Lecciones populares de matemáticas

QUÉ ES LA PROGRAMACIÓN LINEAL

A. S. Bársov

a_1 \ b_1	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО · МИР ·

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. С. БАРСОВ

ЧТО ТАКОЕ ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMÁTICAS

A. S. BÁRSOV

QUÉ ES LA PROGRAMACIÓN LINEAL

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Traducido del ruso por el Candidato a Doctor
en Ciencias Técnicas Bernardo del Río Salceda

На испанском языке

Impreso en la URSS. 1977

INDICE

PREFACIO A LA EDICIÓN EN LENGUA ESPAÑOLA

Con motivo de la decisión de publicar esta obra en lengua española desearía dirigirme al lector con algunas palabras.

Hace ya cerca de veinte años que apareció este libro. En aquel entonces la programación lineal se encontraba en el proceso de su desarrollo, estábamos apasionados con las cuestiones de su teoría, aplicación y divulgación. En este pequeño libro traté de explicar los conceptos básicos de la asignatura y la esencia de algunos de sus métodos de cómputo.

El libro se agotó rápidamente, continuaron las investigaciones sobre el tema; han aparecido muchas obras en las cuales, bajo mi opinión, se explica mejor parte del material. A pesar de eso, hace relativamente poco tiempo, este libro fue reeditado en Japón, en la RDA, ha sido traducido a las lenguas de otros países. Ahora la editorial "MIR" está preparando en lengua española la edición de la serie completa de libros "Lecciones de divulgación de matemáticas" en la que éste salió. La traducción de este libro se ha hecho íntegramente por dicha edición. Observaremos que desde aquel tiempo las computadoras se han perfeccionado muchísimo y por eso las referencias a los ejemplos de rapidez de resolución de algunos problemas, así como las dimensiones de éstos, deben ser interpretados por el lector como factores que caracterizaron el período inicial de la aplicación de la programación lineal. Actualmente las dimensiones de los problemas que se tratan son mucho mayores y las velocidades de su resolución mucho más altas. Las explicaciones que se dan sobre los conceptos y definiciones fundamentales de la programación lineal y las bases de los métodos de cálculo por el criterio de costo y de tiempo, pueden hoy en día abrir al lector el camino a esta interesante asignatura de la matemática moderna, a la programación lineal.

Estaré satisfecho de que el lector encuentre útil para sí este pequeño libro y al mismo tiempo le expreso mi simpatía.

5 de mayo de 1976 *A. S. Bársov*

PREFACIO

En este libro se examinan cuestiones de la teoría y de los métodos de resolución de algunos problemas de programación lineal. El está destinado a un amplio círculo de personas ocupadas en el empleo de métodos matemáticos en la organización y la planificación de la industria.

Se estudian los fundamentos de la programación lineal. Al hacerlo se presentan tan sólo los datos y demostraciones que son necesarios para una exposición elemental de los métodos de programación lineal.

El trabajo se realizó a base de las conferencias dadas por el autor en el año 1957 para personas que se dedicaban a la resolución de problemas de programación lineal en las máquinas computadoras electrónicas.

L. A. Lyusternik, miembro correspondiente de la A. C. de la U. R. S. S., en el año 1959 revisó con atención el material de las conferencias, dio una serie de valiosos consejos y contribuyó a la edición del presente trabajo.

El autor agradece a los profesores A. A. Liapunov y N. S. Krasílnikov por su ayuda en la solución de las dificultades que surgieron en el proceso de la preparación de este libro.

El autor está particularmente agradecido al redactor V. D. Rosenko por su minuciosa labor que sirvió considerablemente para mejorar el libro.

A. S. Bársov

INTRODUCCIÓN

La tarea del desarrollo ulterior de las fuerzas productivas, de la mejora de la planificación de la industria socialista y el aumento de la efectividad económica de las inversiones básicas en nuestro país adquiere de año en año cada vez mayor importancia.

La diversidad de posibles soluciones técnicas y caminos de desarrollo en la industria actual, las interrelaciones entre las diferentes ramas de la economía nacional y otros problemas económicos hacen que las tareas planteadas anteriormente sean excepcionalmente difíciles.

Para solucionar estos problemas, los métodos matemáticos y en particular el método de programación lineal, así como los medios técnicos modernos, las máquinas computadoras electrónicas pueden prestar una ayuda sustancial.

La teoría de la programación lineal, que surgió hace dos décadas, actualmente ha obtenido una amplia utilización práctica particularmente en el terreno de la organización y planificación de la industria.

Los primeros trabajos en este sentido fueron los de L. V. Kantorovich, miembro correspondiente de la A. C. de la U.R.S.S.*). En esos trabajos se expusieron métodos matemáticos para resolver problemas tales como el del aumento de la efectividad del transporte, el cálculo de los regímenes óptimos de producción, la distribución racional de los materiales industriales, etc.

Posteriormente fueron creados métodos generales de programación lineal tales como, por ejemplo, el simplex, el combinatorio y otros métodos que se emplean eficazmente en la solución de diversos problemas para determinar el óptimo en la planificación. Dantzing, Charnes y una serie de científicos soviéticos y extranjeros se ocuparon de la elaboración de estos métodos.

La programación lineal abarca métodos de solución de problemas de óptimo en los que hay muchas variables relacionadas entre sí y subordinadas a unas determinadas condiciones de restricción. El planteamiento de los problemas de programación lineal se puede formular de la siguiente manera:

Tenemos cierta magnitud (por ejemplo el costo, el tiempo)

---

*) L. V. Kantorovich hoy es miembro efectivo de la A. C. de la U.R.S.S. y laureado con el Premio Nobel.

que es función lineal de una serie de variables. A su vez, las variables tienen que satisfacer a las restricciones expresadas en forma de un sistema de desigualdades o igualdades lineales.

Hay que buscar aquellos valores no negativos de las variables con los que la magnitud que sea su función adquiera el valor menor (el mayor).

En calidad de ejemplo veamos el problema de transporte. Este problema se puede formular de la forma siguiente:

De m puntos de partida dados, en cada uno de los cuales hay a_i unidades de cargamento, se deben llevar b_j unidades de la carga indicada a cada uno de los n puntos de llegada

$$(i = 1, 2, ..., m; \qquad j = 1, 2, ..., n).$$

Se exige planificar el transporte de tal modo que los gastos sean mínimos. Designaremos con x_{ij} la cantidad de carga transportada del punto de partida i al punto de llegada j. En tal caso el contenido matemático del problema se reduce a encontrar los valores no negativos de x_{ij} que satisfagan las ecuaciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i; \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j,$$

y con los cuales el costo general del transporte

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

sea el menor. Aquí c_{ij} es el costo de transporte de una unidad de carga desde el punto de partida i hasta el punto de llegada j.

En un serie de casos prácticos importantes, el problema se plantea así: se necesita planificar el transporte de cargamentos desde m puntos de partida dados hasta n puntos de llegada de tal forma que todas las operaciones de transporte se realicen en un plazo mínimo.

Otro ejemplo del empleo de la programación lineal puede ser el problema siguiente:

En muchas fábricas, la producción de diferentes artículos se realiza en líneas automáticas. En estos casos pueden surgir diferentes problemas referentes a la organización más racional de la producción.

Supongamos, por ejemplo, que un taller dispone de m máquinas para fabricar n artículos distintos. Cada máquina i ($i = 1, 2, ..., m$) se caracteriza por el tiempo posible de trabajo mensual b_i, la norma de tiempo t_{ij} para elaborar una unidad del artículo j ($j = 1, 2, ..., n$) y por el costo c_{ij} de fabricación de una unidad del artículo j en la máquina i. Si al taller se le ha dado la tarea de sacar en el mes próximo una determinada cantidad a_j de cada uno de los diferentes artículos, surge el problema de organizar el trabajo en tal forma que esta tarea se cumpla con los gastos mínimos. Si designamos con x_{ij} la cantidad de artículos j que se fabrican en la máquina i, el problema planteado se reducirá a una distribución del trabajo entre las máquinas que satisfaga las condiciones

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geqslant a_j; \qquad \sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij} \leqslant b_i$$

y que lleve el valor total de los costos

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

al mínimo posible.

En los problemas de programación lineal las condiciones que se aplican a la zona de valores admisibles de las variables se determinan por un sistema de desigualdades o igualdades *lineales*. Al mismo tiempo, la función cuyo valor mínimo (máximo) se busca, es también una función *lineal* de las mismas variables. Esto lo subraya la propia denominación de programación *lineal*.

Para la determinación de la solución óptima, los métodos de programación lineal exigen el examen de varias soluciones. Al analizar problemas prácticos, por ejemplo, el problema del empleo racional de la maquinaria o de las empresas con determinadas condiciones restringentes, el paso de una solución a otra corresponde a un estudio sucesivo de diferentes *programas* de producción. De aquí viene el nombre de *programación* lineal.

El problema de la programación lineal es un problema de búsqueda de un punto de cierta región en el que la función adquiere el valor máximo (mínimo). Por eso surge la pregunta natural: ¿Por qué no es suficiente en este caso emplear los conocidos métodos clásicos de resolución de los problemas de cálculo de valores extremos de las funciones, por ejemplo, el método de Lagrange?

La causa reside en que los métodos clásicos exigen la existencia de derivadas parciales de la función en el punto en el que se alcanza el extremo mientras que la función lineal llega a su valor extremo en el límite de la región, donde las derivadas parciales no existen.

Eso fue lo que sirvió de motivo para la creación de nuevos métodos de resolución de problemas de extremo entre los que se encuentra la programación lineal.

La práctica de resolución de problemas de programación lineal muestra que cuando es grande el número de variables, para resolver tales problemas es necesario emplear computadoras electrónicas. La máquina resuelve en unos dos o tres minutos problemas en los que el hombre gastaría hasta una semana. Al ser muy grande el número de las variables, estos problemas pueden ser resueltos solamente por medio de computadoras electrónicas.

Puede servir de ejemplo el cálculo del plan óptimo de transporte de arena de construcción a las obras de edificación de la ciudad de Moscú. En este problema había 10 puntos de partida y 230 puntos de llegada. El plan óptimo de transporte calculado en la computadora "Strelá", en diez días del mes de junio de 1958 dio un 11% de economía.

A continuación se examinan los fundamentos matemáticos y los métodos de resolución de algunos problemas de programación lineal y, en particular, de los problemas de transporte.

CAPÍTULO I

ALGUNOS CONCEPTOS Y DEFINICIONES DEL ÁLGEBRA LINEAL

En este capítulo se exponen los conceptos básicos y las definiciones del álgebra lineal de espacio m-dimensional que son necesarios para la resolución de problemas de programación lineal.

§ 1. CONCEPTO DE ESPACIO M-DIMENSIONAL

Cualquier trío ordenado (a_1, a_2, a_3) de números reales puede ser interpretado geométricamente como un punto en el espacio. En concordancia con esta representación geométrica se ha tomado en la matemática la definición siguiente: *el espacio tridimensional es el conjunto de todos los posibles tríos ordenados* (a_1, a_2, a_3) *de números reales* *). También se dice que el sistema de números (a_1, a_2, a_3) determina el punto M en un espacio tridimensional con las coordenadas a_1, a_2, a_3 o el vector $\mathbf{P}$ con los componentes a_1, a_2, a_3 en ese mismo espacio. Estos tres números reales son insuficientes para representar ciertos objetos, procesos o estados. Por ejemplo, para determinar la posición de un cuerpo sólido en el espacio son necesarias seis coordenadas. En el caso de que en una zona económica se produzcan determinados artículos industriales y agrícolas, como vagones de ferrocarril, automóviles, trigo, leche, cerillas y otros, entonces para la característica de esa producción industrial y agrícola de la zona se necesitará una sucesión ordenada de números reales. Por ejemplo, la tabla 1 indica que la zona № 2 produce anualmente a_{21} toneladas de carbón, a_{22} toneladas de mineral de hierro, a_{23} toneladas de acero, ..., a_{2n} toneladas de trigo.

Similarmente se definirán, también por medio de sucesiones ordenadas de números, por ejemplo: la cantidad de combustible de aviación de diferentes clases que se emplea en tal país,

*) Por analogía el conjunto de todos los posibles números reales (a_1) es un espacio unidimensional cuyo modelo geométrico puede ser la recta; el conjunto de todos los posibles pares de números reales (a_1, a_2) es un espacio bidimensional cuyo modelo geométrico puede ser la superficie plana.

la cantidad de artículos de diferentes clases que se encuentran en tal almacén, etc.

Tabla 1

	Carbón (t)	Miner. de hierro (t)	Acero (t)	....	Trigo (t)
Zona № 1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	....	a_{1n}
Zona № 2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	....	a_{2n}
....	.....	.....	.....	....	......
Zona № K	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	....	a_{kn}

Estos ejemplos muestran la utilidad del estudio de todos los posibles conjuntos de sucesiones ordenadas de m números reales para el caso de que m sea cualquier número entero positivo. Como se sabe, un sistema ordenado de m números reales $(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_m)$ se llama *vector m-dimensional.* Los números a_i, $i = 1, 2, ..., m$, se denominan componentes del vector $\mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_m)$.

Los vectores $\mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_m)$ y $\mathbf{Q}(b_1, b_2, ..., b_m)$ se consideran iguales si y sólo si coinciden sus componentes que se encuentran en los mismos lugares, o sea si $a_i = b_i$ para todos los $i = 1, 2, ..., m$.

En el caso de que nos interesara conocer la productividad total de las diversas clases de producción de dos zonas económicas, evidentemente ésta podría calcularse sumando las productividades respectivas de estas zonas.*) Si la productividad de la zona № 1 en todas las clases de productos se determina por medio del vector $\mathbf{P}_1(a_{11}, a_{12}, ..., a_{1m})$ y la de la zona № 2, por el vector $\mathbf{P}_2(a_{21}, a_{22}, ..., a_{2m})$, entonces la productividad total de estas dos zonas estará caracterizada por el vector

$$\mathbf{Q}(a_{11} + a_{21}, a_{12} + a_{22}, ..., a_{1m} + a_{2m}).$$

Si la productividad de una zona se determina por el vector $\mathbf{P} = \mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_m)$, al incrementarse la productividad de cada uno de los productos en k veces, el aumento de la productividad de la zona se podrá expresar con el vector $\mathbf{Q}$, el que será

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(ka_1, ka_2, ..., ka_m).$$

*) Comprenderemos en este caso por productividad la cantidad de producto obtenido en un determinado lapso.

Las definiciones introducidas son sencillamente una generalización de las operaciones ya conocidas con los vectores en un espacio tridimensional. Al aplicar el concepto del espacio tridimensional a la sucesión de números reales m, obtendremos la importante definición siguiente: el conjunto de todos los posibles m-dimensionales vectores $\mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_m)$ con componentes reales se llama espacio m-dimensional y se designa $\mathbf{P}^{(m)}$. Según la definición, sumar dos vectores m-dimensionales consiste en obtener un tercer vector $\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$ con sus componentes iguales a las sumas de los respectivos componentes de los vectores sumados. Multiplicar el vector $\mathbf{P}$ por el número k quiere decir multiplicar cada componente por ese número.

Se dice que el vector $\mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_n)$ es proporcional al vector $\mathbf{Q}(b_1, b_2, ..., b_n)$ si existe un número k tal que $b_1 = ka_1$, $b_2 = ka_2$, ..., $b_n = ka_n$. En este caso, $\mathbf{P} = k\mathbf{Q}$.

El concepto de la combinación lineal de los vectores es la generalización de la noción de proporcionalidad de los vectores.

El vector $\mathbf{P}$ se llama *combinación lineal* de los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_s$, si existen algunos números reales l_1, l_2, ..., l_s tales que $\mathbf{P} = l_1\mathbf{P}_1 + l_2\mathbf{P}_2 + ... + l_s\mathbf{P}_s$. En este caso el i-ésimo componente del vector $\mathbf{P}$ ($i = 1, 2, ..., m$) será igual a la suma de los productos de la multiplicación de cada i-ésimo componente de los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_s$ por su l_1, l_2, ..., l_s respectivo.

Un sistema de vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_{r-1}$, $\mathbf{P}_r$ se llama *linealmente dependiente* si por lo menos uno de ellos es una combinación lineal de los demás vectores.

Esta definición es equivalente a otra:

un sistema de vectores se llama *linealmente dependiente* si existen tales números reales k_1, k_2, ..., k_r, de los que por lo menos uno no sea cero, que satisfagan la igualdad

$$k_1\mathbf{P}_1 + k_2\mathbf{P}_2 + ... + k_r\mathbf{P}_r = 0.$$

En el caso contrario, el sistema de vectores se llama *linealmente independiente*.

Si el vector $\mathbf{P}_0$ es una combinación lineal de los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$, se dice que $\mathbf{P}_0$ se expresa en forma lineal por medio del sistema de vectores $\{\mathbf{P}_j\}$, en el que $j = 1, 2, ..., n$. Está claro que si el vector se expresa en forma lineal por medio de cierto subsistema del sistema dado, él se expresará también en forma lineal por medio del sistema para lo que es suficiente tomar los demás coeficientes del sistema iguales a cero.

Generalizando esta terminología, se dice que un sistema de vectores $\mathbf{Q}_1$, $\mathbf{Q}_2$, ..., $\mathbf{Q}_s$ se expresa en forma lineal por medio de un sistema de vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ si cualquier vector $\mathbf{Q}_i$, $i = 1, 2, ..., s$ es una combinación lineal de los vectores del sistema $\{\mathbf{P}_j\}$ $j = 1, 2, ..., n$.

Examinemos en el espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ los vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{i}_1\,(1,\ 0,\ 0,\ ...,\ 0), \\ \mathbf{i}_2\,(0,\ 1,\ 0,\ ...,\ 0), \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \mathbf{i}_m\,(0,\ 0,\ 0,\ ...,\ 1). \end{array}\right\} \tag{1}$$

Estos vectores se llaman vectores – unidad (o vectores – unitarios). El sistema de vectores (1) es linealmente independiente, puesto que $k_1\mathbf{i}_1 + k_2\mathbf{i}_2 + ... + k_m\mathbf{i}_m = 0$ solamente si $k_i = 0$ para todos los

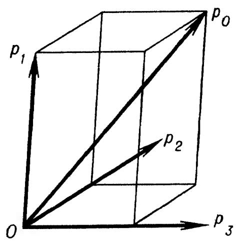

Fig. 1

$i = 1, 2, ..., m$. Cualquier vector $\mathbf{P}(a_1, a_2, ..., a_m)$ del espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ se expresa en forma lineal por medio de los vectores del sistema (1), o sea,

$$\mathbf{P} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + ... + a_m\mathbf{i}_m.$$

Se puede demostrar que *cualquier sistema de vectores de un espacio* $\mathbf{P}^{(m)}$ *que esté compuesto por más de m vectores es linealmente dependiente.*

De este modo tendremos que si en una superficie salen del origen de las coordenadas dos vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que no se encuentran en una misma dirección, o sea que son linealmente independientes, cualquier tercer vector se podrá representar como una combinación lineal de estos vectores.

Por analogía, si en un espacio tridimensional se dan tres vectores que no se encuentran en una misma superficie y que salen del origen de las coordenadas, cualquier vector de este espacio se expresa como una combinación lineal de estos vectores. En la fig. 1 se ilustra el caso en el que el vector $\mathbf{P}_0$ se representa por medio de una combinación de los vectores linealmente independientes $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, que tiene la notación siguiente

$$\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{P}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{P}_3.$$

En un espacio bidimensional, a dos vectores linealmente independientes $\mathbf{P}_1(a_{11}, a_{21})$ y $\mathbf{P}_2(a_{12}, a_{22})$ les corresponde la determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \text{ diferente de cero.}$$

El valor absoluto de esta determinante es igual a la superficie del paralelógramo construido con los vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ (fig. 2). En un espacio tridimensional, tres vectores linealmente independientes $\mathbf{P}_1(a_{11}, a_{21}, a_{31})$, $\mathbf{P}_2(a_{12}, a_{22}, a_{32})$ y $\mathbf{P}_3(a_{13}, a_{23}, a_{33})$ forman un paralelepípedo (fig. 3). En este caso, el valor absoluto de la determinante será

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

diferente de cero e igual al volumen del paralelepípedo.

Análogamente, si en un espacio m-dimensional se dan m vectores linealmente independientes

$$\mathbf{P}_j(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{ij}, a_{mj}), \qquad j = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

entonces, como se demuestra en los cursos de álgebra superior, la determinante

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero.

Supongamos que en un espacio m-dimensional están dados n vectores cualesquiera

$$\mathbf{P}_j\,(a_{1j},\ a_{2j},\ \ldots,\ a_{ij},\ \ldots, a_{mj}),\qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n;$$
$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Formemos con los componentes de estos vectores la matriz*) de un orden de $(m \times n)$

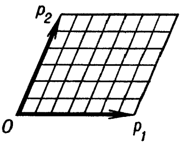

Fig. 2

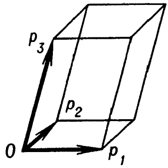

Fig. 3

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & & \mathbf{P}_j & & \mathbf{P}_n \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} \end{array} \right\| \qquad (2)$$

Hablando en general, las columnas de esta matriz vistas como vectores m-dimensionales pueden ser linealmente dependientes. El máximo número de columnas linealmente independientes de la matriz (2) se llama *rango* de esta matriz**). Dicho de otra forma, el rango de la matriz (2) es igual al máximo número de vectores linealmente independientes $\mathbf{P}_j$, cuyos componentes forman sus columnas. Cualquier sistema linealmente independiente máximo de vectores del espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ se llama *base de ese espacio vectorial.*

*) Aquí y a continuación colocaremos los componentes de los vectores $\mathbf{P}_j$ en forma de columnas de las matrices.

**) El número máximo de filas linealmente independientes de la matriz siempre es igual al número máximo de columnas linealmente independientes.

Supongamos que los vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{j-1}, \mathbf{P}_j, \mathbf{P}_{j+1}, \ldots, \mathbf{P}_m$ forman la base del espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ la que llamaremos A-base. Entonces cualquier vector $\mathbf{P}$ de ese espacio puede ser representado en la base dada en forma de una combinación lineal de vectores $\mathbf{P}_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Además, esta forma de representación tendrá una sola aceptación. Todas las bases de un espacio vectorial se componen del mismo número de vectores.

Tomemos un vector cualquiera $\mathbf{Q}$ que no pertenezca a la base $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_m$. Entonces, si el vector $\mathbf{Q}$ no es igual a cero, en la combinación lineal

$$\mathbf{Q} = \alpha_1\mathbf{P}_1 + \alpha_2\mathbf{P}_2 + \ldots + \alpha_{j-1}\mathbf{P}_{j-1} + \alpha_j\mathbf{P}_j + \alpha_{j+1}\mathbf{P}_{j+1} + \ldots + \alpha_m\mathbf{P}_m$$

habrá por lo menos un coeficiente diferente de cero.

Supongamos, por ejemplo, que $\alpha_j \neq 0$, entonces el vector $\mathbf{P}_j$ de la A-base se puede representar de la siguiente manera

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{\alpha_j}\mathbf{Q} - \frac{\alpha_1}{\alpha_j}\mathbf{P}_1 - \ldots - \frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j}\mathbf{P}_{j-1} - \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j}\mathbf{P}_{j+1} - \ldots - \frac{\alpha_m}{\alpha_j}\mathbf{P}_m.$$

Excluimos de la A-base el vector $\mathbf{P}_j$ y añadimos a los vectores que quedan el vector $\mathbf{Q}$. El sistema de vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{j-1}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}_{j+1}, \ldots, \mathbf{P}_m$ de nuevo es base. Realmente, teniendo en cuenta que la descomposición de cualquier vector entre los vectores de la base se efectúa siempre de una sola forma, después de la exclusión del vector $\mathbf{P}_j$ de la A-base, el vector $\mathbf{Q}$ ya no podrá ser representado como una combinación lineal de los demás vectores. Eso quiere decir que el sistema de vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{j-i}, \mathbf{Q}, \mathbf{P}_{j+1}, \ldots, \mathbf{P}_m$ es un sistema linealmente independiente, o sea, que forma una base.

La B-base, que se ha obtenido de la A-base por medio de la sustitución de cierto vector por un vector no perteneciente a la A-base, la llamaremos *base con una sustitución con respecto a la A-base.*

Supongamos que en un espacio m-dimensional están dados $n+1$ vectores $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_j, \ldots, \mathbf{P}_n$, los que en la base $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \ldots, \mathbf{Q}_m$ tienen la descomposición

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{P}_0 = b_1\mathbf{Q}_1 + b_2\mathbf{Q}_2 + \ldots + b_m\mathbf{Q}_m, \\
\mathbf{P}_1 = a_{11}\mathbf{Q}_1 + a_{21}\mathbf{Q}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{Q}_m, \\
\mathbf{P}_2 = a_{12}\mathbf{Q}_1 + a_{22}\mathbf{Q}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{Q}_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{P}_j = a_{1j}\mathbf{Q}_1 + a_{2j}\mathbf{Q}_2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{Q}_m, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{P}_n = a_{1n}\mathbf{Q}_1 + a_{2n}\mathbf{Q}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{Q}_m.
\end{array}\right\} \quad (3)$$

Formemos una matriz con los componentes de la descomposición (3)

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \dots & \mathbf{P}_j & \dots & \mathbf{P}_n \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccccc} b_1 & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ b_i & a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ b_m & a_{m1} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{array} \right\| \tag{4}$$

Admitamos ahora que los vectores $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ forman una nueva base $\mathbf{P}^{(m)}$. Supongamos que estos vectores tienen la siguiente descomposición en la base $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= q_{11}\mathbf{Q}_1 + q_{21}\mathbf{Q}_2 + \dots + q_{m1}\mathbf{Q}_m, \\ \mathbf{q}_2 &= q_{12}\mathbf{Q}_1 + q_{22}\mathbf{Q}_2 + \dots + q_{m2}\mathbf{Q}_m, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \mathbf{q}_m &= q_{1m}\mathbf{Q}_1 + q_{2m}\mathbf{Q}_2 + \dots + q_{mm}\mathbf{Q}_m. \end{aligned}$$

Como $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ forman una base, la determinante

$$\Delta = \left| \begin{array}{cccc} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1m} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \\ q_{m1} & q_{m2} & \dots & q_{mm} \end{array} \right| \tag{5}$$

será diferente de cero.

Pasemos de la base $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$ a la base $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$. Entonces, los vectores $\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \dots, \mathbf{P}_n$ tendrán en la base $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_m$ unos coeficientes de descomposición que, en general, serán diferentes de los coeficientes de descomposición en la base $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_m$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 &= b'_1\mathbf{q}_1 + b'_2\mathbf{q}_2 + \dots + b'_m\mathbf{q}_m, \\ \mathbf{P}_j &= a'_{1j}\mathbf{q}_1 + a'_{2j}\mathbf{q}_2 + \dots + a'_{mj}\mathbf{q}_m \quad (j = 1, 2, \dots, n). \end{aligned}$$

En este caso, la matriz de la descomposición tiene la siguiente notación

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \ldots & \mathbf{P}_j & \ldots & \mathbf{P}_n \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccccc} b'_1 & a'_{11} & \ldots & a'_{1j} & \ldots & a'_{1n} \\ b'_2 & a'_{21} & \ldots & a'_{2j} & \ldots & a'_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b'_i & a'^{1}_{i} & \ldots & a'_{ij} & \ldots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ b'_m & a'_{m1} & \ldots & a'_{mj} & \ldots & a'_{mn} \end{array} \right\| \tag{6}$$

Como se sabe, los elementos de la matriz (6) se determinan por medio de los elementos de la matriz (4) y de la determinante (5) con las fórmulas siguientes:

$$b'_i = \frac{\Delta_i^\circ}{\Delta}, \qquad a'_{ij} = \frac{\Delta_i^j}{\Delta}, \tag{7}$$

en las que

$$\Delta_i^0 = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1,\,i-1} & b_1 & q_{1,\,i+1} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & \cdots & q_{2,\,i-1} & b_2 & q_{2,\,i+1} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{m,\,i-1} & b_m & q_{m,\,i+1} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_i^j = \begin{vmatrix} q_{11} & \cdots & q_{1,\,i-1} & a_{1j} & q_{1,\,i+1} & \cdots & q_{1m} \\ q_{21} & \cdots & q_{2,\,i-1} & a_{2j} & q_{2,\,i+1} & \cdots & q_{2m} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ q_{m1} & \cdots & q_{m,\,i-1} & a_{mj} & q_{m,\,i+1} & \cdots & q_{mm} \end{vmatrix}$$

$$(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m; \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

A continuación, al mismo tiempo de denominar estas determinantes con Δ, Δ_i^0, Δ_i^j, emplearemos a veces las designaciones siguientes:

$$\Delta = (\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2\ \ldots\ \mathbf{q}_m); \qquad \Delta_i^0 = (\mathbf{q}_1\ \ldots\ \mathbf{q}_{i-1}\mathbf{P}_0\mathbf{q}_{i+1}\ \ldots\mathbf{q}_m);$$
$$\Delta_i^j = (\mathbf{q}_1\ \ldots\ \mathbf{q}_{i-1}\mathbf{P}_j\mathbf{q}_{i+1}\ \ldots\ \mathbf{q}_m).$$

Examinemos un ejemplo de determinación de la descomposición de un sistema dado al pasar a una base nueva.

Supongamos que en la base $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, los vectores $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ tienen unas descomposiciones que se determinan por la matriz

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6
\end{array}
$$
$$
\left\| \begin{array}{ccccccc}
5 & 1 & 0 & 0 & -3 & 4 & -1 \\
3 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
2 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1
\end{array} \right\|
$$

Puesto que la determinante compuesta de los componentes de los vectores $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$

$$
\Delta = (\mathbf{P}_4,\ \mathbf{P}_5,\ \mathbf{P}_6) = \left| \begin{array}{ccc} -3 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 1 \end{array} \right| = -18
$$

es diferente de cero, los vectores $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ formarán una base.

Encontremos la descomposición de los vectores $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$ en la base $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$. Empleando las fórmulas (7), obtendremos

$$
\frac{1}{\Delta}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccc}
\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3
\end{array} \\
\left\| \begin{array}{cccc}
(\mathbf{P}_0\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_2\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_3\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), \\
(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_0\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_1\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_2\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_3\mathbf{P}_6), \\
(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_0), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_1), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_2), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_3),
\end{array} \right.
\end{array}
$$
$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccc}
\mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6
\end{array} \\
\left. \begin{array}{ccc}
(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_5\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_6\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6) \\
(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_4\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_6\mathbf{P}_6) \\
(\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_5), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_5), & (\mathbf{P}_4\mathbf{P}_5\mathbf{P}_6)
\end{array} \right\|
\end{array}
$$

Realizando las transformaciones correspondientes, obtendremos la matriz que representa la descomposición de estos vectores en la base $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$, $\mathbf{P}_6$:

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 & \mathbf{P}_6
\end{array}
$$
$$
\left\| \begin{array}{ccccccc}
\frac{8}{9} & -\frac{1}{6} & \frac{5}{18} & \frac{7}{18} & 1 & 0 & 0 \\
-\frac{11}{9} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18} & -\frac{5}{18} & 0 & 1 & 0 \\
-\frac{23}{9} & \frac{1}{6} & -\frac{11}{18} & -\frac{1}{18} & 0 & 0 & 1
\end{array} \right\|
$$

Como es sabido, se llama *producto escalar* de dos vectores **P** y **Q** la expresión definida por la fórmula

$$(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_i b_i + \dots + a_m b_m,$$

donde a_i, b_i son los componentes de los vectores **P** y **Q**. Los vectores **P** y **Q** se llaman *ortogonales* si su producto escalar es igual a cero. Ya que se puede considerar a una matriz de un orden de $m \times n$ como un vector $(m \times n)$-dimensional, la llamaremos producto escalar de las matrices

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & \dots & a_{1n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{21} & a_{22} & \dots & & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{ij} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & \dots & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|$$

y

$$B = \left\| \begin{matrix} b_{11} & b_{12} & \dots & & \dots & b_{1n} \\ & & & \vdots & & \\ b_{21} & b_{22} & \dots & & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & b_{ij} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & \dots & \dots & b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

a la suma algebraica de todos los elementos de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} a_{11}\ b_{11} & a_{12}\ b_{12} & \dots & & \dots & a_{1n}\ b_{1n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{21}\ b_{21} & a_{22}\ b_{22} & \dots & & \dots & a_{2n}\ b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & a_{ij} b_{ij} & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1}\ b_{m1} & a_{m2}\ b_{m2} & \dots & & \dots & a_{mn}\ b_{mn} \end{matrix} \right\|$$

y la designaremos $(A \cdot B)$.

§ 2. HIPERPLANO Y SEMIESPACIO

Por la Geometría Analítica sabemos que a la ecuación lineal

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 = C \tag{8}$$

en un espacio tridimensional le corresponde el plano normal al vector $\mathbf{A}(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3)$.

Reduzcamos la ecuación (8) a la forma

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 1. \tag{9}$$

El plano que corresponde a esta ecuación, corta en los ejes de las coordenadas los segmentos a_1, a_2, a_3 (fig. 4).

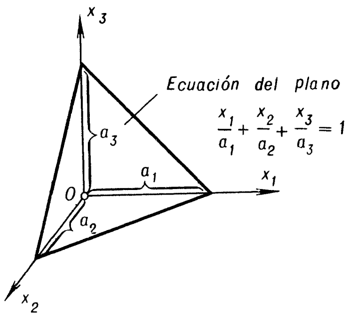

Fig. 4

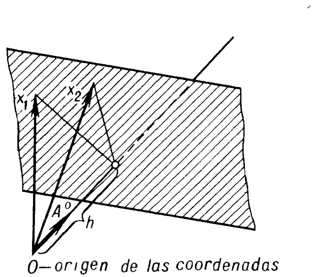

Fig. 5

La ecuación de una superficie plana en un espacio tridimensional puede ser, además, representada en forma vectorial $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) = h$, donde $\mathbf{A}^\circ$ es un vector de longitud igual a uno (unitario), normal al plano; $\mathbf{X}$, el vector corriente que une el origen de las coordenadas con cualquier punto perteneciente al plano. Aquí $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X})$ es el producto escalar de la multiplicación de los vectores $\mathbf{A}^\circ$ y $\mathbf{X}$ que tiene un valor igual a la proyección h del vector $\mathbf{X}$ en la dirección determinada por el vector $\mathbf{A}^\circ$. El valor de h es igual a la distancia entre el origen de las coordenadas y el plano. El plano pasará por el origen de las coordenadas cuando $h = 0$.

Cualquier vector $\mathbf{X}$ que una el origen de las coordenadas con un punto del plano tendrá la misma proyección h en la dirección $\mathbf{A}^\circ$ (fig. 5).

Análogamente llamáremos *hiperplano*, o sencillamente plano en el espacio m-dimensional, al conjunto de todos los puntos $(x_1, x_2, ..., x_m)$ que satisfagan la ecuación

$$A_1x_1 + A_2x_2 + ... + A_mx_m = C. \tag{8'}$$

Convendremos en decir que este hiperplano es normal al vector $\mathbf{A}(A_1, A_2, ..., A_m)$. Diremos también que la ecuación

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + ... + \frac{x_m}{a_m} = 1 \tag{9'}$$

corresponde al hiperplano que corta, en los ejes de coordenadas, segmentos de longitud igual a $a_1, a_2, ..., a_m$.

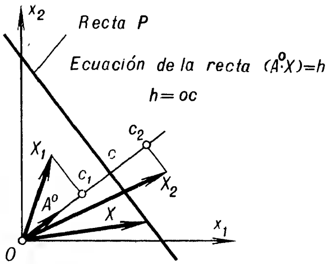

Fig. 6

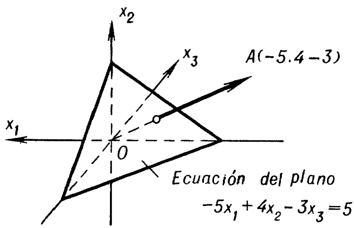

Fig. 7

Por último, la ecuación vectorial $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) = h$ define en el espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ un hiperplano normal al vector unitario $\mathbf{A}^\circ$ que se encuentra a una distancia h del origen de las coordenadas.

Una recta en un plano divide a éste en dos partes, cada una de las cuales se llama *semiplano.* En la fig. 6 se ve que una recta divide un plano en dos semiplanos. Añadamos que la proyección Oc_1 de los vectores $\mathbf{X}_1$, cuyos extremos se encuentran en uno de los semiplanos, son menores que $h = Oc$, y la de los vectores $\mathbf{X}_2$, cuyos extremos se encuentran en el otro semiplano, son mayores que h.

Un plano en un espacio tridimensional también divide todo el espacio en dos partes, cada una de las cuales se denomina *semiespacio.*

Por analogía, diremos que un hiperplano en un espacio m-dimensional divide este espacio en dos partes cada una de las cuales se denomina *semiespacio.*

Supongamos que un hiperplano en el espacio $\mathbf{P}^{(m)}$ se expresa por medio de la ecuación $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) = h$. Entonces, para los puntos M de uno de los semiespacios, las proyecciones que representan sus vectores $\mathbf{X}$ en la dirección $\mathbf{A}^\circ$ serán menores que h, y para los puntos del otro semiespacio, mayores que h. Así diremos que uno de los semiespacios es el conjunto de vectores $\mathbf{X}$ para los que se cumple la desigualdad $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) < h$, y para los vectores del otro semiespacio, la $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) > h$. El propio hiperplano $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) = h$ puede ser agregado a uno de los semiespacios. Entonces todo el conjunto de puntos del espacio m-dimensional se dividirá en dos partes: la de los puntos para los que $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) \leqslant h$ y la de los puntos para los que $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{X}) > h$ (o bien, en otro caso $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) < h$ y $(\mathbf{A}^\circ \cdot \mathbf{X}) \geqslant h$).

Ejemplo 1. Dado el semiespacio $-5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leqslant 5$ determinar si le pertenece el punto (0, 0, 0).

Para obtener la respuesta es suficiente colocar los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ en la desigualdad. Tendremos $-5 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 < 5$, de lo que se deduce que el punto (0, 0, 0) pertenece realmente al semiespacio $-5x_1 + 4x_2 - 3x_3 \leqslant 5$.

El plano $-5x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 5$ es perpendicular al vector $\mathbf{A}(-5, 4, -3)$ (fig. 7).

Ejemplo 2. Determinar si el punto de un espacio 9-dimensional $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $x_3 = 3$, $x_4 = -7$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 9$, $x_8 = 1$, $x_9 = 0$ pertenece al semiespacio $4x_1 + 5x_2 - 7x_3 + x_5 - 2x_6 + 12x_7 - 3x_9 \leqslant 11$. Colocando las coordenadas de este punto en la desigualdad, obtendremos $4 \cdot 0 + 4 \cdot 5 - 3 \cdot 7 - 7 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 2 \cdot 0 + 9 \cdot 12 + 0 \cdot 1 - 3 \cdot 0 = 107 > 11$. En consecuencia este punto no pertenece al semiespacio dado.

§ 3. POLIEDROS CONVEXOS

Se llama cuerpo convexo a un cuerpo que contenga junto con dos cualesquiera de sus puntos, todo el segmento rectilíneo que los une.

Ejemplos de cuerpos convexos son un círculo, una esfera, un cubo, un ángulo formado por dos líneas que salen de un punto (fig. 8), etc.

Supongamos que los puntos x e y son comunes para los cuerpos convexos A y B (fig. 9). Entonces x e y pertenecen al cuerpo A y por eso el segmento que une los puntos x e y también pertenece a A. Por analogía, este mismo segmento pertenece también al cuerpo B. Por consiguiente él también pertenece a la parte común de los cuerpos A y B. Esto significa que *la parte común o la intersección de los cuerpos convexos es un cuerpo convexo.*

En una superficie plana tomemos un polígono que se encuentre siempre a un lado de cada recta que forma este polígono. Este polígono, como se ve en la fig. 10, *a*, es *convexo*. Realmente, dos puntos cualesquiera x e y de este polígono le pertenecen junto con el segmento que les une. Al contrario, el polígono representado en la fig. 10, *b* no se encuentra por entero en un lado de cada una de las rectas que forman este polígono. Un polígono tal *no es convexo.*

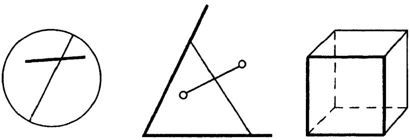

Fig. 8

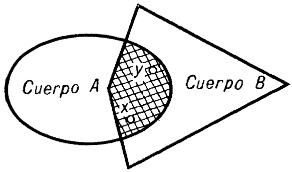

Fig. 9

Tomemos un punto cualquiera M que no pertenezca a un polígono convexo (fig. 11, *a*). Siempre se puede trazar una recta PQ tal que el punto M y el polígono queden a diferentes lados de ella. Se puede construir para un polígono convexo un conjunto de rectas tales que cada una de ellas tenga por lo menos un punto común con el polígono y que todo el polígono quede a un lado de cada una de ellas. Estas rectas se llaman *soportes*.

En el jemplo de la fig. 11, *b* las rectas AD, CB, DB y FN son soportes. La recta soporte puede tener una parte común con el polígono convexo. Esta puede ser un punto o un segmento.

En un espacio tridimensional, un cuerpo limitado por planos que se encuentra por entero a un lado de cada plano que contiene una de sus caras, es convexo y se llama *poliedro convexo*. Ejemplos de tales cuerpos son un diamante poliédrico, un prisma, etc. El plano que tiene por lo menos un punto común con el poliedro y le deja a todo él a un lado de si se llama *plano soporte* de un poliedro convexo. El plano soporte puede tener con el poliedro una parte común que puede ser un punto (llamado vértice del poliedro), un segmento (llamado arista), o un polígono (llamado cara). Está claro que por cada vértice o arista del poliedro se puede trazar una cantidad infinita de planos soportes, mientras que por cada cara puede pasar sólo uno.

Anteriormente nos convencimos de que la parte común de varios cuerpos convexos es un cuerpo convexo. Por eso, *la parte común de varios poliedros convexos es también un cuerpo convexo.* Ya que el plano es un cuerpo convexo, la intersección de un poliedro con un plano también es un cuerpo convexo que

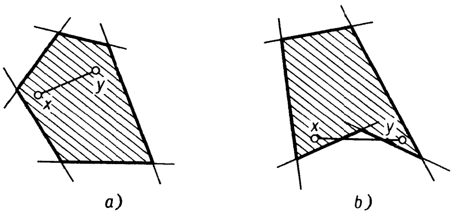

Fig. 10

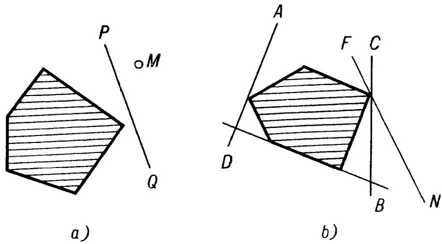

Fig. 11

puede ser un punto, un segmento o un polígono convexo. Las propiedades de los cuerpos convexos de los espacios multidimensionales se pueden examinar análogamente a las propiedades de los cuerpos convexos del espacio tridimensional. Algunas de estas propiedades se estudiarán en los §§ 4 y 5.

§ 4. SISTEMA DE DESIGUALDADES LINEALES

Supongamos que en un espacio bidimensional se dan n desigualdades de la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \leqslant b_i \qquad (i = 1, 2, ..., n)^{*)} \tag{10}$$

*) Cualquier desigualdad de la forma $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \geqslant b_i$ después de multiplicar sus dos miembros por -1 se convierte en la forma (10).

Cada una de estas desigualdades determina uno de los dos semiplanos que tienen por línea límite la recta $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$. La recta-límite $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ es normal al vector $\mathbf{A}_i\,(a_{i1},\ a_{i2})$.

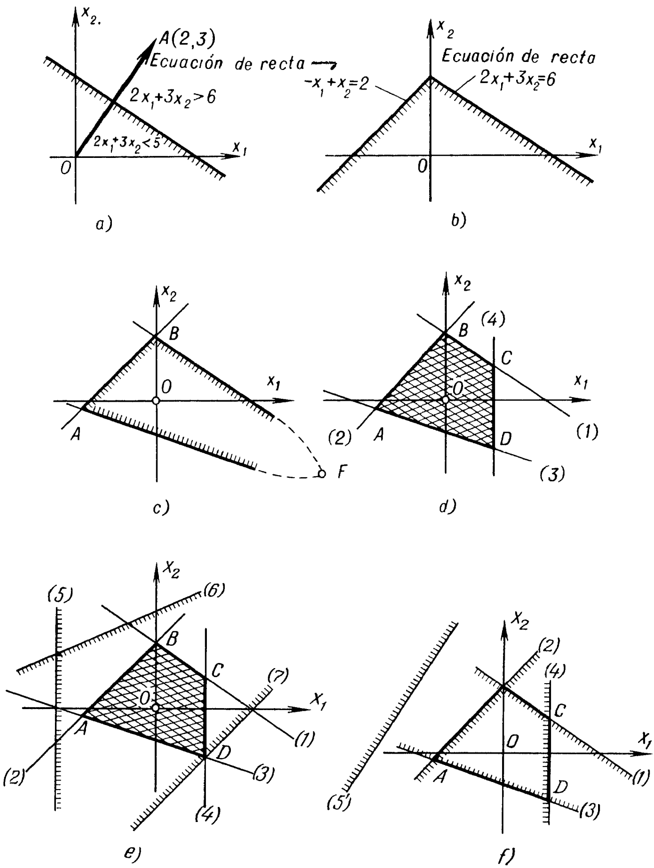

Fig. 12

Llamaremos solución del sistema dado a cualquier par de números $(x_1,\ x_2)$ que satisfaga todas las desigualdades del sistema (10). En otras palabras, cualquier punto del plano $(x_1,\ x_2)$ cuyas coordenadas satisfagan el sistema (10), es una solución.

Veamos algunos ejemplos:

1. La desigualdad

$$\frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} \leqslant 1 \quad \text{ó} \quad 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6$$

determina un semiplano (fig. 12, *a*). A esta desigualdad le satisface cualquier punto que se encuentre en la parte rayada del plano. La recta-límite se expresa con la ecuación $2x_1 + 3x_2 = 6$ y es normal al vector **A** (2, 3).

2. Dos desigualdades

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6 \quad \text{y} \quad -x_1 + x_2 \leqslant 2$$

determinan una parte del plano, como se muestra en la fig. 12, *b*.

3. A las tres desigualdades

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -x_1 - 3x_2 &\leqslant 3 \end{aligned}$$

les satisface el conjunto de puntos del plano que forman el triángulo de las soluciones *AFB* (fig. 12, *c*).

4. A las cuatro desigualdades

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \tag{1}$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2, \tag{2}$$
$$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \tag{3}$$
$$x_1 \leqslant \frac{3}{2} \tag{4}$$

les corresponde el conjunto de puntos del plano que forma el polígono de las soluciones *ABCD* (fig. 12, *d*).

5. A las siete desiguladades

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \tag{1}$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2, \tag{2}$$
$$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \tag{3}$$
$$2x_1 \leqslant 3, \tag{4}$$
$$-x_1 \leqslant 3, \tag{5}$$
$$-3x_1 + 7x_2 \leqslant 21, \tag{6}$$
$$x_1 - 3x_2 \leqslant 3 \tag{7}$$

les corresponde el mismo conjunto de puntos que en el ejemplo 4. Las desigualdades (5), (6) y (7) pueden ser excluidas sin alteración del conjunto de soluciones. En este caso, las desigualdades (5) y (6) definen las rectas-límite que no tienen puntos comunes con el polígono *ABCD*. La recta (7) tiene un punto común con el polígono y es soporte (fig. 12, *e*).

6. El sistema de desigualdades

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \tag{1}$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 2, \tag{2}$$

$$-x_1 - 3x_2 \leqslant 3, \tag{3}$$

$$2x_1 \leqslant 3, \tag{4}$$

$$-3x_1 - 2x_2 \leqslant -12, \tag{5}$$

no tiene ni una solución. Desde el punto de vista de la Geometría, esto quiere decir que no existe ni un punto cuyas coordenadas satisfagan todas las desigualdades (fig. 12, *f*).

El estudio de estos ejemplos nos lleva a las siguientes conclusiones:

1. Un sistema de desigualdades con dos variables puede ser *compatible*. Entonces existe por lo menos un punto del plano que pertenece a todos los semiplanos determinados por el sistema dado de desigualdades. El conjunto de todos los puntos tales puede ser un semiplano, un polígono limitado o ilimitado*), una recta o su segmento y, por fin, un punto. El conjunto de puntos que satisfacen el sistema de desigualdades es un cuerpo convexo.

2. Un sistema de desigualdades puede ser incompatible. En este caso, no existe ni un punto del plano que satisfaga simultáneamente todas las desigualdades del sistema.

En un espacio tridimensional, un sistema de n desigualdades puede escribirse, sin limitarle la generalidad, en la forma

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 \leqslant b_i \quad (i = 1, 2, ..., n). \tag{11}$$

Como ya sabemos, cada una de las desigualdades (11) define un semiespacio con el plano límite

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i.$$

*) Pueden haber sistemas de desigualdades a los que correspondan figuras (poliedros) no limitados por sus aristas y caras en alguna de las direcciones. Estos sistemas de desigualdades también responden a esta propiedad.

El conjunto de desigualdades (11) puede ser compatible. En este caso, existe cierto conjunto de puntos del espacio tridimensional que satisfacen el sistema de desigualdades. Este conjunto es un conjunto convexo y puede representarse en forma de un semiespacio, un poliedro, un plano, un polígono, una recta o, por último, un punto.

En el caso de la compatibilidad, entre las desigualdades del sistema puede haber desigualdades "excesivas", que al ser eliminadas no modifican el conjunto de las soluciones del sistema de desigualdades dado. Estas desigualdades "excesivas" pueden ser de dos clases. Las de la primera clase son aquellas cuyos planos-límite no tienen intersección con el conjunto de todas las soluciones del sistema. Las de la segunda clase son las desigualdades cuyos planos-límite son soportes para el conjunto de soluciones.

Puede resultar que en un espacio de tres dimensiones no haya ningún punto que satisfaga simultáneamente todas las desigualdades. En este caso, el sistema de desigualdades se llama incompatible.

Supongamos que en un espacio m-dimensional se da el sistema de desigualdades

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m \leqslant b_i, \qquad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad (12)$$

Por analogía con el espacio tridimensional diremos que cada una de las desigualdades (12) define en el espacio m-dimensional un semiespacio con el plano-límite

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{im}x_m = b_i.$$

Si en el espacio m-dimensional existe por lo menos un punto $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ que satisface simultáneamente todas las desigualdades, el sistema (12) se llama compatible. Al conjunto de todos los puntos tales lo llamaremos "el poliedro de las soluciones".

Supongamos que en un espacio m-dimensional se dan dos puntos $M'(x'_1, x'_2, \dots, x'_m)$ y $M''(x''_1, x''_2, \dots, x''_m)$. El conjunto de puntos $M(x_1, x_2, \dots, x_m)$ cuyas coordenadas satisfacen las condiciones

$$\begin{aligned} x_1 &= x'_1 + t(x''_1 - x'_1), \\ x_2 &= x'_2 + t(x''_2 - x'_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m &= x'_m + t(x''_m - x'_m) \end{aligned}$$

al variar el parámetro t de 0 a 1, se llama segmento que une los puntos M' y M''. El "poliedro de las soluciones", siendo la intersección de los semiespacios, es un conjunto convexo. Eso quiere decir que junto con los puntos M' y M'' también le pertenecen todos los puntos del segmento que los une.

Las desigualdades que pueden ser eliminadas del sistema (12), sin modificar el conjunto de sus soluciones, se llaman dependientes o "excesivas". Al eliminar consecutivamente del sistema dado una desigualdad de esta clase tras otra, obtendremos un subsistema de desigualdades con un conjunto de soluciones que coincidirá con el conjunto de soluciones del sistema inicial.

La eliminación de las desigualdades "excesivas" es un proceso muy complicado y trabajoso. Una de las particularidades de los métodos de programación lineal consiste en que para calcular el valor mínimo (máximo) de la función lineal en el poliedro no es imprescindible eliminar las desigualdades "excesivas". Si al sistema de desigualdades (12) no le satisface ningún punto del espacio m-dimensional, este sistema se llama incompatible.

§ 5. EL VALOR MÍNIMO Y MÁXIMO DE LA FORMA LINEAL EN EL POLIEDRO

Examinemos un sistema compatible de ecuaciones lineales con dos variables. Consideremos que ya hemos eliminado todas las desigualdades "excesivas" de la 1-*a* y de la 2-*a* clase, y así hemos seleccionado el polígono de las soluciones en su "forma pura" (fig. 13). Supongamos que, además, se da la función lineal de dos variables

$$f = c_1x_1 + c_2x_2.$$

Encontremos en el conjunto de puntos (x_1, x_2) del polígono de las soluciones tales puntos que lleven la función lineal $f = c_1x_1 + c_2x_2$ al valor mínimo y máximo. Examinemos el conjunto de todos los puntos (x_1, x_2) del plano en cada uno de los cuales la función $f = c_1x_1 + c_2x_2$ toma un valor fijo $(f = f_1)$. El conjunto de tales puntos es la recta $c_1x_1 + c_2x_2 = f_1$. Esta recta, como se ha señalado en el parágrafo anterior, es normal al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2)$ que sale del origen de las coordenadas. Tracemos una recta F (fig. 13) normal al vector $\mathbf{C}$ y desplacémosla paralelamente a sí misma en la dirección positiva del vector $\mathbf{C}$. Supongamos que en su desplazamiento, la recta F se encuentra por primera vez con el polígono en el vértice A. En esta posición F' la recta F se hace soporte. Al continuar el desplazamiento en esa misma dirección, la recta F pasará por el vértice B y se hará también recta-soporte. Puesto que el sentido del vector $\mathbf{C}(c_1, c_2)$ es la dirección del máximo incremento de la función lineal $f = c_1x_1 + c_2x_2$, entonces entre todos los valores que toma la función lineal f en el polígono de las soluciones, esta función tomará en la recta-soporte F' su valor mínimo y en la recta-soporte F'', su valor máximo.

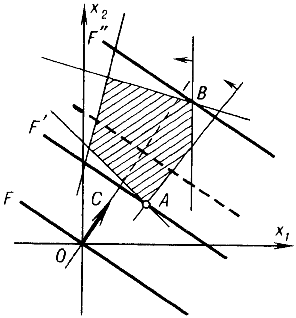

Fig. 13

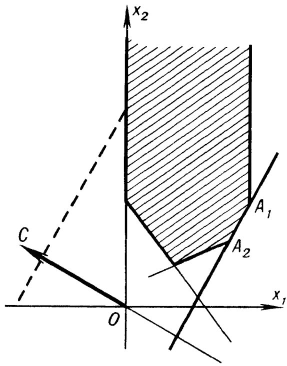

Fig. 14

Así que los valores mínimo y máximo de la función lineal $f = c_1x_1 + c_2x_2$ en el polígono de las soluciones se alcanzarán en los puntos de intersección de este polígono con las rectas-soportes normales al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2)$. La intersección de la recta-soporte con el polígono de las soluciones puede ser un solo punto*) (un vértice del polígono) o un conjunto innumerable de puntos (en este caso el conjunto es un lado del polígono).

En la fig. 14 se presenta el caso en el que la función lineal f alcanza el valor mínimo en cada uno de los puntos del segmento A_1, A_2, mientras que el valor máximo, en los puntos del polígono que están infinitamente alejados.

*) Puede resultar que este punto se encuentre en el infinito.

Por analogía, una función lineal de tres variables $f = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3$ toma un valor constante en un plano normal al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2, c_3)$. El sentido de $\mathbf{C}$ es la dirección del máximo incremento de la función f (fig. 15). Los valores máximo y mínimo de esta función en el poliedro de las soluciones también se alcanzan en los puntos de intersección de este poliedro con los planos-soportes normales al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2, c_3)$; aquí la función f alcanza en uno de los planos-soportes el valor mínimo y en otro, el máximo. La intersección de un poliedro con un plano-soporte puede ser un punto

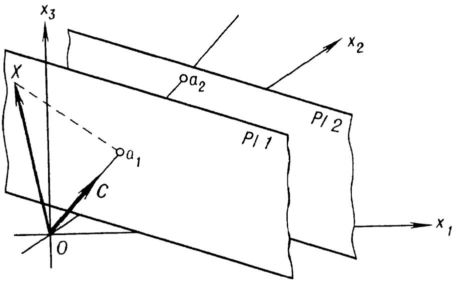

Fig. 15

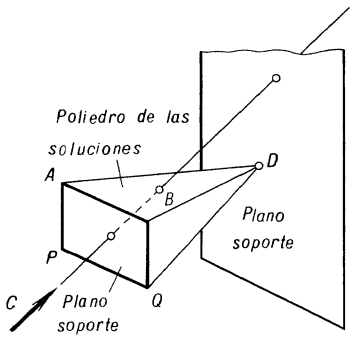

Fig. 16

(un vértice del poliedro) o un conjunto innumerable de puntos (este conjunto será un arista o un lado del poliedro).

Por ejemplo, en la fig. 16 aparece el caso en el que f alcanza su valor mínimo en cada uno de los puntos del lado $ABQP$ y su valor máximo, en el punto D.

La generalización del concepto de las funciones lineales de dos o tres variables es la función $f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ de n variables reales $x_1, x_2, ..., x_n$, llamada *forma lineal.* Aquí c_1, c_2, ..., c_n son números reales. Fijando valores de la forma lineal, o sea, $f = f_1$; $f = f_2$; ...; $f = f_q$ se definen en un espacio n-dimensional los hiperplanos

$$\begin{gathered} f_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ f_2 = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_q = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \end{gathered}$$

que son normales al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2, ..., c_n)$. Designemos con $f_{\text{mín}}$ el valor mínimo de la forma

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$$

en el poliedro de las soluciones, y con $f_{\text{máx}}$, el valor máximo. Puesto que el vector **C** determina la dirección del incremento máximo de la forma lineal f, entonces cuando las funciones $f' < f_{\text{mín}}$ y $f' > f_{\text{máx}}$, los hiperplanos correspondientes $f' = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$ no tienen intersección con el poliedro de las soluciones. Por otra parte, cada hiperplano $f'' = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$, para el que $f_{\text{mín}} \leqslant f'' \leqslant f_{\text{máx}}$, tiene puntos comunes con el poliedro de las soluciones. El conjunto de puntos $M(x_1, x_2, ..., x_n)$ en los que la forma lineal alcanza el valor mínimo es la intersección del poliedro de las soluciones con el hiperplano soporte $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = f_{\text{mín}}$, normal al vector $\mathbf{C}(c_1, c_2, ..., c_n)$. Análogamente, f alcanza el valor máximo en los puntos de intersección del poliedro con el hiperplano-soporte $c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = f_{\text{máx}}$ que es también normal al vector **C**.

La intersección del poliedro de las soluciones con un hiperplano-soporte será un vértice, una arista o un "lado" del poliedro.

Así que el valor óptimo de la forma lineal en el poliedro de las soluciones se alcanza en los puntos entre los cuales siempre se encuentra aunque sea uno de los vértices. Por eso para calcular la solución óptima es suficiente encontrar el vértice del poliedro en el que la forma lineal alcanza el valor mínimo (máximo).

§ 6. REDUCCIÓN DE DESIGUALDADES A IGUALDADES AL RESOLVER PROBLEMAS DE PROGRAMACIÓN LINEAL

Se da un sistema de m desigualdades lineales con n variables:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n \leqslant b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m, \end{array}\right\} \qquad (12)$$

que determina en un espacio n-dimensional un poliedro de las soluciones. Simultáneamente a este sistema de desigualdades veamos un sistema de m ecuaciones algebraicas lineales con $n + m$ variables:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + \mu_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + \mu_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + \mu_i = b_i, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + \mu_m = b_m, \end{array}\right\} \qquad (12')$$

Demostremos que a cualquier solución x_1°, x_2°, ..., x_n° del sistema de desigualdades (12) le corresponde una determinada solución x_1°, x_2°, ..., x_n°; μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (12′), teniendo en cuenta que las variables complementarias (variables de holgura) satisfacen la condición de que $\mu_1^\circ \geqslant 0$, $\mu^\circ{}_2 \geqslant 0$, ..., $\mu_m^\circ \geqslant 0$. Realmente, si x_1°, x_2°, ..., x_n° es la solución del sistema (12), tienen lugar las desigualdades:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \dots + a_{1n}x_n^\circ \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1^\circ + a_{22}x_2^\circ + \dots + a_{2n}x_n^\circ \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1^\circ + a_{i2}x_2^\circ + \dots + a_{in}x_n^\circ \leqslant b_n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \dots + a_{mn}x_n^\circ \leqslant b_m. \end{array}$$

Designemos

$$\left.\begin{array}{l}
\mu_1^\circ = b_1 - (a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ), \\
\mu_2^\circ = b_2 - (a_{21}x_1^\circ + a_{22}x_2^\circ + \ldots + a_{2n}x_n^\circ), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu_i^\circ = b_i \; - (a_{i1}x_1^\circ + a_{i2}x_2^\circ + \ldots + a_{in}x_n^\circ), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mu^\circ{}_m = b_m - (a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ).
\end{array}\right\} \quad (12'')$$

Entonces, en primer lugar, $\mu_1^\circ \geqslant 0$, $\mu_2^\circ \geqslant 0$, ..., $\mu_m^\circ \geqslant 0$; en segundo lugar, como se deduce de (12″) el sistema de números x_1°, x_2°, ..., x_n°; μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° es la solución del sistema de ecuaciones algebraicas lineales (12′).

Demostremos, a la inversa, que a cualquier solución x_1°, x_2°, ..., x_n°; μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° del sistema de ecuaciones (12′), que satisfaga la condición $\mu_1^\circ \geqslant 0$, $\mu_2^\circ \geqslant 0$, ..., $\mu_m^\circ \geqslant 0$, le corresponde una solución determinada del sistema de desigualdades (12). En efecto, como el sistema de números x_1°, x_2°, ..., x_n°; μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° es la solución del sistema (12′), podemos escribir:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ + \mu_1^\circ = b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ + \mu_m = b_m.
\end{array}$$

De acuerdo a las suposiciones hechas los números μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° son no negativos, entonces se cumplen las desigualdades:

$$\begin{array}{l}
a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \ldots + a_{1n}x_n^\circ \leqslant b_1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \ldots + a_{mn}x_n^\circ \leqslant b_m,
\end{array}$$

o sea, el sistema de números x_1°, x_2°, ..., x_n° es la solución del sistema de desigualdades (12).

De este modo se ha establecido la existencia de una relación recíproca entre el conjunto de todas las soluciones x_1°, x_2°, ..., x_n° del sistema (12) y el conjunto de las soluciones x_1°, x_2°, ..., x_n°; μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° del sistema (12′) en los que se encuentran los mismos valores. Observemos que las variables complementarias μ_1°, μ_2°, ..., μ_m° son no negativas. O sea, el problema de la resolución de un sistema de desigualdades lineales (12) se reduce a la resolución de un sistema correspondiente de ecuaciones lineales (12′).

En los problemas de programación lineal nos interesarán soluciones de sistemas de desigualdades que satisfagan la condición $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, ..., $x_n \geqslant 0$. Estas soluciones se llaman no negativas. Por eso, como la resolución de un sistema de desigualdades se reduce a la resolución de un sistema correspondiente de ecuaciones lineales algebraicas, una de las tareas más importantes de la programación lineal es el cálculo de las soluciones no negativas de un sistema de ecuaciones lineales.

Ejemplo. Calcular la solución no negativa del sistema de desigualdades:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 2, \\ -x_1 - 3x_2 &\leqslant 3. \end{aligned}$$

Introduciendo las variables complementarias $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, $\mu_3 \geqslant 0$, obtendremos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + \mu_1 \qquad\qquad &= 6, \\ -x_1 + x_2 \qquad + \mu_2 \qquad &= 2, \\ -x_1 - 3x_2 \qquad\qquad + \mu_3 &= 3. \end{aligned}$$

A cualquier solución no negativa de este sistema de ecuaciones le corresponde una determinada solución no negativa del sistema inicial de desigualdades y viceversa. Por ejemplo, a la solución no negativa $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 2$, $\mu_3 = 7$ del sistema de ecuaciones le corresponde la solución no negativa $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ del sistema de desigualdades inicial.

Observemos que si el sistema de desigualdades es incompatible en la región de las soluciones no negativas, el sistema correspondiente de ecuaciones lineales no tiene ni una solución no negativa.

Es sabido que el valor mínimo (máximo) de la forma lineal, en un poliedro determinado por un sistema de desigualdades, se alcanza en un determinado vértice del poliedro de las soluciones. Se puede demostrar que a cada vértice del poliedro de las soluciones le satisface una solución no negativa del sistema correspondiente de ecuaciones algebraicas lineales en el que por lo menos una variable complementaria es igual a cero. Las variables complementarias $\mu_1 \geqslant 0$, $\mu_2 \geqslant 0$, ..., $\mu_m \geqslant 0$ que se introducen en el sistema de desigualdades se pueden explicar en un sentido geométrico.

Examinemos el poliedro de las soluciones del sistema de desigualdades:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \leqslant b_1$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \leqslant b_m$$

Supongamos que existe una de las soluciones no negativas x_1°, $x_2^\circ, \dots, x_n^\circ$ del sistema de desigualdades. A esta solución le corresponde el punto $M(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ que pertenece al poliedro de las soluciones.

Supongamos que con h_i se denomina la distancia entre el punto M y el i-ésimo hiperplano. Los valores de las variables complementarias

$$\mu_1^\circ = b_1 - (a_{11}x_1^\circ + a_{12}x_2^\circ + \dots + a_{1n}x_n^\circ),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_m^\circ = b_m - (a_{m1}x_1^\circ + a_{m2}x_2^\circ + \dots + a_{mn}x_n^\circ)$$

serán proporcionales a las distancias entre el punto $M(x_1^\circ, x_2^\circ, \dots, x_n^\circ)$ y los hiperplanos-límites:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

Realmente, según la definición, la distancia entre el punto M y el i-ésimo hiperplano es igual a

$$h_i = \frac{b_1 - (a_{i1}x_1^\circ + a_{i2}x_2^\circ + \dots + a_{in}x_n^\circ)}{\sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2}}$$

$$(i = 1, 2, 3, \dots, m),$$

de lo que se deduce que:

$$\mu_1 = h_1 \sqrt{a_{11}^2 + a_{12}^2 + \dots + a_{in}^2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_i = h_i \sqrt{a_{i1}^2 + a_{i2}^2 + \dots + a_{in}^2},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\mu_m = h_m \sqrt{a_{m1}^2 + a_{m2}^2 + \dots + a_{mn}^2}.$$

CAPÍTULO II

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA GENERAL DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal es una disciplina dentro de las matemáticas en la que se estudian los métodos de resolución del siguiente problema: se da un sistema de m ecuaciones algebraicas lineales que contienen n variables:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right\} \qquad (13)$$

y la forma lineal f de estas mismas variables

$$f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n \qquad (14)$$

Hay que encontrar entre las soluciones del sistema (13) una solución no negativa en la que la forma lineal f tome su valor mínimo *). A esta solución la llamaremos la solución *óptima* de este problema.

En este capítulo se estudia un método de cálculo de una de las soluciones no negativas del sistema (13) y uno de los algoritmos de resolución del problema general de la programación lineal.

§ 7. TRANSFORMACIONES IDÉNTICAS DE UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Se da un sistema (13) que contiene r ecuaciones linealmente independientes y resuelto con relación a r variables. Sin limitar la generalidad, se puede considerar que el sistema está resuelto

*) El problema del cálculo de una solución no negativa en la que f obtiene su valor máximo se formula en forma análoga.

respecto a las primeras r variables de las primeras r ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}
x_1 = b_1 - (a_{1r+1}x_{r+1} + a_{1r+2}x_{r+2} + \dots + a_{1n}x_n), \\
x_2 = b_2 - (a_{2r+1}x_{r+1} + a_{2r+2}x_{r+2} + \dots + a_{2n}x_n), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_i = b_i - (a_{ir+1}x_{r+1} + a_{ir+2}x_{r+2} + \dots + a_{in}x_n), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x_r = b_r - (a_{rr+1}x_{r+1} + a_{rr+2}x_{r+2} + \dots + a_{rn}x_n).
\end{array}\right\} \quad (15)$$

En una anotación abreviada el sistema de ecuaciones (15) toma la forma

$$x_i = b_i - \left(\sum_{j=r+1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1\ 2, \dots, r \qquad (15')$$

Supongamos que los miembros libres b_i en las ecuaciones (15) son no negativos.

Cada una de las ecuaciones del sistema (15) se puede conceptuar como una proyección de la ecuación vectorial

$$\sum_{i=1}^{r} x_i\mathbf{P}_i = \mathbf{P}_0 - \left(\sum_{j=r+1}^{n} x_j\mathbf{P}_j\right) \qquad (16)$$

en los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$, donde $\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1(1, 0, \dots, 0)$; $\mathbf{P}_2 = \mathbf{P}_2(0, 1, \dots, 0)$ ...; $\mathbf{P}_r = \mathbf{P}_r(0, 0, \dots, 1)$. Los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$ forman una base en un espacio r-dimensional. La matriz de la descomposición de los vectores $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$, ..., $\mathbf{P}_n$ en la base $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$ se representa en la forma siguiente

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \dots & \mathbf{P}_i & \dots & \mathbf{P}_r & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_{r+1} & \dots & \mathbf{P}_j & \dots & \mathbf{P}_n
\end{array}$$

$$\left\|\begin{array}{cccccccccccc}
1 & & \vdots & & \vdots & & b_1 & a_{1r+1} & . & a_{1j} & . & a_{1n} \\
& 1 & \vdots & & \vdots & & b_2 & a_{2r+1} & . & a_{2j} & . & a_{2n} \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & & & & \\
& & \vdots & 1 & \vdots & & b_i & a_{ir+1} & . & a_{ij} & . & a_{in} \\
& & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & & \\
& & \vdots & & \vdots & 1 & b_r & a_{rr+1} & . & a_{rj} & . & a_{rn}
\end{array}\right\| \quad (17)$$

Admitamos que el conjunto de vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$, $\mathbf{P}_{r+1}$, ..., $\mathbf{P}_n$ que entran en la ecuación (16) forma varias bases de un r-ésimo orden que se diferencian una de otra aunque sea en un vector. Llamaremos a cada una de estas bases *base propia.*

Sean A_1, A_2, ..., A_k las bases propias de un sistema de vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_i$, ..., $\mathbf{P}_r$; $\mathbf{P}_{r+1}$, ..., $\mathbf{P}_j$, ..., $\mathbf{P}_n$. Al pasar de una base a otra, todos los coeficientes de las ecuaciones (15) se transformarán según las fórmulas (7) del capítulo anterior. Entonces el sistema (15) se convertirá en sistemas equivalentes a sí mismo o sea, en sistemas con las mismas soluciones.

Llamaremos la base A *positiva* con relación al vector cero $\mathbf{P}_0$, si $\mathbf{P}_0$ se representa en esta base en la forma

$$\mathbf{P}_0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i \mathbf{P}_i, \qquad \beta_i \geqslant 0.$$

Como se deduce de las ecuaciones (15), la base A que contiene los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_r$, correspondientes a las variables resueltas, es positiva, puesto que según la suposición $b_i \geqslant 0$, Las variables $(x_1, x_2, ..., x_r)$, respecto a las cuales el sistema (15) está resuelto, se llaman *básicas*; las restantes, *no básicas*. La solución de un sistema que se obtiene al igualar a cero las variables no básicas se llama solución *básica*.

En virtud del teorema sobre la descomposición de un vector de una sola forma en cada base, la solución básica se determina de una sola forma en cualquier base propia.

A continuación vamos a estudiar los sistemas de ecuaciones algebraicas lineales solamente en bases propias positivas. Por eso para reducir la escritura omitiremos las palabras "propia" y "positiva".

Examinemos el sistema (15). Definiremos las reglas para pasar de una base a otra. Para ello emplearemos la matriz (17).

I. Encontramos una de las columnas $j\,(r+1 \leqslant j \leqslant n)$ en la cual entre los coeficientes a_{1j}, a_{2j}, ..., a_{ij}, ..., a_{rj} $(1 \leqslant i \leqslant r)$ de la variable no resuelta x_j, hay coeficientes positivos*) (en el § 8 se examina el caso en el que no existe una columna tal).

Supongamos que ésa sea la columna j_1.

II. Determinamos mín $\left\{\dfrac{b_i}{a_{ij_1}}\right\}$ por todos los i para los cuales a_{ij_1} son positivos.

Supongamos que una de las relaciones mínimas sea aquella en la que $i = i_1$. Llamaremos al elemento $a_{i_1 j_1}$ *resolvente* (o *pivote*) con relación al sistema (15).

*) Se toman en cuenta los signos de los coeficientes que se encuentran dentro de los paréntesis en la notación de las ecuaciones en forma del sistema (15).

III. Resolvemos la i_1-ésima ecuación con relación a la variable x_{j_1} y la sustituimos por su expresión en las demás ecuaciones del sistema (15). Entonces el sistema (15) se transformará en el sistema (18) que le es equivalente:

$$\left.\begin{aligned}
&x_{j_1} = \frac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}} - \left(\frac{x_{i_1}}{a_{i_1j_1}} + \sum_{j \neq j_1} \frac{a_{i_1j}}{a_{i_1j_1}} x_j\right),\\
&x_i = \left(b_i - a_{ij_1}\frac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}}\right) - \left[-\frac{a_{ij_1}}{a_{i_1j_1}} x_{i_1} + \sum_{j \neq j_1}\left(a_{ij} - a_{ij_1}\frac{a_{i_1j}}{a_{i_1j_1}}\right)x_j\right]\\
&(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ i_1 - 1,\ i_1 + 1,\ \ldots,\ r - 1),\\
&x_r = \left(b_r - a_{rj_1}\frac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}}\right) - \left[-\frac{a_{rj_1}}{a_{i_1j_1}} x_{i_1} + \sum_{j \neq j_1}\left(a_{rj} - a_{rj_1}\frac{a_{i_1j}}{a_{i_1j_1}}\right)x_j\right]\\
&(j = r + 1,\ \ldots,\ n),
\end{aligned}\right\}(18)$$

y el grupo de vectores $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_{i_1-1}, \mathbf{P}_{j_1}, \mathbf{P}_{i_1+1}, \ldots, \mathbf{P}_r$ se convertirá en la nueva base A_2. Realmente, del (18) se deduce que estos vectores forman una base, puesto que la determinante que les corresponde es diferente de cero

$$\begin{array}{cccccccc}
\mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \ldots & \mathbf{P}_{i_1-1} & \mathbf{P}_{j_1} & \mathbf{P}_{i_1+1} & \ldots & \mathbf{P}_r
\end{array}$$

$$\begin{vmatrix}
1 & & & a_{1j_1} & & \\
 & 1 & & a_{2j_2} & & \\
 & & 1 & \vdots & & \\
 & & & a_{i_1j_1} & & \\
 & & & \vdots & 1 & \\
 & & & a_{rj_1} & & 1
\end{vmatrix} = a_{i_1j_1} > 0.$$

Esta base es positiva porque los miembros libres nuevos son no negativos. Efectivamente, los miembros libres tienen la forma

$$b_i - a_{ij_1}\frac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}} = a_{ij_1}\left(\frac{b_i}{a_{ij_1}} - \frac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}}\right).$$

Si $a_{ij_1} > 0$, entonces según la regla II $\dfrac{b_i}{a_{ij_1}} \geqslant \dfrac{b_{i_1}}{a_{i_1j_1}}$ y el miembro libre será no negativo; si $a_{ij_1} \leqslant 0$, entonces el miembro libre de nuevo será no negativo.

La transformación del sistema (15) en el sistema (18) determinada por las reglas I, II, III, se llama *transformación idéntica* o *símplex*.

De la definición de transformaciones idénticas se deduce que un sistema de ecuaciones algebraicas lineales del tipo (15) puede ser sometido cada vez a estas transformaciones si en las partes derechas hay coeficientes positivos de las variables. La sucesión de las transformaciones idénticas de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales puede ser interpretada geométricamente como una descomposición sucesiva de la ecuación vectorial correspondiente a este sistema en las diferentes bases propias positivas que aparecen como resultado de una sola sustitución cada vez (o sea en cada transformación).

Teniendo en cuenta que las transformaciones idénticas se emplean para la resolución del problema fundamental de la programación lineal, las estudiaremos con la siguiente condición complementaria:

Supongamos que la última r-ésima ecuación del sistema (15) permite una sucesión infinita de transformaciones idénticas de este sistema *). Eso quiere decir que cualquiera que sea el número de transformaciones idénticas que hagamos, en la r-ésima ecuación siempre habrá coeficientes positivos de las variables en su parte derecha, y en cada transformación, el elemento resolvente no pertenecerá a esta ecuación.

A la sucesión de transformaciones idénticas le corresponde la sucesión $A_1 \to A_2 \to A_3 ...$ de los pasos de una base a otra. En el caso de que r y n sean finitos, existe un número finito de diferentes bases; entonces en la sucesión $A_1 \to A_2 \to A_3 \to ...$ debe haber regreso a bases que ya aparecieron. Diremos que en este caso se forma un ciclo cerrado de los pasos de base a base o que tiene lugar la "periodicidad".

Si en cada transformación idéntica la menor relación de $\text{mín}\left\{\frac{b_i}{a_{ij_k}}\right\}$, miembros libres b_i a los correspondientes coeficientes a_{ij_k}, donde j_k es el número de la columna que contiene el elemento pivote a_{rj_k} es diferente de cero, entonces el valor del miembro libre en la r-ésima ecuación del sistema (18) a cada paso sólo disminuye, lo que se percibe directamente de la expresión de este miembro libre. La elección de la base determina de una sola forma el valor de los miembros libres del sistema de ecuaciones, por eso

*) Los razonamientos que van a continuación son justos para cualquier i-ésima ecuación del sistema (15) $(1 \leqslant i \leqslant r)$.

a diferentes bases les corresponden diferentes conjuntos de miembros libres y viceversa. Por esta razón en el caso dado es imposible el regreso a una de las bases que se obtuvieron anteriormente. En consecuencia, no puede haber una sucesión infinita de transformaciones. Esto quiere decir que después de un número finito de transformaciones, o bien todos los coeficientes de las incógnitas de la parte derecha de la r-ésima ecuación se hacen no positivos, $a_{rj} \leqslant 0$ $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$, o bien el elemento pivote en cierta transformación resulta perteneciente a esta ecuación.

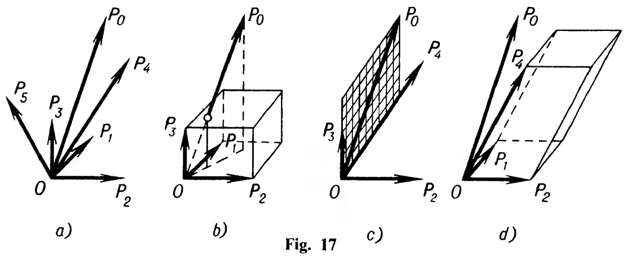

Fig. 17

Si comenzando por cierta transformación, el elemento pivote perteneciese a ecuaciones con el miembro libre b_i nulo, el valor del miembro libre en la r-ésima ecuación permanecería invariable. En efecto, en la última ecuación del sistema (18) se ve que en este caso es igual a cero el sustraendo $b_r - a_{rj_1} \dfrac{b_{i_1}}{a_{i_1 j_1}}$ de la expresión del miembro libre. En estas condiciones surge la posibilidad de la periodicidad.

Llamaremos *hiperplano básico* al hiperplano que pasa por lo menos por dos vectores básicos.

La existencia de miembros libres nulos en las ecuaciones del sistema que se transforma, significa que el vector $\mathbf{P}_0$ pertenece a uno o a varios hiperplanos básicos. Siguiendo la terminología aceptada en la literatura, diremos que en el último caso tiene lugar una situación de *degeneración.*

Así que *la condición necesaria para que ocurra la periodicidad es la existencia de la degeneración.*

Veamos, en calidad de ejemplo, el sistema de ecuaciones:

$$x_1 = 2 - (2x_4 + x_5),$$

$$x_2 = 3 - (3x_4 - x_5),$$

$$x_3 = 2 - (x_4 + 2x_5).$$

La ecuación vectorial correspondiente tiene la forma $x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 + x_3\mathbf{P}_3 = \mathbf{P}_0 - (x_4\mathbf{P}_4 + x_5\mathbf{P}_5)$, en la que los componentes de los vectores determinan la matriz

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_5 \end{array}$$
$$\left\| \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \end{array} \right\|.$$

Los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_5$ (fig. 17, *a*) forman varias bases, por ejemplo, las bases $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, y $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$. A la base $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ le corresponde la solución básica $x_1 = 2$; $x_2 = 3$; $x_3 = 2$; $x_4 = 0$; $x_5 = 0$. En este caso el vector $\mathbf{P}_0$ es una combinación lineal con coeficientes positivos

$$\mathbf{P}_0 = 2\mathbf{P}_1 + 3\mathbf{P}_2 + 2\mathbf{P}_3.$$

Geométricamente, esto significa que el vector $\mathbf{P}_0$ "atraviesa" el paralelepípedo construido con los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ (fig. 17, *b*). Presentemos las mismas ecuaciones en la base $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$. Para ello haremos una transformación idéntica. En la columna de la variante x_4 hay coeficientes positivos. Encontramos el mín $\left(\frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{1}\right)$. Escogemos como elemento pivote al coeficiente de x_4 en la primera ecuación. Resolvemos esta ecuación con relación a x_4 y colocamos la expresión obtenida en las otras dos. Entonces las ecuaciones toman la forma:

$$x_4 = 1 - \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_5\right),$$
$$x_2 = 0 - \left(-\frac{3}{2}x_1 - \frac{5}{2}x_5\right),$$
$$x_3 = 1 - \left(-\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{2}x_5\right).$$

De las últimas ecuaciones se deduce que en la base $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$, el vector $\mathbf{P}_0$ se representa en la forma $\mathbf{P}_0 = 0 \cdot \mathbf{P}_2 + \mathbf{P}_3 + \mathbf{P}_4$. En este caso tiene lugar la degeneración ya que el vector $\mathbf{P}_0$ se encuentra en el plano básico determinado por los vectores $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_4$. Por eso $\mathbf{P}_0$ está en el lado del paralelepípedo formado por los vectores $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_4$ (fig. 17, *c*). Notemos que si hubiésemos infringido las reglas de las transformaciones idénticas, hubiésemos llegado a una base en la que $\mathbf{P}_0$ no podría ser representado como una combinación lineal no negativa de vectores de base. Por ejemplo, si se toma por elemento pivote no al que corresponde el mín $\left(\frac{2}{2}; \frac{3}{3}; \frac{2}{1}\right)$, sino al coeficiente de la variable x_4 en al tercera línea, entonces después de las transformaciones, las ecuaciones tendrán la forma:

$$\begin{aligned} x_4 &= 2 - (x_3 + 2x_5), \\ x_1 &= -2 - (-2x_3 - 3x_5), \\ x_2 &= -3 - (-3x_3 - 7x_5). \end{aligned}$$

De estas ecuaciones se deduce que en la base $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$, el vector $\mathbf{P}_0$ se representa como una combinación negativa que contiene coeficientes negativos

$$\mathbf{P}_0 = -2\mathbf{P}_1 - 3\mathbf{P}_2 + 2\mathbf{P}_4,$$

y la solución resulta no positiva:

$$x_1 = -2; \quad x_2 = -3; \quad x_3 = 0; \quad x_4 = 2; \quad x_5 = 0.$$

En este caso el vector $\mathbf{P}_0$ no atraviesa el paralelepípedo formado por los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_4$ (fig. 17, *d*).

Así que la infracción de las reglas de las transformaciones idénticas definidas anteriormente puede llevar a una base negativa.

Veamos un ejemplo de un sistema de ecuaciones, las transformaciones idénticas del cual pueden llevar a la periodicidad:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0 - (x_4 - x_5 - x_6 + 3x_7), \\ x_2 &= 0 - \left(2x_4 - x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_7\right), \\ x_3 &= 1 - (\underline{\underline{x_4}} + x_5 + 3x_6 - 8x_7). \end{aligned}$$

Examinemos las transformaciones de este sistema con relación a la tercera ecuación. En ésta, el coeficiente de x_4 es positivo e igual a uno. Entre las relaciones $\left(\frac{0}{1}; \frac{0}{1}; \frac{1}{1}\right)$ destacaremos la primera que es una de las menores entre ellas. Por eso se puede tomar como elemento pivote el coeficiente de la variable x_4 de la primera ecuación. Después de la resolución de la primera ecuación respecto a x_4 y de la sustitución de x_4 por su expresión en las otras dos ecuaciones obtendremos el sistema transformado:

$$
\begin{aligned}
x_4 &= 0 - (x_1 - x_5 + x_6 + 3x_7),\\
x_2 &= 0 - \left(-2x_1 + \mathbf{x_5} + \frac{3}{2}x_6 - 5x_7\right),\\
x_3 &= 1 - (-x_1 + \underline{\underline{2x_5}} + 4x_6 - 11x_7).
\end{aligned}
$$

En la última ecuación en la parte derecha de nuevo hay coeficientes positivos de las variables, por ejemplo de x_5. El elemento pivote en este caso es el coeficiente de x_5 de la segunda ecuación, puesto que el mín $\left\{\frac{0}{1};\ \frac{1}{2}\right\}$ corresponde a la segunda ecuación. Efectuemos las transformaciones idénticas que corresponden al elemento pivote nuevo. Como resultado, obtendremos el sistema:

$$
\begin{aligned}
x_5 &= 0 - \left(-2x_1 + x_2 + \frac{3}{2}x_6 - 5x_7\right),\\
x_4 &= 0 - \left(-x_1 + x_2 + \boldsymbol{\frac{1}{2}x_6} - 2x_7\right),\\
x_3 &= 1 - (-3x_1 - 2x_2 + \underline{\underline{x_6}} - x_7).
\end{aligned}
$$

En la tercera ecuación aparece de nuevo un coeficiente positivo en la incógnita x_6 y se puede tomar como elemento pivote el coeficiente de la variable x_6 en la segunda ecuación. Después de la transformación idéntica tendremos:

$$
\begin{aligned}
x_6 &= 0 - (-2x_1 + 2x_2 + 2x_4 - 4x_7),\\
x_5 &= 0 - (x_1 - 2x_2 - 3x_4 + x_7),\\
x_3 &= 1 - (5x_1 - 4x_2 - 2x_4 + \underline{\underline{3x_7}}).
\end{aligned}
$$

Continuaremos la sucesión de estas transformaciones subrayando cada vez en la tercera ecuación uno de los coeficientes positivos y destacando con caracteres gruesos su respectivo elemento pivote. Obtendremos así el sistema inicial de ecuaciones expresado en diferentes bases propias positivas:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_7 &= 0 - (x_1 - 2x_2 - 3x_4 + x_5),\\
x_6 &= 0 - (\mathbf{2x_1} - 6x_2 - 10x_4 + 4x_5),\\
x_3 &= 1 - (\underline{\underline{2x_1}} + 2x_2 + 7x_4 - 3x_5).
\end{aligned}
\right\}
$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= 0 - \left(-3x_2 - 5x_4 + 2x_5 + \frac{1}{2}x_6\right),\\
x_7 &= 0 - \left(\mathbf{x_2} + 2x_4 - x_5 - \frac{1}{2}x_6\right),\\
x_3 &= 1 - (\underline{\underline{8x_2}} + 17x_4 - 7x_5 - x_6).
\end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_1 &= 0 - (x_4 - x_5 - x_6 + 3x_7),\\
x_2 &= 0 - \left(2x_4 - x_5 - \frac{1}{2}x_6 + x_7\right),\\
x_3 &= 1 - (x_4 + x_5 + 3x_6 - 8x_7).
\end{aligned}\right\}$$

Según esto, después de seis transformaciones idénticas volvemos al sistema inicial de ecuaciones.

Así, la sucesión de las transformaciones idénticas en las bases $\mathbf{P_1P_2P_3 \to P_4P_2P_3 \to P_5P_4P_3 \to P_6P_5P_3 \to P_7P_6P_3 \to P_1P_7P_3 \to P_1P_2P_3}$ lleva a la periodicidad.

No obstante, la existencia de la degeneración no conduce obligatoriamente a la periodicidad, lo que se deduce del ejemplo siguiente:

$$\begin{aligned}
x_1 &= 0 - (\mathbf{x_4} - 2x_5 + 4x_6 + x_7 - 3x_8 + x_9),\\
x_2 &= 0 - (2x_4 - x_5 + x_6 - 2x_7 - 2x_8 + 4x_9),\\
x_3 &= 0 - (-x_4 + 2x_5 - 3x_6 + 3x_7 - 4x_8 + x_9),\\
0 &= 1 - (\underline{\underline{3x_4}} - x_5 - 2x_6 + x_7 - x_8 + x_9).
\end{aligned}$$

En la última ecuación, el coeficiente de la variable x_4 es positivo, y como elemento pivote se puede tomar el coeficiente de x_4 en la primera ecuación.

Efectuando las transformaciones idénticas tendremos:

$$\begin{aligned}
x_4 &= 0 - (x_1 - 2x_5 + 4x_6 + x_7 - 3x_8 + x_9),\\
x_2 &= 0 - (-2x_1 + \mathbf{3x_5} - 7x_6 - 4x_7 + 4x_8 + 2x_9),\\
x_3 &= 0 - (x_1 + x_6 + 4x_7 - 7x_8 + 2x_9),\\
0 &= 1 - (-3x_1 + \underline{\underline{5x_5}} - 14x_6 - 2x_7 + 8x_8 - 2x_9).
\end{aligned}$$

Continuando este proceso obtendremos:

$$\begin{aligned}
x_5 &= 0 - \left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_6 - \frac{4}{7}x_7 + \frac{4}{3}x_8 + \frac{2}{3}x_9\right),\\
x_4 &= 0 - \left(-\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_6 - \frac{5}{3}x_7 - \frac{1}{3}x_8 + \frac{7}{3}x_9\right),\\
x_3 &= 0 - (x_1 + x_6 + \mathbf{4x_7} - 7x_8 + 2x_9),\\
0 &= 1 - \left(\frac{1}{3}x_1 - \frac{5}{3}x_2 - \frac{7}{3}x_6 + \underline{\underline{\frac{14}{3}}}x_7 + \frac{4}{3}x_8 - \frac{16}{3}x_9\right).
\end{aligned}$$

Y después

$$\begin{aligned}
x_7 &= 0 - \left(\frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_6 - \frac{7}{4}x_8 + \frac{2}{4}x_9\right),\\
x_5 &= 0 - \left(-\frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{6}{3}x_6 - \frac{3}{3}x_8 + \frac{4}{3}x_9\right),\\
x_4 &= 0 - \left(\frac{1}{12}x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{5}{12}x_3 - \frac{3}{12}x_6 - \frac{39}{12}x_8 + \frac{38}{12}x_9\right),\\
0 &= 1 - \left(-\frac{10}{12}x_1 - \frac{5}{3}x_2 - \frac{14}{12}x_3 - \frac{42}{12}x_6 + \underline{\underline{\mathbf{\frac{114}{12}}}}\,\mathbf{x_8} - \frac{92}{11}x_9\right).
\end{aligned}$$

En la última ecuación el coeficiente positivo de x_8 es simultáneamente elemento pivote, de modo que no se ha formado una sucesión infinita de transformaciones idénticas. Esto muestra que la degeneración no ha llevado a la periodicidad.

Efectuando las transformaciones idénticas que corresponden al elemento pivote $a_{48} = \frac{114}{12}$ y admitiendo que el valor de las variables no básicas es igual a cero, encontraremos una de las soluciones básicas del sistema de ecuaciones inicial:

$$x_1 = 0; \quad x_2 = 0; \quad x_3 = 0; \quad x_6 = 0; \quad x_9 = 0;$$

$$x_4 = \frac{13}{18}; \quad x_5 = \frac{4}{38}; \quad x_7 = \frac{7}{38}; \quad x_8 = \frac{4}{38}.$$

Es de señalar que la composición de ejemplos con periodicidad presenta grandes dificultades puesto que para la realización de la periodicidad, los coeficientes del sistema de ecuaciones lineales deben satisfacer un gran número de condiciones y solamente una

minuciosa selección de los coeficientes puede llevar a la formación de un ciclo.
Mostremos que si se tienen sólo dos ecuaciones

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 0 - \left(a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + \sum_{j=5}^{n} a_{1j}x_j\right), \\ x_2 &= b - \left(a_{23}x_1 + a_{24}x_4 + \sum_{j=5}^{n} a_{2j}x_j\right) \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

no puede haber periodicidad. La matriz de los vectores que corresponde al sistema (19) tiene la forma

$$\begin{array}{cccccc} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_0 & \mathbf{P}_3 & \mathbf{P}_4 & \mathbf{P}_j \end{array}$$
$$\left\|\begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & a_{13} & a_{14} & a_{1j} \\ 0 & 1 & b & a_{23} & a_{24} & a_{2j} \end{array}\right\|.$$

Si se admite que $b > 0$, entonces los vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ forman una base. El valor de los componentes del vector $\mathbf{P}_3$ en esta base se puede representar con las determinantes

$$a_{13} = \begin{vmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{23} & 1 \end{vmatrix}, \qquad a_{23} = \begin{vmatrix} 1 & a_{13} \\ 0 & a_{23} \end{vmatrix}.$$

Sean a_{23} y a_{13} mayores que cero. Eso quiere decir que se puede someter la ecuación (19) a transformaciones, pasando de la base $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ a la base $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$ y tomando el elemento a_{13} como elemento pivote. En la nueva base $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$, los coeficientes de la ecuación (19) toman el valor determinado por las fórmulas (7) del capítulo anterior. Así, los valores de los coeficientes de la variable x_4 tendrán la forma:

en la primera línea $\dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{14} & 0 \\ a_{24} & 1 \end{vmatrix}$,

en la segunda línea $\dfrac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{vmatrix}$, donde $\Delta = \begin{vmatrix} a_{13} & 0 \\ a_{23} & 1 \end{vmatrix}$.

Si los numeradores de estas expresiones son positivos, entonces en la base $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$, los coeficientes de x_4 serán positivos. Puesto que la relación mínima en el sistema (19) de nuevo corresponde a la primera ecuación, tomando el coeficiente de x_4 de la primera ecuación como elemento pivote se puede repetir la transformación del sistema de ecuaciones pasando de la base $\mathbf{P}_3$, $\mathbf{P}_2$ a la base $\mathbf{P}_4$, $\mathbf{P}_2$.

Supongamos que después de cada transformación se puede realizar la siguiente, de tal manera que la sucesión de las bases

$$\mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_3,\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_4,\ \mathbf{P}_2 \to \ldots \to \mathbf{P}_k,\ \mathbf{P}_2 \to \mathbf{P}_1,\ \mathbf{P}_2$$

forma un ciclo. Entonces, cada una de las determinantes, en el orden siguiente:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
(\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_3, \mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_4, \mathbf{P}_2) & & & (\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_k\mathbf{P}_2) & & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) \\
& \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow & \searrow & \uparrow \\
& & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_3) & & (\mathbf{P}_3\mathbf{P}_4) & & \ldots & (\mathbf{P}_{k-2}\mathbf{P}_{k-1}) & & (\mathbf{P}_{k-1}\mathbf{P}_k) & & (\mathbf{P}_k\mathbf{P}_1)
\end{array} \qquad (20)$$

debe ser positivo (las determinantes de la fila inferior corresponden a la sucesión de los coeficientes positivos en la segunda ecuación, las determinantes de la fila superior, a la sucesión de elementos pivotes). En el caso dado los vectores $\mathbf{P}_j$ son bidimensionales y por eso el valor de cada una de las determinantes en la sucesión (20) coincide en signo y magnitud con el respectivo producto vectorial. Entonces la exigencia de que todas las determinantes (20) sean positivas es equivalente a la exigencia de que el vector $\mathbf{P}_3$ caiga entre los vectores $\mathbf{P}_1$ y $\mathbf{P}_2$ que forman un ángulo agudo; el vector $\mathbf{P}_4$, entre los vectores $\mathbf{P}_3$ y $\mathbf{P}_2$, etc.

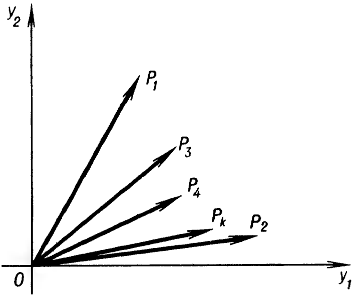

Fig. 18

Continuando estos razonamientos llegaremos a que el vector $\mathbf{P}_1$ debe encontrarse entre los vectores $\mathbf{P}_k$ y $\mathbf{P}_2$ lo que no puede ser (fig. 18). La contradicción también puede ser fácilmente revelada en forma analítica. Escribamos el sistema de igualdades vectoriales:

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}_3 &= \alpha_{31}\mathbf{P}_1 + \alpha_{32}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{P}_4 &= \alpha_{43}\mathbf{P}_3 + \alpha_{42}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{P}_5 &= \alpha_{54}\mathbf{P}_4 + \alpha_{52}\mathbf{P}_2, \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathbf{P}_k &= \alpha_{kk-1}\mathbf{P}_{k-1} + \alpha_{k2}\mathbf{P}_2, \\
\mathbf{P}_1 &= \alpha_{1k}\mathbf{P}_k + \alpha_{12}\mathbf{P}_2.
\end{aligned} \qquad (21)$$

Multiplicando vectorialmente cada una de las igualdades (21) una vez a la derecha por $\mathbf{P}_2$ y la otra vez a la izquierda por el segundo vector que entra en la parte derecha de cada ecuación, nos convencemos de que todos los coeficientes de las igualdades (21) son positivos, puesto que, según la suposición, todos los productos vectoriales respectivos son también positivos. Así pues, para la ecuación $\mathbf{P}_3 = \alpha_{31}\mathbf{P}_1 + \alpha_{32}\mathbf{P}_2$ tenemos que $(\mathbf{P}_3\mathbf{P}_2) = \alpha_{31}(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2) + \alpha_{32}(\mathbf{P}_2\mathbf{P}_2)$, por consiguiente $\alpha_{31} > 0$. Multiplicando esta misma ecuación a la izquierda por $\mathbf{P}_1$ obtendremos que $\alpha_{32} > 0$. Después, en la expresión de $\mathbf{P}_k$ sustituimos $\mathbf{P}_{k-1}$ por su expresión, en la fórmula obtenida sustituimos $\mathbf{P}_{k-2}$ por su expresión, etc. Como resultado tendremos $\mathbf{P}_k = \gamma_{1k}\mathbf{P}_1 + \gamma_{2k}\mathbf{P}_2$, $\gamma_{1k} > 0$; $\gamma_{2k} > 0$, de donde

$$\mathbf{P}_1 = \frac{1}{\gamma_{1k}}\,\mathbf{P}_k - \frac{\gamma_{2k}}{\gamma_{1k}}\,\mathbf{P}_2.$$

Comparando la igualdad obtenida con la última igualdad del sistema (21)

$$\mathbf{P}_1 = \alpha_{1k}\mathbf{P}_k + \alpha_{12}\mathbf{P}_2, \quad \alpha_{1k} > 0; \quad \alpha_{12} > 0,$$

llegamos a una contradicción.

Mostraremos que para formar un ciclo, en el caso de cualquier número n de ecuaciones, $n > 2$, hay que efectuar no menos de seis transformaciones idénticas. Puesto que examinamos sólo el caso de una sustitución cada vez en las bases, se puede esperar el regreso a la base inicial después de $2k$ transformaciones, donde $k = 1, 2, 3, \ldots$ El regreso en el caso de $k = 1$ es imposible, puesto que las determinantes correspondientes a este caso tienen la forma:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
(\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_i \ldots \mathbf{P}_r); \arrow[dr] & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_j \ldots \mathbf{P}_r); \arrow[dr] & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_i \ldots \mathbf{P}_r) \\
& (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_i \ldots \mathbf{P}_j); \arrow[u] & (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_j \ldots \mathbf{P}_i). \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Las dos últimas determinantes se diferencian en una permutación de los vectores $\mathbf{P}_i$ y $\mathbf{P}_j$ por lo que tienen diferentes signos. Eso contradice la suposición de su positividad.

Para demostrar la imposibilidad de la formación de un ciclo cuando $k = 2$ hay que mostrar que ninguno de los caminos de las transformaciones idénticas que se presentan más adelante es irrealizable.

$$\begin{aligned}
1.\ (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) &\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_2} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_3} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2.\ (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) &\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{j_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_r);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3.\ (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) &\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{j_1} \ldots \mathbf{P}_{j_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{j_2} \ldots \mathbf{P}_r) \to \\
&\to (\mathbf{P}_1\mathbf{P}_2 \ldots \mathbf{P}_{i_1} \ldots \mathbf{P}_{i_2} \ldots \mathbf{P}_r).
\end{aligned}$$

El primer camino de transición de base a base es imposible, puesto que se reduce al caso de las dos ecuaciones.

El segundo camino tampoco es posible puesto que las determinantes primera y última se diferencian en una permutación y por eso no pueden ser las dos positivas.

Queda por demostrar la imposibilidad del tercer camino. Para eso hay que convencerse de que la suposición sobre la positividad de todas las determinantes del r-ésimo orden anotadas a continuación lleva a una contradicción:

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & 1 & \vdots & a_{1j_1} & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i_1 & & \vdots & a_{i_1j_1} & \vdots & & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
i_2 & & \vdots & a_{i_2j_1} & \vdots & 1 & \vdots & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
r & & \vdots & a_{rj_1} & \vdots & & \vdots & 1
\end{array}\;; \qquad
\begin{array}{|ccccccc|}
1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & \vdots & a_{1j_1} & \vdots & a_{1j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & a_{i_1j_1} & \vdots & a_{i_1j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & a_{i_2j_1} & \vdots & a_{i_2j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
 & \vdots & a_{rj_1} & \vdots & a_{rj_2} & \vdots & 1
\end{array}\;;$$

$$\begin{array}{|ccccccc|}
1 & & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & \vdots & & & a_{1j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & 1 & & a_{i_1j_1} & \vdots & \\
 & \vdots & & & a_{i_2j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & & & a_{rj_2} & \vdots & 1
\end{array}\;; \qquad
\begin{array}{|ccccccc|}
1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & \vdots & & \vdots & & \vdots & a_{1j_1} \\
 & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots & a_{i_1j_1} \\
 & \vdots & & \vdots & 1 & \vdots & a_{i_2j_1} \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & a_{rj_1}
\end{array}\;;$$

$$\begin{array}{|ccccccc|}
1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & \vdots & a_{1j_1} & \vdots & & \vdots & a_{1j_2} \\
 & \vdots & a_{i_1j_1} & \vdots & & \vdots & a_{i_1j_2} \\
 & \vdots & a_{i_2j_1} & \vdots & 1 & \vdots & a_{i_2j_2} \\
 & \vdots & a_{rj_1} & \vdots & & \vdots & a_{rj_2}
\end{array}\;;$$

$$\begin{array}{c|ccccccc|}
 & 1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & 1 & \vdots & a_{1j_1} & \vdots & a_{1j_2} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
i_1 & & \vdots & a_{i_1j_1} & \vdots & a_{i_1j_2} & & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
i_2 & & \vdots & a_{i_2j_1} & \vdots & a_{i_2j_2} & & \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & \\
r & & \vdots & a_{rj_1} & \vdots & a_{rj_2} & &
\end{array}\;;$$

$$\begin{array}{|ccccccc|}
1 & \cdots & i_1 & \cdots & i_2 & \cdots & r \\
1 & \vdots & & \vdots & a_{1j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & 1 & \vdots & a_{i_1j_2} & \vdots & \\
 & \vdots & & \vdots & a_{i_2j_2} & \vdots & 1 \\
 & \vdots & & \vdots & a_{rj_2} & \vdots &
\end{array}\;.$$

Resolviendo estas siete determinantes tendremos:

1) $a_{i_1j_1} > 0$;

2) $a_{rj_1} > 0$;

3) $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2} - a_{i_2j_1}a_{i_1j_2} > 0$;

4) $a_{i_1j_1}a_{rj_2} - a_{rj_1}a_{i_1j_2} > 0$;

5) $a_{ij_2} > 0$;

6) $a_{i_2j_2}a_{rj_1} - a_{rj_2}a_{i_2j_1} < 0$;

7) $a_{rj_2} < 0$.

De 1), 2), 4) y 7) se deduce que $a_{i_1j_2} < 0$. De 2), 5), 6) y 7) se deduce que $a_{i_2i_1} < 0$.

Introduciremos las designaciones:

$$\begin{aligned} a_{i_1j_1} &= \varepsilon, & a_{rj_2} &= -\eta, \\ a_{rj_1} &= k\varepsilon, & a_{i_1j_2} &= -k_1\eta, \\ a_{i_2j_2} &= q\varepsilon, & a_{i_2j_1} &= -q_1\eta. \end{aligned}$$

ε, k, q, η, k_1, q_1, son números positivos.

Entonces de la 3) tenemos $\varepsilon q\varepsilon - k_1q_1\eta^2 > 0$ | $q\varepsilon^2 - k_1q_1\eta^2 > 0$,

de la 4) tenemos $-\varepsilon\eta + k_1k\varepsilon\eta > 0$ | $kk_1 - 1 > 0$,

de la 6) tenemos $q_1\eta^2 - kq\varepsilon^2 > 0$ | $q_1\eta^2 - kq\varepsilon^2 > 0$,

$$\begin{array}{l} q\varepsilon^2 > k_1q_1\eta^2, \\ \underline{\quad q_1\eta^2 > kq\varepsilon^2 \quad} \\ qq_1\varepsilon^2\eta^2 > k_1kq_1q\varepsilon^2\eta^2, \qquad 1 > k_1k. \end{array}$$

Comparando la desigualdad $1 > k_1k$ con la obtenida anteriormente $k_1k > 1$ observamos una contradicción.

Así que la periodicidad puede ocurrir solamente después de que se efectúen no menos de seis transformaciones.

§ 8. MÉTODO DE CÓMPUTO DE UNA SOLUCIÓN NO NEGATIVA DE UN SISTEMA DE ECUACIONES ALGEBRAICAS LINEALES

Sea dado un sistema de m ecuaciones algebraicas lineales con n variables:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} \quad (13)$$

Sin limitar la generalidad podemos considerar que $b_i \geqslant 0$ (esto se puede lograr siempre multiplicando las dos partes de las ecuaciones respectivas por -1).

Presentemos el sistema (13) en la forma

$$0 = b_i - \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m. \tag{22}$$

Si en el sistema (22) hay alguna variable que entre sólo en una ecuación y el coeficiente de la cual, dentro de los paréntesis, tiene el signo «+», entonces se podrá resolver esta ecuación con relación a esa variable.

Supongamos que las ecuaciones del sistema (22) se han resuelto con relación a todas las variables tales. Entonces, después de la respectiva numeración de las variables, el sistema puede ser escrito en la forma:

$$\begin{aligned}
x_1 &= b_1 - (a_{1l_0+1}x_{l_0+1} + a_{1l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1k}x_k),\\
x_2 &= b_2 - (a_{2l_0+1}x_{l_0+1} + a_{2l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2k}x_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_{l_0} &= b_{l_0} - (a_{l_0l_0+1}x_{l_0+1} + a_{l_0l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{l_0j}x_j + \ldots + a_{l_0k}x_k),\\
0 &= b_{l_0+1} - (a_{l_0+1,\,l_0+1}x_{l_0+1} + a_{l_0+1,\,l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{l_0+1,\,j}x_j + \ldots\\
&\ldots + a_{l_0+1,\,k}x_k),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
0 &= b_m = (a_{m,\,l_0+1}x_{l_0+1} + a_{m,\,l_0+2}x_{l_0+2} + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mk}x_k)
\end{aligned}$$

o, abreviadamente,

$$\left.\begin{aligned}
x_l &= b_l - \left(\sum_{j=l_0+1}^{k} a_{lj}x_j\right),\\
0 &= b_\gamma - \left(\sum_{j=l_0+1}^{k} a_{\gamma j}x_j\right),
\end{aligned}\right\} \tag{23}$$

donde

$$l = 1,\ 2,\ \ldots,\ l_0; \quad \gamma = 1,\ 2,\ \ldots,\ \gamma_0;$$

$$l_0 + \gamma_0 = m; \quad l_0 + k = n; \quad b_l \geqslant 0; \quad b_\gamma \geqslant 0$$

A cualquier ecuación del sistema (23) que no esté resuelta con relación a alguna de las variables la llamaremos 0-*ecuación.*

Así que cualquier sistema de ecuaciones algebraicas lineales puede ser reducido a la forma (23)*).

Para encontrar una solución no negativa del sistema (23) lo someteremos a unas transformaciones idénticas que satisfagan las condiciones siguientes:

1. Hallamos la 0-ecuación, en la que el miembro libre b_γ es mayor que cero. Si no hay una 0-ecuación tal, entonces los valores de las variables

$$x_l = b_l; \quad x_j = 0 \quad (l = 1, 2, ..., l_0; \ j = l_0 + 1, ..., k)$$

forman una solución no negativa del sistema (23). Supongamos que ésta sea la i-ésima ecuación.

2. Señalamos en la i-ésima ecuación el coeficiente positivo a_{ij_1} **).

3. Hallamos el elemento pivote $a_{i_1j_1}$ y efectuamos en el sistema (23) las transformaciones idénticas correspondientes.

4. Empleamos la i-ésima 0-ecuación para las transformaciones siguientes del sistema hasta que lo resolvamos o establezcamos que el sistema (23) es incompatible**).

5. Después de resolver la i-ésima 0-ecuación hallamos la 0-ecuación siguiente en la que el miembro libre sea positivo y efectuamos con ella operaciones análogas.

6. Continuamos este proceso hasta que nos libremos de todas las 0-ecuaciones.

Observaciones: I. El número de ecuaciones en el sistema transformado puede resultar menor que m, puesto que al introducir en las demás ecuaciones la expresión de la variable resuelta algunas de estas ecuaciones se pueden convertir en identidades $0 \equiv 0$, las que habrá que excluir del tratamiento ulterior.

II. Supongamos que en el sistema inicial (23) o en el sistema transformado se ha encontrado una ecuación resuelta con relación a cierta variable, la que tiene el miembro libre igual a cero: $x_i = 0 - (\sum \beta_\varphi x_\varphi)$, y es tal que en la parte derecha todos sus coeficientes de las variables son no negativos. Como el papel de tales variables puede ser solamente de cero, para que las x_i sean no negativas hay que igualarlas a cero en todas las ecuaciones con lo que el sistema examinado

---

*) Si en el sistema (23) no hay ni una ecuación resuelta con relación a alguna variable, entonces $l_0 = 0$ y el sistema (23) está compuesto sólo de 0-ecuaciones.

**) Si en la i-ésima ecuación, las incógnitas no tienen coeficientes positivos, el sistema (23) resulta incompatible, ya que la ecuación $0 = b_i - (\sum a_{ij}x_j)$, en la que $b_i > 0$ y todos los $a_{ij} \leqslant 0$, no puede ser satisfecha con ningún valor no negativo de las variables $x_j \geqslant 0$.

se simplificará considerablemente. En forma similar excluimos las 0-ecuaciones que tienen el miembro libre igual a cero y los coeficientes diferentes de cero de las variables en la parte derecha de igual signo. Tomamos el valor de estas variables en las demás ecuaciones igual a cero.

Veamos a qué resultados pueden llevar las transformaciones idénticas consecutivas que satisfacen las condiciones $1-6$.

a) Puede ocurrir que después de un número finito de transformaciones idénticas el sistema se libre de las 0-ecuaciones. Evidentemente, el sistema (23) en este caso es compatible. El conjunto de valores de las variables obtenidas al igualar a las variables no básicas a cero y a las básicas a los miembros libres en el sistema que no contiene 0-ecuaciones, es una solución no negativa.

b) Puede ocurrir que después de un número finito de transformaciones idénticas se ponga de manifiesto que la 0-ecuación empleada se convierte en una ecuación de forma

$$0 = b'_i - (\sum a'_{ij} x_j),$$

donde $b'_i > 0$, $a'_{ij} \leqslant 0$ para todas las j. En este caso el sistema es incompatible.

c) Por último, puede ocurrir que el sistema no se libre por completo de las 0-ecuaciones, y las condiciones del empleo de las transformaciones idénticas no se alteren. Como al emplear consecutivamente las transformaciones idénticas, el número de 0-ecuaciones no puede aumentar, en este caso, cierta 0-ecuación posee la propiedad de que ella siempre tendrá por lo menos un coeficiente positivo de las variables en la parte derecha pero nunca le pertenecerá el elemento pivote. Cambiando esta 0-ecuación

$$0 = b'_{i_p} - (\sum a'_{i_p j} x_j)$$

por la ecuación

$$y = \frac{b'_{ip}}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}(\sum a'_{ipj} x_j),$$

donde ε es un número positivo tan pequeño como se quiera, y, estudiando la última ecuación junto con las resueltas veremos que en el caso c) ocurre la periodicidad

Lo dicho anteriormente da la posibilidad de hacer la siguiente afirmación:

Sea cual fuere el sistema de m ecuaciones algebraicas con n variables, el empleo consecutivo de transformaciones idénticas permite después de un número finito de pasos (excluyendo los casos de *periodicidad) determinar si el sistema en la región de los valores no negativos de las variables es compatible. En el caso de la compatibilidad del sistema, en el último paso de las transformaciones se forma cierta solución no negativa.*

Una importante propiedad del método presentado es la posibilidad de su empleo para cualquier sistema de ecuaciones algebraicas lineales, incluyendo también el sistema linealmente dependiente, sin que haga falta separar de antemano las ecuaciones linealmente independientes.

Además, como cualquier sistema de desigualdades lineales al añadirle variables no negativas puede ser reducido a un sistema de igualdades, este método también es utilizable tanto para determinar la compatibilidad de sistemas de desigualdades, como para encontrar una de las soluciones no negativas en el caso de su compatibilidad. Aquí tampoco es necesario separar al poliedro de las soluciones en su "forma pura".

En la fig. 19 se representa el esquema de bloques del programa para calcular la solución no negativa de un sistema cualquiera de ecuaciones algebraicas con ayuda de computadoras electrónicas.

En la computadora se introducen los coeficientes de las variables en el sistema inicial y los miembros libres. Además, al resolver problemas de programación lineal, se introducen los coeficientes de la forma lineal que se minimiza. La computadora, a base del programa, efectúa la sucesión de transformaciones idénticas y comprueba las condiciones de compatibilidad del sistema.

En el caso de incompatibilidad del sistema, la computadora da una señal indicadora y detiene su funcionamiento. Si el sistema es compatible, la computadora calcula la solución no negativa, la imprime (si es necesario) y pasa al cálculo de la solución óptima.

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo. Determinar si es compatible el sistema en la región de los valores no negativos de las variables:

$$\left.\begin{aligned} 1\cdot x_1 + 3x_2 + 3x_3 &= 2,\\ 1\cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 7,\\ -3x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3. \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 - (1\cdot x_1 + 3x_2 + 3x_3),\\ 0 &= 7 - (1\cdot x_1 + 2x_2 + 4x_3),\\ 0 &= 3 - (-3x_1 + 3x_2 + x_3). \end{aligned}\right\}$$

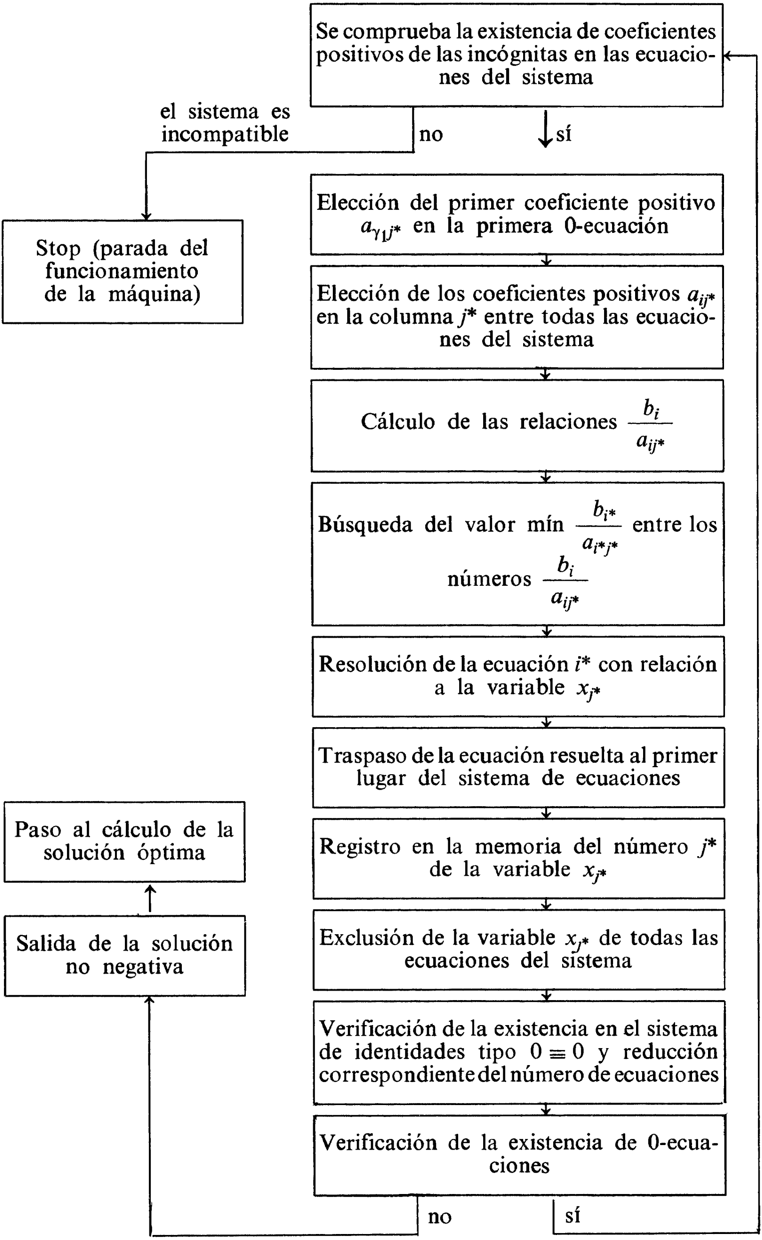
Se comprueba la existencia de coeficientes positivos de las incógnitas en las ecuaciones del sistema
el sistema es incompatible
no
sí
Stop (parada del funcionamiento de la máquina)
Elección del primer coeficiente positivo $a_{\gamma_1 j^*}$ en la primera 0-ecuación
Elección de los coeficientes positivos a_{ij^*} en la columna j^* entre todas las ecuaciones del sistema
Cálculo de las relaciones $\dfrac{b_i}{a_{ij^*}}$
Búsqueda del valor mín $\dfrac{b_{i^*}}{a_{i^*j^*}}$ entre los números $\dfrac{b_i}{a_{ij^*}}$
Resolución de la ecuación i^* con relación a la variable x_{j^*}
Traspaso de la ecuación resuelta al primer lugar del sistema de ecuaciones
Paso al cálculo de la solución óptima
Registro en la memoria del número j^* de la variable x_{j^*}
Salida de la solución no negativa
Exclusión de la variable x_{j^*} de todas las ecuaciones del sistema
Verificación de la existencia en el sistema de identidades tipo $0 \equiv 0$ y reducción correspondiente del número de ecuaciones
Verificación de la existencia de 0-ecuaciones
no
sí

Fig. 19

En la primera 0-ecuación, el coeficiente positivo de x_1, igual a uno, es simultáneamente el elemento pivote:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2 - (3x_2 + \mathbf{3x_3}), \\ 0 &= 5 - (-x_2 + x_3), \\ 0 &= 9 - (12x_2 + 8x_3). \end{aligned}$$

En la segunda 0-ecuación el coeficiente de x_3 es positivo; el elemento pivote pertenece a la primera ecuación:

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{2}{3} - \left(\frac{1}{3}x_1 + x_2\right), \\ 0 &= \frac{13}{3} - \left(-\frac{1}{3}x_1 - 2x_2\right). \end{aligned}$$

El sistema es incompatible, puesto que en la última ecuación el miembro libre es positivo y los dos coeficientes dentro del paréntesis, negativos; por eso, a la segunda ecuación no le satisface ni un punto para el que $x_1 \geqslant 0$; $x_2 \geqslant 0$.

Ejemplo. Hallar una solución no negativa del sistema de ecuaciones:

$$(1)\quad \left.\begin{aligned} 0 &= 3 - (\mathbf{2x_1} + x_2 + 2x_3 + 2x_4), \\ 0 &= 3 - (-2x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4), \\ 0 &= 6 - (-2x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 4x_4). \end{aligned}\right\}$$

Efectuamos las transformaciones idénticas del sistema:

$$(2)\quad \left.\begin{aligned} x_1 &= \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{2}x_2 + x_3 + x_4\right), \\ 0 &= 6 - (2x_2 + \mathbf{6x_3} + 4x_4), \\ 0 &= 9 - (3x_2 + 9x_3 + 6x_4). \end{aligned}\right\}$$

$$(3)\quad \left.\begin{aligned} x_3 &= 1 - \left(\frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4\right), \\ x_1 &= \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{6}x_2 + \frac{1}{3}x_4\right), \\ 0 &\equiv 0. \end{aligned}\right\}$$

Una de las soluciones no negativas del sistema es

$$x_1 = \frac{1}{2}; \quad x_3 = 1; \quad x_2 = 0; \quad x_4 = 0.$$

El método de cálculo de la solución no negativa de un sistema de ecuaciones explicado anteriormente puede servir como uno de los procedimientos de definición del rango de una matriz. Efectivamente, sea dada una matriz

$$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix} \right\|.$$

Consideremos sus columnas como los vectores $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$, ..., $\mathbf{P}_n$ y escribamos la ecuación

$$0 = \mathbf{P}_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{P}_j \right),$$

en la que haremos $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_1$. Es evidente que esta ecuación tiene solución no negativa (por ejemplo, $x_1 = 1$; $x_j = 0$; $j = 2, 3, ..., n$). Representando la ecuación vectorial $0 = \mathbf{P}_0 - \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{P}_j \right)$ en forma de un sistema de m ecuaciones y sometiéndola a transformaciones idénticas nos libraremos de las 0-ecuaciones. El número de ecuaciones resueltas después de la exclusión de las 0-ecuaciones determina el rango de la matriz. Como se puede demostrar, el número de transformaciones que es necesario efectuar también es igual al rango de la matriz.

Ejemplo. Hallar el rango de la matriz

$$\left\| \begin{matrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 4 & -4 & 5 \end{matrix} \right\|.$$

Efectuaremos la sucesión de transformaciones identicas:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= 2 - (2x_1 - 4x_2 + 3x_3 + x_4), \\ 0 &= 1 - (x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5), \\ 0 &= 0 - (x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5), \\ 0 &= 4 - (4x_1 - 7x_2 + 4x_3 - 4x_4 + 5x_5) \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 1 - (-2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5), \\ 0 &= 0 - (x_3 + 9x_4 - 4x_5) \\ 0 &= 0 - (x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5). \\ 0 &= 0 - (x_2 + 12x_4 - 3x_5) \end{aligned}\right\} 1^{\text{er}} \text{ paso}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_3 &= 0 - (9x_4 - 4x_5),\\
x_1 &= 1 - (-2x_2 - 13x_4 + 6x_5),\\
0 &= 0 - (x_2 + 12x_4 - 3x_5),\\
0 &= 0 - (x_2 + 12x_4 - 3x_5)
\end{aligned}\right\} \quad 2^{\circ}\ \text{paso}$$

$$\left.\begin{aligned}
x_2 &= 0 - (12x_4 - 3x_5),\\
x_3 &= 0 - (\ 9x_4 - 4x_5),\\
x_1 &= 1 - 11x_4,\\
0 &\equiv 0
\end{aligned}\right\} \quad 3^{\text{er}}\ \text{paso}$$

Rango de la matriz $r = 3$.

§ 9. RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL

El problema de programación lineal, como fue dicho anteriormente, puede ser planteado de la siguiente manera:

se da un sistema de m ecuaciones lineales con n variables

$$\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1,\\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{in}x_n = b_i,\\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m
\end{array}\right\} \qquad (13)$$

y la forma lineal de esas mismas variables $f = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_jx_j + \dots + c_nx_n$. Hay que hallar entre todas las posibles soluciones no negativas

$$(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n)$$

del sistema (13) una solución $(x_1^{\circ};\ x_2^{\circ};\ \dots;\ x_n^{\circ})$ con la cual f adquiera el menor valor posible.

Para resolver este problema calcularemos una de las soluciones no negativas del sistema (13) con el procedimiento explicado en el parágrafo anterior. Como resultado, el sistema (13) se transformará en un sistema equivalente*):

$$\left.\begin{aligned}
x_1' &= b_1' - (a_{1r+1}'x_{r+1}' + a_{1r+2}'x_{r+2}' + \ldots + a_{1j}'x_j' + \ldots + a_{1k}'x_k'),\\
x_2' &= b_2' - (a_{2r+1}'x_{r+1}' + a_{2r+2}'x_{r+2}' + \ldots + a_{2j}'x_j' + \ldots + a_{2k}'x_k'),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_i' &= b_i' - (a_{ir+1}'x_{r+1}' + a_{ir+2}'x_{r+2}' + \ldots + a_{ij}'x_j' + \ldots + a_{ik}'x_k'),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x_r' &= b_r' - (a_{rr+1}'x_{r+1}' + a_{rr+2}'x_{r+2}' + \ldots + a_{rj}'x_j' + \ldots + a_{rk}'x_k'),
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

$$i = 1,\ 2,\ \ldots,\ r; \qquad r \leqslant m; \qquad r + k \leqslant n.$$

Sustituyendo la expresión de las variables básicas en la forma lineal e introduciendo las designaciones respectivas para las magnitudes constantes, presentaremos f en forma de una función lineal

$$f = F - \left(\sum_{j=r+1}^{k} c_j'x_j'\right). \quad (25)$$

En concordancia con el *método símplex*, para hallar la solución óptima sometemos el sistema de ecuaciones (24) y la función lineal (25) a transformaciones idénticas hasta que se infrinjan las condiciones de su realización, o sea, hasta que desaparezcan los coeficientes positivos de las variables en la forma (25). Pero como lo expuesto en los dos primeros parágrafos de este capítulo sobre la periodicidad se refiere también al problema de programación lineal, se puede afirmar lo siguiente:

El empleo de un número finito de transformaciones idénticas permite (excluyendo los casos de periodicidad) encontrar una solución no negativa del sistema de ecuaciones con la cual la forma toma el valor mínimo.

Se han propuesto varios métodos con el fin de evitar la periodicidad. Algunos de estos métodos al efectuar las transformaciones idénticas, exigen la realización de operaciones complementarias cada vez que ocurre la degeneración. Cuando ocurre la degeneración, el elemento pivote no se determina en forma única. Las operaciones complementarias, en este caso, en cada paso de las transformaciones idénticas, permiten elegir el elemento pivote de tal manera que la periodicidad se excluya. El caso de la degeneración, como ya se ha indicado, siempre tiene lugar cuando el vector $\mathbf{P}_0$ pertenece a uno o a varios hiperplanos básicos.

*) Después de una numeración correspondiente de las incógnitas.

El análisis de la resolución práctica de problemas de programación lineal confirma la suposición sobre la pequeña probabilidad de la periodicidad, además la composición de ejemplos con periodicidad ha encontrado dificultades bastante considerables debido a la necesidad de satisfacer un gran número de condiciones complementarias.

Aquellos pocos casos en los que se forma un ciclo pueden ser hallados directamente al resolver el problema en forma manual (sin computadora).

Por ejemplo, planteando el problema del cálculo de una solución no negativa del sistema

$$x_1 = 0 - (x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6),$$

$$x_2 = 0 - \left(\mathbf{2x_3} - x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6\right),$$

en el que la función lineal

$$f = 3 - (x_3 + x_4 + 3x_5 - 8x_6)$$

alcanza su menor valor, y efectuando una sucesión de transformaciones idénticas como en el ejemplo examinado en pág. 49, observamos que hemos llegado al grupo inicial de las variables básicas. Si no se presta atención a esto, el proceso de resolución puede resultar interminable, al mismo tiempo el valor de la función lineal quedará siempre constante.

Al observar la periodicidad hay que cambiar el orden de las transformaciones idénticas eligiendo otro elemento pivote. Así, en el ejemplo examinado, procediendo tal como se explica a continuación, establecemos que la función lineal f no tiene límite inferior:

$$x_1 = 0 - (x_3 - x_4 - x_5 + 3x_6),$$

$$x_2 = 0 - \left(\mathbf{2x_3} - x_4 - \frac{1}{2}x_5 + x_6\right),$$

$$f = 3 - (\underline{\underline{x_3}} + x_4 + 3x_5 - 8x_6),$$

$$x_3 = 0 - \left(\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{1}{4}x_5 + \frac{1}{2}x_6\right),$$

$$x_1 = 0 - \left(-\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_4 - \frac{3}{4}x_5 + \frac{5}{2}x_6\right),$$

$$f = 3 - \left(-\frac{1}{2}x_2 + \underline{\underline{\frac{3}{2}x_4}} + \frac{13}{4}x_5 - \frac{17}{2}x_6\right).$$

En el caso dado, el valor de la forma puede ser disminuido a cuenta del incremento del valor de x_4, pero como en la columna de los coeficientes de la variable x_4 no hay coeficientes positivos, o sea, que no hay ni un elemento pivote, esto quiere decir que no existe ningún límite para aumentar la variable x_4. Así la función f se hace ilimitada en su parte inferior.

Al resolver estos problemas en las computadoras electrónicas hay que prever en el programa la posibilidad de descubrir el regreso a grupos de variables básicas que ya se habían encontrado. Sólo en el caso de que se revele la periodicidad, se debe utilizar la parte del programa en la que se prevén las operaciones complementarias que excluyen la posibilidad de esta periodicidad.

La operación complementaria más sencilla es la elección de otro elemento pivote en el paso en el que se ha observado la repetición.

Ejemplo. Hallar el menor valor de la función lineal

$$f = 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 3x_4$$

en el conjunto de soluciones no negativas del sistema de ecuaciones:

$$0 = \frac{7}{2} - (x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4),$$

$$0 = \frac{3}{2} - (-2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4),$$

$$0 = 4 - (2x_1 + \mathbf{2x_2} + 8x_3 + x_4)$$

$$x_2 = 2 - \left(x_1 + 4x_3 + \frac{1}{2}x_4\right),$$

$$0 = \frac{3}{2} - \left(-2x_1 + \mathbf{3x_3} + \frac{3}{2}x_4\right),$$

$$0 = \frac{7}{2} - \left(-x_1 + 7x_3 + \frac{7}{2}x_4\right)$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_4\right),$$

$$x_2 = 0 - \left(\frac{11}{3}x_1 - \frac{3}{2}x_4\right),$$

$$0 = 0 - \left(\frac{11}{3}x_1\right) \quad \text{(¡}x_1\text{ puede ser sólo igual a cero!)}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}x_4\right), \qquad x_4 = 1 - (2x_3),$$
$$x_2 = 0 - \left(-\frac{3}{2}x_4\right), \quad x_2 = \frac{3}{2} - (3x_3),$$
$$f = \frac{7}{2} - \left(\underline{\underline{\frac{43}{2}}}x_4\right) \qquad f = -18 - (-43x_3)$$

$$f_{\text{mín}} = -18 \text{ con } x_1 = 0$$
$$x_3 = 0$$
$$x_4 = 1$$
$$x_2 = \frac{1}{2}$$

Ejemplo. Entre las soluciones no negativas del sistema de desigualdades:

$$-20x_1 + 12x_2 - 15x_3 \leqslant 60,$$
$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leqslant 6,$$
$$3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \leqslant 12,$$
$$-20x_1 - 15x_2 + 3x_3 \leqslant 60,$$
$$10x_1 + 5x_2 - 2x_3 \geqslant 10,$$
$$6x_1 + 7x_2 + 42x_3 \geqslant 42,$$

hallar la solución con la cual la forma lineal $f = x_1 + x_2 + x_3$ alcanza su valor mínimo.

Resolución. Introduciendo variables complementarias, convertimos el sistema de desigualdades en el sistema de ecuaciones:

$$y_1 = 60 - (-20x_1 + 12x_2 - 15x_3),$$
$$y_2 = 6 - (x_1 + 2x_2 - 3x_3),$$
$$y_3 = 12 - (3x_1 + 6x_2 + 4x_3),$$
$$y_4 = 60 - (-20x_1 - 15x_2 + 3x_3),$$
$$0 = 10 - (10x_1 + 5x_2 - 2x_3 - y_5),$$
$$0 = 42 - (6x_1 + 7x_2 + \underline{\underline{42x_3}} - y_6)$$

y lo sometemos a transformaciones idénticas:

$$x_3 = 1 - \left(\frac{1}{7}x_1 + \frac{1}{6}x_2 - \frac{1}{42}y_6\right),$$

$$y_1 = 75 - \left(\frac{125}{7}x_1 + \frac{87}{6}x_2 - \frac{15}{42}y_6\right),$$

$$y_2 = 9 - \left(\frac{10}{7}x_1 + \frac{5}{2}x_2 - \frac{3}{42}y_6\right),$$

$$y_3 = 8 - \left(\frac{17}{7}x_1 + \frac{32}{6}x_2 + \frac{4}{42}y_6\right),$$

$$y_4 = 57 - \left(\frac{143}{7}x_1 - \frac{93}{6}x_2 + \frac{3}{42}y_6\right),$$

$$0 = 12 - \left(\underline{\underline{\frac{72}{7}}}x_1 + \frac{16}{3}x_2 - \frac{2}{42}y_6 - y_5\right)$$

$$x_1 = \frac{7}{6} - \left(\frac{14}{27}x_2 - \frac{7}{72}y_5 - \frac{1}{216}y_6\right),$$

$$x_3 = \frac{5}{6} - \left(\frac{5}{54}x_2 + \frac{1}{72}y_5 - \frac{5}{216}y_6\right),$$

$$y_1 = 95\frac{5}{6} - \left(\frac{1383}{54}x_2 - \frac{665}{1512}y_6 - \frac{125}{72}y_5\right),$$

$$y_2 = 7\frac{1}{3} - \left(\frac{95}{27}x_2 - \frac{10}{72}y_5 - \frac{14}{216}y_6\right),$$

$$y_3 = 5\frac{1}{6} - \left(\frac{220}{54}x_2 + \frac{17}{72}y_5 + \frac{161}{1512}y_6\right),$$

$$y_4 = 80\frac{5}{6} - \left(-\frac{265}{54}x_2 - \frac{143}{72}y_5 - \frac{35}{1512}y_6\right).$$

Una de las soluciones no negativas del sistema de desigualdades es la solución $x_1 = \frac{7}{6}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{5}{6}$. Expresemos ahora la forma lineal por medio de las variables secundarias: $f = 2 - \left(-\frac{7}{18}x_2 - \frac{1}{12}y_5 - \frac{1}{36}y_6\right)$.

Como se puede advertir en la última expresión de la forma lineal, en la región de los valores no negativos de las variables es ya imposible continuar disminuyéndola. Por eso la primera solución $x_1 = \frac{7}{6}$; $x_2 = 0$; $x_3 = \frac{5}{6}$ ha resultado la óptima y el valor correspondiente de la forma lineal es $f_{\text{mín}} = 2$.

§ 10. SOBRE UN PROBLEMA DE MÍN-MÁX

Sean dados n vectores m-dimensionales $\mathbf{P}_j$ y el conjunto $T = \{t_j\}$ de los números reales t_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, que les corresponden.

Examinemos el conjunto $Y = \{y\}$ de todas las soluciones posibles no negativas $y = \{x_j\}$ de la ecuación

$$x_1\mathbf{P}_1 + x_2\mathbf{P}_2 + \ldots + x_n\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_0,$$

donde $\mathbf{P}_0$ es el vector dado en el espacio m-dimensional que no es igual a cero.

Convendremos en designar con x_j a las variables $x_j \neq 0$ en cualquiera de las soluciones y, y a los valores correspondientes t_j, con $\hat{t}_j$.

Con $\{\hat{t}_{jy}\}$ designaremos el sistema de números t_j que corresponden a las variables $x_j \neq 0$ en la solución y.

Acordaremos designar con t_y al número mayor del sistema de números $\{\hat{t}_{jy}\}$.

Así tendremos que

$$t_y = \max_j \{\hat{t}_{jy}\}.$$

Presentemos ahora el planteamiento del problema:

Entre todas las soluciones posibles $y \in Y$ hay que hallar una solución $y_{\text{ópt}}$ para la cual el correspondiente

$$t_{y_{\text{ópt}}} = \min_{y \in Y} [\max_j \{\hat{t}_{jy}\}],$$

o bien

$$t_{y_{\text{ópt}}} = \min_{y \in Y} (t_y).$$

Llamaremos óptima y designaremos con $y_{\text{ópt}}$ a la solución y (si ella existe) que satisfaga esta condición. Estos problemas se llaman problemas de mín-máx. (Un caso particular de este problema es el de transporte por el criterio del tiempo, que se estudia detalladamente en el capítulo IV).

Si un sistema de m ecuaciones algebraicas lineales con n variables

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m; \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

que corresponde a la ecuación vectorial $\sum_{j=1}^{n} x_j\mathbf{P}_j = \mathbf{P}_0$, se somete a transformaciones idénticas, podremos después de un número finito de pasos obtener una solución óptima.

Para ello es necesario:

1. Calcular la solución inicial no negativa del sistema de ecuaciones.

2. Hallar entre las variables básicas x_i aquella que corresponde al mayor valor de t_i, igual a $t_i^{\text{máx}}$.

3. Excluir del examen posterior las variables secundarias x_j, para las que $t_j \geqslant t_i^{\text{máx}}$.

4. Encontrar en la i-ésima línea, dentro del signo $\sum$ un coeficiente positivo a_{ij*} y determinar cuál es el elemento pivote a_{i*j*}, efectuando después las transformaciones idénticas.

5. Repitiendo (si eso es necesario) la etapa 4 varias veces, sacar la variable x_i del conjunto de las variables básicas y excluirla del examen posterior.

6. Repetir las etapas 2—5 hasta que, en cierto paso, en la línea correspondiente del sistema transformado de ecuaciones, todos los coeficientes de las variables se hagan no positivos.

La solución básica obtenida en este paso es la óptima.

En efecto, supongamos que después de cierto número de transformaciones idénticas, el sistema inicial toma la forma:

$$x_{i_1} = b_{i_1} - \left(\sum_j a_{i_1j}x_j\right),$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{i_k} = b_{i_k} - \left(\sum_j a_{i_kj}x_j\right); \quad a_{i_kj} \leqslant 0,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{i_p} = b_{i_p} - \left(\sum_j a_{i_pj}x_j\right).$$

Supongamos que la variable x_{i_k} corresponde al mayor valor de $t_{i_k}^{\text{máx}}$. Entonces, si $b_{i_k} < 0$, excluyendo x_{i_k} del examen posterior, obtendremos un sistema incompatible. (Si $b_{i_k} = 0$, de acuerdo con la observación II de la pág. 58 hay que tomar $x_{i_k} = 0$ y también $x_j = 0$ para las j para las que $a_{i_kj} \geqslant 0$. Después se continúan las transformaciones idénticas).

CAPÍTULO III

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE POR EL CRITERIO DEL COSTO

A continuación se estudia uno de los problemas típicos de la programación lineal, el llamado problema de transporte. Al planificar la transportación de mercancías con frecuencia surgen cuestiones sobre la organización más racional de los transportes. En algunas ocasiones eso significa la realización del cálculo de un plan de transportes según el cual los gastos sean los mínimos. En otros casos es más importante ganar tiempo y por eso se plantea el problema de la elección entre los posibles planes de transporte aquel que al realizarlo permita hacer llegar las mercancías a su usuario en menos tiempo.

El primer problema ha recibido la denominación de problema de transporte por el criterio del costo: el segundo, problema de transporte por el criterio de tiempo.

El primer problema es un caso particular del problema de programación lineal y puede ser resuelto con el método símplex el que se ha expuesto en el capítulo anterior. No obstante, las particularidades de este problema hacen que se resuelva más fácilmente con el método combinatorio. Cuando el número de puntos de partida y de destino es pequeño, éste método permite resolver semejantes problemas sin emplear computadoras. Cuando el número de puntos de partida y de destino es grande, el problema solamente puede ser resuelto con el empleo de las computadoras electrónicas. Por ejemplo, un problema de transporte con 30 puntos de partida y 40 puntos de destino se resuelve en la máquina "Strelá" en 25 – 30 minutos.

En el capítulo III se expone el método combinatorio de resolución del problema de transporte por el criterio de costo y se presenta un esquema de bloques simplificado para resolverlo en las máquinas computadoras.

§ 11. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Se puede formular el problema de transporte por el criterio del costo de la siguiente manera:

Designemos con a_1, a_2, ..., a_m la cantidad de unidades de mercancías de la misma clase que se encuentran en cada uno de los m puntos de partida, y con b_1, b_2, ..., b_n la cantidad de unidades de mercancías en cada uno de los n puntos de destino.

Sea x_{ij} la cantidad de unidades de mercancías que se planifica transportar desde el i-ésimo punto de partida hasta el j-ésimo punto de destino, y c_{ij}, el costo del transporte de una unidad de mercancías desde el i-ésimo punto de partida hasta el j-ésimo punto de destino.

Sea la cantidad de mercancías que se envía de todos los m puntos igual a la cantidad de mercancías que se necesita en los n puntos de destino. En tal caso se debe cumplir la condición

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{26}$$

Anotaremos las condiciones de problemas de este tipo en forma de tabla 2. Llamaremos solución del problema de transporte

Tabla 2

$i \backslash j$	b_1	b_2		b_j		b_n
a_1	c_{11} / x_{11}	c_{12} / x_{12}		c_{1j} / x_{1j}		c_{1n} / x_{1n}
a_2	c_{21} / x_{21}	c_{22} / x_{22}		c_{2j} / x_{2j}		c_{2n} / x_{2n}
a_i	c_{i1} / x_{i1}	c_{i2} / x_{i2}		c_{ij} / x_{ij}		c_{in} / x_{in}
a_m	c_{m1} / x_{m1}	c_{m2} / x_{n2}		c_{mj} / x_{mj}		c_{mn} / x_{mn}

a la matriz $X = (x_{ij})$ de un orden de $m \times n$, cuyos elementos no son negativos $x_{ij} \geqslant 0$, que satisface las condiciones

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ m), \tag{26$'$}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n). \tag{26$''$}$$

La condición (26′) significa que del i-ésimo punto de partida se saca toda la mercancía; la condición (26″) significa que la necesidad del j-ésimo punto es satisfecha por completo. El problema se reduce al cálculo de los valores no negativos de x_{ij}, con los que el costo general de transporte

$$C = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

sea el menor.

Empleando la definición del producto escalar de las matrices se puede formular de otra manera el problema de transporte por el criterio del costo.

Sea dada la matriz $C = (c_{ij})$, donde c_{ij} son números no negativos reales. Hay que hallar entre todas las soluciones X anotadas en forma matriz y que satisfagan las condiciones (26′) y (26″) una solución con la que el producto escalar (CX) alcance el menor valor. Llamaremos *óptima* a la solución presentada en forma de matriz X que satisface esta condición.

§ 12. SOLUCIONES BÁSICAS DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE POR EL CRITERIO DEL COSTO

Examinemos la matriz dada $C = (c_{ij})$ y una matriz-solución arbitraria $X = (x_{ij})$ $(i = 1, 2, ..., m)$; $(j = 1, 2, ..., n)$. Consideraremos que $m \leqslant n$, puesto que en el caso contrario se las podría cambiar de lugar.

Introduzcamos algunas definiciones.

Llamaremos *celda* a un par de números reales ij, *conjunto* a un grupo cualquiera de celdas. A una sucesión de celdas en forma i_1j_1, i_1j_2, i_2j_2, i_2j_3, ..., la llamaremos *cadena.* Una cadena será *cerrada* si tiene la forma

$$i_1j_1,\ i_1j_2,\ i_2j_2,\ ...,\ i_tj_t,\ i_tj_1.$$

Llamaremos *ciclo* a cualquier cadena cerrada. Un conjunto se llamará *cíclico* si contiene por lo menos un ciclo, y *acíclico* si no contiene ninguno.

A cada celda ij le corresponde un y sólo un elemento x_{ij} de la matriz-solución X, y también un y sólo un elemento c_{ij} de la matriz de costos C. Por eso cualquier conjunto de celdas es simultáneamente un conjunto de los respectivos elementos, tanto de los x_{ij} como de los c_{ij}.

Numeremos los elementos de la cadena cerrada Θ, yendo por ella, por ejemplo, en la dirección de las agujas del reloj. Diremos que los elementos de esta cadena que tiene números nones forman la *semicadena impar* Θ^n, y los elementos con números pares, la semicadena par Θ^p.

Acordaremos designar la suma de los elementos c_{ij} de la semicadena impar con $\sum_{\Theta^n} c_{ij}$, y a la suma de los elementos de la semicadena par, con $\sum_{\Theta^p} c_{ij}$.

TEOREMA. *Cualquiera que sea la solución X con un conjunto cíclico de elementos x_{ij} diferentes de cero, existe una solución Y con un conjunto acíclico de elementos y_{ij} tal que $(CY) \leqslant (CX)$ y en la que el número de elementos de la solución diferentes de cero es menor que el número de tales elementos de la solución X.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que los elementos x_{ij} diferentes de cero de la matriz X forman una cadena cerrada Θ_1. Comparamos las sumas $\sum_{\Theta_1^p} c_{ij}$ y $\sum_{\Theta_1^n} c_{ij}$; una de las sumas, por ejemplo $\sum_{\Theta_1^p} c_{ij}$, deberá ser tal que $\sum_{\Theta_1^p} c_{ij} \leqslant \sum_{\Theta_1^n} c_{ij}$.

Formamos a partir de la matriz $X = (x_{ij})$ una nueva matriz $X' = (x'_{ij})$ cambiando elementos en la cadena Θ_1 de la siguiente forma:

$$x'_{i_1j_1} = x_{i_1j_1} + x_{ij}^{\text{mín}}, \ \ldots, \ x'_{i_tj_t} = x_{i_tj_t} + x_{ij}^{\text{mín}},$$
$$x'_{i_1j_2} = x_{i_1j_2} - x_{ij}^{\text{mín}}, \ \ldots, x'_{i_tj_1} = x_{i_tj_1} - x_{ij}^{\text{mín}}.$$

Aquí i_1j_1, i_2j_2, ..., i_tj_t son las celdas de la semicadena impar Θ^n; i_1j_2, i_2j_3, ..., i_tj_1, las celdas de la semicadena par Θ^p; $x_{ij}^{\text{mín}}$ es el elemento menor en la semicadena impar Θ^n. Para todas las demás celdas ij tendremos $x'_{ij} = x_{ij}$.

Se puede advertir fácilmente que la matriz X', obtenida a partir de la matriz X al transladar por la cadena Θ el elemento $x_{ij}^{\text{mín}}$, también es una solución del problema de transporte. El número de todos los elementos diferentes de cero de la matriz X' se hará menor por lo menos en uno.

Como

$$(CX') = (CX) + \left(\sum_{\Theta^p} c_{ij} - \sum_{\Theta^n} c_{ij}\right) x_{ij}^{\text{mín}},$$

entonces, $(CX') \leqslant (CX)$.

Continuando la construcción de tales soluciones después de un número finito de pasos llegaremos a la solución Y, la que no tiene cadenas cerradas Θ de los elementos x_{ij} diferentes de cero, y $(CY) \leqslant (CX)$. El teorema queda demostrado.

COLORARIO. *Para encontrar aunque sea sólo una solución óptima es suficiente investigar todas las posibles soluciones X con conjuntos acíclicos de elementos x_{ij} diferentes de cero.*

Cualquier solución X, presentada en forma de matriz, cuyos elementos x_{ij} diferentes de cero forman un conjunto acíclico, se llama *básica.*

En general, en una matriz X que represente una solución cualquiera, puede haber distinto número de elementos x_{ij} diferentes de cero. No obstante, independientemente de la solución X que tomemos, ella tendrá no menos de n elementos diferentes de cero, lo que se deduce de la condición (26″) del § 11. Por otra parte, se cumplirá el teorema siguiente:

TEOREMA. *El número N de elementos x_{ij}, diferentes de cero, de cualquier solución básica satisface la condición $n \leqslant N \leqslant m + n - 1$, en la que m es la cantidad de puntos de partida, y n, la cantidad de puntos de destino.*

DEMOSTRACIÓN. Previamente nos convenceremos de que son justos dos lemas. Construiremos en un espacio $(m + n)$-dimensional $m \times n$ vectores y los pondremos en una concordancia mutua de un significado único con el conjunto de todas las celdas ij de la matriz $C = (c_{ij})$. Pondremos la celda ij en concordancia con el vector $\mathbf{P}_{ij}$ que tiene todos los componentes iguales a cero excluyendo el i-ésimo y el $m + j$-ésimo, cada uno de los cuales es igual a la unidad. Es evidente que a cualquier conjunto de celdas le corresponde cierto subconjunto de vectores y viceversa, a cualquier subconjunto de vectores le corresponde cierto conjunto de celdas.

LEMA 1. *Si el conjunto de vectores $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ es linealmente dependiente, el conjunto de celdas que le corresponde es cíclico.*

En efecto, supongamos que se sabe que el conjunto de vectores $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ es linealmente dependiente. Entonces existe una combinación lineal de estos vectores que lleva al vector cero $\mathbf{q}(0, 0, ..., 0)$ y por lo menos uno de los coeficientes es diferente de cero. Examinaremos sólo los vectores que entran en esta combinación con coeficientes diferentes de cero. Sea éste, por ejemplo, el vector $\mathbf{P}_{i_1j_1}$. Entonces en la combinación lineal obligatoriamente tiene que entrar por lo menos un vector con el mismo índice i_1, por ejemplo el $\mathbf{P}_{i_1j_2}$. Eso tiene lugar porque en el vector $\mathbf{q}$ todos los componentes son iguales a cero, pero como en la combinación entra el vector $\mathbf{P}_{i_1j_1}$, para transformar el i-ésimo componente en cero hay que tener en la combinación aunque sea un vector más con el mismo componente diferente de cero. Puesto que ahora entra un vector que tiene el componente j_2, entonces tiene que entrar por lo menos un vector más con el mismo componente, por ejemplo el vector $\mathbf{P}_{i_2j_2}$. Razonando similarmente construimos la sucesión de los vectores

$$\mathbf{P}_{i_1j_1},\ \mathbf{P}_{i_1j_2},\ \mathbf{P}_{i_2j_2},\ \mathbf{P}_{i_2j_3},\ \ldots$$

Ya que se tiene sólo un número finito de vectores, después de cierto número tenemos que llegar al vector $\mathbf{P}_{i_tj_t}$ y de él, al vector $\mathbf{P}_{i_tj_1}$. Esta sucesión de vectores corresponde al conjunto de celdas

$$i_1j_1,\ i_1j_2,\ i_2j_2,\ i_2j_3,\ \ldots,\ i_tj_t,\ i_tj_1,$$

que es cíclico.

LEMA 2. *Cualquier conjunto compuesto de $m + n$ celdas es cíclico.*

Para convencerse de la justeza de este lema es suficiente demostrar que cualquiera $(m + n)$ vectores entre los construidos son linealmente dependientes. Demostrémoslo.

Analicemos el vector $(m + n)$-dimensional.

$$Q(\overbrace{-1,\ -1,\ \ldots,\ -1}^{m\ \text{componentes}};\ \overbrace{+1,\ +1,\ \ldots,\ +1}^{n\ \text{componentes}}).$$

Este es ortogonal con relación a todos los $\mathbf{P}_{ij}$. De aquí se deduce que todos los vectores $\mathbf{P}_{ij}$ pertenecen al espacio $(m + n - 1)$-dimensional y por eso cualquiera $m + n$ de ellos son linealmente dependientes.

De la condición (26″) del § 11 y del último lema se deduce que $n < N < m + n$. En los ejemplos se puede advertir claramente que existen unos problemas para los que $N = n$ y otros para los que $N = m + n - 1$. Teniendo esto en cuenta, hacemos la conclusión definitiva de que N realmente satisface la condición $n \leqslant N \leqslant m + n - 1$ con lo que se demuestra el teorema.

De los lemas que se acaban de demostrar se deduce que el conjunto de vectores $\{\mathbf{P}_{ij}\}$ que corresponde a un conjunto acíclico de $m + n - 1$ celdas es la base de los vectores $\mathbf{P}_{ij}$ construidos en un espacio $(m + n)$-dimensional. Designaremos con la letra H un conjunto acíclico cualquiera de $m + n - 1$ celdas.

Teniendo en cuenta el mutuo y único significado de la relación entre todas las posibles bases del espacio $(m + n)$-dimensional y los conjuntos acíclicos de $m + n - 1$ celdas se pueden expresar las propiedades ya conocidas de las bases de los espacios multidimensionales aplicadas a los conjuntos acíclicos de $m + n - 1$ celdas de la siguiente manera:

1ª *propiedad.* Sea H_1 un cierto conjunto acíclico de $m + n - 1$

e $(ij) \bar{\in} H_1$ *). Entonces el conjunto H_2, obtenido al añadir (ij) al conjunto H_1, contiene un ciclo Θ y sólo uno.

2ª *propiedad.* Sea $(i', j') \neq (i, j)$ y $(i', j') \in \Theta$. Entonces el conjunto H_3, que se obtiene de H_2 al excluir la celda (i', j'), de nuevo es un conjunto acíclico de $m + n - 1$.

Los conjuntos H_1 y H_3 sobre los que se trata en las propiedades 1 y 2 se diferencian solamente en una celda.

Definición. Se llaman conjuntos acíclicos de $m + n - 1$ de una sustitución cada vez a dos conjuntos acíclicos de $m + n - 1$ que se diferencian solamente en una celda.

Examinemos una solución básica arbitraria $X = (x_{ij})$. Según el teorema (véase la pág. 75) el número N de elementos x_{ij} diferentes de cero satisface la condición $n \leqslant N \leqslant m + n - 1$. Los demás elementos $m \times n - N$ de la solución son iguales a cero.

Construyamos un conjunto acíclico H de $m + n - 1$ tal que todos los elementos x_{ij} diferentes de cero de la solución X se encuentren en las celdas de este conjunto.

Definición. Se llaman ceros seleccionados a los elementos x_{ij} de la solución X iguales a cero y situados en las celdas del conjunto acíclico H de $m + n - 1$.

Definición. Se llama *selección* al conjunto de elementos no cero x_{ij} de la solución básica X junto con los ceros seleccionados que lo complementan hasta el conjunto acíclico H de $m + n - 1$.

Definición. Se llaman *x-seleccionados* a los elementos c_{ij} de la matriz C que corresponden a los elementos de la elección X.

En consecuencia, la selección es la solución básica en la que de todos los elementos cero $x_{ij} = 0$ se han escogido aquellos que completan el conjunto de elementos no cero $x_{ij} \neq 0$ hasta un conjunto acíclico H de $m + n - 1$. Finalmente, llegamos a la deducción de que para encontrar aunque sea una solución óptima es suficiente investigar todas las posibles selecciones.

§ 13. ELECCIÓN ÓPTIMA

La metodología del cálculo de la solución óptima consiste en que, partiendo de cierta selección inicial, pasamos consecutivamente a otras selecciones con menor valor del producto escalar (CX) y después de un número finito de pasos llegamos a la

*) El signo $\bar{\in}$ significa que la celda ij no pertenece al conjunto H_1.

solución óptima. Así surge la necesidad de formar la primera selección.

Veamos el siguiente procedimiento para formar la primera selección:

Determinamos los elementos de la primera línea de la matriz $X = (x_{ij})$. Para ello buscamos y encontramos en la primera línea de la matriz $C = (c_{ij})$ el elemento menor. Sea este el elemento c_{1j_1}. Entonces suponemos que $x_{1j_1} = \text{mín}\,(a_1; b_{j_1})$. Si $a_1 > b_{j_1}$, encontramos en la misma línea el siguiente elemento menor que satisfaga a la condición $c_{1j_2} \geqslant c_{1j_1}$ y suponemos $x_{1j_2} = \text{mín}\,(a_1 - x_{1j_1};\ b_{j_2})$. Continuamos estos pasos hasta que no se satisfaga por completo la primera ecuación $a_1 = \sum_{j=1}^{n} x_{1j}$. Si en cierto paso de este proceso resulta que el resto de a_1 es exactamente igual al respectivo b_{j_k} entonces tomando x_{1j_k} igual a este resto $x_{1j_k} = b_{j_k}$, suponemos completamente que el siguiente valor de la variable respectiva será $x_{1j_{k+1}} = 0$. Después pasamos a la segunda línea, a la tercera, etc. En las columnas, cuyas ecuaciones están completamente satisfechas no se apunta el cero.

De aquí se deduce que la primera solución, obtenida de esta manera, es una selección, puesto que el número de elementos marcados es igual a $m + n - 1$ y entre ellos no hay ni una cadena cerrada.

Veamos otro ejemplo para mayor claridad. Hay que formar la primera solución para un problema de transporte determinado con la matriz presentada en la tabla 3.

Tabla 3

$a_i \setminus b_j$		5	10	20	15
		1	2	3	4
10	1	8	3	5	2 / 10
15	2	4 / 5	1 / 10	6 / 0	7
25	3	1	9	4 / 20	3 / 5

En la primera línea, el menor de los números (8, 3, 5, 2) es el número 2, por eso tomamos $x_{14} = \text{mín}\,(10;\ 15) = 10$. Como la mercancía del primer punto de partida ya está distribuida por completo, pasamos a la distribución de la mercancía del segundo punto de partida. Para ello encontramos en la segunda línea de la tabla 3 el número menor (4, 1, 6, 7). El número 1 es el menor.

Por eso suponemos que $x_{22} = \text{mín}\,(15;\ 10) = 10$. Como en este caso queda resto en el segundo punto de partida igual a $15 - 10 = 5$ unidades, buscamos en la segunda línea el siguiente elemento menor. Este será el número 4. Suponemos que $x_{21} = \text{mín}\,(15 - 10;\ 5) = 5$. Teniendo en cuenta que las necesidades del primer punto de destino están cubiertas por completo y que el resto en el segundo punto es igual a 0, encontramos el tercer elemento menor en la segunda línea. Tal elemento es el número 6. Por eso suponemos que $x_{23} = 0$. Ahora pasamos a la distribución de la mercancía del tercer punto de partida. Con este fin buscamos entre los números de la tercera línea (1, 9, 4, 3) el número menor. Como las necesidades del primer punto de destino están satisfechas por completo, no tomamos en cuenta en el cálculo el número 1 que se encuentra en el cruce de la tercera línea y la primera columna. Continuamos buscando el menor entre los números (9, 4, 3). Entre ellos el menor es el número 3. Suponemos que $x_{34} = \text{mín}\,(25;\ 15 - 10) = 5$. Después encontramos en la tercera línea el siguiente número menor que es el 4 y suponemos que $x_{33} = 20$.

Es fácil convencerse de que la distribución obtenida es la solución. Además la solución formada es selección. Efectivamente, el número de elementos elegidos es igual a $m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$ y ellos entre sí no forman ciclos.

Se puede advertir fácilmente que, por el contrario, cualquier elemento no elegido x_{ij} forma un ciclo y sólo uno con los elementos de la selección.

A continuación emplearemos el procedimiento explicado para formar las primeras soluciones.

Supongamos que se tiene la primera selección, la solución X_1 con el conjunto H_1. Sea el respectivo producto escalar (CX_1) igual a C_1. Evaluemos cada elemento c_{ij} que no entra en H_1 por medio de la expresión

$$\Delta_{ij} = \sum_{\Theta^n} c_{ij} - \sum_{\Theta^p} c_{ij},$$

en la que $\sum\limits_{\Theta^n} c_{ij}$ y $\sum\limits_{\Theta^p} c_{ij}$ son las sumas de los elementos de las semicadenas impar y par, respectivamente, de la única cadena cerrada que forma cada elemento c_{ij} con los x-seleccionados (el elemento evaluado c_{ij} se toma como el primero en la cadena Θ). Señalemos el elemento $c_{i_1 j_1}$ al que corresponde la menor evaluación $\Delta_1^{\text{mín}}$ y su cadena cerrada con los elementos x-seleccionados. Formamos la segunda selección X_2 para lo que traspasamos el elemento mínimo $x_{ij}^{\text{mín}}$ de la primera selección de la semicadena par a la semicadena impar. En este caso, si en la semicadena par hay algunos elementos x_{ij} iguales al menor $x_{ij}^{\text{mín}}$, entonces, para mayor certidumbre excluimos del conjunto H_1 la celda ij con el elemento $x_{ij}^{\text{mín}}$ que se encuentra la primera en la semicadena par al contornearla en la dirección de las agujas del reloj. En el lugar de la celda ij, excluida del conjunto H_1, introducimos la celda i_1j_1 a la que le corresponde $c_{i_1j_1}$ y el nuevo elemento de la selección $x_{i_1j_1} = x_{ij}^{\text{mín}}$ (observemos que a cuenta del desplazamiento del elemento $x_{ij}^{\text{mín}}$ por la cadena, en la selección X_2 pueden encontrarse varios elementos cero). Como la selección X_2 se diferencia de la selección X_1 solamente por los cambios en la cadena del elemento $c_{i_1j_1}$, entonces es justa la desigualdad

$$\sum_{\Theta^n} c_{i_1j_1} - \sum_{\Theta^p} c_{ij} < 0,$$

el producto escalar (CX_2) será menor que el (CX_1) en el valor de

$$[\sum_{\Theta^n} c_{i_1j_1} - \sum_{\Theta^p} c_{ij}]\, x_{ij}^{\text{mín}}.$$

Teniendo en cuenta que $x_{ij}^{\text{mín}}$ puede resultar igual a cero llegamos a la conclusión de que $C_1 \geqslant C_2$. Se puede repetir todo el esquema de procedimientos realizado y partiendo de la selección X_2 formar la selección X_3, etc. Como resultado se formará una sucesión de selecciónes $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ tal que la respectiva sucesión de productos escalares $C_1 \geqslant C_2 \geqslant ... \geqslant C_k \geqslant ...$ es una función no creciente del número de la selección.

Se llama óptima la selección X_k con el conjunto H_k si cada uno de los elementos c_{ij} que no entran en H_k tiene un valor negativo $\Delta \geqslant 0$.

Puesto que para cualquier elemento c_{ij} que no entra en el conjunto H_k es justa la desigualdad

$$\sum_{\Theta^n} c_{ij} - \sum_{\Theta^p} c_{ij} \geqslant 0,$$

el paso, por medio de sustituciones únicas en cada vez, de la selección X_k a cualquiera otra selección no puede disminuir el valor del producto escalar con relación al producto escalar C_k correspondiente a la selección X_k *).

*) A continuación se demostrará que la selección óptima es al mismo tiempo *la solución óptima.*

TEOREMA. *Para cualquier matriz $C = (c_{ij})$ de elementos reales en la que $a_i > 0$, $b_j > 0$, la sucesión de selecciones $X_1, X_2, ..., X_k, ...$ después de un número finito de pasos se acaba con una selección óptima.*

DEMOSTRACIÓN.

1-er caso. Si al pasar de una selección a otra, al formar la sucesión $X_1, X_2, ...$ en ninguna de las selecciones aparece $x_{ij} = 0$, entonces $x_{ij}^{\text{mín}}$ traspasado por la cadena también es diferente a cero. En este caso el valor del producto escalar en cada paso disminuye. Puesto que cuando m y n son finitos puede haber solamente un número finito de diferentes conjuntos H en cada uno de los cuales se define de una sola forma la selección, entonces no puede haber un número de pasos infinito.

2-o caso. Si al pasar de una selección a otra, en las nuevas pueden aparecer elementos x_{ij} con valores cero, surge la incertidumbre sobre la calidad de finita de la sucesión $X_1, X_2, ...$ Esta incertidumbre se basa en que en este caso $x_{ij}^{\text{mín}} = 0$ y el valor del producto escalar no disminuye. No obstante, esta incertidumbre se elimina por completo si simultáneamente al problema de transporte inicial se examina un problema con la misma matriz $C = (c_{ij})$, pero con

$$\begin{aligned} a'_i &= a_i + \varepsilon, && i = 1, 2, ..., m, \\ b'_j &= b_j, && j = 1, 2, ..., (n-1), \\ b'_n &= b_n + m\varepsilon, \end{aligned}$$

donde ε es un número positivo suficientemente pequeño. Llamemos a este segundo problema el *ε-problema.* Formamos para estos dos problemas las primeras selecciones X_1 y X_1^{ε}. Entonces como ε es pequeñísimo, los conjuntos H_1 y H_1^{ε} coincidirán y en la selección X_1^{ε} no habrá elementos cero $x_{ij}^{\varepsilon} = 0$. Efectivamente, la aparición de valores cero de x_{ij} en una selección del problema inicial ocurre en los casos en los que existen combinaciones de líneas y columnas tales que se cumple la igualdad

$$\sum_{i=i_1}^{i=iq} a_i = \sum_{j=j_1}^{j=jp} b_j.$$

Por eso la aparición de valores cero x_{ij} en el problema puede suceder en dos casos:

$$\text{a)} \sum_{i=i_1}^{i=iq} a_i + q\varepsilon = \sum_{j=j_1}^{j=jp} bj,$$

$$\text{b)} \sum_{i=i_1}^{i=iq} a_i + q\varepsilon = \sum_{j=j_1}^{j=jp} b_j + b_n + m\varepsilon.$$

Escogiendo ε diferente de las raíces de las ecuaciones expresadas en las condiciones a) y b) excluimos las posibilidades de que aparezcan elementos cero en la selección X_1^ε. Dado que la matriz $C = (c_{ij})$ es la misma para los dos problemas, coinciden los elementos C_{ij} con la mayor evaluación negativa, las cadenas cerradas de estos elementos con los elementos de las selecciones X_1 y X_1^ε, así como la situación en los conjuntos H_1 y H_1^ε de los elementos $x_{ij}^{\text{mín}}$ y $x_{ij}^{\varepsilon\text{mín}}$, destinados a ser transladados por la cadena. El paso de la selección X_1 a la selección X_2 en el problema inicial es de hecho el paso de la selección X_1^ε a la selección X_2^ε en el ε-problema. Estos razonamientos, teniendo en cuenta que ε es pequeñísimo, son correctos en cualquier paso. Como el ε-problema es un problema en el que se carece de $x_{ij} = 0$ cuando tiene lugar la disminución del producto escalar en cada paso, pues en este ε-problema después de un número finito de pasos llegaremos a la selección óptima X_k^ε. Debido a la coincidencia de las matrices $C = (c_{ij})$ y los conjuntos H_k y H_k^ε, la selección X_k también es óptima.

El teorema queda demostrado.

§ 14. INVARIABILIDAD DE LA SUCESIÓN DE SELECCIONES, EQUIVALENTES A LAS TRANSFORMACIONES DE LA MATRIZ DE LOS COSTOS

El cálculo de los elementos está ligado a un gran volumen de cómputo. Surge la tarea de definir transformaciones suficientemente sencillas de la matriz inicial $C = (c_{ij})$, que sin cambiar la sucesión de selecciones, reduzcan considerablemente el proceso de búsqueda de la selección óptima.

Para ello introduzcamos el concepto de transformación equivalente de una matriz.

Definición. Sea dada la matriz $C = (c_{ij})$ y los números arbitrarios r_1; r_2; ...; r_m; s_1; s_2; ...; s_n. Diremos que la matriz $D = (d_{ij})$ es equivalente a la matriz $C = (c_{ij})$, si ella ha sido obtenida de la matriz C mediante la fórmula $D = (c_{ij} + r_i + s_j)$.

TEOREMA. *La sucesión de selecciones es invariante con relación a las transformaciones equivalentes de la matriz.*

DEMOSTRACIÓN. Transformemos la matriz C en una matriz D equivalente. Formamos para la matriz C la selección inicial X_1 y partiendo de ella, por medio de una sola sustitución cada vez, formamos la sucesión X_1, X_2, X_3, ..., que converge hacia la selección óptima X_k.

Partiendo de la misma selección X_1, formamos para la matriz D la sucesión X_1, X_2, X'_3, ..., convergente hacia la selección óptima X'_k. Fácilmente se puede ver que la diferencia de las evaluaciones $\Delta_{ij}^C - \Delta_{ij}^D$ para cualesquiera dos elementos c_{ij}^C y c_{ij}^D que no entren en la selección X_1 es igual a cero:

$$\Delta_{ij}^C - \Delta_{ij}^D = [\sum_{\Theta^n}(c_{ij}^C) - \sum_{\Theta^p}(c_{ij}^C)] - [\sum_{\Theta^n}(c_{ij}^C + r_i + s_j) -$$

$$- \sum_{\Theta^p}(c_{ij}^C + r_i + s_j)] = [\sum_{\Theta^n}(c_{ij}^C) - \sum_{\Theta^p}(c_{ij}^C)] - [\sum_{\Theta^n}(c_{ij}) - \sum_{\Theta^p}(c_{ij}^C)] -$$

$$- \sum_{\Theta^n}(r_i + s_i) + \sum_{\Theta^p}(r_i + s_i) = 0$$

Las últimas dos sumas son iguales entre sí y tienen diferente signo puesto que cualquier número r_i (ó s_j) contenido en la semicadena impar, se contiene también en la semicadena par. Como la evaluación de los elementos en las matrices C y D coincide, coinciden también los elementos que tienen el menor valor. Por eso, al pasar de la selección X_1 a la selección siguiente tanto para la matriz C como para la matriz D, las selecciones X_2 y X'_2 coinciden. Estos razonamientos son justos en cualquier paso lo que quiere decir que la sucesión de selecciones X_1, X_2, ..., X_k no cambiará al realizar transformaciones idénticas en la matriz. El teorema queda demostrado.

Es evidente que esta afirmación no se altera al repetir las transformaciones idénticas en la matriz C.

Teniendo en cuenta que los elementos de cualquier selección no forman cadenas cerradas entre sí, en cada paso se puede realizar una transformación idéntica que reduce a cero los elementos x-seleccionados. Para ello, por ejemplo, es suficiente añadir a los elementos de cada columna (línea) un número con el signo contrario al de suma algebraica del número que se añade a la línea (columna) y el valor del elemento x-seleccionado que se reduce a cero.

La matriz con elementos cero x-seleccionados tiene la propiedad de que la evaluación de cualquiera de sus elementos que no sean los x-seleccionados será igual al mismo elemento. Por eso no es necesario hacer grandes cálculos para determinar las evaluaciones de todos los elementos. Para formar la selección siguiente es suficiente marcar el elemento negativo mayor (según su valor absoluto). Si ya todos los elementos de la matriz transformada resultan no negativos al mismo tiempo que los elementos x-seleccionados son cero, entonces la última selección es ya la óptima. De la invariabilidad de la sucesión de las matrices se deduce que la selección óptima es al mismo tiempo la solución óptima. Efectivamente, la solución óptima con la matriz transformada de manera equivalente, en la que los elementos x-seleccionados son iguales a cero, tiene la propiedad de que su producto escalar es menor (o por lo menos igual) que el producto escalar de cualquiera de las soluciones. Por esa razón la selección óptima que hemos encontrado es la solución óptima.

§ 15. ALGORITMO DEL CÁLCULO DE LA SOLUCIÓN ÓPTIMA

I. Los datos del problema se anotan en tablas.

II. Se define la primera selección.

III. Se reducen los elementos x-seleccionados a cero. Si después de eso los demás elementos de la tabla transformada resultan no negativos, entonces la primera selección ya es la óptima.

IV. Si después de la reducción a cero de los elementos x-seleccionados en la tabla hay números negativos, encontramos el elemento negativo de mayor valor absoluto.

V. Formamos una cadena cerrada del elemento negativo mayor con los elementos x-seleccionados reducidos a cero y componemos la segunda selección transpasando por la cadena el número x_{ij}, el que sea el menor en la semicadena par.

VI. Como el elemento negativo mayor ha resultado un x-seleccionado, lo reducimos a cero, pero de tal manera que queden iguales a cero los demás elementos x-seleccionados que corresponden a la nueva selección.

VII. Repetimos estos pasos hasta que lleguemos a una selección tal en la que en la tabla transformada todos los elementos x-seleccionados sean iguales a cero y los demás sean no negativos. Esta última selección será la solución óptima.

VIII. Para calcular los gastos de transporte que corresponde a la solución óptima, se deben reunir en una misma tabla la matriz inicial de costos y la última solución. La suma de los productos de los dos números que se encuentran en cada una de las celdas de la tabla determina el valor de los gastos de transporte.

Para mayor claridad, se presenta la interpretación geométrica del proceso de cálculo de la solución óptima (fig. 20).

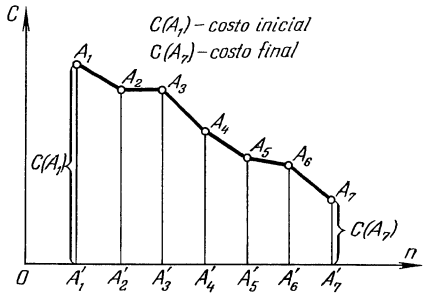

Fig. 20

Marquemos en el eje horizontal los números de las soluciones y en el eje vertical, los respectivos valores de los gastos.

Al comenzar, formamos la primera solución y encontramos uno de los puntos, el A_1. La reducción a cero de los elementos x-seleccionados nos lleva al punto A'_1 del eje horizontal. Si en este punto la tabla transformada no tiene elementos negativos, la solución que corresponde al punto A_1 es la óptima. Si la tabla transformada no tiene esta propiedad, encontramos el punto A_2; de nuevo volvemos al eje en el punto A'_2 y comprobamos si hemos alcanzado ya la solución óptima. Si no la hemos logrado todavía, encontramos el punto A_3, etc.

Después de un número finito de pasos se llegará forzosamente al último punto, el que corresponde a la solución óptima. Obtendremos la línea quebrada de los gastos que aparece en la fig. 20. Como se puede ver en el dibujo, después de cada paso el valor del gasto disminuye (o en todo caso no aumenta).

Continuemos la resolución del problema de transporte planteado en la pág. 79. En la tabla 4 se presenta la primera selección para este problema. Reduzcamos a cero los elementos x-seleccionados. Para ello restemos 4 de los elementos de la primera columna de la matriz de costos; de los elementos de la segunda columna restemos 1. Como resultado de esto se reducirán a cero los elementos x-seleccionados que se encuentran en los cruces de la segunda línea con la primera y la segunda columna. Restemos 6 de los elementos de la tercera columna, entonces el elemento x-seleccionado que se encuentra en el cruce de la segunda línea con la tercera columna también se reducirá a cero y el elemento de la matriz de costos que se encuentra en la intersección de la tercera línea con la tercera columna tomará un valor igual a $(4-6=-2)$. Añadamos a los elementos de la tercera línea de la matriz de costos el número 2 y de los elementos de la cuarta columna restemos el número 5. Entonces, los elementos que se encuentran en los cruces de la tercera línea con la tercera y la cuarta columnas se reducirán a cero.

Tabla 4

a_i \ b_j		5	10	20	15	
		1	2	3	4	
10	1	8	3	5	2 / 10	+3
15	2	4 / 5	1 / 10	6 / 0	7	
25	3	1	9	4 / 20	3 / 5	+2
		−4	−1	−6	−5	

Tabla 5

a_i \ b_j		5	10	20	15
		1	2	3	4
10	1	7	5	2	0 / 10
15	2	0 / 5	0 / 10	0 / 0	2
25	3	$\boxed{-1}$	10	0 / 20	0 / 5

Por último, queda reducir a cero el elemento x-seleccionado que se encuentra en el cruce de la primera línea con la cuarta columna. Para ello hay que añadir a los elementos de la primera línea el número 3. Como resultado de esta transformación idéntica de la matriz de costos, la tabla 4 se convertirá en la tabla 5.

Como se ve en la tabla 5, hay un elemento negativo (-1). Por eso no podemos estar seguros de que la primera selección es la óptima. Como en este ejemplo hay un solo elemento negativo, el mismo es el de mayor valor absoluto.

Formemos una cadena cerrada de este elemento con los x-seleccionados y compongamos la segunda selección. Eso se muestra en la tabla 6. Con este fin transpasemos de la semicadena par a la impar el número de unidades de mercancías que en la semicadena par sea el menor.

Como el número -1 ya es x-seleccionado, hay que reducirlo a cero, para lo cual sometemos de nuevo la matriz de costos a transformaciones idénticas. Añadimos a los elementos de la primera columna de la tabla 6 un número igual a 1. Obtendremos como resultado la tabla 7 en la que no hay ni un elemento negativo, y todos los elementos x-seleccionados son iguales a cero.

Tabla 6

a_i \ b_j		5	10	20	15
		1	2	3	4
10	1	7	5	2	(0) 10
15	2	0 [2]	(0) 10	(0) [3] 5	2
20	3	(−1) [1] 5	10	(0) [4] 15	(0) 5
		+1			

Tabla 7

a_i \ b_j		5	10	20	15
		1	2	3	4
10	1	8	5	2	(0) 10
15	2	1	(0) 10	(0) 5	2
25	3	(0) 5	10	(0) 15	(0) 5

Tabla 8

a_i \ b_j		5	10	20	15
		1	2	3	4
10	1	8	3	5	(2) 10
15	2	4	(1) 10	(6) 5	7
25	3	(1) 5	9	(4) 15	(3) 5

La selección presentada en la tabla 7 es, basándonos en lo indicado, la solución óptima. Reunimos en una sola tabla 8 la matriz de costos inicial y la solución óptima. El gasto de transporte que corresponde a este plan es $C = 2 \cdot 10 + 5 \cdot 6 + 10 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 5 = 140$ unidades de costo.

Según este plan hay que organizar el transporte de la siguiente manera (fig. 21): Toda la mercancía del primer punto de partida se transporta al cuarto consumidor; el segundo punto de partida abastece con 10 unidades de mercancía al segundo consumidor y con 5, al tercero; desde el tercer punto de partida se tansportan 5 unidades de mercancías al primer consumidor, 15 al tercero y las 5 unidades de mercancías restantes se envían al cuarto consumidor. Con este plan, el gasto de transporte (a igualdad de las demás condiciones) será el mínimo.

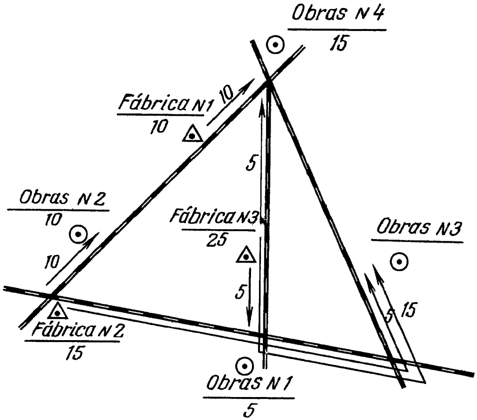

Fig. 21

Examinemos un ejemplo más complicado.

Ejemplo. Hallar el plan de transporte óptimo de una mercancía homogénea desde cuatro puntos de partida hasta seis puntos de destino para las condiciones definidas en la tabla 9. En esta tabla a_i y b_j se miden en miles de toneladas y c_{ij}, en miles de rublos.

Tabla 9

a_i \ b_j	2	4	5	3	2	6
5	2	4	3	1	4	5
7	3	3	2	3	1	3
4	1	5	2	1	4	5
6	2	4	1	3	3	6

Escribamos otra vez la tabla inicial, introduzcamos en la parte inferior de las celdas los números de la selección inicial y presentemos todo el proceso de obtención de la solución óptima como una sucesión de las tablas 9a, b, c, d, e, f.

Tabla 9a

Primera selección $C_1 = 75$

	2	4	5	3	2	6	
5	2 / 2	4	3 / 0	1 / 3	4	5	
7	3	3	2 / 5	3	1 / 2	3 / 0	+1
4	1	5 / 4	2	1	4	5 / 0	−1
6	2	4	1	3	3	6 / 6	−2
	−2	−5	→	→	−2	−4	
		+1	−3	−1	←	←	

Reducimos a cero los elementos x—seleccionados de la tabla

Tabla 9b

Se marca con un cuadrado el elemento que se introduce en la solución

0 / 2	0	0 / 0	0 / 3	2	1	−4
2	0	0 / 5	3	0 / 2	0 / 0	
−2	0 / 4	−2	−1	1	0 / 0	
−2	−2	$\boxed{-4}$	0	−1	0 / 6	
+4		+4	+4			

Traspasamos 5 unidades por la cadena. El gasto disminuye en 20 unidades

Tabla 9c

El elemento que se excluye de la solución aparece sombreado

Segunda selección $C_2 = 55$

0 / 2	$\boxed{-4}$	0 / 0	0 / 3	−2	−3	+4
6	0	4	7	0 / 2	0 / 5	
2	0 / 4	2	3	1	0 / 0	
2	−2	0 / 5	4	−1	0 / 1	
−4			−4			

Transpasamos 0 unidades por la cadena. El gasto queda el mismo

Tabla 9d

Primera cadena

Tercera selección $C_3=55$

0 / 2	0 / 0	4	0 / 3	2	1	
2	0	4	3	0 / 2	0 / 5	
$\boxed{-2}$	0 / 4	2	−1	1	0 / 0	
−2	$\boxed{-2}$	0 / 5	0	−1	0 / 1	
+2		−2				

Segunda cadena

Transpasamos por la primera cadena 2, por la segunda 1. El gasto disminuye en $2\times2+2\times1=6$ unidades

Tabla 9e

Cuarta selección $C_4=49$

2	0 / 2	2	0 / 3	2	1	−1
4	0	2	3	0 / 2	0 / 5	
0 / 2	0 / 1	0	$\boxed{-1}$	1	0 / 1	
2	0 / 1	0 / 5	2	1	2	−1
	+1	+1	+1			

Transpasamos una unidad por cadena. El gasto disminuye en $1\times1=1$ unidad

Tabla 9f

Quinta selección $C_5=48$

1	0 / 3	2	0 / 2	1	0*
4	1	3	4	0 / 2	0 / 5
0 / 2	1	1	0 / 1	1	0 / 1
1	0 / 1	0 / 5	2	0*	7

Solución óptima

Unamos la tabla inicial de costos y la solución óptima (tabla 10).

En la última tabla se indica cómo hay que organizar el transporte para garantizar el mínimo de gastos. La variante óptima en comparación con la primera variante garantiza una disminución de los gastos de transporte de 27 mil rublos, ya que estos gastos en la primera variante son de 75 mil rublos y en la óptima sólo de 48 mil rublos.

Tabla 10

$a_i \backslash b_j$	2	4	5	3	2	6
5	2	4 / 3	3	1 / 2	4	5
7	3	3	2	3	1 / 2	3 / 5
4	1 / 2	5	2	1 / 1	4	5 / 1
6	2	4 / 1	1 / 5	3	3	6

Es de interés observar que la tabla que contiene la variante óptima (la 5ª selección) se indica no sólo la única solución óptima, sino todas las soluciones con los mismos gastos.

Efectivamente, en esta tabla hay elementos cero que no están marcados con un círculo. Marquémoslos con una estrella. Cada uno de estos elementos forma una cadena cerrada con los elementos de la solución.

Empleando con las reglas anteriores el procedimiento de una sola sustitución cada vez se pueden obtener otras soluciones que tienen los mismos gastos.

Esto permite tomar como óptima una solución, por ejemplo, como la presentada en la tabla 11. Los gastos correspondientes a este plan de transporte también son iguales a $C = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 5 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 48$.

Fácilmente se ve que en este caso cada cadena cerrada compuesta sólo de elementos cero, tiene la propiedad de que son iguales las sumas de los gastos en las semicadenas par e impar de la respectiva cedena cerrada de la tabla inicial lo que permite traspasar $x_{ij}^{\text{mín}}$ por la cadena sin alterar el gasto total. En una serie de casos resulta muy útil definir todas las soluciones óptimas. Como veremos más adelante, aplicando al conjunto de soluciones óptimas el procedimiento de elección de la variante óptima de

Tabla 11

1	0 / 3	2	0 / 1	1	0 / 1
4	1	3	4	0 / 2	0 / 5
0 / 2	1	1	0 / 2	1	0
1	0 / 1	0 / 5	2	0	1

transporte bajo el criterio del tiempo, se puede encontrar un plan de transporte que se realice en un tiempo mínimo.

Por último, refirámonos a la composición de la cadena cerrada formada por el elemento negativo mayor con los elementos x-seleccionados. Cuando m y n no son muy grandes, las cadenas se ven directamente como en los ejemplos examinados anteriormente. En cambio, si m y n son relativamente grandes, la búsqueda de la cadena cerrada se realiza de la forma más sencilla de la manera siguiente: se tachan las líneas y las columnas que contienen un cero marcado (puesto que para componer la cadena hay que tener no menos de dos ceros en la línea o en la columna); después de tachar la primera, se tacha la segunda, etc., hasta que lleguemos a una situación en la que enseguida se vea la cadena cerrada.

Por cuanto la resolución detallada de un ejemplo que tenga una tabla de grandes dimensiones nos ocuparía mucho lugar, aquí nos limitaremos a examinar un caso en el que se debe hallar la cadena cerrada. Esto se presenta en la tabla 12. Al principio tachamos todas las columnas que contienen un cero (claro está, excluyendo la columna en la que se encuentra el elemento negativo mayor). Después examinemos todas las líneas y tachamos aquellas en las que ha quedado un cero. De nuevo revisamos las columnas y hacemos lo mismo.

Ahora para componer la cadena cerrada solamente hay que unir los elementos que quedan comenzando por el número negativo

Tabla 12

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	
			$\cancel{0}$				$\cancel{0}$							$\cancel{0}$	1
			$\cancel{0}$						$\cancel{0}$						2
			$\cancel{0}$			0						−9			3
	0	$\cancel{0}$				0									4
	0				$\cancel{0}$			0							5
								$\cancel{0}$							6
0								0			$\cancel{0}$				7
0										0					8
				0						0					9
				0								0	$\cancel{0}$		10

y revisando los elementos cero, por ejemplo, en la dirección de las agujas del reloj.

Hemos estudiado la metodología de resolución de los problemas de transporte bajo el criterio del costo a condición de que $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. En este caso, la cantidad de mercancía en todos los puntos de partida es igual a la cantidad de mercancía necesaria en todos los puntos de destino.

Si

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

Tabla 13

a_i \ b_j	30	40	30
70	6 / 10	4 / 0	5 / 30
40	8	3 / 40	2
50	7	5	6
20	5 / 20	2	2

$\Sigma a_i = 180$; $\Sigma b_j = 100$; $b_4 = 80$

Tabla 14

a_i \ b_j	30	40	30	80
70	6 / 10	4 / 30	5	0 / 30
40	8	3 / 10	2 / 30	0
50	7	5	6	0 / 50
20	5 / 20	2	2	0

entonces introducimos un punto de destino ficticio con un consumo

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$$

y con un costo de transporte en este punto $c_{i,\,n-1} = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, m$.

Ejemplo. En cuatro depósitos hay respectivamente 70, 40, 50 y 20 toneladas de combustible. Se debe planificar el transporte de combustible a tres consumidores de tal manera que el gasto del transporte sea mínimo. En la tabla 13 se dan las condiciones del problema. En este caso es preferible formar la primera solución por las columnas. Esta solución está marcada con círculos en la tabla 14.

Es fácil comprobar que la solución presentada en la tabla 14 es la óptima. De acuerdo con esta solución al primer consumidor hay que llevarle 10 toneladas del primer depósito y 20 toneladas del cuarto; al segundo consumidor, 30 toneladas del primer depósito y 10 toneladas del segundo; al tercer consumidor, 30 toneladas del segundo depósito; además en el primer depósito quedan aún 30 toneladas de combustible; en estas condiciones no es conveniente emplear las reservas del tercer depósito.

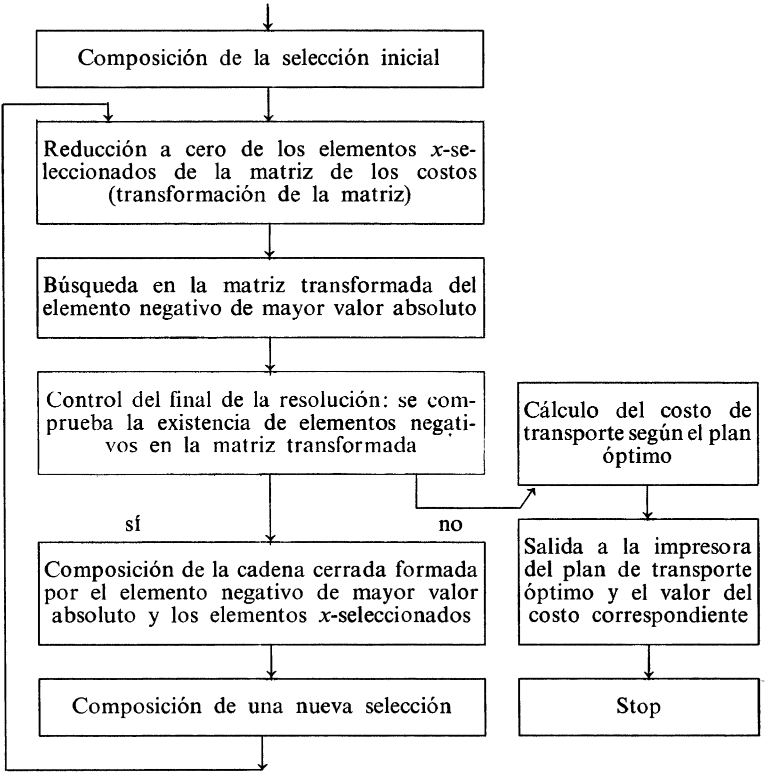

Fig. 22

El algoritmo expuesto para la resolución del problema de transporte bajo el criterio del costo puede presentarse como un proceso rutinario de operaciones aritméticas y lógicas. Este proceso se realiza fácilmente en una máquina computadora electrónica.

En la fig. 22 se ilustra un esquema de bloques para la resolución de este problema. A base de este esquema de bloques fue preparado un programa para la resolución del problema en la computadora "Strelá".

Para una matriz de un orden de $m \times n < 500$ el tiempo de resolución del problema no es mayor de $8-10$ minutos; para una matriz de un orden de $m \times n < 1500$ pueden hacer falta para resolver un problema hasta $25-40$ minutos; para una matriz de un orden $m \times n$ de varios miles hacen falta hasta $8-10$ horas para resolver un problema en la computadora "Strelá".

Por ejemplo, en la computadora "Strelá" se resolvió el siguiente problema de transporte.

Desde nueve puntos de partida hay que transportar una mercancía a catorce puntos de destino (tabla 15). La selección inicial obtenida en la computadora está representada en la tabla 16.

Tabla 15

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$a_i \backslash b_j$	18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33	18	3	15	7	6	1	12	8	4	3	17	19	3	6
2	18	15	20	17	3	4	4	3	6	11	14	2	13	6	1
3	2	4	8	11	2	7	1	4	7	3	11	17	16	2	3
4	38	9	7	3	13	13	14	11	9	4	5	19	18	3	7
5	14	7	16	15	1	7	2	4	18	13	3	1	19	20	3
6	23	11	17	14	9	7	3	8	8	7	4	5	11	13	14
7	31	9	3	1	9	2	16	19	3	7	11	14	2	4	7
8	38	12	12	11	9	3	13	14	9	7	8	7	6	3	15
9	3	7	1	4	5	8	13	20	8	6	4	19	17	1	3

Tabla 16

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$a_i \backslash b_j$	18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33		13				12				8				
2	18											11			7
3	2				2										
4	38			21						6				11	
5	14				5						0	9			
6	23					13				9	1				
7	31					5			18				8		
8	38	18						8	12						
9	3							3							

Tabla 17

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	$a_i \backslash b_j$	18	13	21	7	18	12	11	30	15	9	20	8	11	7
1	33		13				12			8					
2	18							11							7
3	2	2													
4	38	11		20						7					
5	14	1			7							6			
6	23										9	14			
7	31			1					30						
8	38	1				18							8	11	
9	3	3													

La selección final que corresponde a la solución óptima se ilustra en la tabla 17.

Es fácil calcular que los gastos que corresponden a la selección inicial son de un valor igual a $C = 971$ y los que corresponden a la óptima, $C = 703$.

El tiempo de resolución de este ejemplo (en un solo cálculo) fue de menos de un minuto.

Otro problema de transporte con una matriz de costos de $m \times n = 30 \times 38$ (solucionada en dos cálculos) fue resuelto en un lapso de 37 minutos.

CAPÍTULO IV

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE TRANSPORTE POR EL CRITERIO DEL TIEMPO

La economía de tiempo, al elaborar un plan de transporte, es absolutamente necesaria en una serie de casos prácticos importantes. Por ejemplo, al transportar productos de fácil deterioro es necesario su traslado a los puntos de destino en el plazo mínimo posible. En la época de la cosecha un factor muy importante es el rápido traslado del grano a los centros de acopiamiento.

Los problemas de este tipo son los de transporte por el criterio del tiempo. A continuación se estudia uno de los algoritmos de la resolución del problema de transporte por el criterio del tiempo.

§ 16. PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA

Sean dados m puntos de partida de una mercancía homogénea y n puntos de destino. Sean $a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_m$ la cantidad de unidades de mercancía que se encuentran en al primero, segundo, ..., i-ésimo, ..., m-ésimo puntos de partida y $b_1, b_2, ..., b_j, ..., b_n$ la cantidad de unidades de mercancía que tienen que ser entregadas en cada uno de los n puntos de destino. Sea t_{ij} el tiempo (en días o en horas) necesario para el transporte de la mercancía desde el i-ésimo punto de partida hasta el j-ésimo punto de destino. Sea x_{ij} la cantidad de unidades de mercancía que planificamos transladar del i-ésimo punto de partida al j-ésimo punto de destino. Hay que hallar el plan de transporte óptimo, es decir, unos números no negativos x_{ij} con los que el tiempo de transporte de todas las mercancías necesarias a todos los puntos de destino sea el mínimo.

El planteamiento matemático de este problema se reduce a lo siguiente:

Se da un sistema de ecuaciones algebraicas lineales:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = 1,\ 2,\ ...,\ m), \\ &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = 1,\ 2,\ ...,\ n), \end{aligned}\right\} \qquad (27)$$

en las que los números a_i y b_j satisfacen la condición

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j.$$

Sea, además, dada la matriz del tiempo $T=(t_{ij})$. A cada solución no negativa $X=(x_{ij})$ del sistema de ecuaciones (27), es decir, a cada plan de transporte le corresponde una determinada matriz $T_X=(t_{ij}^*)$, cuyos elementos son $t_{ij}^*=t_{ij}$ si $x_{ij}>0$ y $t_{ij}^*=0$ si $x_{ij}=0$. Llamemos $t_X^{\text{máx}}$ el elemento mayor de la matriz T_X.

Se debe hallar una solución no negativa $X_{\text{ópt}}$ para la cual $t_{X_{\text{ópt}}}^{\text{máx}}$ sea el menor entre todos los $t_X^{\text{máx}}$ que corresponden a diferentes soluciones no negativas X. Es cómodo presentar las condiciones de este problema en forma de la tabla 18.

Tabla 18

a_i \ b_j	b_1	b_2	·	b_j	·	b_n
a_1	t_{11} / x_{11}	t_{12} / x_{12}	·	t_{1j} / x_{1j}	·	t_{1n} / x_{1n}
a_2	t_{21} / x_{21}	t_{22} / x_{22}	·	t_{2j} / x_{2j}	·	t_{2n} / x_{2n}
·	·	·	·	·	·	·
a_i	t_{i1} / x_{i1}	t_{i2} / x_{i2}	·	t_{ij} / x_{ij}	·	t_{in} / x_{in}
·	·	·	·	·	·	·
a_m	t_{m1} / x_{m1}	t_{m2} / x_{n2}	·	t_{mj} / x_{mj}	·	t_{mn} / x_{mn}

Tabla 19

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2
15	4	1	6	7
25	1	9	4	3

Como se puede mostrar fácilmente, este problema no se resuelve con la ayuda del algoritmo que fue descrito para el problema de transporte por el criterio de gastos.

Por ejemplo, la solución para la que la forma lineal $C=\sum t_{ij}x_{ij}$ alcanza el valor mínimo, como regla general, no es la óptima por el tiempo. Para el ejemplo dado en la tabla 19 e ilustrado en la fig. 21 se presenta la solución óptima por el mínimo de la forma lineal $C=\sum t_{ij}x_{ij}$ en la tabla 20. En la tabla se ve que toda la mercancía será trasladada hasta los puntos de destino solamente después de seis días. Por otra parte, la variante de transportes presentada en la tabla 21 corresponde a un cierto valor mayor de la forma lineal, pero el traslado de las mercancías a los puntos de destino se cumple en cuatro días.

Al transportar productos de fácil deterioro los gastos en el recorrido adicional de vagones (camiones) se cubren con la conservación de la calidad de miles de toneladas de productos alimenticios destinados para la población.

La demostración del método de resolución que se describe más adelante se deduce de la teoría general de la programación lineal que fue expuesta en el capítulo II.

Veamos la descripción general del método en la resolución del problema que se plantea con la tabla 22. En esta tabla se ve que hay que transportar 125 unidades de mercancías que se encuentran en seis puntos de partida a siete puntos de destino. Supongamos que los números de esta tabla significan el tiempo necesario, en horas, para el transporte de la carga desde el respectivo punto de partida hasta los de destino. Por ejemplo, el número 31 que se encuentra en el cruce de la cuarta línea con la cuarta columna

Tabla 20

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2 / 10
15	4	1 / 10	6 / 5	7
25	1 / 5	9	4 / 15	3 / 5

$C = 2\cdot10 + 6\cdot5 + 1\cdot10 + 3\cdot5 + 4\cdot15 + 1\cdot5 = 140$

Tabla 21

a_i \ b_j	5	10	20	15
10	8	3	5	2 / 10
15	4 / 5	1 / 10	6	7
25	1	9	4 / 20	3 / 5

$C = 2\cdot10 + 3\cdot5 + 4\cdot20 + 1\cdot10 + 4\cdot5 = 145$

Tabla 22

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12 / x_{11}	13 / x_{12}	34 / x_{13}	7 / x_{14}	8 / x_{15}	29 / x_{16}	19 / x_{17}
7	7 / x_{21}	18 / x_{22}	36 / x_{23}	40 / x_{24}	38 / x_{25}	6 / x_{26}	10 / x_{27}
45	11 / x_{31}	20 / x_{32}	30 / x_{33}	21 / x_{34}	21 / x_{35}	29 / x_{36}	31 / x_{37}
30	27 / x_{41}	12 / x_{42}	39 / x_{43}	31 / x_{44}	5 / x_{45}	36 / x_{46}	12 / x_{47}
12	17 / x_{51}	17 / x_{52}	32 / x_{53}	36 / x_{54}	22 / x_{55}	16 / x_{56}	14 / x_{57}
16	15 / x_{61}	38 / x_{62}	16 / x_{63}	33 / x_{64}	23 / x_{65}	40 / x_{66}	28 / x_{67}

muestra que el tiempo de transporte de la carga desde el cuarto punto de partida hasta el cuarto punto de destino es 31 horas. Hay que hallar el plan de transporte óptimo por el tiempo.

Representemos la tabla anotada (llamémosla la tabla pequeña) en forma de una tabla grande (tabla 23).

La línea superior contiene los índices de las variables x_{ij} desde 11 hasta 67, la inferior, los valores de t_{ij} contenidos en las respectivas celdas ij. Por ejemplo, el par de números 43 que están en la línea de arriba significa el lugar de la variable x_{43}, el valor del tiempo t_{43} que corresponde a esta variable es 39; por eso 43 y 39 se encuentran en una columna.

Toda la tabla está dividida en zonas. El número de zonas es igual al número de puntos de partida o, lo que es lo mismo, al número de líneas en la tabla inicial. Además, la tabla está dividida horizontalmente. En la mitad superior de las zonas hay seis líneas: el número de líneas en la tabla inicial; en la parte inferior, hay siete líneas: el número de sus columnas. En la semizona superior al nivel de cada número figuran siete signos menos en cada respectiva zona vertical. Por ejemplo, al nivel del 30, los menos están anotados en la cuarta zona. Si examinamos la tabla inicial veremos que esta anotación significa la expresión del resto de la carga en el cuarto punto de partida:

$$30 - x_{41} - x_{42} - x_{43} - x_{44} - x_{45} - x_{46} - x_{47}.$$

Similarmente a esto, en la parte inferior la colocación de los signos menos en cada línea expresa la falta de mercancía en los puntos de destino. Por ejemplo, la colocación de los menos en la línea donde está el 27 indica que la falta de mercancía en el punto de destino que corresponde a la cuarta columna es igual a

$$27 - x_{14} - x_{24} - x_{34} - x_{44} - x_{54} - x_{64}.$$

Con otras palabras, la colocación de los menos en la tabla corresponde a las ecuaciones que expresan las condiciones del problema.

Construyamos la primera solución utilizando el procedimiento empleado en el capítulo III. Distribuyamos las 15 unidades del primer punto de partida entre los puntos de destino hasta los que el tiempo del recorrido es el menor; las 7 unidades del segundo punto de partida, entre los puntos de destino que todavía no están abastecidos hasta los que el tiempo del recorrido es el menor, etc., etc. Así se forma la primera solución presentada en la tabla 24 que, en general, puede no ser la óptima. Como se ve,

Tabla 23

	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	24	25	26	27	31	32	33	34	35	36	37	41	42	43	44	45	46	47	51	52	53	54	55	56	57	61	62	63	64	65	66	67
= 15	|	|	|	|	|	|	|																																			
= 7								|	|	|	|	|	|	|																												
= 45															|	|	|	|	|	|	|																					
= 30																						|	|	|	|	|	|	|														
= 12																													|	|	|	|	|	|	|							
= 16																																				|	|	|	|	|	|	|
= 20	|							|							|							|							|							|						
= 13		|							|							|							|							|							|					
= 11			|							|							|							|							|							|				
= 27				|							|							|							|							|							|			
= 9					|							|							|							|							|							|		
= 5						|							|							|							|							|							|	
= 40							|							|							|							|							|							|
	12	13	34	7	8	29	19	7	18	36	40	38	6	10	11	20	30	21	21	29	31	27	12	39	31	5	36	12	17	17	32	36	22	16	14	15	38	16	33	23	40	28

Tabla 24

$a_i \diagdown b_j$	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 15	8	29	19
7	7 2	18	36	40	38	6 5	10
45	11 18	20 13	30	21 12	21 2	29	31
30	27	12	39	31	5 7	36	12 23
12	17	17	32	36	22	16	14 12
16	15	38	16 11	33	23	40	28 5

esta composición elemental nos ha llevado a una solución cuya realización exige 28 horas para el transporte de la mercancía. Eso nos permite, a continuación, excluir de la revisión las celdas que tienen $t_{ij} > 28$, lo que se ha hecho en la tabla anexa.

Para la composición de la siguiente variante de solución, cuya realización exija menos de 28 horas, dirijámonos a la tabla grande. Para los datos de esta tabla, la composición de la selección se hace de la siguiente manera: en la línea inferior de los valores t_{ij} se halla el menor de los números de la primera zona. Ese es el número 7 que corresponde a la columna 14, o sea, a la variable x_{14}. Examinando esta columna nos convencemos de que podemos hacer x_{14} igual a 15, ya que la reserva de mercancía es de 15 unidades y la necesidad, de 27. Eso permite anotar la variable x_{14} a la izquierda de la igualdad en la primera línea y suprimir el signo menos que se encuentra en el cruce de la primera línea y la columna 14. El segundo menos de esta columna que se encuentra al nivel del número 27, también se puede suprimir, y de la línea que corresponde al número 27 se resta la línea que corresponde al número 15.

En las líneas primera y décima de la primera zona han habido cambios. Estas líneas tienen ahora la siguiente forma:

$$x_{14} = 15\,|-|-|-||-|-|-|.$$

. . . .

$$= 12\,|+|+|+||+|+|+|.$$

Pasamos a la segunda línea y a la segunda zona. Hallamos el menor de los números t_{ij} de la segunda zona. Ese es el número 6 que corresponde a la variable x_{26}. Revisando la columna verticalmente, elegimos el menor de los dos números que se encuentran a la izquierda al nivel de los signos menos de esta columna. Ese es el número 5. Anotemos la variable x_{26} a la izquierda de la igualdad enfrente del 5 suprimiendo el menos que se encuentra en el cruce de esta línea y la columna 26. Suprimimos también el menos del cruce de la segunda línea y la columna 26, y de la segunda línea que corresponde al número 7 restamos la línea correspondiente al número 5. En la segunda línea queda el número 2. Eso significa que del segundo punto de partida el producto no está todavía distribuido entre los puntos de destino. Por eso, en la línea de los valores de t_{ij} de la segunda zona hallamos el número siguiente por su valor. Ese es el número 7 que se encuentra en la columna de la variable x_{21}. Revisando la columna encontramos el menor de los números de la izquierda que se encuentran al nivel de los menos de la columna (20, 2). Suprimimos los menos en la columna 21, anotamos la variable x_{21} a la izquierda de la igualdad enfrente del 2 y restamos de la séptima línea la segunda. Con esto acaba la distribución de las unidades de la segunda línea. Continuamos este proceso hasta la distribución de las unidades de la sexta línea. Como resultado obtendremos la primera solución que coincide con la solución anotada en la tabla 24. La tabla grande se ha transformado ahora en la tabla 25.

De la justeza de la solución nos convencemos por la falta de los "+" y los "−" en una de las líneas. En esta línea, en el caso de que no haya errores en la distribución, tiene que haber sólo ceros. En nuestro ejemplo, la última línea ha resultado ser de este tipo. En virtud de la condición $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, una de las ecuaciones del sistema (27) debe ser consecuencia de las demás.

Las columnas que corresponden a las variables básicas en la tabla están señaladas con un rayado vertical y las columnas en las que su $t_{ij} > 28$, con un rayado inclinado. Estas últimas se excluyen de la revisión posterior. En la tabla 25 están indicados los modos de composición de una mejor variante en comparación con la primera. Realmente, nosotros deseamos hallar una solución tal en la que la variable que se encuentre en la misma columna que $t_{ij} = 28$, es decir la x_{67}, sea igual a cero. Ahora bien, el contenido de la sexta línea de esta tabla muestra que la disminución del valor de la variable x_{67} puede ser obtenida a cuenta del aumento de x_{61} o de x_{65}. Por cuanto a la variable x_{61} le corresponde $t_{61} = 15$ y a la variable x_{65}, $t_{65} = 23$ haremos la disminución

Tabla 25

	11	12	13	14	15	16	17	21	22	23	24	25	26	27	31	32	33	34	35	36	37
$x_{14}=15$	−	−	−		−	−	−														
$x_{21}=2$						+			−	−	−	−		−						+	
$x_{35}=2$	0	0	−		−	0	−		0	−	0	−		−			−			0	−
$x_{47}=23$			−				−			−				−			−				−
$x_{57}=12$																					
$x_{67}=5$			+							+							+				
$x_{31}=18$	−								+	+	+	+		+						−	
$x_{32}=13$		−							−												
$x_{63}=11$			−							−							−				
$x_{34}=12$	+	+	+		+	+	+				−										
$x_{45}=7$			+		0		+			+		0		+			+				+
$x_{26}=5$						−														−	
$=0$			0				0			0				0			0				0
	12	13	34	7	8	29	19	7	18	36	40	38	6	10	11	20	30	21	21	29	31

	41	42	43	44	45	46	47	51	52	53	54	55	56	57	61	62	63	64	65	66	67
$x_{14}=15$																					
$x_{21}=2$						+							+							+	
$x_{35}=2$	+	+		+		+		+	+		+		+		+	+		+		+	
$x_{47}=23$	0	0	−	0		0		+	+		+	+	+		+	+		+	+	+	
$x_{57}=12$								−	−	−	−	−	−								
$x_{67}=5$										+					−	−		−	−	−	
$x_{31}=18$	−					−		−					−		−					−	
$x_{32}=13$		−							−							−					
$x_{63}=11$			−							−											
$x_{34}=12$				−							−							−			
$x_{45}=7$	−	−		−		−		−	−		−	−	−		−	−		−	−	−	
$x_{26}=5$													−							−	
$=0$			0					0	0	0	0	0	0		0	0		0	0	0	
	27	12	39	31	5	36	12	17	17	32	36	22	16	14	15	38	16	33	23	40	28

de x_{67} a costa del aumento de x_{61}. Revisando la columna 61 vemos que el menor número que se encuentra en la parte izquierda de la tabla enfrente del "$-$" de esta columna es el valor $x_{67} = 5$.

Ahora realicemos la transformación de la última tabla de la siguiente manera: excluyamos las columnas que tienen el rayado inclinado y la columna que corresponde a la variable x_{67} (o bien, lo que es lo mismo, al número t_{ij}, igual a 28). En lugar de x_{67} escribamos x_{61}. Siguiendo, de las líneas que tienen signo menos en la columna 61 restamos la línea que corresponde a la variable x_{61}, y a las líneas que tienen signo más en la columna 61, les sumamos la línea que corresponde a esa misma variable. Después de esto desaparecerán todos los "$-$" y los "$+$" de la columna 61.

Tabla 26

	11	12	14	15	17	21	22	26	27	31	32	34	35	41	42	45	47	51	52	55	56	57	61	63	65
$x_{14}=15$	$-$	$-$		$-$	$-$																				
$x_{21}=2$							$-$		$-$												$+$				
$x_{35}=7$				$-$	$-$				$-$					$+$	$+$			$+$	$+$		$+$				$-$
$x_{47}=28$					$-$				$-$									$+$	$+$	$+$	$+$				0
$x_{57}=12$																		$-$	$-$	$-$	$-$				
$x_{61}=5$																									$-$
$x_{31}=13$	$-$						$+$		$+$					$-$				$-$			$-$				$+$
$x_{32}=13$		$-$					$-$								$-$				$-$						
$x_{63}=11$																									
$x_{34}=12$	$+$	$+$		$+$	$+$																				
$x_{45}=2$					$+$				$+$						$-$	$-$			$-$	$-$	$-$				0
$x_{26}=5$																									
	12	13	7	8	19	7	18	6	10	11	20	21	21	27	12	5	12	17	17	22	16	14	15	16	23

Como resultado obtendremos la tabla 26. De esta tabla se deduce que ya hemos compuesto la segunda solución para la realización de la cual se necesita bastante menos tiempo: en lugar de 28 horas, sólo 21. (Observemos que si hubiésemos comenzado la reducción de la variable x_{67} a cero no a costa del aumento de x_{61}, sino del aumento de x_{65}, hubiese sido compuesta una variante de solución con un tiempo máximo $= t_{65} = 23$. Después, tachando todas las columnas con $t_{ij} > 23$, hubiésemos tenido que hacer otro paso para componer una tercera solución en la que el máximo de tiempo fuese $t_{ij} = 21$).

Enunciemos las variables, el cambio de cuyo valor ha llevado a la segunda solución: x_{67}, x_{35}, x_{47}, x_{31}, x_{45}, x_{61}. Estas variables han formado una cadena cerrada (tabla 27). Numeremos las celdas con las variables que forman la cadena tomando como primera la celda con la variable x_{67} (la que se tiene que excluir). Esta cadena tiene la propiedad de que en sus celdas impares infaliblemente se encuentran elementos x-seleccionados y en las pares, los valores $t_{ij} \leqslant t_{ij}^{\text{excl}}$, donde t_{ij}^{excl} es el valor de t_{ij} que debe de ser excluido (en este caso $t_{67}^{\text{excl}} = 28$). Llamemos *aligeradora* a esta cadena. Después de hallar la cadena aligeradora para formar una nueva solución traspasamos por ella una cantidad de unidades de carga que sea igual a la mínima entre ellas en la semicadena impar. En la tabla pequeña esta composición nos lleva a una segunda solución que coincide con la segunda solución compuesta en la tabla grande. Excluyamos de la investigación posterior las columnas (celdas) con valores $t_{ij} > 21$. Así obtendremos la tabla

Tabla 27

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 / 15	8	29	19
7	7 / 2	18	36	40	38	6 / 5	10
45	11 / 18	20 / 13	30	21 / 12	21 / 2	29	31
30	27	12	39	31	5 / 7	36	12 / 23
12	17	17	32	36	22	16	14 / 12
16	15	38	16 / 11	33	23	40	28 / 5

pequeña 28 y la tabla grande 26 (contando que las columnas 41, 55 y 65 están tachadas). Surge una pregunta: ¿habrá alguna solución que se realice en menos de 21 horas? Para dar contestación a esta pregunta examinamos la tabla 26. En la línea de los valores t_{ij} hallamos el mayor de ellos, el 21. A este valor $t_{34} = 21$ le corresponde la variable x_{34}, en la línea de la cual hay sólo signos "+". La falta de los "−" indica la imposibilidad de disminuir el valor de x_{34} a cuenta de alguna otra variable. No se ven posibilidades de excluir x_{34} y, por consecuencia, de liberarse de $t_{34} = 21$. Así resulta que la última variante obtenida es la óptima por el criterio de tiempo. Como se dijo anteriomente esta variante se realiza en 21 horas. En este caso no existe la posibilidad de componer una cadena aligeradora en la tabla pequeña 28.

Para aclarar mejor el método de cálculo de la variante óptima por el criterio del tiempo, hemos empleado tablas grandes y pequeñas. En realidad, al resolver tales problemas hace falta sólo una tabla grande o pequeña hecha a lápiz. Los pasos de una variante a otra se efectúan en una tabla empleando lápiz y goma de borrar.

Tabla 28

$a_i \backslash b_j$	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 (15)	8	29	19
7	7 (2)	18	36	40	38	6 (5)	10
45	11 (13)	20 (13)	30	21 (12)	21 (7)	29	31
30	27	12	39	31	5 (2)	36	12 (28)
12	17	17	32	36	22	16	14 (12)
16	15 (5)	38	16 (11)	33	23	40	28

$C = 1716\,K$

Las reglas para el cálculo de la variante óptima por el criterio del tiempo cuando se emplea una tabla pequeña se reducen a lo siguiente:

1. Anotamos las condiciones del problema en una tabla pequeña.
2. Encontramos la primera solución (por ejemplo, con el procedimiento indicado anteriormente).
3. Determinamos el $t_{ij}^{1\,\text{máx}}$ que corresponde a esta solución.
4. Tachamos en la tabla todas las celdas que tengan $t_{ij} > t_{ij}^{1\,\text{máx}}$.
5. Investigamos la posibilidad de componer cadenas *aligeradoras* formadas de $t_{ij}^{1\,\text{máx}}$ con los elementos que quedan en la tabla.
6. Si aparecen cadenas aligeradoras componemos una solución nueva.
7. Si no es posible aligerar por completo la celda que corresponde a $t_{ij}^{1\,\text{máx}}$ (reducir la respectiva x_{ij} a cero) entonces la solución que contiene $t_{ij}^{1\,\text{máx}}$ es la óptima.
8. Si se aligera por completo la celda que contiene $t_{ij}^{1\,\text{máx}}$, entonces hallamos $t_{ij}^{2\,\text{máx}}$ en la nueva solución obtenida.

Así hemos cumplido el primer paso dirigido a la obtención de la solución óptima. Si en este caso no se ha llegado a la solución óptima entonces hay que hacer un segundo paso, cumpliendo de nuevo las reglas anotadas desde el punto 4.

Para obtener la solución óptima habrá que realizar un número de pasos finito.

Al emplear estas reglas, la única dificultad consiste en la composición de las cadenas aligeradoras. Con respecto a esto, el empleo de la tabla grande, cuyas reglas de transformación fueron descritas anteriormente con suficiente detalle, da la posibilidad de llegar sin grandes impedimentos a la solución óptima.

Se podrían exponer también otros procedimientos de resolución de este problema.

Cuando m y n son pequeños, estos problemas pueden ser resueltos con papel y lápiz. Si m y n son grandes entonces es necesario, lo mismo que en los problemas que se resuelven por el criterio del costo, el empleo de las máquinas computadoras electrónicas. En este caso el tiempo de máquina de resolución de estos problemas, para los mismos valores de m y n, coincide aproximadamente con el tiempo de resolución de problemas por el criterio del costo.

§ 17. RESOLUCIÓN DE LOS PROBLEMAS DE TRANSPORTE TOMANDO EN CUENTA EL TIEMPO Y EL COSTO

En la práctica se presentan condiciones en las que es más conveniente la realización de un plan de transporte que sea un promedio entre el óptimo por tiempo y el óptimo por costo. Supongamos, para hacer más sencilla la descripción, que el costo es proporcional al tiempo de transporte, o sea $c_{ij} = Kt_{ij}$.

En la tabla 29 se presenta la variante óptima, por el criterio de costos, del problema visto anteriormente que se cumple en 28 horas. Los gastos de transporte de esta variante son $C = K(7 \cdot 15 + 6 \cdot 5 + 10 \cdot 2 + 11 \cdot 20 + 20 \cdot 13 + 21 \cdot 12 + 5 \cdot 9 + 12 \cdot 21 + 14 \cdot 12 + 16 \cdot 11 + 28 \cdot 5) = K \cdot 1668$ unidades de costo. Los gastos en el transporte que corresponden a la variante óptima por el criterio del tiempo (tabla 28) son de $C = K(7 \cdot 15 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 5 +$

Tabla 29

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	12	13	34	7 15	8	29	19
7	7	18	36	40	38	6 5	10 2
45	11 20	20 13	30	21 12	21	29	31
30	27	12	39	31	5 9	36	12 21
12	17	17	32	36	22	16	14 12
16	15	38	16 11	33	23	40	28 5

$C = 1668\ K$

$+ 11 \cdot 13 + 20 \cdot 13 + 21 \cdot 12 + 21 \cdot 7 + 5 \cdot 2 + 12 \cdot 28 + 14 \cdot 12 +$ $+ 15 \cdot 5 + 16 \cdot 11) = 1716K$ unidades de costo. Haciendo un gasto complementario, igual a $1716K - 1668K = 48K$ acabaremos las operaciones de transporte de mercancías 7 horas antes en comparación con el plan de transporte determinado por la variante óptima, calculada por el criterio del costo.

Del ejemplo examinado se deduce que, admitiendo un gasto complementario en el transporte relativamente pequeño, se puede reducir considerablemente el tiempo de las operaciones de transporte

Tabla 30

$a_i \backslash b_j$	20	13	11	27	9	5	40	
15	12	13		7 15	8		19	+14+4
7	7 2	18				6 5	10	+8
45	11 13	20 13		21 12	21 7			+4
30		12			5 2		12 28	+20
12	17	17				16	14 12	+18
16	15 5		16 11					
	−15	−20 −4	−16	−21 −4	−21 −4	−6 −8	−14 −18	

Tabla 31

$a_i \backslash b_j$	20	13	11	27	9	5	40	
15	15	7		0 15	1		5	
7	0	2				0 5	−14 2	+14
45	0 15	0 13		0 12	0 5			
30		8			0 4		0 26	
12	20	11				20	0 12	
16	0 5		0 11					
						−14		

de los productos. En los casos en los que se dan los plazos del cumplimiento de las operaciones de transporte se puede, empleando los métodos descritos, hallar la variante óptima por el criterio de costos que se realice en el margen del plazo dado. Si la pérdida de tiempo es inadmisible, entonces calculamos la variante óptima sólo por el criterio del tiempo. Si la variante obtenida con t_{ij}^{opt} no es la mejor por los costos, entonces empleando el algoritmo del cálculo de la solución óptima por el mínimo de la forma lineal, podremos obtener la óptima por los costos entre todas las óptimas por el tiempo (o sea, entre todas las que se realizan en un mismo plazo, igual a t_{ij}^{opt}). Como se ve en el ejemplo examinado, la solución óptima por el tiempo presentada en la tabla 30 no es óptima por los costos. Efectivamente, reduzcamos a cero los elementos x-seleccionados (al reducir a cero los elementos x-seleccionados, no se toma en cuenta el valor de los elementos

Tabla 32

a_i \ b_j	20	13	11	27	9	5	40
15	15	7		0 / 15	1		5
7	14	16				0 / 5	0 / 2
45	0 / 15	0 / 13		0 / 12	0 / 5		
30		8			0 / 4		0 / 26
12	20	11				6	0 / 12
16	0 / 5		0 / 11				

$C = 1688K$

que se encuentran en las celdas tachadas, tabla 31) y como resultado obtendremos una tabla en la que hay un número negativo (-14). Transformando otra vez la tabla 31 obtendremos la tabla 32. En la tabla 32 ya transformada los elementos x-seleccionados son iguales a 0 y los demás son no negativos. Por eso, la variante de solución compuesta es la óptima por el criterio del costo. El costo de la realización de esta variante, que se lleva a cabo también en 21 horas, es de $C = 1688K$ lo que es mucho menos que $1716K$.

* * *

En los últimos años, los métodos de programación lineal encuentran cada vez mayor aplicación en la economía, la técnica, el arte militar, y en otras esferas. La teoría y los métodos de programación lineal se perfeccionan constantemente y permiten solucionar otros nuevos problemas. El desarrollo acelerado de la técnica de computación ha hecho posible la solución práctica de cualquier problema de programación lineal.

La continuación del desarrollo de los métodos de programación lineal y su empleo para la resolución de problemas de la economía nacional va a favorecer la mejora de la organización y de la planificación de la industria nacional.

BIBLIOGRAFÍA

1. **L. V. Kantorovich.** Métodos matemáticos de organización y planificación de la industria. Edición de la Universidad Estatal de Leningrado, 1939. (Л. В. Канторович, Математические методы организации и планирования пр-ва, изд. ЛГУ, 1939).

2. **L. V. Kantorovich y M. K. Gavurin.** Métodos matemáticos para el análisis de los flujos de mercancías. Edición de la AC de la URSS "Problemas de la eficiencia del trabajo del transporte", 1953. (Л. В. Канторович, М. К. Гавурин, Математические методы анализа грузопотоков, сб. АН СССР «Проблемы повышения эффективности работы транспорта», 1953).

3. **B. M. Kagan y T. M. Ter-Mikaelian.** Resolución de problemas de ingeniería en las máquinas computadoras digitales automáticas. Editorial Gosenergoizdat, 1958. (Б. М. Каган и Т. М. Тер-Микаэлян, Решение инженерных задач на автоматических цифр. вычислительных машинах, Госэнергоиздат, 1958).

4. **A. I. Kitov.** Máquinas digitales automáticas. Editorial Sovietskoye Radio, 1956. (А. И. Китов, Электронные цифровые машины, изд. «Сов. радио», 1956).

5. **A. G. Kurosh.** Curso de álgebra superior. Editorial Fismaggiz, 1959. (А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1959).

6. **L. A. Llusternik.** Figuras y poliedros convexos. Editorial Gostejizdat, 1956. (Л. А. Люстерник, Выпуклые фигуры и многогранники, Гостехиздат, 1956).

7. **S. I. Chernikov.** Desigualdades lineales. Logros de las Ciencias Matemáticas, tomo 8, edición 2, 1953. (С. И. Черников, Линейные неравенства, УМН, т. 8, вып. 2 (1953).

8. **N. V. Chernikova.** El menor y el mayor valor de la forma lineal en el poliedro. Logros de las Ciencias Matemáticas, tomo 12, edición 2, 1957. (Н. В. Черникова, Наименьшие и наибольшие значения линейной формы на многограннике, УМН, т. 12, вып 2 (1957).

9. **A. Charnes, W. W. Cooper and A. Henderson,** An introduction to Linear Programming, John Wiley, New York, 1953.

10. **C. W. Churchman, R. L. Ackoff, C. L. Arnoff,** Introduction in Operations Research, London—New York, 1955.

11. **D. Chandler,** Linear Programming and Computers, New York, 1955.

12. **A. Glaisel,** Algorithm for Solution of Transportation Problem, 1955.

13. **S. Vajda,** The Theory of Cemes and Linear Programming, London—New York, 1956.

Lecciones populares de matemáticas

Este año se publicarán las siguientes obras de nuestro sello
"Lecciones populares de matemáticas"

Beskin N.
Representación de figuras espaciales

Boltianski V.
La envolvente

Ventsel E.
Elementos de la teoría de los juegos

Markushévich A.
Funciones maravillosas

Natansón I.
Problemas elementales de máximo y mínimo

Trajtenbrot B.
Los algoritmos y la solución automática de problemas

Yaglom I.
Algebra extraordinaria

Editorial MIR Moscú