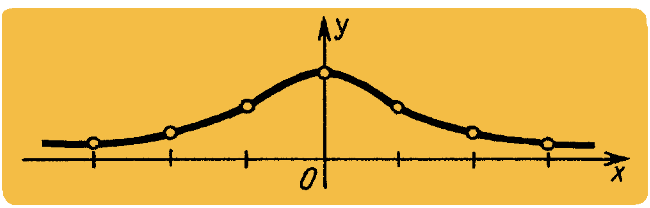
Lecciones populares de matemáticas

ANALISIS MATEMATICO EN EL CAMPO DE FUNCIONES RACIONALES

G. E. Shílov



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

Г. Е. ШИЛОВ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ В ОБЛАСТИ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

G. E. SHÍLOV

ANÁLISIS MATEMÁTICO EN EL CAMPO DE FUNCIONES RACIONALES

Traducido del ruso por
Carlos Vega,
Candidato a doctor en ciencias
físico-matemáticas

Segunda edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Impeso en la URSS

На испанском языке

Primera edición 1975
Segunda edición 1984

INDICE

PREFACIO

Los conceptos de la derivada y de la integral, fundamentales en el Análisis Matemático, no son elementales: en cualquier curso consecuente de Análisis Matemático les preceden las teorías de los números reales, de los límites y de las funciones continuas. Esta exposición previa es indispensable si se quiere enunciar dichos conceptos de forma suficientemente universal con el fin de aplicarlos a clases de funciones lo más amplio posibles. Sin embargo, limitándose a la clase relativamente estrecha de las funciones racionales y recurriendo al lenguaje de la representación gráfica, es posible explicar estos conceptos en pocas páginas de una manera precisa y, a la vez, enjundiosa. Este es el objetivo de nuestro folleto destinado a un amplio sector de lectores; los conocimientos de un escolar de los dos últimos grados bastan para comprender todo cuanto aquí se trata.

§ 1. GRÁFICOS

Aun suponiendo que el lector está familiarizado con la representación gráfica, recordaremos los momentos esenciales.

Tracemos en el plano dos rectas perpendiculares, una horizontal y otra vertical, indicando por O el punto de intersección. La recta horizontal se denomina *eje de las abscisas* y la vertical lleva el nombre de *eje de las ordenadas*. El punto O divide cada uno de los ejes en dos semiejes, uno positivo y otro negativo: el semieje de la derecha del eje de las abscisas y el semieje de arriba del eje de las ordenadas se consideran positivos, mientras que el semieje de la izquierda del eje de las abscisas y el semieje de abajo del eje de las ordenadas se consideran negativos; marquemos con flechas los semiejes positivos. La posición de cualquier punto M del plano se puede entonces determinar mediante un par de números. Para ello bajemos desde M las perpendiculares a cada uno de los ejes obteniendo así dos segmentos: OA y OB (fig. 1).

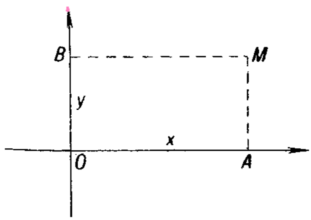


FIG. 1

La longitud del segmento OA, tomada con el signo «+» si A se halla en el semieje positivo y con el signo «—» si A se encuentra en el semieje negativo, se denomina *abscisa* del punto M y se designa por x. Análogamente, la longitud del segmento OB (aplicando la misma regla para determinar su signo) se denomina *ordenada* del punto M y se representa por y. Los números x e y son las *coordenadas* del punto M. Todo punto del plano tiene coordenadas; además, la ordenada de cualquier punto del eje de las abscisas y la abscisa de cualquier punto del eje de las ordenadas son iguales a cero; ambas coordenadas del origen de coordenadas O (punto de intersección de los ejes) son iguales a cero. Recíprocamente a partir de dos números arbitrarios x e y de signos cualesquiera se puede construir un punto M (que—momento muy importante—es único) cuya abscisa es x y cuya ordenada es y; para ello bastará tomar en el eje de las abscisas el segmento $OA=x$ y levantar en A la perpendicular $AM=y$ (teniendo en cuenta la regla de los signos); M será entonces el punto buscado.

Sea dada una regla que indica las operaciones que deben realizarse con la variable independiente (representada por x) obtener el valor de la magnitud que nos interesa (representada por y).

Los matemáticos suelen decir que toda regla de este tipo *define la magnitud y como función de la variable independiente x.* En otras palabras, la *función* es precisamente la *regla* concreta que permite hallar los valores de y a partir de los valores de x.

Por ejemplo, la fórmula

$$y=\frac{1}{1+x^2}$$

muestra que los valores de la magnitud y se obtienen elevando al cuadrado la variable independiente x, agregando uno y dividiendo después el uno por el resultado obtenido. Si x toma un valor numérico x_0, también y tomará, según esta fórmula, un valor numérico y_0. Los números x_0 e y_0 determinan en el plano un punto M_0. En lugar de x_0 se puede tomar otro número x_1 y calcular, empleando la fórmula, el valor nuevo y_1; el par de números x_1, y_1 determina en el plano un punto nuevo M_1. El lugar geométrico de todos los puntos del plano, cuyas ordenadas están ligadas a las abscisas según la fórmula dada, se denomina *gráfico* de la función correspondiente.

Hablando en términos generales, el conjunto de los puntos del gráfico es infinito y, por eso, no podemos aspirar a construir todos esos puntos, sin excepción alguna, a partir de la regla dada. Pero podemos pasarnos sin ello ya que en la mayoría de los casos basta con unos cuantos puntos para juzgar de la forma general del gráfico.

La construcción del gráfico «por el método de puntos» consiste en marcar ciertos puntos del gráfico y en unirlos mediante una línea suave.

A título de ejemplo, consideremos el gráfico de la función

$$y=\frac{1}{1+x^2}. \qquad (1)$$

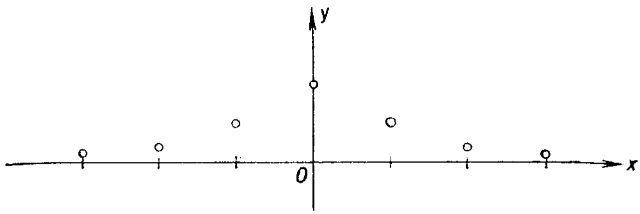


FIG. 2

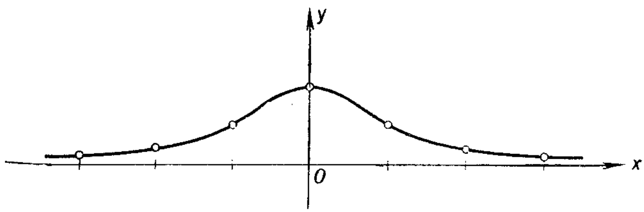


FIG. 3

Compongamos la tabla siguiente:

x	0	1	2	3	—1	—2	—3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

En la primera fila aparecen los valores de $x=0$, 1, 2, 3, —1, —2, —3. Como regla general, conviene tomar para los cálculos valores enteros de x. En la segunda fila aparecen los valores correspondientes de y hallados mediante la fórmula (1). Marquemos en el plano los puntos correspondientes (fig. 2). Trazando por ellos una línea suave, obtenemos el gráfico (fig. 3).

Como vemos, la construcción «por el método de puntos» es muy sencilla y no requiere «ciencia» alguna. Sin embargo, posiblemente por esta misma razón, la aplicación ciega del método de construcción «por puntos» puede conducir a errores grandes.

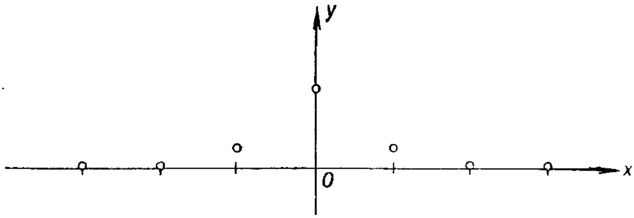


FIG. 4

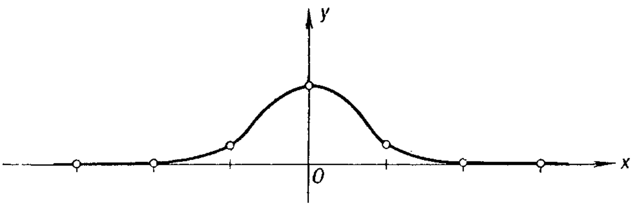


FIG. 5

Construyamos «por el método de puntos» la curva correspondiente a la ecuación

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2}\,. \tag{2}$$

Tenemos la siguiente tabla de los valores de x e y correspondientes a esta ecuación:

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

Los puntos correspondientes del plano se indican en la fig. 4 muy parecida a la que acabamos de considerar. Uniendo los puntos marcados con una curva suave, obtenemos el gráfico (fig. 5). Al parecer, podemos estar satisfechos y soltar el lápiz: ¡hemos llegado a dominar el arte de la construcción de gráficos! Sin embargo, como una especie de control, calculemos y para un valor intermedio de x, digamos, para $x=0{,}5$. Obtenemos un resultado inesperado: $y=16$ que no corresponde absolutamente al gráfico. Y no estamos a salvo de que al calcular y para otros valores intermedios de x —infinitos, sea dicho de paso— no surjan incongruencias aun mayores. Lamentablemente, la construcción de los gráficos «por el método de puntos» no resulta lo suficientemente segura.

Veamos otro método de construcción de gráficos de mayor seguridad pues permite prevenirse contra situaciones inesperadas semejantes a la que acabamos de ver. Empleando este

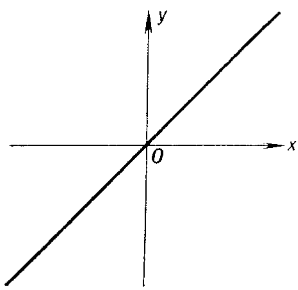


FIG. 6

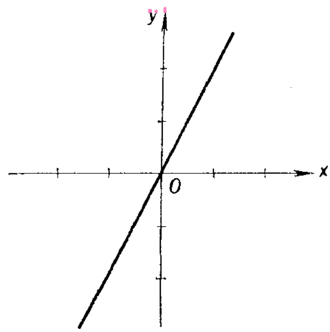


FIG. 7

método, lograremos más adelante construir el gráfico correcto correspondiente a la ecuación (2). Según este método —llamémoslo, por ejemplo, «método de operaciones»—, todas las operaciones (adición, sustracción, multiplicación, división, etc.) que comprende la fórmula dada se realizan directamente en los gráficos.

Comencemos con ejemplos elementales. Construyamos el gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=x. \qquad (3)$$

Esta ecuación significa que son iguales las abscisas y las ordenadas de todos los puntos del gráfico buscado. El lugar geométrico de los puntos, cuyas ordenadas son iguales a sus abscisas, es la bisectriz del ángulo que forman los semiejes positivos y del ángulo que forman los semiejes negativos (fig. 6).

El gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=kx,$$

donde k es un coeficiente determinado, se obtiene del anterior multiplicando todas las ordenadas por un mismo número k. Sea, por ejemplo, $k=2$; deberemos entonces duplicar cada ordenada del gráfico anterior obteniendo así una recta de mayor pendiente (fig. 7): a cada paso hacia la derecha según el eje x corresponderá un desplazamiento de dos pasos hacia arriba según el eje y. Basándose en esto es fácil realizar la

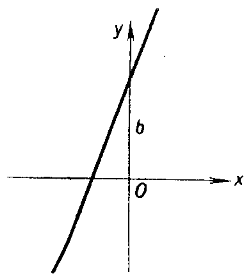


FIG. 8

construcción empleando papel cuadriculado. En el caso general de la ecuación $y=kx$ con un coeficiente k cualquiera también se obtiene una recta. Si $k>0$, a cada paso hacia la derecha corresponderá en esta recta un desplazamiento de k pasos hacia arriba según el eje y. Si $k<0$, el desplazamiento será hacia abajo.

Consideremos ahora la fórmula

$$y=kx+b. \tag{4}$$

Para obtener su gráfico, debemos agregar a cada ordenada de la línea $y=kx$, que ya conocemos, un mismo número b; de esta forma la recta $y=kx$ se desplazará como un todo en el plano en b unidades hacia arriba si $b>0$ (si $b<0$, la recta inicial descenderá en lugar de elevarse). Como resultado obtendremos una recta paralela a la inicial; ella no pasará ya por el origen de coordenadas y cortará en el eje de ordenadas el segmento b (fig. 8).

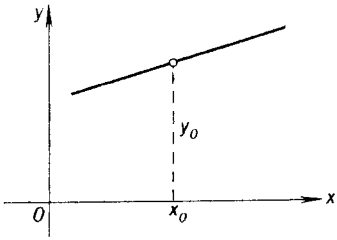


FIG. 9

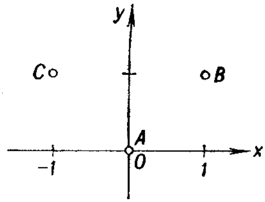


FIG. 10

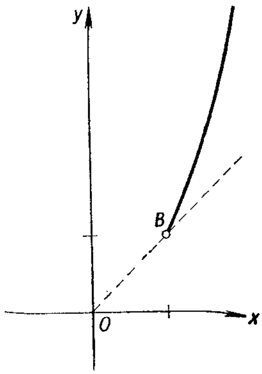


FIG. 11

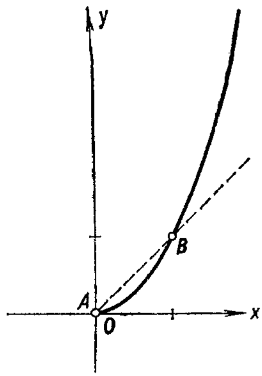


FIG. 12

El número k se llama *coeficiente angular* de la recta $y=kx+b$; como hemos señalado, el número k indica cuántos pasos hacia arriba corresponden en la recta a cada paso hacia la derecha. En otras palabras, k es la tangente del ángulo entre la dirección del eje x y la recta $y=kx+b$.

El gráfico de la ecuación

$$y=k(x-x_0)+y_0 \tag{4'}$$

es la recta de coeficiente angular k que pasa por el punto (x_0, y_0) (fig. 9) ya que tomando $x=x_0$, obtenemos $y=y_0$.

Por lo tanto, el gráfico de cualquier polinomio de primer grado en x es una recta que se traza según las reglas explicadas.

Pasemos a los gráficos de los polinomios de segundo grado.

Consideremos la fórmula

$$y=x^2, \qquad (5)$$

que puede ser representada así

$$y=y_1^2, \quad \text{donde} \quad y_1=x.$$

En otras palabras, el gráfico requerido se obtiene elevando al cuadrado las ordenadas de la línea $y=x$ que ya conocemos. Veamos lo que debe resultar.

Puesto que $0^2=0$, $1^2=1$ y $(-1)^2=1$, obtenemos tres puntos básicos A, B y C (fig. 10). Si $x>1$, se tiene $x^2>x$; por eso, a la derecha del punto B el gráfico irá por encima de la bisectriz del cuadrante (fig. 11). Si $0<x<1$, se tiene $0<x^2<x$, o sea, entre los puntos A y B el gráfico irá por debajo de la bisectriz. Es más, afirmamos que, según vaya aproximándose al punto A, el gráfico quedará dentro de cualquier ángulo limitado por arriba por la recta $y=kx$, donde k es tan pequeño como se quiera, y por abajo por el eje x; en efecto, la desigualdad $x^2<kx$ es válida siempre que $x<k$. Este hecho significa que la curva buscada es *tangente* al eje de las abscisas en el punto O (fig. 12). Desplacémonos ahora según el eje x hacia la izquierda respecto al punto O. Sabemos que los números $-a$ y $+a$ elevados al cuadrado dan el mismo resultado a^2. Por consiguiente, la ordenada de nuestra curva para $x=-a$ será la misma que para $x=+a$. Geométricamente esto significa que el gráfico de nuestra curva correspondiente al semiplano de la izquierda se obtiene del gráfico ya construido en el semiplano de la derecha mediante una simetría respecto al eje de las ordenadas. Obtenemos así la curva denominada *parábola* (fig. 13).

Procediendo igual que antes, podemos construir ahora la curva más compleja

$$y=ax^2 \qquad (6)$$

y la curva aún más compleja

$$y=ax^2+b. \qquad (7)$$

La primera se obtiene multiplicando por el número a todas las ordenadas de la parábola (5) que denominaremos *parábola estandard.*

Si $a>1$, obtenemos una curva que, siendo semejante a la anterior, se eleva más bruscamente hacia arriba (fig. 14).

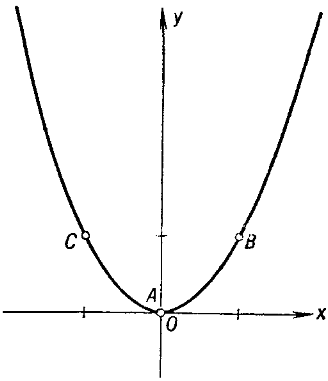


FIG. 13

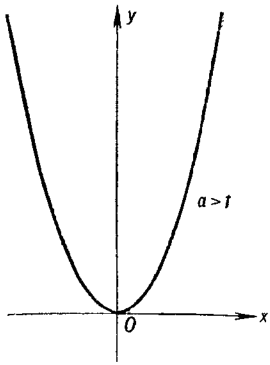


FIG. 14

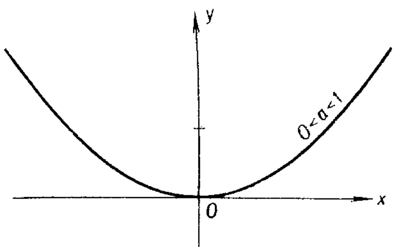


FIG. 15

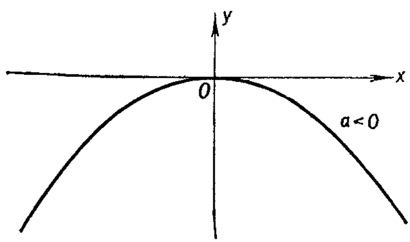


FIG. 16

Si $0<a<1$, la curva será de pendiente más suave (fig. 15); si $a<0$, sus ramas se volcarán hacia abajo (fig. 16).

Si $b>0$, la curva (7) se obtiene de la curva (6) mediante un desplazamiento hacia arriba determinado por el

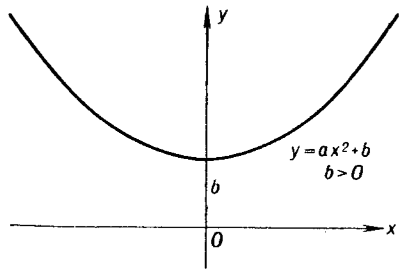


FIG. 17

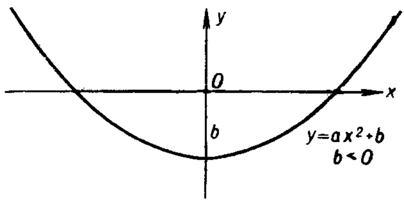


FIG. 18

segmento b (fig. 17). Si $b<0$, habrá que desplazar la curva hacia abajo (fig. 18). Todas estas curvas también se denominan parábolas.

Consideremos un ejemplo más complejo empleando para la construcción del gráfico el método de multiplicación. Supongamos que debemos construir el gráfico correspondiente a la ecuación

$$y=x\,(x-1)\,(x-2)\,(x-3). \tag{8}$$

Aquí tenemos el producto de cuatro factores. Construyamos los gráficos correspondientes a cada factor por separado; todos estos gráficos representarán rectas, paralelas a la bisectriz del cuadrante, que interceptarán en el eje de las ordenadas segmentos de

$$0,\ -1,\ -2 \text{ y } -3$$

respectivamente (fig. 19).

En los puntos 0, 1, 2 y 3 del eje x la ordenada de la curva buscada será 0, ya que el producto es igual a cero si al menos uno de los factores lo es. En los demás lugares el producto

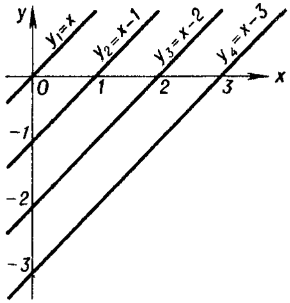


FIG. 19

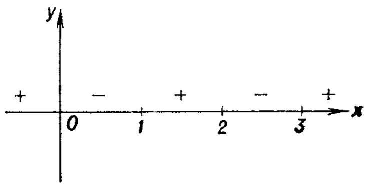


FIG. 20

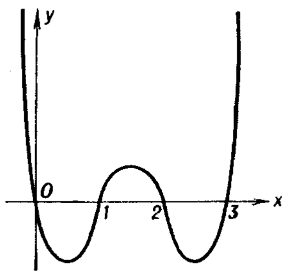


FIG. 21

será diferente de cero y su signo estará determinado por los signos de los factores. Por ejemplo, a la derecha del punto 3 todos los factores son positivos y, por consiguiente, el producto también resulta positivo. Entre los puntos 2 y 3 uno de los factores es negativo y el producto se hace negativo. Entre los puntos 1 y 2 hay dos factores negativos y, por lo tanto, el producto es positivo, etc. Obtenemos la distribución de los signos del producto indicada en la fig. 20. A la derecha del punto 3 todos los factores crecen cuando aumenta x y, por consiguiente, el producto también crece, además muy rápidamente. A la izquierda del punto 0 todos los factores crecen en el sentido negativo y, por eso, el producto (que es positivo) también crece rápidamente.

Ahora es fácil abocetar en líneas generales el gráfico (fig. 21).

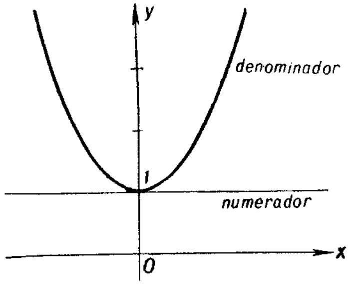


FIG. 22

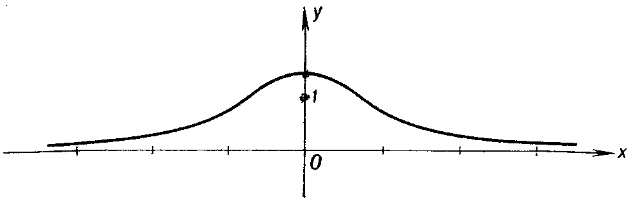


FIG. 23

Hasta aquí hemos considerado las operaciones de adición y multiplicación. Agreguemos ahora a éstas la división. Construyamos la curva

$$y=\frac{1}{1+x^2}. \quad (9)$$

Con este fin construiremos por separado los gráficos del numerador y del denominador.

El gráfico del numerador

$$y_1=1$$

es una recta paralela al eje de las abscisas, a una unidad del eje. El gráfico del denominador

$$y_2=x^2+1$$

se obtiene desplazando en una unidad hacia arriba la parábola estandard. Ambos gráficos están representados en la fig. 22.

Realicemos ahora la división de cada ordenada del numerador por la ordenada correspondiente (o sea, calculada para

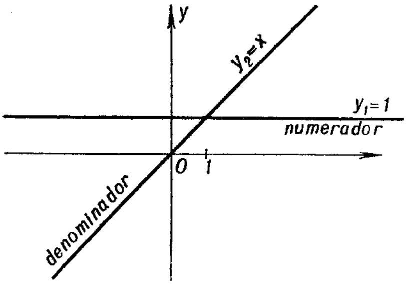


FIG. 24

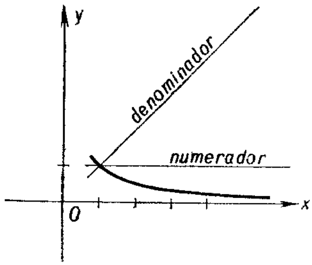


FIG. 25

el mismo valor de x) del denominador. Si $x=0$, tenemos $y_1=y_2=1$ de modo que $y=1$. Si $x\neq0$, el numerador es menor que el denominador y el cociente es menor que 1. Puesto que el numerador y el denominador son siempre positivos, el cociente también es positivo y, por consiguiente, el gráfico queda situado en la franja comprendida entre el eje de las abscisas y la recta $y=1$. Si x crece infinitamente, el denominador también crece infinitamente, mientras que el numerador permanece constante; por eso, el cociente tiende a cero. Todo esto conduce al siguiente gráfico del cociente (fig. 23); coincide con el gráfico obtenido por el método de puntos (fig. 3).

En la división gráfica desempeñan un papel especial los valores de x que anulan el denominador. Si el numerador es distinto de cero, el cociente se hace infinito. Para comprender el significado de estas palabras, construyamos la curva.

$$y=\frac{1}{x}. \qquad (10)$$

Conocemos ya los gráficos del numerador y del denominador (fig. 24). Para $x=1$ tenemos $y_1=y_2=1$, de donde $y=1$. Si $x>1$, el numerador es menor que el denominador y el cociente es menor que 1; cuando x crece infinitamente, el cociente tiende a cero (igual que en el ejemplo anterior); así obtenemos la parte del gráfico correspondiente a los valores $x>1$ (fig. 25).

Consideremos ahora los valores de x comprendidos entre 0 y 1. Si x parte del 1 y se aproxima al cero, el denominador tiende a cero mientras que el numerador permanece igual a 1.

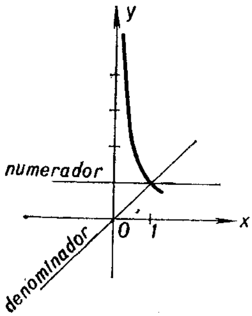


FIG. 26

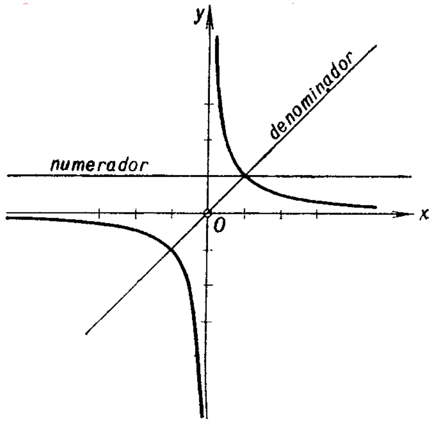


FIG. 27

Por eso, el cociente crece infinitamente sobrepasando, para valores suficientemente pequeños de x, cualquier número por grande que sea; así obtenemos la rama que va al infinito (fig. 26). Para $x<0$ el denominador y, por ende, el cociente son negativos. El aspecto general del gráfico puede verse en la fig. 27.

Ahora podemos realizar debidamente la construcción del gráfico de la curva

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2} \qquad (11)$$

de la que hemos hablado antes.

Construyamos primero el gráfico del denominador. La curva $y=3x^2$ es la parábola estandard «triplicada» (fig. 28). La sustracción de la unidad equivale al desplazamiento del gráfico en una unidad hacia abajo (fig. 29). La curva cortará el eje x en dos puntos que se determinan fácilmente igualando $3x^2-1$ a cero: $x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0{,}577\ldots$ Elevemos al cuadrado el gráfico obtenido. En los puntos x_1 y x_2 las ordenadas continuarán siendo iguales a cero. Todas las demás ordenadas serán positivas de modo que el gráfico pasará por encima del eje de las abscisas. La ordenada en el punto $x=0$, igual a $(-1)^2=1$, será la mayor en el intervalo comprendido entre

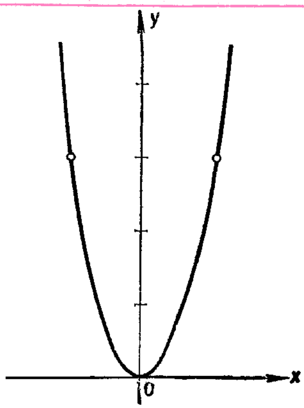


FIG. 28

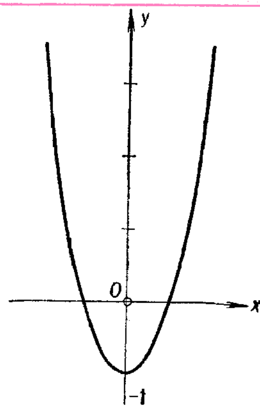


FIG. 29

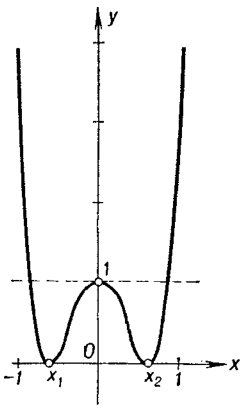


FIG. 30

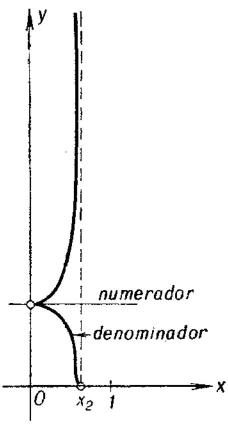


FIG. 31

x_1 y x_2. Fuera de este intervalo la curva se elevará bruscamente en ambas direcciones (fig. 30).

Hemos construido el gráfico del denominador. En esta misma figura hemos representado con una línea de puntos el gráfico del numerador $y=1$. Resta dividir ahora el numerador por el denominador. Puesto que ambos tienen siempre el mismo signo, el cociente será positivo y el gráfico estará

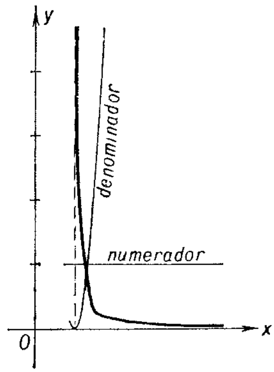


FIG. 32

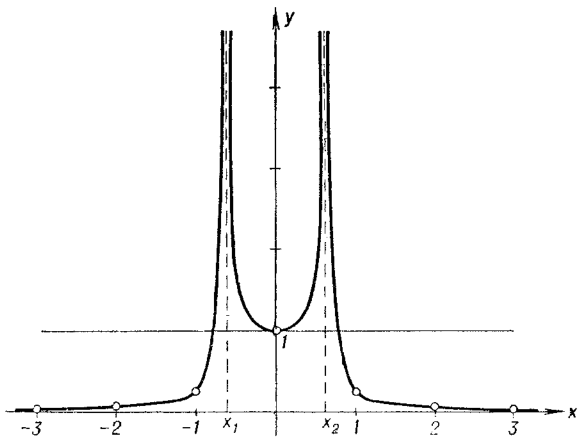


FIG. 33

por encima del eje de las abscisas. Si $x=0$, el numerador y el denominador coinciden y el cociente resulta igual a 1. Desplacémonos según el eje x desde el punto 0 hacia la derecha. El numerador continuará siendo igual a 1 mientras que el denominador irá disminuyendo; por consiguiente, el cociente irá creciendo a partir de 1. Cuando lleguemos al punto $x_2=$ $=0{,}577...$ el denominador se convertirá en cero. Ello significa que para ese momento el cociente se irá al infinito (fig. 31). Pasado el punto x_2, el denominador comenzará a variar rápidamente en el sentido contrario a partir del valor 0, pasando por el valor 1 y aumentando después infinitamente. El cociente, por el contrario, volverá del infinito a la unidad, cortará la recta $y=1$ en el mismo punto que la corta la curva $(3x^2-1)^2$ y continuará aproximándose después al cero tanto como se quiera (fig. 32).

Lo mismo ocurrirá a la izquierda del eje de las ordenadas (fig. 33).

En este último gráfico hemos marcado los puntos correspondientes a los valores enteros $x=0, 1, 2, 3, -1, -2$ y -3. Son los mismos que hemos tomado anteriormente (pág. 10) al construir el gráfico empleando «el método de puntos». Pero la forma real del gráfico difiere considerablemente de la propuesta en la fig. 5.

En realidad, como vemos, la curva, en lugar de descender suavemente desde el valor 1 (para $x=0$) hasta el valor $\frac{1}{4}$ (para $x=1$), se va hacia arriba hasta el infinito. Aquí mismo podemos ver también el punto de coordenadas $x=\frac{1}{2}$, $y=16$ que no encajaba en el gráfico erróneo anterior y que encaja perfectamente en el gráfico nuevo, correcto.

Hemos hablado de las operaciones elementales que se pueden realizar con los gráficos. Más exactamente: hemos arrancado de la ecuación elemental $y=x$ aplicando después las cuatro operaciones aritméticas (adición, sustracción, multiplicación y división).

Las funciones $y(x)$, que se obtienen aplicando estas operaciones, pueden ser representadas como el cociente de dos polinomios

$$y(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m}$$

y se denominan funciones *racionales* de la variable x. (En el Análisis también existen otras clases de funciones; pero la definición misma de estas funciones requiere el empleo de la teoría desarrollada de los números reales; por eso, en el presente folleto nos limitamos al estudio de las funciones racionales.)

El lector que se haya interesado por la construcción de los gráficos por «el método de operaciones» puede resolver los problemas, de adiestramiento y autocontrol, que proponemos.

PROBLEMAS

Constrúyanse los gráficos a partir de las ecuaciones dadas.

1. $y=x^2+x+1$.
2. $y=x(x^2-1)$.
3. $y=x^2(x-1)$.
4. $y=x(x-1)^2$.
5. $y=\frac{x}{x-1}$.

Sugerencia. En el problema 5 conviene separar la parte entera

$$\frac{x}{x-1}=1+\frac{1}{x-1}.$$

6. $y=\frac{x^2}{x-1}$.
7. $y=\frac{x^3}{x-1}$.

Sugerencia. En los problemas 6 y 7 también conviene separar la parte entera.

8. $y=\pm\sqrt{x}$.

Sugerencia. La raíz cuadrada de x existe para $x\geqslant 0$ [1] y no existe para $x<0$.

9. $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cómo demostrar que la curva obtenida es una circunferencia?

Sugerencia. Recuérdese la definición exacta de la circunferencia y empléese el teorema de Pitágoras.

10. $y=\pm\sqrt{1+x^2}$. Demuéstrese que cuando $x\to\infty$ las ramas de esta curva se aproximan tanto como se quiera a las

[1]) Esta afirmación no es, ni mucho menos, obvia y requiere para su argumentación completa el empleo de la teoría desarrollada de los números reales. La demostración puede verse en cualquier libro completo de Análisis. Aquí sólo se exige construir el gráfico de la raíz aceptando su existencia.

bisectrices de los cuadrantes.

Sugerencia. $\sqrt{1+x^2}-x=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

11. $y=\pm x\sqrt{x(1-x)}$.

12. $y=\pm x^2\sqrt{1-x}$.

13. $y=\dfrac{1-x^2}{2\pm\sqrt{1-x^2}}$.

14. $y=x^{\frac{2}{3}}(1-x)^{\frac{2}{3}}$.

Las respuestas a todos los problemas vienen en las páginas 51—54.

§ 2. DERIVADAS

La construcción del gráfico por el «método de operaciones» permite obtener una idea general de cómo varía la función. Pero los métodos de esta índole resultan insuficientes cuando se trata de responder a preguntas más precisas. Por ejemplo, la curva de la fig. 34 primero desciende alcanzando el valor y_0 correspondiente a la abscisa x_0 y después se eleva; se dice que la función respectiva $y(x)$ *tiene un mínimo relativo en el punto* x_0. Un sentido análogo tiene el concepto de *máximo relativo*: decimos que la función $y=y(x)$ tiene máximo relativo en el punto x_0 si su gráfico se eleva cuando x aumenta llegando al punto x_0 y desciende pasado el punto x_0 (fig. 35). La pregunta es: ¿cuáles son los valores exactos de x_0 y de y_0?

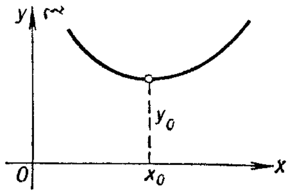


FIG. 34

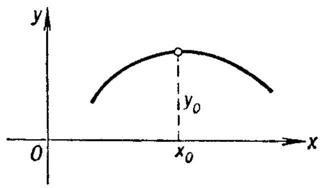


FIG. 35

Es fácil imaginarse una situación concreta en la que se plantee un problema de este tipo. Supongamos, por ejemplo, que el gráfico 34 representa el costo de una tonelada de producción elaborada en dependencia del consumo diario de energía eléctrica. Si el consumo diario de energía es pequeño, la elaboración de una tonelada de producción requiere mucho tiempo y, debido a los gastos constantes (plantilla, etc.), su costo será elevado. Si el consumo diario de energía es grande, el tiempo necesario para elaborar una tonelada de producción será menor, pero el costo de la producción aumentará según vaya aumentando el costo de la energía consumida. Para cierto nivel de consumo diario de energía el costo de una tonelada de producción será mínimo; naturalmente, tiene gran interés conocer este costo mínimo y el consumo diario de energía que le corresponde. Más adelante (pág. 34—35) analizaremos un problema semejante.

Para responder con precisión a la pregunta planteada anteriormente —sobre la posición del punto de mínimo relativo— se necesitan métodos nuevos que nos introducen en la parte del Análisis Matemático llamada *cálculo diferencial*.

La idea de la solución del problema planteado es la siguiente. Por todo punto del gráfico de la función $y(x)$ podemos trazar la *recta tangente*. Por definición, la tangente al gráfico de la función $y(x)$ en el punto A (fig. 36) es la recta α que

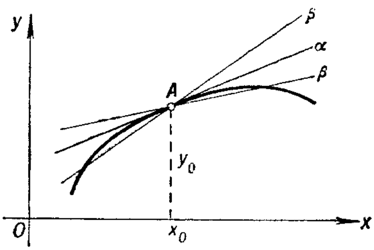


FIG. 36

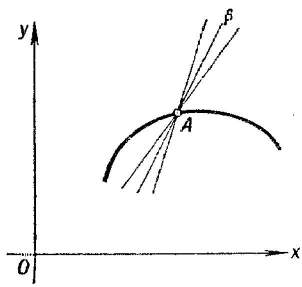


FIG. 37

pasa por el punto A de modo que al aproximarse a este punto la curva $y(x)$ penetra y permanece en el interior de un ángulo tan pequeño como se quiera que contiene la recta α y cuyo vértice es el punto A. (En este sentido precisamente hemos dicho en el § 1 que el eje de las abscisas es tangente a la parábola estandard.) Cualquier recta β que pasa por el punto A se llama *secante* del gráfico de $y(x)$; si la secante no coincide con la tangente, siempre podremos construir un ángulo (cuyo vértice está en A y cuya bisectriz es β) tal que cerca del punto A la curva no penetra en su interior (fig. 37). Indiquemos por $k=k(x)$ el coeficiente angular de la tangente en el punto (x, y). Esta función $k(x)$ se denomina *derivada de la función* $y(x)$. (Más adelante veremos que siendo $y(x)$ un polinomio también $k(x)$ es un polinomio y que siendo $y(x)$ una función racional también $k(x)$ es una función racional; además, daremos unas reglas precisas para el cálculo de $k(x)$. Supongamos que dada la función $y(x)$ hemos encontrado la función $k(x)$. En el punto buscado (x_0, y_0) del mínimo relativo la tangente α ha de ser horizontal (demostración por el absurdo: hemos visto que la curva $y=y(x)$ debe penetrar en cualquier ángulo, tan pequeño como se quiera, que comprenda en su interior la recta α; si la recta α no es horizontal, podremos construir un ángulo pequeño cuya bisectriz será α y cuyos lados tendrán pendientes del mismo signo (fig. 36); por consiguiente, la

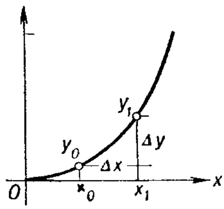


FIG. 38

curva $y=y(x)$ no puede tener mínimo relativo). Por eso, en el punto $x=x_0$ de mínimo relativo debe ser $k(x_0)=0$. Consideremos la ecuación

$$k(x)=0.$$

Puede tener varias soluciones determinando cada una un punto (x_0, y_0) en la curva $y=y(x)$, donde la tangente es horizontal; debemos hallar todas estas soluciones y escoger entre ellas la que nos interesa. Es decir, si conocemos la función $k(x)$, todo se reduce a la resolución de una ecuación algebraica.

Pasemos ahora a determinar la función $k(x)$. Supongamos, primero, que $y=x^2$ es nuestra parábola estandard. Queremos hallar el coeficiente angular de la tangente a esta parábola en un punto (x_0, y_0).

Sean Δx y Δy los incrementos que reciben la abscisa y la ordenada de nuestra parábola al pasar del punto (x_0, y_0) a un punto próximo (x_1, y_1):

$$x_1=x_0+\Delta x, \quad y_1=y_0+\Delta y$$

(fig. 38). Puesto que

$$y_0=x_0^2 \quad \text{e} \quad y_0+\Delta y=(x_0+\Delta x)^2$$

obtenemos, restando,

$$\Delta y=2x_0\Delta x+(\Delta x)^2.$$

Tracemos la secante que pasa por los puntos (x_0, y_0) y (x_1, y_1) (fig. 39). Su coeficiente angular es

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$$

y su ecuación completa es (véase (4'))

$$y=(2x_0+\Delta x)(x-x_0)+y_0. \tag{12}$$

Disminuyamos Δx hasta cero (fig. 40). La secante (12) comenzará a moverse girando alrededor del punto (x_0, y_0) y, cuando

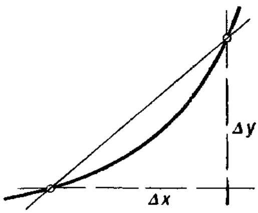


FIG. 39

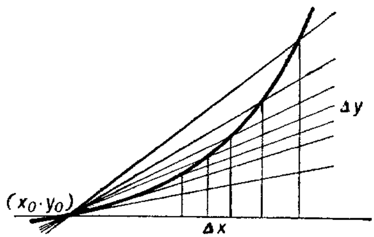


FIG. 40

Δx se haga igual a cero, ocupará la posición que corresponde a la ecuación

$$y_{\tan}=2x_0(x-x_0)+y_0. \tag{*}$$

Esta recta —resultado de la rotación de la secante— *será precisamente la tangente buscada a la parábola* $y=x^2$ *en el punto* (x_0, y_0).

Demostremos esta afirmación. La ecuación de la curva $y=x^2$ puede ser representada como

$$y=y_0+2x_0(x-x_0)+(x-x_0)^2=$$
$$=y_0+[2x_0+(x-x_0)](x-x_0),$$

de donde se ve que, cuando los desplazamientos de x respecto a x_0 son pequeños, el gráfico de la curva queda comprendido en el ángulo tan estrecho como se quiera formado por las rectas

$$y=y_0+(2x_0\pm\varepsilon)(x-x_0);$$

efectivamente, esto tendrá lugar si aceptamos que $-\varepsilon<x-$ $-x_0<\varepsilon$. Puesto que la recta $(*)$ se halla dentro de este ángulo cualquiera que sea ε, resulta según la definición que esta recta es precisamente la tangente buscada.

El coeficiente angular de nuestra tangente ha resultado igual a $2x_0$; por lo tanto, la derivada de la función $y=x^2$ es igual a

$$k(x)=2x.$$

Veamos a qué conduce esta idea en el caso de la función $y=P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio de grado n:

$$P(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n. \tag{13}$$

De nuevo trazamos la secante que une el punto (x_0, y_0), donde queremos construir la tangente, con un punto próximo $(x_0+ +\Delta x, y_0+\Delta y)$ de nuestra curva. Tenemos

$$\begin{aligned} y_0+\Delta y &= P(x_0+\Delta x)= \\ &= a_0+a_1(x_0+\Delta x)+\ldots+a_n(x_0+\Delta x)^n. \end{aligned} \tag{14}$$

Indiquemos por ε_1 toda suma formada por términos que contienen Δx en primer grado y en grado superior y por ε_2 toda suma formada por términos que contienen Δx en grado no menor que dos.

Puesto que

$$y_0=a_0+a_1x_0+\ldots+a_nx_0^n,$$

obtenemos, aplicando a (14) la fórmula de Newton [1] y restando (13) de (14),

$$\Delta y=(a_1+2a_2x_0+\ldots+na_nx_0^{n-1})\,\Delta x+\varepsilon_2. \tag{15}$$

El coeficiente angular de la secante se obtiene dividiendo Δy por Δx. Como quiera que $\varepsilon_2:\Delta x=\varepsilon_1$, obtenemos para este coeficiente la expresión

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=a_1+2a_2x_0+\ldots+na_nx_0^{n-1}+\varepsilon_1.$$

---

[1] Según la fórmula de Newton para todo k y cualesquiera u y v se tiene

$$\begin{aligned}(u+v)^k &= u^k+\frac{k}{1}u^{k-1}v+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^{k-2}v^2+ \\ &+\frac{k(k-1)(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3}u^{k-3}v^3+\ldots \\ &\ldots+\frac{k(k-1)}{1\cdot 2}u^2v^{k-2}+\frac{k}{1}uv^{k-1}+v^k.\end{aligned}$$

La ecuación completa de la secante es

$$y=(a_1+2a_2x_0+\ldots+na_nx_0^{n-1}+\varepsilon_1)(x-x_0)+y_0.$$

Si tomamos Δx igual a 0, la magnitud ε_1 se convierte en cero y obtenemos la ecuación de la tangente

$$y_{\tan}=(a_1+2a_2x_0+\ldots+na_nx_0^{n-1})(x-x_0)+y_0.$$

Para el coeficiente angular de la tangente encontramos la expresión

$$k=a_1+2a_2x_0+\ldots+na_nx_0^{n-1}. \qquad (16)$$

Si fijamos x_0, la magnitud k será un número; si x_0 varía, también varía este número y obtenemos la función que determina los valores de los coeficientes angulares de las tangentes a la curva $y=P(x)$ correspondientes a diferentes puntos. Esta función es, como hemos dicho, la derivada de la función $P(x)$; también se indica por $P'(x)$. La fórmula obtenida se puede representar así

$$P'(x)=a_1+2a_2x+\ldots+na_nx^{n-1}. \qquad (16')$$

La ley que permite obtener $P'(x)$ a partir de $P(x)$ es muy sencilla: hay que sustituir en la suma (13) toda expresión de tipo x^k por la expresión kx^{k-1}.

En particular, la derivada de una constante (o sea, de una función que toma el mismo valor $y=a_0$ cualquiera que sea x) es igual a 0. Sea dicho de paso, esto es un resultado geométrico obvio: ¡la tangente al gráfico de la función $y=a_0$ es horizontal en todo punto!

Volviendo al caso general, prestemos atención a la igualdad

$$P(x+\Delta x)=P(x)+P'(x)\Delta x+\varepsilon_2 \qquad (17)$$

que se desprende de (15).

Consideremos este mismo problema de la tangente para el caso de una función racional general

$$y=\frac{P(x)}{Q(x)}, \qquad (18)$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios.

Tenemos, según (17),

$$y_0+\Delta y=\frac{P(x_0+\Delta x)}{Q(x_0+\Delta x)}=\frac{P(x_0)+P'(x_0)\Delta x+\varepsilon_2}{Q(x_0)+Q'(x_0)\Delta x+\varepsilon_2}. \qquad (19)$$

Restando (18) de (19), encontramos

$$\Delta y = \frac{P(x_0) + P'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon_2}{Q(x_0) + Q'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon_2} - \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} =$$

$$= \frac{[P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0)]\,\Delta x + \varepsilon_2}{Q(x_0)\,[Q(x_0) + Q'(x_0)\,\Delta x + \varepsilon_2]}. \tag{20}$$

De aquí para el coeficiente angular de la secante resulta

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0) + \varepsilon_1}{Q^2(x_0) + \varepsilon_1}. \tag{21}$$

La ecuación completa de la secante es

$$y = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0) + \varepsilon_1}{Q^2(x_0) + \varepsilon_1}(x - x_0) + y_0.$$

Aceptemos que $Q(x_0) \neq 0$. Tomando aquí $\Delta x = 0$, obtenemos la ecuación de la tangente

$$y_{\tan} = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

Para $x = x_0$ el coeficiente angular de la tangente es

$$y'(x_0) = \frac{P'(x_0)\,Q(x_0) - Q'(x_0)\,P(x_0)}{Q^2(x_0)}.$$

Esta fórmula ofrece la regla para el cálculo de la derivada del cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$:

$$\left(\frac{P}{Q}\right)' = \frac{P'Q - Q'P}{Q^2}. \tag{22}$$

Consideremos algunos ejemplos en los que se emplean las reglas obtenidas.

1. ¿Qué par de números positivos arroja el producto máximo entre todos los pares que suman c?

Este problema admite una solución algebraica elemental. Dejándola a un lado, apliquemos nuestro método general. Si uno de estos números es x, el otro es $c-x$ y, por consiguiente, se trata de buscar el máximo de la función

$$P(x) = x(c-x) = -x^2 + cx.$$

Tenemos

$$P'(x) = -2x + c$$

e, igualando la derivada a cero, encontramos la solución

$$x=\frac{c}{2} \quad \text{y} \quad c-x=\frac{c}{2}.$$

El problema que sigue se asemeja al anterior por su forma pero no admite ya solución elemental.

2. Entre todos los pares de números positivos que suman c, ¿qué dos números arrojan el resultado máximo al multiplicar el cubo del primero por el cuadrado del segundo?

Aquí se trata del máximo de la función

$$P(x)=x^3(c-x)^2=x^5-2cx^4+c^2x^3.$$

Como sabemos, en el punto de máximo la derivada de la función se hace igual a cero.

Calculemos la derivada:

$$P'(x)=5x^4-8cx^3+3c^2x^2.$$

Igualándola a cero, encontramos una solución evidente $x=0$. Para hallar las soluciones $x\neq 0$ debemos resolver la ecuación cuadrada

$$5x^2-8cx+3c^2=0.$$

Su solución es

$$x_{1,2}=\frac{4c\pm\sqrt{16c^2-15c^2}}{5}=\frac{4c\pm c}{5};$$

Por consiguiente, la tangente al gráfico de la función $y=P(x)$ es horizontal en los puntos $x_1=0, x_2=\frac{3}{5}c$ y $x_3=c$. El valor de $P(x)$ es igual a cero en x_1 y x_3 y es positivo en x_2 : $P(x_2)=$ $=(\frac{3}{5})^3(\frac{2}{5})^2c^5$. Es decir, los números buscados son $x_2=\frac{3c}{5}$ y $c-x_2=\frac{2c}{5}$.

3. Hállense los ángulos que la curva $y=P(x)=x(x-1)\times$ $\times(x-2)(x-3)$ forma con el eje x (véase la fig. 21 de la pág. 17). Naturalmente, el ángulo entre un eje y una curva se comprende como el ángulo entre el eje y la tangente a la curva (en el punto donde ésta se corta con el eje).

Solución. Suprimiendo los paréntesis, obtenemos

$$y=x^4-6x^3+11x^2-6x,$$

de donde resulta, según la fórmula (16′),

$$y' = 4x^3 - 18x^2 + 22x - 6.$$

La curva $y = P(x)$ corta el eje x en los puntos 0, 1, 2 y 3. Evaluando sucesivamente, obtenemos

$$y'(0) = -6,\ y'(1) = 2,\ y'(2) = -2 \quad \text{e} \quad y'(3) = 6.$$

Estos números son los coeficientes angulares de las tangentes en los puntos señalados, o sea, son las tangentes de los ángulos buscados.

4. ¿En qué puntos de esta misma curva es horizontal la tangente?

En los puntos donde la tangente es horizontal su coeficiente angular es igual a cero. Igualando a cero la expresión encontrada para la derivada, obtenemos la ecuación

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 0.$$

Como puede verse del gráfico (fig. 21), esta ecuación admite (por razones de simetría) la solución evidente $x_1 = \frac{3}{2}$. Despejando el factor $x - \frac{3}{2}$, obtenemos

$$4x^3 - 18x^2 + 22x - 6 = 4\left(x - \frac{3}{2}\right)(x^2 - 3x + 1).$$

Resta resolver la ecuación cuadrada $x^2 - 3x + 1 = 0$. Resolviéndola, encontramos

$$x_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} = 1{,}5 \pm 1{,}118\ \ldots$$

Las ordenadas correspondientes se calculan fácilmente:

$$y_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{16},$$

$$y_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2} =$$

$$= \frac{1}{16}(5-9)(5-1) = -1.$$

5. Se sabe que la velocidad v de una motonave viene dada por la fórmula

$$v = c\,\frac{p}{p+1}, \tag{23}$$

donde p es el costo (en rublos) del combustible que consume cada hora y c es una constante. Esta fórmula se aclara con el gráfico representado en la fig. 41. Dicho gráfico corresponde a la hipótesis natural de que al principio, cuando los gastos de combustible son relativamente pequeños, la velocidad aumenta proporcionalmente a ellos; luego, se relentece su

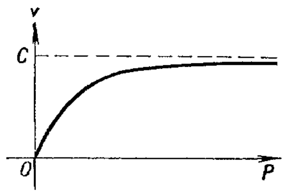


FIG. 41

aumento y la motonave no puede sobrepasar la velocidad máxima c por mucho que se aumente el suministro de combustible.

Aparte del combustible, existen unos gastos constantes de q rublos por hora. ¿Qué velocidad hay que mantener durante un viaje de s km entre los puertos A y B para que los gastos totales sean mínimos?

Solución. Sean v la velocidad y $T=\frac{s}{v}$ la duración del viaje. Los gastos de combustible se determinan del modo siguiente: el gasto horario se calcula invirtiendo la fórmula (23):

$$p=\frac{v}{c-v} \tag{24}$$

y el gasto completo P se calcula multiplicando (24) por el tiempo $T=\frac{s}{v} \therefore P=\frac{s}{c-v}$. El gasto constante Q es igual a $qT=q\frac{s}{v}$. El gasto total R es igual a

$$R=P+Q=\frac{s}{c-v}+q\frac{s}{v}=s\left(\frac{1}{c-v}+\frac{q}{v}\right). \tag{25}$$

El gráfico de esta función puede verse en la fig. 42. Para determinar la velocidad v correspondiente a la suma mínima de los gastos, igualamos a cero la derivada de R respecto a v:

$$R'(v)=s\left(\frac{1}{(c-v)^2}-\frac{q}{v^2}\right)=0,$$

de donde encontramos sucesivamente

$$v^2-q(c-v)^2=0,\quad v^2=q(c-v)^2,$$
$$v=\sqrt{q}(c-v)=\sqrt{q}c-\sqrt{q}v\ ^{1)},$$
$$v=\frac{\sqrt{q}}{1+\sqrt{q}}c \text{ km por hora.} \qquad (26)$$

Introduciendo (26) en (25), obtenemos la suma total de los gastos correspondientes al viaje más económico

$$R=\frac{s}{c}(1+\sqrt{q})^2.$$

6. Hállese la tangente a la curva $y=x^3$ en $x=0$.

Tenemos $y'=3x^2$ y es obvio que $y'=0$ en $x=0$, de modo que la tangente es el eje x (fig. 43).

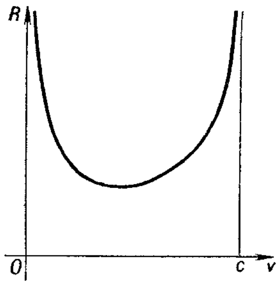


FIG. 42

Como vemos, en este caso la tangente atraviesa la curva: siendo $x>0$ la curva se halla por encima de la tangente, mientras que siendo $x<0$ la curva se encuentra por debajo de la tangente. Los puntos del gráfico en los que la tangenta atraviesa la curva se llaman *puntos de inflexión* (fig. 44). Por

[1] La solución omitida que corresponde a la ecuación

$$v=-\sqrt{q}(c-v)$$

carece de sentido pues el segundo miembro es negativo (por ser $v<c$).

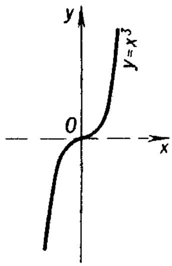


FIG. 43

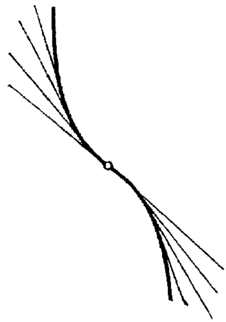


FIG. 44

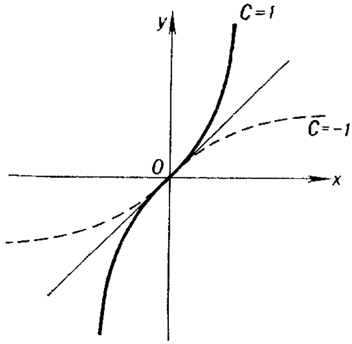


FIG. 45

ejemplo, este mismo valor $x=0$ determina un punto de inflexión en las curvas

$$y=Cx^3+x$$

para distintos valores de C (fig. 45).

En efecto, tenemos $y'(0)=1$ de modo que la ecuación de la tangente en el punto (0,0) es

$$y_{\tan}=x$$

y, por eso, la diferencia

$$y-y_{\tan}=Cx^3$$

cambia de signo cuando pasamos de los valores negativos a los valores positivos de x.

¿Cómo se determinan los puntos de inflexión en el gráfico de la función $y=y(x)$?

Como puede verse de la fig. 45, si con el aumento de x la curva pasa de la posición «por debajo de la tangente» a la posición «por encima de la tangente», su coeficiente angular $y'(x)$ a ambos lados del punto de tangencia es mayor que en el propio punto de tangencia:

$$y'(x)>y'(x_0) \text{ para } x\neq x_0.$$

Análogamente, si con el aumento de x la curva pasa de la posición «por encima de la tangente» a la posición «por debajo de la tangente», el valor de $y'(x)$ a ambos lados del punto de tangencia es menor que en el propio punto de tangencia:

$$y'(x)<y'(x_0) \text{ para } x\neq x_0.$$

En el primer caso, el punto de inflexión es un punto de mínimo relativo para la función $y'(x)$; en el segundo caso, es un punto de máximo relativo para esta función. Si queremos determinar estos puntos, debemos calcular primero la derivada de la función $y'(x)$. Esta función $(y'(x))'$ se denomina *segunda derivada* de la función $y(x)$ y se indica por $y''(x)$. Después tenemos que hallar las soluciones de la ecuación

$$y''(x)=0.$$

Entre las soluciones de esta ecuación figuran las abscisas de todos los puntos de inflexión buscados. (Pueden aparecer también soluciones «parasitarias» que no determinan puntos de inflexión; claro está, habrá que omitirlas [1].)

7. Determinemos los puntos de inflexión de la curva $y=\frac{1}{1+x^2}$ (fig. 46).

El gráfico sugiere la existencia de dos puntos de inflexión situados simétricamente respecto al eje de las ordenadas Determinémoslos aplicando la regla explicada más arriba

---

[1]) Por ejemplo, dada la función $y=x^4$ tenemos

$$y'=4x^3 \text{ e } y''=12x^2;$$

para $x=0$ resulta

$$y''(0)=0;$$

sin embargo, este punto no es un punto de inflexión de la curva $y=x^4$.

Tenemos

$$y' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2},$$

$$y'' = (y')' = -\frac{(1+x^2)^2 2 - 2x(4x+4x^3)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}.$$

Igualando a cero la expresión obtenida, encontramos dos soluciones

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\frac{1}{3}} = \pm 0{,}577 \ \ldots$$

Vemos que el cálculo diferencial permite resolver mediante un método general único una serie de problemas cuya solución

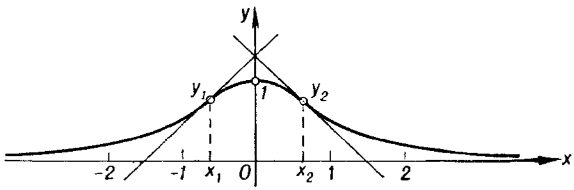


FIG. 46

no está al alcance de la Matemática elemental. En ello consiste la fuerza del cálculo diferencial.

PROBLEMAS

15. ¿Qué relación debe existir entre la altura y el diámetro de la base de una lata de conservas (cilíndrica) de volumen dado para que su elaboración exija la cantidad mínima de metal?

16. En los ángulos de una plancha cuadrada de hierro se recortan unos cudrados; después, la plancha se dobla según las líneas de puntos obteniéndose así una caja abierta por arriba (fig. 47). ¿Cuál debe ser la dimensión de los cuadrados recortados para que la caja tenga el máximo volumen?

17. La derivada de la función $y=\sqrt{f(x)}$ es

$$y'=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}.$$

Aplicando esta fórmula, resuélvase el problema siguiente.

Mi casa (fig. 48) se encuentra a h km de la carretera (rectilínea). Yo debo llegar a la carretera para ir después en auto-

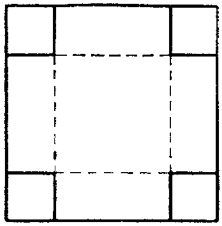


FIG. 47

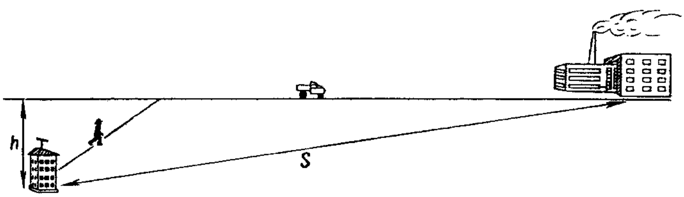


FIG. 48

móvil a la ciudad que se encuentra a s km (en línea recta) de mi casa. Mi velocidad es u y la velocidad del automóvil es v, ¿Cuál es el camino más rápido?

18. ¿Cuál es el sector que debe recortarse de un círculo de radio R para obtener un embudo de capacidad máxima?

Numerosos problemas relacionados con las derivadas y sus aplicaciones a diferentes ramas de la Matemática, Física, etc. pueden encontrarse en los manuales de problemas.

§ 3. INTEGRALES

¿Qué es área de una figura plana comprendida en un contorno no rectilíneo? Arrancaremos de las premisas siguientes.

1. El área de un rectángulo de lados a y b es igual a ab.
2. Las áreas de figuras *iguales* (o sea, de figuras que coinciden por efecto de una superposición) son iguales.

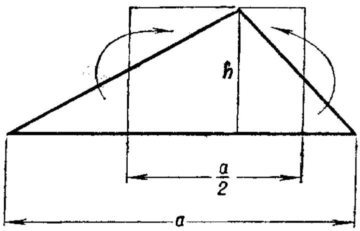


FIG. 49

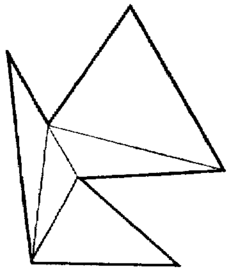


FIG. 50

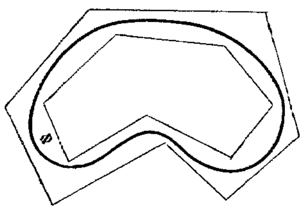


FIG. 51

3. Si la figura Φ está compuesta por las figuras $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, su área es igual a la suma de las áreas de las figuras $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$.

De aquí resulta que son iguales las áreas de las figuras de idéntica composición. Ahora bien, un triángulo de base a y de altura h puede ser descompuesto, como se sabe, en partes que permiten formar un rectángulo de lados $\frac{a}{2}$ y h (fig. 49); de aquí resulta que el área del triángulo es $\frac{ha}{2}$. Finalmente, el área de todo polígono se puede obtener sumando las áreas de los triángulos que lo componen (fig. 50).

4. El área de una figura Φ es menor que el área de cualquier polígono que la contiene y mayor que el área de cualquier polígono contenido en ella (fig. 51).

Existe un teorema según el cual *a toda figura plana Φ comprendida en un contorno no muy complejo se puede poner en correspondencia, además de un modo único, un número S(Φ*

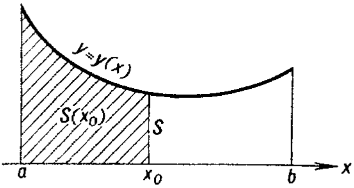


FIG. 52

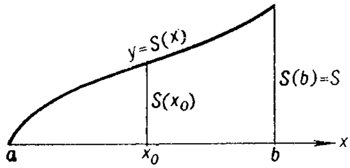


FIG. 53

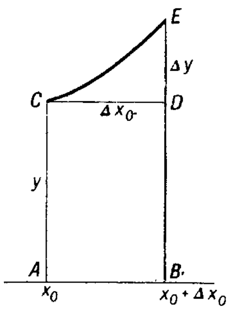


FIG. 54

que se denomina área de la figura Φ y que cumple las condiciones de 1 a 4. (El enunciado exacto y la demostración de este teorema son demasiado complejos para exponerlos aquí.)

En todo caso, existe el área, en el sentido explicado, para toda figura cuyo contorno está formado por arcos finitos de gráficos de funciones racionales. Aceptando este teorema, examinemos el problema sobre el área de la figura Φ (llamada trapecio curvilíneo) cuyos límites son: el segmento del eje x comprendido entre $x=a$ y $x=b$ abajo, la curva $y=y(x)$ (donde $y(x)$ es, como siempre, una función racional) arriba y, a la izquierda y a la derecha, las rectas que pasan por los puntos $x=a$ y $x=b$ y son paralelas al eje y (fig. 52).

Tomando un número x_0 perteneciente al segmento determinado por a y b, planteemos un problema semejante sobre el área de la figura $\Phi(x_0)$ cuya frontera de la derecha es la recta vertical que pasa por el punto x_0 y no por el punto b como en el caso de la figura Φ. El valor de este área depende de cómo se escoja el valor de x_0, o sea, es una función del argumento x_0 definida en todo el segmento $a \leqslant x_0 \leqslant b$; indicaremos esta función por $S(x_0)$. Es evidente que $S(a)=0$ y que $S(b)$ es el área buscada de la figura Φ. Podemos abocetar el gráfico de esta función: en nuestro caso tiene la forma semejante a la representada en la fig. 53.

Si la abscisa de la derecha x_0 de la figura $\Phi(x_0)$ aumenta en $\Delta x_0 = x_1 - x_0$, el área recibe el incremento $ABDEC = \Delta S$ (fig. 54) compuesto del área del rectángulo $ABDC$, igual a $y \Delta x_0$, y del área del triángulo curvilíneo CDE. La última no sobrepasa $\Delta y \Delta x_0$ [1] y, por consiguiente, puede ser representada, de acuerdo con lo anterior, como $\varepsilon_1 \Delta x_0$. Es decir,

$$S(x_1) - S(x_0) = (y + \varepsilon_1) \Delta x_0.$$

La ecuación de la secante al gráfico de la curva $y = S(x)$ que pasa por los puntos $(x_0, S(x_0))$ y $(x_1, S(x_1))$ es

$$y - S(x_0) = \frac{S(x_1) - S(x_0)}{x_1 - x_0}(x - x_0) = (y(x_0) + \varepsilon_1)(x - x_0).$$

Tomando aquí $x_1 = x_0$, obtenemos, igual que antes, la ecuación de la tangente en el punto (x_0, y_0):

$$y - S(x_0) = y(x_0)(x - x_0).$$

El coeficiente angular de la tangente resulta igual a $y(x_0)$. Pero el coeficiente angular de la tangente al gráfico de la función $y = S(x)$ en el punto de abscisa x_0 es, como sabemos, la derivada de la función $S(x)$ en $x = x_0$. Por lo tanto, obtenemos la igualdad

$$S'(x_0) = y(x_0).$$

O sea, *para hallar la función $S(x)$ debemos hallar la función cuya derivada es $y(x)$*, en otras palabras, tenemos que realizar

[1] Aceptamos que la función y es creciente (o decreciente) en el segmento de x_0 a x_1; siendo y una función racional, siempre se puede escoger dicho segmento tan pequeño que quede cumplida esta condición.

con la función $y(x)$ la operación inversa a la derivación. La operación inversa a la derivación aplicada a una función cualquiera se denomina *integración*. Toda función $F(x)$ cuya derivada es $y(x)$ se llama *primitiva de* $y(x)$ o *integral de* $y(x)$. Nótese que siendo $F(x)$ una primitiva de la función $y(x)$, también se puede tomar como primitiva de la función $y(x)$ cualquier otra función de tipo $F(x)+C$ (donde C es una constante) porque la *derivada de una constante es igual a* 0. Como hemos señalado, la función buscada $S(x)$ se hace igual a 0 para $x=a$. Por eso, hallada una primitiva $F(x)$, para determinar la constante C tenemos la ecuación

$$S(a)=F(a)+C=0, \quad \text{de donde } C=-F(a).$$

Resumiendo, si conocemos una función primitiva $F(x)$, podemos representar la solución buscada en la forma

$$S(x)=F(x)-F(a)$$

y, en particular,

$$S(b)=F(b)-F(a); \tag{27}$$

con esto queda resuelto el problema; hablando en términos más precisos, hemos reducido el problema a la determinación de la primitiva de la función dada $y=y(x)$.

Para poder aplicar el resultado general (27) hay que conocer cómo se buscan las primitivas. Si la función $y=y(x)$ es un polinomio

$$y=a_0+a_1x+\ldots+a_nx^n,$$

es fácil escribir una de sus primitivas; a saber,

$$F(x)=a_0x+a_1\frac{x^2}{2}+\ldots+a_n\frac{x^{n+1}}{n+1}. \tag{28}$$

Por eso, no ofrece dificultad alguna el cálculo del área de las figuras limitadas (por arriba) por líneas de tipo $y=$ $=P(x)$, donde $P(x)$ es un polinomio.

Sea, por ejemplo, $y=y(x)$ la función lineal que varía en el segmento $a\leqslant x\leqslant b$ desde el valor p hasta el valor q (fig. 55):

$$y=p+\frac{q-p}{b-a}(x-a).$$

De acuerdo con (28), una de sus primitivas es

$$F(x)=px+\frac{(x-a)^2}{2}\cdot\frac{q-p}{b-a}.$$

Según la fórmula (27), obtenemos

$$S(b)=F(b)-F(a)=pb+\frac{(b-a)(q-p)}{2}-pa=$$
$$=(b-a)\left(p+\frac{q-p}{2}\right)=(b-a)\left(\frac{p+q}{2}\right);$$

este resultado coincide con la fórmula del área del trapecio que se deduce en la Geometría elemental. En particular, para el área del rectángulo y del triángulo (casos especiales del

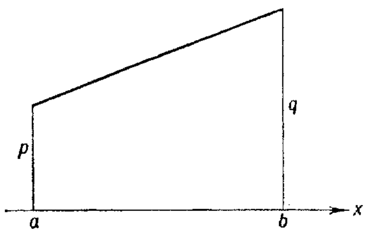


FIG. 55

trapecio) también obtenemos las mismas fórmulas que en la Geometría elemental.

Pero el método de integración ofrece, así mismo, la posibilidad de calcular el área de muchas figuras no elementales. Consideremos algunos ejemplos más.

1. Calculemos el área del triángulo curvilíneo OAB (fig. 56) cuyos límites son: el segmento $0\leqslant x\leqslant a$ abajo, la recta $x=a$ a la derecha y la curva $y=Cx^n$ arriba. Como

$$F(x)=\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

es primitiva de la función $y=x^n$, de (27) resulta

$$S(a)=C\frac{a^{n+1}}{n+1}-C\frac{0^{n+1}}{n+1}=C\frac{a^{n+1}}{n+1}=\frac{a\cdot Ca^n}{n+1}.$$

El número Ca^n representa la longitud del segmento AB. Luego, el área $S(a)$ representa la $\frac{1}{n+1}$ parte del área del rectángulo circunscrito $OABC$.

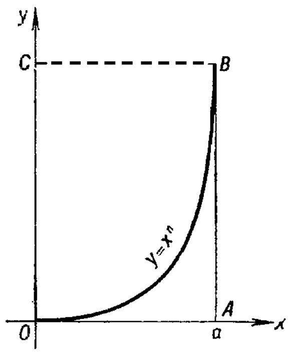


FIG. 56

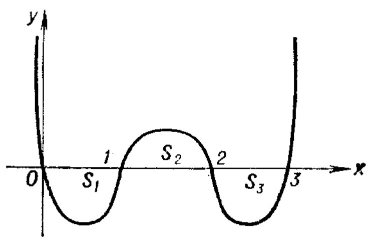


FIG. 57

2. Calculemos las áreas S_1, S_2 y S_3 (fig. 57) comprendidas entre la curva $y=x(x-1)(x-2)(x-3)$ y los intervalos del eje x entre 0 y 1, entre 1 y 2 y entre 2 y 3.

Tenemos en este caso

$$y=P(x)=x^4-6x^3+11x^2-6x$$

y la primitiva es

$$F(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{6x^4}{4}+\frac{11x^3}{3}-\frac{6x^2}{2},$$

de donde

$$S_1=F(1)-F(0)=\frac{1}{5}-\frac{3}{2}+\frac{11}{3}-3=-\frac{19}{30}.$$

El signo «—» subraya que el área S_1 se encuentra por debajo del eje x. Después,

$$S_2=F(2)-F(1)=\frac{32}{5}-24+\frac{88}{3}-12+\frac{19}{30}=\frac{11}{30}$$

y, finalmente,

$$S_3=F(3)-F(2)=\frac{243}{5}-\frac{243}{2}+99-27+\frac{4}{15}=-\frac{19}{30}.$$

El último resultado coincide con S_1 como era de esperar por razones de simetría.

3. Calculemos el área S (fig. 58) comprendida entre la curva $y=\frac{1}{x^2}$ y las rectas $x=1$ y $x=N$, donde N es un número

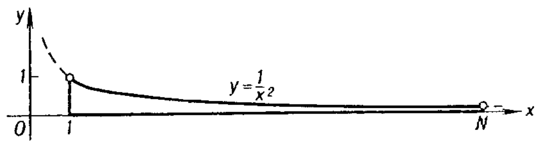


FIG. 58

grande. Es evidente que una primitiva de $y=\frac{1}{x^2}$ es la función $F(x)=-\frac{1}{x}$ y, por eso, tenemos

$$S=F(N)-F(1)=1-\frac{1}{N} \tag{29}$$

Es interesante que para todo N, tan grande como se quiera, este área es menor que 1. Como permite ver la fórmula (29), resulta natural asignar un valor finito —igual a 1— al área de la figura extendida infinitamente hacia la derecha cuyos límites son: el eje x abajo, la curva $y=\frac{1}{x^2}$ arriba y el segmento de la recta $x=1$ a la izquierda.

Como vemos, el cálculo integral, basado en el cálculo diferencial, permite resolver de un modo único distintos problemas acerca de las áreas que no están al alcance de la Matemática elemental. Pero este problema del área es sólo un caso particular, nada más que una de las realizaciones del problema general sobre la búsqueda de la función primitiva a partir de su derivada. A este problema general conducen muchos problemas de las Matemáticas, así como de la Mecánica, Física, Química y Biología; el cálculo integral ofrece la posibilidad de aplicar un método general en muchos problemas que se diferencian en el planteamiento concreto pero tienen la misma esencia matemática (por ejemplo, determinar la energía necesaria para lanzar un satélite, hallar la ley de fisión de una materia radioactiva, analizar cuantitativamente la marcha de una reacción química o el proceso de reproducción de bacterias).

4. Prestemos mayor atención al problema que sigue. Se trata del área S comprendida entre esta misma curva $y=\frac{1}{x^2}$

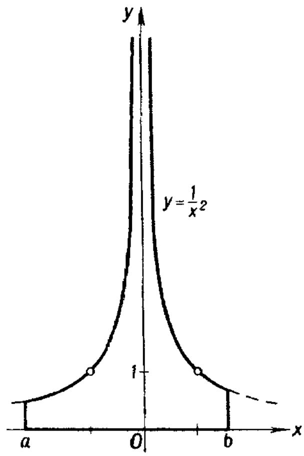


FIG. 59

y las rectas $x=a$ y $x=b>a$ (fig. 59). Aplicando el mismo procedimiento, encontramos

$$S=F(b)-F(a)=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}.$$

Si a y b tienen el mismo signo, el resultado es positivo, cosa muy natural pues la curva $y=\frac{1}{x^2}$ está por encima del eje x. En cambio, si a y b son de signos opuestos (o sea, $a<0$ y $b>0$), obtenemos inesperadamente un resultado negativo en total disonancia con el gráfico. La razón de ello está en que hemos aplicado formalmente, sin sentido crítico, la regla (27) para la primitiva. En realidad, la regla (27) tiene determinados límites de aplicación y fuera de ellos deja de ser válida; sin embargo, no podemos aquí ni siquiera indicarlos con exactitud pues ello requiere el empleo de conceptos generales que hemos dejado a un lado.

Un análisis más profundo de la integración de las funciones racionales revela la existencia de lagunas. En efecto, para algunas funciones racionales podemos hallar las primitivas empleando la igualdad

$$\left(\frac{1}{(x-a)^m}\right)=-\frac{m}{(x-a)^{m+1}}$$

que resulta de la fórmula general (22). En concreto, dada la expresión

$$y(x)=\frac{b_1}{(x-a_1)^2}+\frac{b_2}{(x-a_2)^3}+\ldots+\frac{b_m}{(x-a_m)^{m+1}}, \qquad (30)$$

podemos representar su primitiva así

$$F(x)=-\frac{b_1}{x-a_1}-\frac{b_2}{2(x-a_2)^2}-\ldots-\frac{b_m}{m(x-a_m)^m}.$$

Pero no toda función racional se reduce a la forma (30). Por ejemplo, empleando este método no podremos obtener primitiva de la función $\frac{1}{x}$. Sin embargo, la función $\frac{1}{x}$ tiene primitiva que ni es función racional ni siquiera pertenece a la clase de funciones elementales que se estudian en la escuela. Como vemos, la operación de derivación aplicada a la clase de funciones racionales nos deja en esta misma clase, mientras que la operación inversa —la integración— conduce necesariamente a funciones nuevas. El estudio de estas últimas precisa enfoques generales enteramente distintos como también un nivel de técnica analítica enteramente distinta de los que hemos utilizado aquí.

Por eso, para dominar debidamente el aparato del cálculo diferencial e integral es necesario estudiar los capítulos preliminares del Análisis que tratan de los números reales, los límites y la continuidad. Estos capítulos comprenden los fundamentos generales, absolutamente imprescindibles, que permiten operar con una clase de funciones mucho más amplia que la clase de funciones racionales considerada por nosotros.

Existen libros valiosos donde se exponen los fundamentos del Análisis Matemático. Esperamos que, interesado después de la lectura de este folleto por las posibilidades que brinda el cálculo diferencial e integral, el lector buscará luego los medios de ahondar en sus conocimientos de las Matemáticas tan útiles para todas las otras ciencias y, por su intermedio, para toda la humanidad.

PROBLEMAS

19. Determínese el área comprendida entre la curva $y = x^2 + \frac{1}{x^2}$, el eje x y las rectas verticales que cortan el eje x en los puntos $a = \frac{1}{2}$ y $b = 2$, respectivamente (fig. 60).

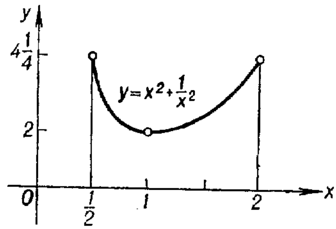


FIG. 60

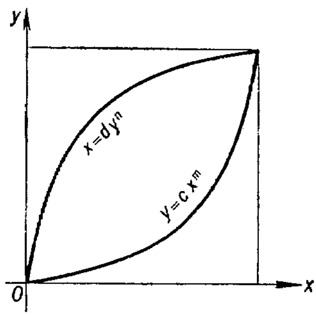


FIG. 61

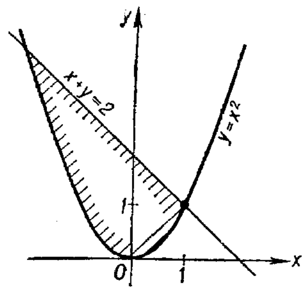


FIG. 62

20. Determínese el área comprendida entre las curvas

$$y=cx^m \quad \text{y} \quad x=dy^n$$

(fig. 61).

Sugerencia. Empléese el resultado del ejemplo 1 del § 3.

21. Determínese el área comprendida entre la recta $x+y=2$ y la parábola $y=x^2$ (fig. 62).

Sugerencia. Represéntese el área buscada como la diferencia de dos áreas cuyos límites laterales son rectas verticales.

22. La velocidad que adquiere un cuerpo durante el tiempo t a partir del comienzo de su caída es igual a gt ($g=$ $=9{,}81$ m/s²). ¿Cuál es la distancia que recorre en este tiempo?

Sugerencia. La velocidad es la derivada de la distancia con respecto al tiempo.

RESPUESTAS

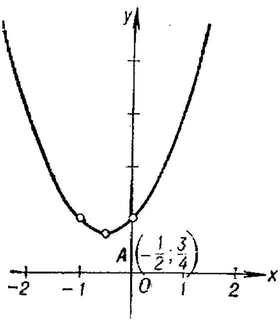


FIG. 63. Problema 1

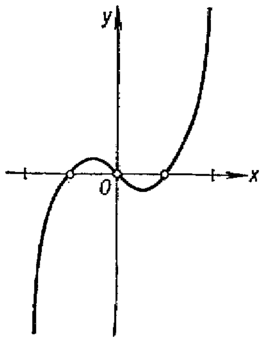


FIG. 64. Problema 2

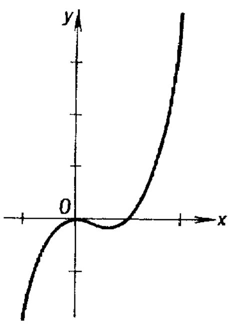


FIG. 65. Problema 3

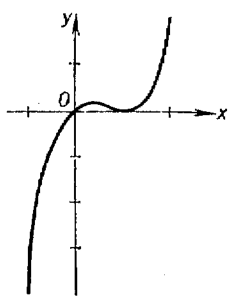


FIG. 66. Problema 4

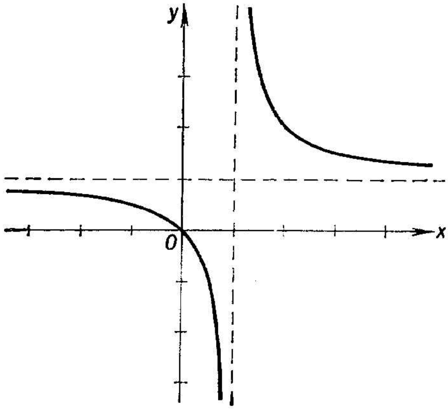


FIG. 67. Problema 5

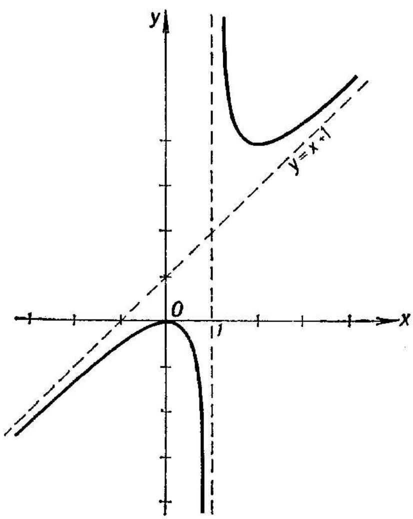


FIG. 68. Problema 6

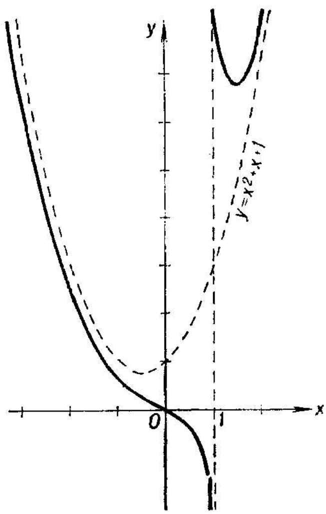


FIG. 69. Problema 7

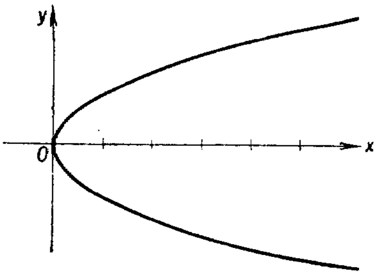


FIG. 70. Problema 8

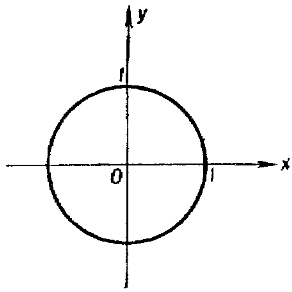


FIG. 71. Problema 9

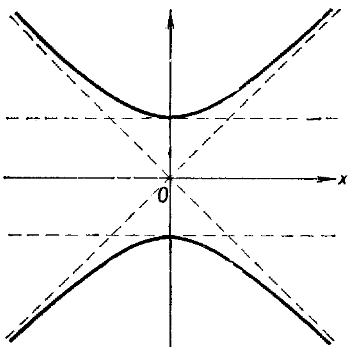


FIG. 72. Problema 10

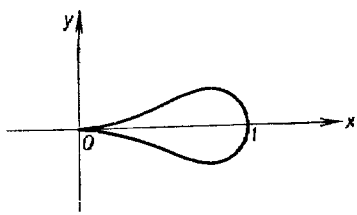


FIG. 73. Problema 11

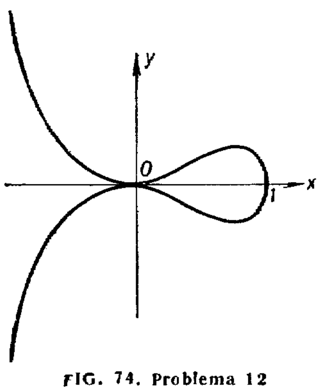


FIG. 74. Problema 12

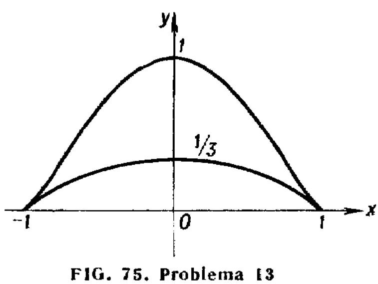


FIG. 75. Problema 13

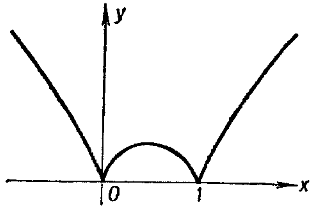


FIG. 76. Problema 14

15. La altura de la lata debe ser igual al diámetro de la base.

16. La dimensión de los cuadrados recortados es $\frac{1}{6}$ de la dimensión de todo el cuadrado.

17. El seno del ángulo entre la ruta del peatón y la perpendicular a la carretera debe ser igual a $\frac{u}{v}$ siempre que esta razón no pase de

$$\sqrt{1-\left(\frac{h}{s}\right)^2}.$$

En el caso contrario, el camino más rápido es a pie en línea recta hacia la ciudad.

18. $\alpha=2\pi\left(1-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$ radianes $\cong 72°$.

19. $S=\frac{33}{8}$.

20. $S=c^{\frac{n+1}{1-nm}}d^{\frac{n+1}{1-nm}}\left(1-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$.

21. $S=\frac{9}{2}$.

22. $s=\frac{gt^2}{2}$.

A NUESTROS LECTORES:

"Mir" edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés, árabe y otros idiomas extranjeros. Entre ellos figuran las mejores obras de las distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan us opiniones a la Editorial "Mir", I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, GSP, URSS.

A. Solodóvnikov

SISTEMAS DE DESIGUALDADES LINEALES

(2ª edición)

El folleto tiene el propósito de familiarizar al lector con varios aspectos de la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales: la faceta geométrica de la cuestión y los métodos de la solución de los sistemas que están estrechamente vinculados con la misma, algunas propiedades puramente algebraicas de los sistemas, las cuestiones de la programación lineal. Para leer este trabajo son suficientes los conocimientos impartidos en la segunda enseñanza. En el libro se trata del enlace entre los sistemas de desigualdades lineales y los poliedros convexos, se describe la multitud de soluciones que posee cualquier sistema de desigualdades lineales, se examinan los problemas de compatibilidad y de la incompatibilidad, se da la solución al problema del transporte de la programación lineal. En folleto está destinado a los alumnos de los grados superiorer de la escuela secundaria y a todos los aficionados a las matemáticas.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

A.I. Markushévich

Curvas maravillosas

Números complejos y representaciones conformes

Funciones maravillosas

A.N. Kostovski

Construcciones geométricas mediante un compás

A.O. Guelfond

Resolución de ecuaciones en números enteros

A.S. Smogorzhevski

Acerca de la geometría de Lobachevski

Editorial MIR Moscú