

$$|\varphi'(x)| = \frac{1}{1 + (4 - x)^2} \leqslant \frac{1}{5}.$$

Por lo tanto, podemos emplear el método de aproximaciones sucesivas.

Al hacer $x_1 = 1$, tenemos $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 1{,}225$. Por consiguiente, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 1{,}225$.

7. La ecuación dada tiene la raíz $x = 0$. De la figura 26 se ve que la segunda raíz de la ecuación es positiva. Por esto, ella satisface la

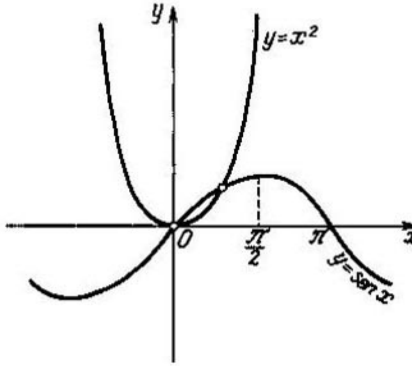


Fig. 26

ecuación $x = \sqrt{\operatorname{sen} x}$. Aquí, $\varphi(x) = \sqrt{\operatorname{sen} x}$ y $\varphi'(x) = \dfrac{\cos x}{2\sqrt{\operatorname{sen} x}}$.

Ya que

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}} \approx \sqrt{0{,}4794} > \frac{1}{2}$$

y

$$\varphi(1) = \sqrt{\operatorname{sen} 1} \approx \sqrt{0{,}8414} < 1,$$

entonces, la ecuación tiene una raíz en el segmento $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. En este segmento tenemos

$$|\varphi'(x)| \leqslant \frac{\cos\frac{1}{2}}{2\sqrt{\operatorname{sen}\frac{1}{2}}} \approx \frac{0{,}8703}{1{,}3846} < 1,$$

y por razón el método de aproximaciones sucesivas converge. Al hacer $x_1 = 1$, tenemos $x_7 \approx \varphi(x_7) \approx 0{,}8768$. Quiere decir que con un error inferior a 0,0001 la segunda raíz de la ecuación es igual a 0,8768.

8. Se resuelve igual que el anterior. Escribamos la ecuación en forma

$$x = \sqrt[3]{\operatorname{sen} x},$$

hacemos $x_1 = 1$ y obtenemos $x_6 \approx \varphi(x_6) \approx 0{,}9286$. Por esto, con un error inferior a 0,001 una de las raíces de la ecuación es igual a 0,9286. Como ambos miembros de la ecuación son las funciones impares, tenemos una raíz más, a saber, 0,9286. La tercera raíz es 0.

9. La ecuación podemos escribirla en la forma $\frac{x+1}{4} = \operatorname{sen} x$.

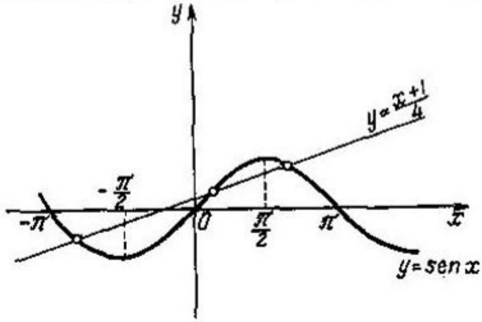


Fig. 27

$-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$. De la fig. 27 se deduce que esta ecuación tiene la única raíz que se encuentra entre 0 y $\pi/2$. En este caso

$$\varphi(x) = \arcsin \frac{x+1}{4},$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - (x+1)^2}}.$$

En el segmento $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tenemos $|\varphi'(x)| < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$. Al hacer $x_1 = 0$, hallamos $x_8 \approx \varphi(x_8) \approx 0{,}3422$. Por lo tanto con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = 0{,}3422$.

10. Puesto que $\cos 0 = 1$, $\cos 1 > 0$, entonces la ecuación $x = \cos x$ tiene la raíz en el segmento $[0, 1]$. Ya que $|\varphi'(x)| \leqslant \operatorname{sen} 1 < 1$, se puede emplear el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 1$, obtenemos que con un error inferior a 0,0001 $x = 0{,}7391$.

11. La fig. 28 muestra que las raíces positivas de la ecuación son próximas a los puntos de intersección del gráfico de la función $y = \cos x$ con el eje de abscisas y se ubican a la derecha de los puntos de intersección del tipo $\frac{\pi}{2} + (2k+1)\pi$, y a la izquierda de los puntos de intersección del tipo $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$. Para hallar la solución ubicada cerca del punto $x = \frac{\pi}{2} + n\pi$,

hagamos $x - n\pi - \frac{\pi}{2} = y$. La ecuación tomará la forma

$$y = n\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{1}{\cos\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{(-1)^{n+1}}{\operatorname{sen} y}.$$

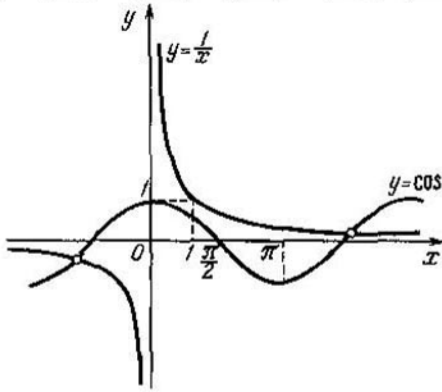


Fig. 28

En este caso, $-\frac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, y, por lo tanto, la ecuación puede escribirse en la forma

$$y = (-1)^{n+1} \operatorname{arcsen} \frac{1}{y + n\pi + \frac{\pi}{2}}.$$

Aquí,

$$\varphi(y) = (-1)^{n+1} \operatorname{arcsen} \frac{1}{y + n\pi + \frac{\pi}{2}}$$

y

$$\varphi'(y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)^2 - 1}\left(y + n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Está claro que cerca del punto $y = 0$ tenemos $|\varphi'(y)| < q < 1$, y por esta razón podemos emplear el método de aproximaciones sucesivas. Hallemos la solución para $n = 1$ con un error inferior a 0,001. Sea $y_0 = 0$ Entonces, $y_2 \approx \varphi(y_2) \approx 0{,}204$. Por consiguiente, $y \approx 0{,}204$; $x = \frac{3}{2}\pi + y \approx 4{,}917$.

Para hallar la primera raíz negativa, hagamos $n = -1$ Obtendremos la ecuación

$$y = \operatorname{arcsen} \frac{1}{y - \frac{\pi}{2}}.$$

Hagamos $y_0 = 0$. Entonces

$$y_6 \approx \varphi(y_6) \approx -0{,}503.$$

De este modo, $y \approx -0{,}503$, y, por lo tanto, $x \approx -2{,}074$.

Con mayores valores de $|n|$ el método de aproximaciones sucesivas da la fórmula aproximada para y:

$$y \approx \varphi(y_0) = (-1)^{n+1} \operatorname{arcsen} \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}} \approx \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n+1)\pi}.$$

Por esta razón

$$x \approx \frac{\pi}{2}(2n+1) + \frac{(-1)^{n+1} \cdot 2}{(2n+1)\pi}.$$

12. Al hacer $x_1 = 0$, encontramos que $x_3 \approx \varphi(x_3) \approx 1{,}088$. Por consiguiente, con un error inferior a 0,001 $x \approx 1{,}088$

13. Primero resolvamos la ecuación $x = \sqrt{\lg(x+2)}$. Tenemos $\varphi(x) = \sqrt{\lg(x+2)}$, y por esto

$$\varphi'(x) = \frac{\lg e}{2(x+2)\sqrt{\lg(x+2)}}.$$

Como $\varphi(0) = \sqrt{\lg 2} > 0$, $\varphi(1) = \sqrt{\lg 3} < 1$, entonces la ecuación tiene una raíz en el segmento $[0, 1]$. En este segmento se cumple la desigualdad $|\varphi'(x)| < q < 1$. Por lo tanto, puede emplearse el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 1$, tenemos $x_5 \approx \varphi(x_5) \approx 0{,}6507$. Quiere decir que la raíz de la ecuación $x = \sqrt{\lg(x+2)}$ con un error inferior a 0,0001 es igual a $x = 0{,}6507$.

Examinemos la ecuación

$$x = -\sqrt{\lg(x+2)}.$$

Aquí,

$$\varphi(x) = -\sqrt{\lg(x+2)}$$

Puesto que $\varphi(0) = -\sqrt{\lg 2} = -0.55$, $\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{\lg 1.5} = -0.42$, dicha ecuación tiene la raíz en el segmento $[-1/2, 0]$. Al hacer $x_1 = 0$, hallamos que $x_8 \approx \varphi(x_8) \approx -0{,}4397$. Así pues, con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = -0{,}4397$.

14. Una de las raíces de la ecuación es $x = 0$. Para hallar la segunda raíz, escribamos la ecuación en la forma $x = \pm\sqrt{\ln(x+1)}$. Para la ecuación $x = \sqrt{\ln(x+1)}$ tenemos

$$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\ln\frac{3}{2}} > \frac{1}{2},$$
$$\varphi(1) = \sqrt{\ln 2} < 1.$$

Esto significa que la ecuación tiene una raíz en el segmento $[1/2, 1]$. Puesto que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2(x+1)\sqrt{\ln(x+1)}}$, entonces en el segmento $[1/2, 1]$ tenemos $|\varphi'(x)| < q < 1$. Hagamos $x_1 = 1$, entonces $x_9 \approx \varphi(x_9) \approx 0{,}7469$. Así pues, con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = 0{,}7469$. La ecuación $x = -\sqrt{\ln(x+1)}$ no tiene raíces, a excepción de $x = 0$. Así, $x = 0$ ó $x = 0{,}7469$.

15. Escribamos la ecuación en la forma

$$x = \sqrt{4 - \ln x}.$$

Aquí,

$$\varphi(1) = 2,\ \varphi(2) = \sqrt{4 - \ln 2},\ \varphi'(x) = \frac{-1}{2x\sqrt{4 - \ln x}}.$$

Puesto que $\varphi(1) = 2$, $\varphi(2) = \sqrt{4 - \ln 2} < 2$, entonces la ecuación tiene una raíz en el segmento $[1, 2]$. La fig. 29 muestra que la ecuación no

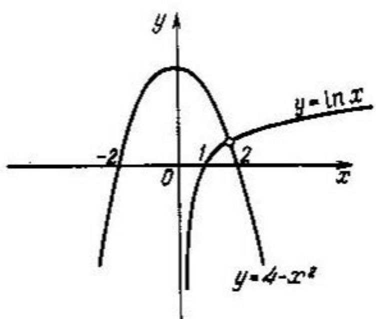


Fig. 29

tiene otras raíces. Al hacer $x_1 = 2$, obtenemos

$$x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 1{,}841.$$

Así pues, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 1{,}841$.

16. Escribamos la ecuación en la forma

$$x = 2 - \ln x.$$

Aquí, $\varphi(x) = 2 - \ln x$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{x}$. De la fig. 30 se desprende que la raíz de la ecuación se ubica en el segmento $[1, 2]$. En este segmento $|\varphi'(x)| \leqslant \leqslant 1$. Al hacer $x_1 = 1{,}5$, encontramos $x_{13} \approx \varphi(x_{13}) \approx 1{,}557$. Así pues, $x = 1{,}557$ con un error inferior a 0,001.

17. De la fig. 31 se desprende que la ecuación sólo tiene una raiz negativa. Escribamos la ecuación en la forma

$$x = -\sqrt{e^x + 2}.$$

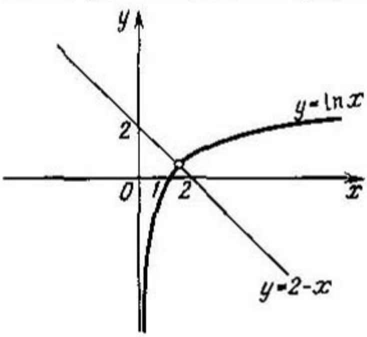


Fig. 30

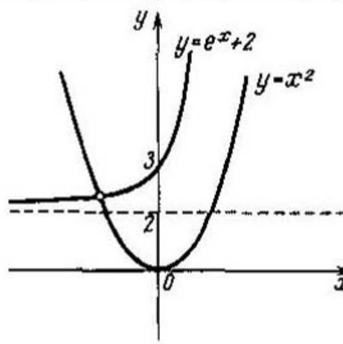


Fig. 31

Entonces,

$$\varphi(x) = -\sqrt{e^x + 2}, \quad \varphi'(x) = \frac{-e^x}{2\sqrt{e^x + 2}}$$

y

$$\varphi(-1) = -\sqrt{2 + e^{-1}} \approx -1{,}54; \quad \varphi(-2) = -\sqrt{2 + e^{-2}} \approx -1{,}46.$$

Por lo tanto, la raiz se ubica en el segmento $[-1, -2]$. Al hacer $x_1 = -1$, encontramos que $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx -1{,}492$. Por consiguiente, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = -1{,}492$.

18. Está claro que una de las raices de la ecuación es $x_1 = 10$. Para hallar la segunda raiz, escribamos la ecuación en la forma $x = 10^{0,1x}$. Aquí, $\varphi(x) = 10^{0,1x}$, $\varphi'(x) = 0{,}1 \cdot 10^{0,1x} \ln 10$. Además, $\varphi(1) = 10^{0,1} > 1$, $\varphi(2) = 10^{0,2} < 2$. Por esto, la ecuación tiene la raiz en el segmento $[1, 2]$.

En este segmento

$$|\varphi'(x)| \leqslant 0{,}1 \cdot 10^{0{,}2} \cdot \ln 10 \approx 0{,}37 < 1.$$

Ahora podemos aplicar el método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 2$, encontramos que $x_7 \approx \varphi(x_7) \approx 1{,}372$. Así pues, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 1{,}372$.

19. De la fig. 32 se deduce que la ecuación tiene raíces en cada uno de los segmentos

$$\left[\frac{\pi}{2} + n\pi,\ \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi\right],\quad n = 0, 1, \ldots,$$

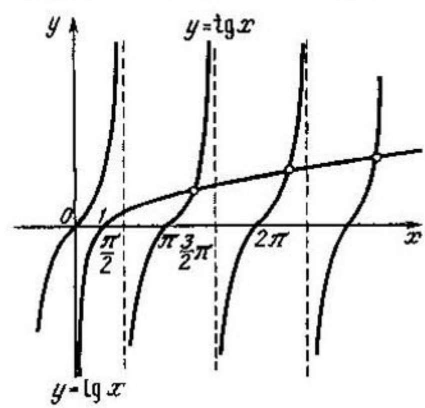


Fig. 32

con la particularidad de que estas raíces se ubican en las mitades derechas de los segmentos. Para hallar la primera raíz positiva, hagamos la sustitución $x = \frac{3\pi}{2} - y$. La ecuación tomará la forma

$$\operatorname{ctg} y = \lg\left(\frac{3\pi}{2} - y\right).$$

de donde, ya que $0 < y < \pi$, tenemos

$$y = \operatorname{arctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right].$$

Aquí,

$$\varphi(y) = \operatorname{arctg}\left[\lg\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right]$$

y

$$\varphi'(y) = \frac{-\lg e}{\left[1 + \lg^2\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)\right]\left(\frac{3}{2}\pi - y\right)}$$

En el segmento $[0, \pi]$ hay raíz de nuestra ecuación, y en este segmento $|\varphi'(y)| < 1$. Hagamos uso del método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $y_1 = 0$, tenemos $y_4 \approx \varphi(y_4) \approx 1{,}059$. Esto significa que con un error inferior a 0,001 tenemos $y = 1{,}059$, y, por lo tanto, $x = 3{,}654$.

Para hallar la segunda raíz positiva, hacemos $x = \frac{5}{2}\pi - y$. La ecuación toma la forma

$$y = \operatorname{arctg}\left[\lg\left(\frac{5}{2}\pi - y\right)\right]$$

Al hacer $y_1 = 0$, obtenemos $y_4 \approx \varphi(y_4) \approx 0{,}876$. Por lo tanto, con un error inferior a 0,001 tenemos $y = 0{,}870$ y $x = 6{,}984$.

20. De la fig. 33 se deduce que la ecuación tiene una raíz ubicada entre 0 y 1. Tenemos $\varphi(x) = \frac{1}{10}e^{-x}$, $\varphi'(x) = -\frac{1}{10}e^{-x}$. En el segmento

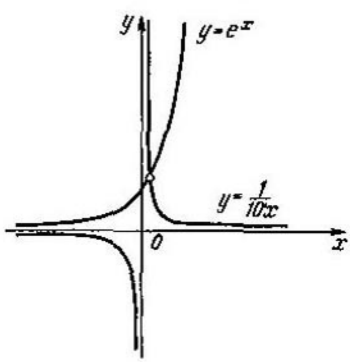


Fig. 33

$[0, 1]$ se cumple la desigualdad $|\varphi'(x)| \leqslant \frac{1}{10}$ que hace posible el empleo del método de aproximaciones sucesivas. Al hacer $x_1 = 0$, hallamos $x_4 \approx \varphi(x_4) \approx 0{,}091$. Por lo tanto, con un error inferior a 0,0001 tenemos $x = 0{,}091$.

21. Sea

$$f(x) = x^3 - 5x + 1.$$

Entonces

$$f'(x) = 3x^2 - 5,\ f''(x) = 6x.$$

Según la fórmula de Newton, tenemos

$$\beta_{n+1} = \beta_n - \frac{\beta_n^3 - 5\beta_n + 1}{3\beta_n^2 - 5}$$

Componemos la tabla de los valores de la función

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-11	3	5	1	-3	-1	13

Esta tabla muestra que la ecuación $x^3 - 5x + 1 = 0$ tiene las raíces en los segmentos $[-3, -2]$, $[0, 1]$, $[2, 3]$.

Hallemos primero la raíz ubicada en el segmento $[-3, -2]$. Puesto que en este segmento $f''(x) < 0$, entonces, como primer valor tomamos $\beta_0 = -3$ (ya que $f(\beta_0) = -11$ es un número negativo). Tenemos

$$\beta_1 = -3 - \frac{(-3)^3 - 5(-3) + 1}{3(-3)^2 - 5} = -2{,}5.$$

Continuando los cálculos, encontramos que $\beta_3 = \beta_4 \approx -2{,}331$. Resulta que con un error inferior a 0,001 la raíz de la ecuación en el segmento $[-3, -2]$ es igual a $-2{,}331$.

Ahora hallemos la raíz que se encuentra en el segmento $[0, 1]$. Aquí tenemos $f''(x) \geqslant 0$. Por ello, hacemos $\beta_0 = 0$. De aquí obtenemos

$$\beta_1 = 0 - \frac{0^3 - 5\cdot 0 + 1}{3\cdot 0^2 - 5} = 0{,}2,\ \beta_3 = \beta_4 = 0{,}202.$$

Con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 0{,}202$.

Por fin, para hallar la raíz en el segmento $[2,3]$ hacemos $\beta_0 = 3$ y tenemos

$$\beta_1 = 3 - \frac{3^3 - 5\cdot 3 + 1}{3\cdot 3^2 - 5} \approx 2{,}409.$$

Continuando los cálculos, encontramos que $\beta_4 \approx \beta_5 = 2{,}128$. Por esto, con un error inferior a 0,001 la raíz es igual a 2,128. Hemos, pues, encontrado tres raíces: $x_1 = -2{,}331$; $x_2 = 0{,}202$; $x_3 = 2{,}128$.

Resolvamos esta misma ecuación por el método de cuerdas perfeccionado. En el segmento $[-3, -2]$ encontramos

$$\alpha_1 = -3 - f(-3)\frac{-3 - (-2)}{f(-3) - f(-2)} = -3 + 11\frac{(-3)}{-14} \approx -2{,}214.$$

Como en este segmento $f''(x) < 0$, la curva gira su convexidad hacia la parte positiva del eje de las y, por lo cual α_2 se determina según la fórmula

$$\alpha_2 = -3 - f(-3)\frac{-3-(-2{,}214)}{f(-3)-f(-2{,}214)} \approx -2{,}293.$$

A continuación hallamos

$$\alpha_3 = -2{,}293 - f(-2{,}293)\frac{-2{,}293+2{,}214}{f(-2{,}293)-f(-2{,}214)} \approx -2{,}331.$$

Esto coincide, con un error inferior a 0,001, con el valor de x hallado antes.

Del modo igual resolvemos la ecuación en los segmentos [0,1] y [2, 3].

22. Aquí tenemos

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 20x - 11,$$
$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 20,$$
$$f''(x) = 6x - 18 = 6(x-3).$$

Componemos la tabla de la función $f(x)$;

x	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	-11	1	1	-5	-11	-11	1

Las raíces de la ecuación están en los segmentos [0, 1], [2, 3], [5, 6].

En el segmento [0, 1] hacemos $\beta_0 = 0$ y hallamos que $\beta_4 \approx \beta_5 \approx 0{,}834$. En el segmento [2, 3] hacemos $\beta_0 = 3$ y encontramos que $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 2{,}216$. En el segmento [5, 6] hacemos $\beta_1 = 0$ y encontramos que $\beta_4 \approx \beta_5 \approx 5{,}249$. Encontramos (con un error inferior a 0,001) tres raíces de la ecuación

$$x_1 = 0{,}834;\ x_2 = 2{,}216;\ x_3 = 5{,}249$$

23. Aquí, $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x + 11$, $f'(x) = 3x^2 - 6x - 3$, $f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$. Componemos la tabla de los valores para $f(x)$:

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	10	11	6	1	2

La ecuación tiene una raíz real ubicada en el segmento $[-2, -1]$. Para hallar esta raíz, hacemos $\beta_0 = -2$. Obtenemos que $\beta_2 \approx \beta_3 \approx -1{,}847$. Por esto, con un error inferior a 0,001 tenemos $x = -1{,}847$.

24. Aquí, $f(x) = x^5 + 5x + 1$, $f'(x) = 5x^4 + 5$, $f''(x) = 20x^3$. La tabla de los valores de la función $f(x)$:

x	-1	0	1
$f(x)$	-5	1	7

Por esto, la ecuación tiene una raíz en el segmento $[-1, 0]$. Hacemos $\beta_0 = -1$. Tenemos, con un error inferior a 0,0001, $\beta_3 \approx \beta_4 \approx -0,1999$. Por eso, con la precisión indicada tenemos $x = -0,1999$.

25. Aquí, $f(x) = \operatorname{sen} x + x - 1$, $f'(x) = \cos x + 1$, $f'' = -\operatorname{sen} x$. La tabla de los valores de la función:

x	0	1	2
$f(x)$	-1	$0,8115$	$1,9093$

La raíz se encuentra en el segmento $[0, 1]$. Hacemos $\beta_0 = 0$ y hallamos que $\beta_2 = \beta_3 = 0,5110$. Por esto, con un error inferior a 0,0001, tenemos $x = 0,5110$.

26. Aquí, $f(x) = x^2 - 10\lg(x) - 3$, $f'(x) = 2x - \dfrac{10}{x \ln 10}$, $f''(x) = 2 + \dfrac{10}{x^2 \ln 10}$. La tabla de los valores de la función $f(x)$:

x	$0,5$	1	2	3
$f(x)$	$0,26$	-2	$-2,01$	$1,23$

Las raíces de la ecuación se encuentran en los segmentos $[0,5, 1]$ y $[2, 3]$. En el segmento $[0,5, 1]$ hacemos $\beta_0 = 0,5$ y obtenemos que $\beta_2 = \beta_3 \approx 0,535$. Por esto, la raíz correspondiente, con un error inferior a 0,001, es igual a 0,535. En el segmento $[2, 3]$ hacemos $\beta_0 = 3$ y hallamos que $\beta_2 \approx \beta_3 \approx 2,705$.

La ecuación tiene dos raíces: $x_1 = 0,535$; $x_2 = 2,705$.

27. En el sistema a) hacemos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ y después de unas cuantas aproximaciones encontramos que con un error inferior a 0,001 tenemos $x = 1,021$, $y = 2,150$, $z = 3,072$.

En el sistema b) hacemos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, y después de unas cuantas aproximaciones obtenemos (con un error inferior a 0,001) que $x = 0,520$, $y = 0,310$.

En el sistema c) hacemos $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ y hallamos $x = 1,000$, $y = 2,000$.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

Yu. I. Lyúbich, L.A.Shor
Método cinemático en problemas geométricos

A.S. Solodóvnikov
Sistemas de desigualdades lineales

G.E. Shílov
Gama simple
Cómo construir las gráficas

V.A. Uspenski
Algunas aplicaciones de la mecánica a las matemáticas

V.G. Shervátov
Funciones hiperbólicas

Editorial MIR Moscú