

# Mecánica de Lagrange y Hamilton

## 1. Cálculo de variaciones

Para dar una formulación general de la dinámica es necesario emplear el concepto matemático de **funcional** que describiremos sin demasiado detalle matemático.

Comencemos con un ejemplo: Supongamos que queremos determinar la curva  $y = y(x)$  en el plano  $X - Y$  que conecta dos puntos  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$  y a lo largo de la cual la distancia es mínima. La distancia entre dos puntos será

$$S = \int_1^2 \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (1.1)$$

La cantidad  $S$  es un número que se asigna a cada una de las posibles funciones  $y(x)$ . No es por tanto una función sino una funcional  $S[y]$  que asigna a cada función  $y(x)$  un número real.

### 1.1.1 Funcionales integrales

Nos ocuparemos aquí de las funcionales de la siguiente forma

$$A[q, \dot{q}] = \int_{t_1}^{t_2} F(q, \dot{q}, t) dt \quad (1.2)$$

$A$  asigna un número a cada función  $q(t)$  definida en un intervalo  $[t_1, t_2]$ .

### 1.1.2 Principio variacional

La gran semejanza que las funcionales tienen con las funciones sugiere inmediatamente la idea de extender a aquellas el cálculo de máximos y mínimos o, más generalmente, de puntos estacionarios. De ello se ocupa una rama de las matemáticas conocida como **cálculo de variaciones**.

Diremos que una función  $q(t)$  sufre una variación  $\delta q$  si cambia a  $\hat{q} = q + \delta q$ . Nos limitaremos a variaciones que se anulen en los extremos del intervalo de integración. Es decir

$$\delta q(t_1) = \delta q(t_2) = 0 \quad (1.3)$$

$q$  y  $\hat{q}$  son por tanto trayectorias próximas que conectan los puntos  $(t_1, q(t_1))$  y  $(t_2, q(t_2))$ .

La variación de  $q$  induce una variación en  $\dot{q}$  de forma que

$$\delta\dot{q} = \frac{d}{dt}\delta q \quad (1.4)$$

Es pues natural definir la variación de la funcional  $A$  como:

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} [F(q + \delta q, \dot{q} + \delta\dot{q}, t) - F(q, \dot{q}, t)] dt \quad (1.5)$$

y por tanto

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial q} \delta q + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q} \right] dt \quad (1.6)$$

Teniendo en cuenta (1.4), podemos hacer la integración por partes siguiente

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q} dt = \int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \frac{d(\delta q)}{dt} dt = \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta q \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt$$

Utilizando (1.3)

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \delta\dot{q} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \delta q dt \quad (1.7)$$

Substituyendo en (1.6)

$$\delta A = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \frac{\partial F}{\partial q} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \right] \delta q dt \quad (1.8)$$

### 1.3 Ecuaciones de Euler-Lagrange

Para que  $A$  sea extremal y por tanto  $\delta A = 0$  para todas las variaciones  $\delta q$  es necesario que se anule el integrando y por tanto

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \quad (1.9)$$

que se conoce como ecuación de Euler-Lagrange. Se trata de una ecuación diferencial de segundo orden en la que  $q$  es la variable dependiente y  $t$  la independiente. La solución general dependerá de dos constantes arbitrarias que se fijan de modo que  $q(t_1) = q_1$  y  $q(t_2) = q_2$ .

En general utilizaremos funcionales de varios argumentos  $q_j, \dot{q}_j$ . La condición de punto estacionario es entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_j} \right) \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.10)$$

es decir, un conjunto de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden

**ejemplo**

Volvamos, por ejemplo, al caso de la distancia entre dos puntos, que tal como vimos en (1.1) es:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1 + y'^2} dx$$

por tanto las ecuaciones de Euler Lagrange son:

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \left( \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right)$$

donde

$$F = \sqrt{1 + y'^2}$$

de forma que

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} \right) = 0$$

y por tanto

$$\frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2}} = cte$$

es decir

$$y' = a$$

de forma que

$$y = ax + b$$

la distancia mas corta entre dos puntos corresponde a unirlos por una recta

## 2. Formulaci3n lagrangiana para sistemas potenciales

### 2.1 Coordenadas generalizadas

Dado un sistema de  $N$  part3culas, sus posiciones quedar3n determinadas por  $3N$  coordenadas

$$\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i) \tag{2.1}$$

$$i : 1 \dots N \tag{2.2}$$

Si el sistema tiene  $n$  **grados de libertad** bastar3n  $n \leq 3N$  **coordenadas generalizadas**  $q_j$  para describirlo.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots, q_n, t) \tag{2.3}$$

El sistema se dice **natural** si la relación anterior no depende explícitamente del tiempo.

La determinación de las  $n$  coordenadas generalizadas en un instante  $t$  se denomina **configuración del sistema**

## 2..2 Principio de Hamilton

A todo sistema de  $n$  grados de libertad con coordenadas generalizadas  $q_1 \dots q_n$ , le corresponde una función  $U(q_i, \dot{q}_i, t)$  llamada **potencial** que describe las interacciones y caracteriza y determina el movimiento de forma que cuando el sistema va desde la configuración  $q_j(t_1) = q_j^{(1)}$  hasta  $q_j(t_2) = q_j^{(2)}$ , lo hace de forma que minimiza la llamada **integral de acción**

$$S = \int_{t_1}^{t_2} [T(q_j \dot{q}_j, t) - U(q_j \dot{q}_j, t)] dt \quad (2.4)$$

donde  $T$  es la energía cinética del sistema.

## 2..3 Función de Lagrange

Definiendo el **lagrangiano** como

$$L(q_j \dot{q}_j, t) = T(q_j, \dot{q}_j, t) - U(q_j, \dot{q}_j, t) \quad (2.5)$$

se puede escribir la integral de acción como

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_j, t) dt \quad (2.6)$$

Si  $L$  no depende explícitamente del tiempo, es decir, si  $\frac{\partial L}{\partial t} = 0$  se dice que el sistema es **autónomo**. Nótese que todo sistema natural es autónomo pero no todo sistema autónomo es natural.

## 2..4 Ecuaciones del movimiento

y por tanto, el principio de Hamilton requiere que:

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (2.7)$$

que son, por tanto, las ecuaciones del movimiento del sistema. En el contexto de la mecánica se suelen denominar simplemente como ecuaciones de Lagrange

## 2..5 Términos de la energía cinética

Derivando (2.3)

$$\dot{\vec{r}}_i = \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \quad (2.8)$$

de forma que la energía cinética del sistema será:

$$\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j,k=1}^n \dot{q}_j \dot{q}_k \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \dot{q}_j \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Si definimos las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} A_{jk} &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_k} \\ B_j &= \sum_{i=1}^N m_i \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial q_j} \\ C &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \left( \frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} \right)^2 \end{aligned} \quad (2.10)$$

entonces

$$T = T_0 + T_1 + T_2 \quad (2.11)$$

donde los distintos términos son:

- término independiente de las velocidades

$$T_0 = C \quad (2.12)$$

- término lineal en las velocidades

$$T_1 = \sum_{j=1}^n B_j \dot{q}_j \quad (2.13)$$

- término cuadrático en las velocidades

$$T_2 = \sum_{j,k=1}^n \dot{q}_j \dot{q}_k A_{jk} \quad (2.14)$$

Solo cuando el sistema es natural,  $\frac{\partial \vec{r}_i}{\partial t} = 0$ , podemos escribir  $T = T_2$ .

## 2..6 Potencial: Fuerzas generalizadas

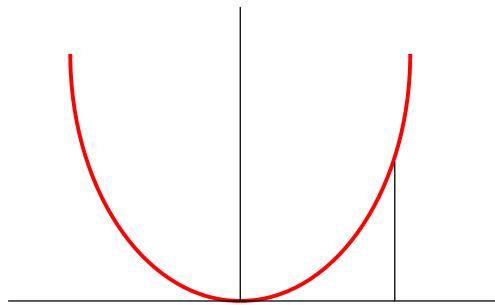
Supondremos por simplicidad y salvo mención explícita en contra que  $U$  solo depende de las coordenadas y quizá del tiempo.

$$U = U(q_j, t)$$

Generalizando la noción habitual, se definen las fuerzas como

$$F_j = \frac{\partial L}{\partial q_j} = \frac{\partial T}{\partial q_j} + \frac{\partial(-U)}{\partial q_j} \quad (2.15)$$

- Fuerzas potenciales:  $-\frac{\partial(U)}{\partial q_j}$  corresponde a las fuerzas derivadas del potencial
- Fuerzas de ligadura:  $-\frac{\partial(U)}{\partial q_j}$  corresponde a las fuerzas derivadas de las ligaduras
- ejemplo: Partícula deslizando sobre una parábola  $y = ax^2$ .



Si tomamos  $y$  como variable generalizada, la ligadura es:

$$x = \sqrt{\frac{y}{a}}$$

$$\dot{x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{ay}} \dot{y}$$

y por tanto

$$L = \frac{1}{2} m \dot{y}^2 \left( 1 + \frac{1}{4ay} \right) - mgy$$

de manera que las ecuaciones del movimiento son

$$-mg - \frac{m\dot{y}^2}{8ay^2} = \frac{d}{dt} \left( m\dot{y} \left( 1 + \frac{1}{4ay} \right) \right)$$

donde  $-mg$  es la fuerza de la gravedad y  $-\frac{m\dot{y}^2}{8ay^2}$  la fuerza de ligadura que actúa sobre la coordenada  $y$ .

## 2.7 Momentos generalizados

Dado un sistema con  $n$  grados de libertad y un lagrangiano dado por (2.5), definiremos los **momentos generalizados** conjugados de las variables generalizadas como

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad (2.16)$$

Si una de las coordenadas  $q_k$  no aparece explícitamente en el lagrangiano se dice que es **cíclica**, las ecuaciones de Lagrange implican que el momento conjugado  $p_k$  es una **constante del movimiento**.

En el ejemplo anterior el momento conjugado de la coordenada  $y$  es:

$$p_y = m\dot{y} \left( 1 + \frac{1}{4ay} \right)$$

## 3. Sistemas con ligaduras

Los sistemas de partículas están, en general, sujetos a tres tipos de condiciones que determinan su movimiento en el espacio y en el tiempo. Hasta ahora hemos considerado solamente dos tipos de estas condiciones:

- **Las condiciones dinámicas** expresadas mediante las fuerzas que actúan sobre el sistema mediante las ecuaciones del movimiento
- **Las condiciones iniciales** expresadas habitualmente por los valores iniciales de la posición y la velocidad y/o por los valores de ciertas cantidades dinámicas conservadas.

Las leyes de Newton están perfectamente diseñadas para investigar el comportamiento de sistemas sujetos a los dos tipos de condiciones anteriores. La situación es completamente distinta cuando el sistema está sujeto a ligaduras.

• **Las condiciones geométricas o ligaduras** aparecen cuando las coordenadas están sujetas a restricciones independientes de las fuerzas actuantes (por ejemplo partículas obligadas a moverse sobre una curva). Aparecen así fuerzas llamadas **fuerzas de ligadura**. Si tales fuerzas fueran conocidas, bastaría sumarlas a las fuerzas del sistema para determinar su comportamiento. Sin embargo lo más frecuente es que conozcamos las ligaduras pero no las fuerzas resultantes. El procedimiento de Lagrange se adapta perfectamente a estos casos.

Supongamos que el sistema tiene  $n$  grados de libertad y que lo hemos descrito por  $m$  coordenadas generalizadas. Existirán por tanto  $k = m - n$  ligaduras. Las ligaduras son susceptibles de clasificarse desde distinto puntos de vista pero aquí adoptaremos el siguiente

### 3.1 Ligaduras holónomas

Son las que pueden expresarse como una relación entre las coordenadas

$$f_i(q_j, t) = 0 \quad i = 1 \dots k \quad j = 1 \dots m \quad (3.1)$$

En tal caso, estas  $k$  ecuaciones permiten eliminar  $k$  coordenadas. Es el caso del ejemplo que hemos visto en el apartado 2.6.

### 3.2 Ligaduras no holónomas

Son aquellas en que las ligaduras sólo pueden expresarse en términos de las velocidades, es decir:

$$\sum_{j=1}^m a_{ij} \dot{q}_j = a_i \quad i = 1 \dots k \quad (3.2)$$

Para trabajar con este tipo de ligaduras empleamos los **multiplicadores de Lagrange** definidos como  $k$  coeficientes  $\lambda_i$  tales que

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i = 0 \quad (3.3)$$

y por tanto

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \sum_{j=1}^m a_{ij} \delta q_j = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \delta q_j = 0 \quad (3.4)$$

Teniendo en cuenta que el principio de Hamilton es:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] \delta q_j dt = 0 \quad (3.5)$$

Podemos introducir (3.4) en (3.5) como:

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{j=1}^m \left[ \frac{\partial L}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \right] \delta q_j dt = 0 \quad (3.6)$$

Tenemos pues las  $m$  ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial q_j} - \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} = 0 \quad j = 1 \dots m \quad (3.7)$$

que junto con las  $k$  ligaduras (3.2) determinan las  $m$  coordenadas  $q_j$  y los  $k$  multiplicadores  $\lambda_i$ .

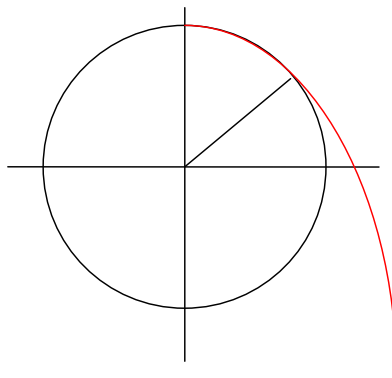
Conocidos los multiplicadores se pueden determinar las fuerzas de ligadura como:

$$(F_l)_j = \sum_{i=1}^k \lambda_i a_{ij} \quad (3.8)$$

### 3..3 Ejemplos

#### Partícula obligada a moverse sobre una curva

Supongamos una partícula que resbala bajo la acción de la gravedad sobre un aro vertical tal como indica la figura. Supongamos que parte formando un ángulo ( $\theta = \theta_0$ ) con la vertical. Al cabo de un tiempo  $T$  se despegará de la curva. En consecuencia para  $t < T$  hay un solo grado de libertad pues existe la ligadura  $r = R$ . Por el contrario para  $t > T$  la ligadura desaparece y hay dos grados de libertad



Tratemos pues el problema con dos coordenadas generalizadas  $r$  y  $\theta$

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy \quad (3.9)$$

y una ligadura holónoma que trataremos como si fuera no holónoma

$$r = R \implies \dot{r} = 0 \implies a_{11} = 1, a_{12} = 0, a_1 = 0$$

Las ecuaciones del movimiento serán

$$\begin{aligned} m\ddot{r} - mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta - \lambda &= 0 \\ mr^2\ddot{\theta} + 2mrr\dot{\theta} - mgr \sin \theta &= 0 \\ \dot{r} &= 0 \end{aligned} \quad (3.10)$$

o bien

$$\begin{aligned} \lambda &= -mr\dot{\theta}^2 + mg \cos \theta \\ 0 &= \ddot{\theta} - \frac{g}{r} \sin \theta \end{aligned} \quad (3.11)$$

que para  $\theta$  pequeña es:

$$\begin{aligned} \lambda &= -mr\dot{\theta}^2 + mg \\ 0 &= \ddot{\theta} - \frac{g}{r}\theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 \exp\left(\sqrt{\frac{g}{R}}t\right) \\ \lambda &= mg \left(1 - \theta_0^2 \exp\left(2\sqrt{\frac{g}{R}}t\right)\right) \end{aligned} \quad (3.13)$$

Por tanto la ligadura  $\lambda$  se anula en el instante  $T$  tal que

$$T = -\sqrt{\frac{R}{g}} \ln \theta_0 \quad (3.14)$$

que a pesar del signo menos es positivo ya que  $\theta_0 < \frac{\pi}{2} < 1$

## 4. Formulación Hamiltoniana

### 4.1 Función de Hamilton

Se define la función de Hamilton como:

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n, t) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L(q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n, t) \quad (4.1)$$

## 4..2 Ecuaciones de Hamilton

diferenciando ambos miembros:

$$\begin{aligned}
 dH &= \frac{\partial H}{\partial t} dt + \frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \\
 &= \sum_{i=1}^n [p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i] - \frac{\partial L}{\partial t} dt \\
 &\quad - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i - \sum_{i=1}^n \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Los términos en  $d\dot{q}_i$  se anulan como consecuencia de (2.16). Por otra parte, de (2.16) y (2.7) se sigue que:

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \tag{4.3}$$

por lo que igualando coeficientes en (4.2) tenemos:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \tag{4.4}$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \tag{4.5}$$

y

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.6}$$

Las  $2n$  ecuaciones (4.4) y (4.5) son las **ecuaciones de Hamilton**

## Coordenadas cíclicas

Si  $H$  no depende explícitamente de una de las coordenadas  $q_k$  entonces esa coordenada es cíclica y, de acuerdo con (4.5), su momento conjugado es constante

## 4..3 Conservación del Hamiltoniano

Derivando (4.1) con respecto al tiempo tenemos:

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i \right] + \frac{\partial H}{\partial t} \tag{4.7}$$

que en virtud de (4.4) – (4.6) es:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t} \tag{4.8}$$

Por lo que **si el sistema es autónomo, el Hamiltoniano es una constante del movimiento**

#### 4.4 Significado físico del hamiltoniano

Si, como hemos supuesto, el potencial no depende de las velocidades, entonces:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \quad (4.9)$$

y teniendo en cuenta los tres términos de la energía cinética, el hamiltoniano será:

$$H = \sum_{i=1}^n \left[ \dot{q}_i \frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} + \dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} \right] - T_0 - T_1 - T_2 + V \quad (4.10)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta las definiciones de  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$ , es fácil comprobar que:

$$\frac{\partial T_0}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad (4.11)$$

$$\dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = \dot{q}_i B_i \quad (4.12)$$

$$\dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 2\dot{q}_i \sum_j A_{ij} \dot{q}_j \quad (4.13)$$

de forma que:

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T_1}{\partial \dot{q}_i} = T_1 \quad (4.14)$$

$$\sum_{i=1}^n \dot{q}_i \frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}_i} = 2T_2 \quad (4.15)$$

con lo cual

$$H = T_2 - T_0 + V \quad (4.16)$$

en consecuencia:

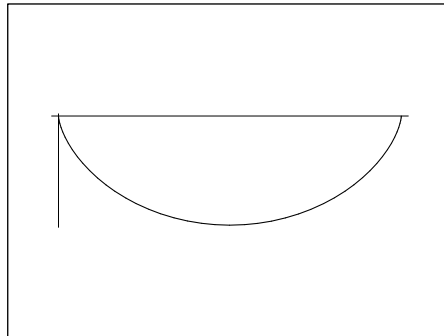
- Si el sistema es natural (y por tanto autónomo)  $H$  es conservado y es la energía del sistema.
- Si el sistema es autónomo pero no natural  $H$  es conservado, pero no es la energía del sistema.

## 5. Problemas

### Enunciados

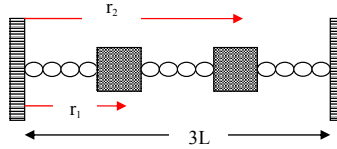
- 1) Pruébese que las geodésicas de una superficie esférica son círculos máximos, es decir, circunferencias cuyo centro coincide con el de la esfera.
- 2) Demostrar que la curva cuya revolución genera una superficie de área mínima es la catenaria.
- 3) Hallar la curva a lo largo de la cual una partícula que cae bajo la acción de la gravedad lo hace en el menor tiempo posible.
- 4) Determinar la trayectoria seguida por un proyectil que se lanza con velocidad  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.
- 5) Estudiar el péndulo doble utilizando el formalismo lagrangiano.
- 6) Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una curva llamada cicloide de ecuaciones

$$x = a(u - \sin u), \quad y = -a(1 - \cos u)$$

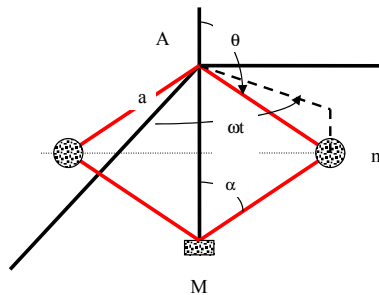


Obtener el lagrangiano, la ecuación de movimiento y la ley de movimiento de la partícula. (*Sugerencia:* utilizar como coordenada generalizada la longitud del arco  $s$ ).

- 7) Consideremos el sistema de la figura. Las masas son iguales y las constantes del muelle también. La distancia entre las dos paredes es  $3L$  y la longitud natural de los muelles es  $l_0$ . Estudiar el sistema en mecánica lagrangiana y hamiltoniana.



8) Encontrar la función lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange de un regulador de Watt. En él la masa  $M$  puede moverse verticalmente y las masas  $m$  están a distancias fijas  $a$  de  $M$  y del punto fijo  $A$ , girando todo el sistema en torno a la vertical con velocidad  $\omega$  constante (ver figura).



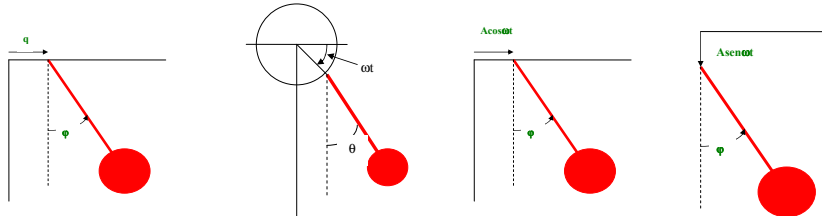
9) Utilizar el formalismo lagrangiano para estudiar el sistema formado por dos péndulos idénticos acoplados por un muelle.

10) Utilizar el formalismo lagrangiano para estudiar el problema de una partícula de masa  $m$  que se desliza sin rozamiento por la parte superior de un plano inclinado móvil de masa  $M$ . El plano puede deslizar sin rozamiento sobre el suelo horizontal, y esta inicialmente en reposo. Hallar las aceleraciones de la partícula y el plano, así como la reacción de éste sobre aquella.

11) El punto de suspensión de un péndulo simple se desplaza verticalmente según la ley  $s(t)$ . Hallar el lagrangiano y la ecuación de movimiento del péndulo.

12) Encontrar la función lagrangiana y las ecuaciones de lagrange de un péndulo plano de masa  $m$  y longitud  $l$  cuyo punto de suspensión

- a) puede desplazarse a lo largo de una recta horizontal
- b) se desliza uniformemente en una circunferencia vertical con velocidad angular constante



- c) efectúa oscilaciones horizontales de la forma  $A \cos \omega t$
- d) efectúa oscilaciones verticales de la forma  $A \sin \omega t$

13) Una partícula se mueve a lo largo de una parábola (el eje de la parábola es horizontal) bajo la acción del campo gravitatorio. La partícula parte del reposo y se conoce su posición inicial. Determinar la altura a la que la partícula se despegue de la parábola.

14) Demostrar que si  $L$  es el lagrangiano de un sistema que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces  $L' = L + dF(q, t)/dt$  también satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

15) Demostrar que las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange son invariantes respecto a la transformación de las ecuaciones del movimiento  $q \rightarrow s(q, t)$ .

16) Demostrar que el lagrangiano  $L = m^2 \dot{x}^4/12 + m \dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$  tiene las mismas ecuaciones del movimiento que  $L' = m \dot{x}^2/2 - V(x)$ .

17) Demostrar que el lagrangiano  $L = \frac{1}{2} e^{\alpha t} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ , proporciona las ecuaciones del movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Comentar el resultado.

1) Pruébese que las geodésicas de una superficie esférica son círculos máximos, es decir, circunferencias cuyo centro coincide con el de la esfera.

### Solución

Si la partícula se mueve en una superficie esférica de radio  $R$ , su posición en cualquier instante de tiempo vendrá dada por la parametrización de la esfera, que, en coordenadas esféricas es

$$\begin{aligned}x &= R \sin \theta \cos \varphi, \\y &= R \sin \theta \sin \varphi, \\z &= R \cos \theta\end{aligned}$$

por lo cual, el elemento diferencial de arco deberá satisfacer:

$$ds^2 = R^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$$

Tomando la expresión para la curva en la forma  $\theta = \theta(\varphi)$ , tendremos para la longitud de arco

$$s = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} R \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta} d\varphi$$

Para determinar la longitud de arco mínima, deberemos aplicar la ecuación de Euler-Lagrange a

$$F = R \sqrt{\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta}$$

y el resultado es

$$\frac{\sin \theta \cos \theta}{(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}} = \frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\dot{\theta}}{(\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta)^{1/2}} \right)$$

Derivando y simplificando obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{d}{d\varphi} \left( \frac{\dot{\theta}}{\sin^2 \theta} \right) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

La ecuación anterior es fácil de resolver haciendo el cambio

$$p = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$$

en cuyo caso se transforma simplemente en

$$\ddot{p} + p = 0$$

cuya integración proporciona

$$p = A \cos \varphi + B \sin \varphi$$

Deshaciendo el cambio de variable obtenemos

$$\cos \theta = \sin \theta (A \cos \varphi + B \sin \varphi)$$

o bien en coordenadas cartesianas,

$$\frac{z}{R} = A \frac{x}{R} + B \frac{y}{R}$$

De manera que

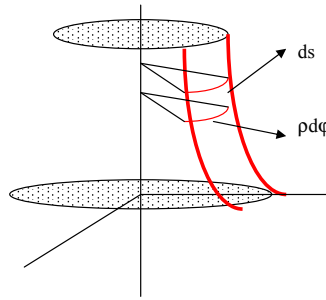
$$z = Ax + By$$

La ecuación anterior es la de un plano que pasa por el origen, y por lo tanto las geodésicas de la superficie esférica son círculos máximos.

2) Demostrar que la curva cuya revolución genera una superficie de área mínima es la catenaria.

### Solución

Supongamos que la ecuación de la curva que buscamos es  $y = y(x)$  (es decir  $z = z(\rho)$ ).



El elemento diferencial de superficie que esta curva engendra al girar alrededor del eje  $Z$  es

$$dS = \rho d\varphi ds = \rho d\varphi \sqrt{d\rho^2 + dz^2} = \rho d\varphi \sqrt{1 + z'^2} d\rho$$

siendo  $z' = dz/d\rho$ . La superficie engendradora vendrá entonces definida por medio de la integral

$$S = 2\pi \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho \sqrt{1 + z'^2} d\rho$$

Para que la superficie sea mínima deberemos aplicar el principio variacional a  $F = \rho \sqrt{1 + z'^2}$ , es decir

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{d}{d\rho} \left( \frac{\partial F}{\partial z'} \right)$$

y el resultado es

$$\frac{d}{d\rho} \left[ \frac{\rho z'}{\sqrt{1 + z'^2}} \right]$$

y por tanto integrando

$$\frac{\rho z'}{\sqrt{1 + z'^2}} = a$$

siendo  $a$  una primera constante de integración. La ecuación diferencial anterior puede ser integrada directamente, el resultado es

$$z + b = a \ln(x + \sqrt{\rho^2 - a^2})$$

donde  $b$  es la segunda constante de integración. Ambas constantes pueden determinarse en cada caso a partir de las condiciones en los extremos, es decir,  $z_1 = z(\rho_1)$ ,  $z_2 = z(\rho_2)$ .

La expresión anterior para la curva puede escribirse en términos de exponenciales como

$$\rho = \frac{a}{2} \left( e^{\frac{z+b}{a}} + e^{-\frac{z+b}{a}} \right)$$

y por tanto

$$\rho = a \cosh \left( \frac{z+b}{a} \right)$$

Concluimos entonces que la curva que genera una superficie de área mínima al girar alrededor del eje  $Z$  es la catenaria.

3) Hallar la curva a lo largo de la cual una partícula que cae bajo la acción de la gravedad lo hace en el menor tiempo posible.'

### Solución

Si la velocidad de la partícula a lo largo de la curva es  $v$ , el tiempo requerido para recorrer un arco de longitud  $ds$  será  $ds/v$ . El problema consistirá entonces en hallar el mínimo de la integral,

$$t_{12} = \int_1^2 dt = \int_1^2 \frac{ds}{v}$$

La conservación de la energía para la partícula en cualquier punto es

$$0 = \frac{1}{2}mv^2 - mgy$$

lo cual nos permite expresar la integral anterior, utilizando la expresión para la velocidad, en la forma

$$t_{12} = \int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}} dx$$

Por lo tanto en este caso debemos aplicar el principio variacional a

$$F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy}}$$

Calculemos por separado los dos miembros de la ecuación de Euler-Lagrange. El resultado es

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{1+y'^2}{2gy^3}}, \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial F}{\partial y'} \right) &= \frac{1}{\sqrt{2gy(1+y'^2)}} \left[ y'' - \frac{1}{2} \frac{y'^2}{y} - \frac{y'^2 y''}{(1+y'^2)} \right] \end{aligned}$$

Igualando ambas expresiones y simplificando

$$1 + y'^2 + 2yy'' = 0$$

que puede integrarse

$$y(1+y'^2) = c$$

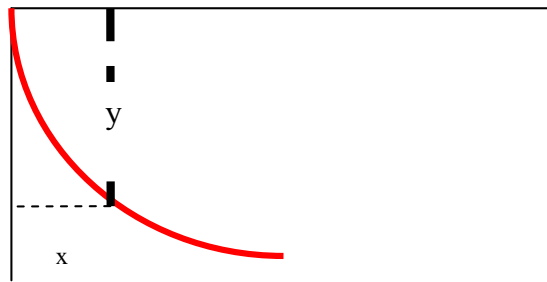
siendo  $c$  la constante de integración. Para resolver la ecuación diferencial es útil hacer el cambio  $y = c \sin^2 u$ , en cuyo caso obtenemos para  $x$  la expresión

$$x = c \left( u - \frac{1}{2} \sin 2u + d \right)$$

Basta ya redefinir  $u = 2t$  y  $c = 2a$  para obtener las ecuaciones paramétricas para la curva

$$\begin{aligned}x &= a(t - \sin t + b), \\y &= a(1 - \cos t)\end{aligned}$$

Las constantes de integración  $a$  y  $b$  se determinarán a partir de las condiciones iniciales. Por ejemplo si para  $t = 0$   $x = 0$ , se tendrá que  $b = 0$ . Por lo tanto la ecuación de la curva buscada es la de la cicloide que hará que la partícula caiga a través de ella en un tiempo mínimo cuando está sometida únicamente a la gravedad.



4) Determinar la trayectoria seguida por un proyectil que se lanza con velocidad  $v_0$  formando un ángulo  $\alpha$  con la horizontal.

### Solución

El sistema posee dos grados de libertad dados por las coordenadas  $x$  e  $y$ . El lagrangiano del sistema será

$$L = T - V = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

siendo  $m$  la masa del proyectil. Tenemos por tanto dos coordenadas generalizadas y dos ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a cada una de ellas

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(m\dot{x}), \\ -mg &= \frac{d}{dt}(m\dot{y}) \end{aligned}$$

La integración de las ecuaciones anteriores proporciona ya las ecuaciones para la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= c + at, \\ y &= d + bt - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

Las constantes de integración pueden determinarse utilizando las condiciones iniciales, es decir que para  $t = 0$  la posición y velocidad del proyectil son

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, \\ v_x(0) &= v_0 \cos \alpha, & v_y(0) &= v_0 \sin \alpha \end{aligned}$$

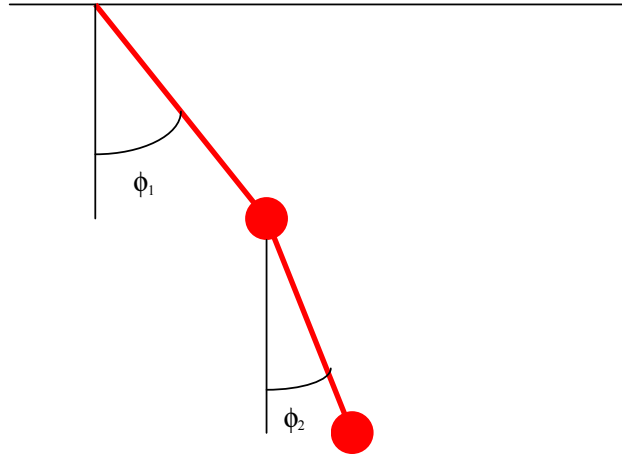
con lo cual las ecuaciones para la trayectoria quedan en la forma

$$\begin{aligned} x &= x_0 + v_0 t \cos \alpha, \\ y &= y_0 + v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned}$$

tal y como cabía esperar.

5) Estudiar el péndulo doble utilizando el formalismo lagrangiano.

### Solución



Suponemos por simplicidad que las masas y las longitudes de los péndulos son iguales. El sistema tiene dos grados de libertad y por tanto dos coordenadas generalizadas  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Teniendo en cuenta la figura

$$\begin{aligned} x_1 &= l \sin \theta_1, & y_1 &= -l \cos \theta_1, \\ x_2 &= l(\sin \theta_1 + \sin \theta_2), & y_2 &= -l(\cos \theta_1 + \cos \theta_2) \end{aligned}$$

Derivando estas expresiones obtenemos la expresión para la energía cinética

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) = ml^2 \left( \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right)$$

En cuanto a la energía potencial

$$U = -mg(y_1 + y_2) = -mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Por lo tanto el lagrangiano del sistema será

$$L = T - U = ml^2 \left( \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}_2^2 + \cos(\theta_1 - \theta_2)\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \right) + mgl(2 \cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Tenemos dos coordenadas generalizadas y por tanto dos ecuaciones de Lagrange, que toman la forma

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[ml^2(2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 \cos(\theta_1 - \theta_2))] + ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + 2mgl \sin \theta_1 &= 0, \\ \frac{d}{dt}[ml^2(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_1 \cos(\theta_1 - \theta_2))] - ml^2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2 \sin(\theta_1 - \theta_2) + mgl \sin \theta_2 &= 0, \end{aligned}$$

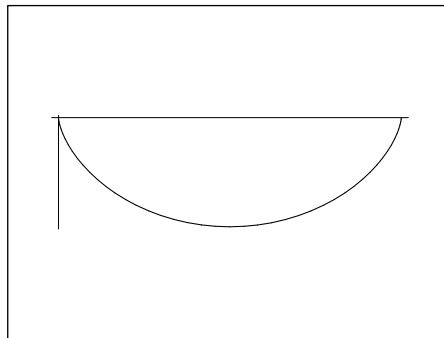
6) Una partícula de masa  $m$  se mueve a lo largo de una curva llamada cicloide de ecuaciones

$$x = a(u - \sin u)$$

$$y = -a(1 - \cos u)$$

(el eje  $y$  tiene el sentido vertical hacia arriba). Obtener el lagrangiano, la ecuación de movimiento y la ley de movimiento de la partícula. (*Sugerencia:* utilizar como coordenada generalizada la longitud del arco  $s$ ).

### Solución



Interesa utilizar como coordenada generalizada la longitud de arco. Para ello calculamos

$$\dot{x} = a(1 - \cos u)\dot{u},$$

$$\dot{y} = -a \sin u \dot{u}$$

Por lo tanto

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{u}{2} du^2$$

y la longitud de arco será integrando

$$s = -4a \cos \frac{u}{2}$$

Elijamos por simplicidad como coordenada generalizada  $q = -\frac{s}{4a}$ . Se tiene entonces

$$q = \cos \frac{u}{2}, \quad \dot{q} = -\frac{1}{2} \dot{u} \sin \frac{u}{2}$$

Podemos ya escribir  $y$ ,  $\dot{x}$  y  $\dot{y}$  en términos de  $q$  en la forma

$$\begin{aligned} y &= -2a(1 - q^2), \\ \dot{x} &= -4a\dot{q}\sqrt{1 - q^2}, \\ \dot{y} &= 4aq\dot{q} \end{aligned}$$

Para determinar el lagrangiano del sistema es necesario conocer las energías cinética y potencial

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = 8ma^2\dot{q}^2, \\ V &= mgy = -2mga(1 - q^2) \end{aligned}$$

El lagrangiano será entonces

$$L = T - V = 8ma^2\dot{q}^2 + 2mga(1 - q^2)$$

El siguiente paso es calcular la ecuación del movimiento y resolverla para obtener las leyes del movimiento. La ecuación de Lagrange es

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \rightarrow 4a\ddot{q} + gq = 0$$

que constituye la ecuación del movimiento. Para obtener la trayectoria integramos

$$q = A \cos(\omega t + \varphi)$$

siendo la frecuencia del movimiento

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{4a}}$$

y donde  $A$  y  $\varphi$  son constantes de integración que determinaremos a partir de las condiciones iniciales. Así si por ejemplo suponemos que en el instante  $t = 0$  la partícula se encuentra en el origen, tendremos que

$$y(0) = x(0) = 0, \rightarrow u(0) = 0, \rightarrow \dot{y}(0) = 0$$

Estas condiciones proporcionan las condiciones iniciales sobre  $q$  y su derivada,

$$q(0) = 1, \quad \dot{q}(0) = 0$$

que determinan las constantes

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ \varphi &= 0 \end{aligned}$$

con lo cual

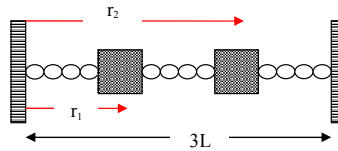
$$q = \cos \omega t$$

Teniendo ya en cuenta las expresiones para  $x$  e  $y$  en términos de  $q$  obtenemos las ecuaciones de la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= a(2a \cos(\cos \omega t) - \sin 2\omega t), \\ y &= -2a \sin^2 \omega t \end{aligned}$$

que constituyen las leyes del movimiento para la partícula.

7) Consideremos el sistema de la figura. Las masas son iguales y las constantes del muelle también. La distancia entre las dos paredes es  $3L$  y la longitud natural de los muelles es  $l$ . Estudiar el sistema en mecánica lagrangiana y hamiltoniana.



## Solución

- Coordenadas generalizadas

Sean  $r_1$  y  $r_2$  las distancias de cada una de las masas a la pared de la izquierda. El muelle 1 medirá  $r_1$ , el muelle 2  $r_2 - r_1$  y el muelle 3,  $3L - r_2$ .

- Lagrangiano

$$L = \frac{1}{2}m\dot{r}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{r}_2^2 - \frac{1}{2}k(r_1 - l)^2 - \frac{1}{2}k(r_2 - r_1 - l)^2 - \frac{1}{2}k(3L - r_2 - l)^2$$

- Ecuaciones de Lagrange

$$m\ddot{r}_1 = -k(r_1 - l) + k(r_2 - r_1 - l)$$

$$m\ddot{r}_2 = -k(r_2 - r_1 - l) + k(3L - r_2 - l)$$

- momentos

$$p_1 = m\dot{r}_1$$

$$p_2 = m\dot{r}_2$$

- Hamiltoniano

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{1}{2}k(r_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(r_2 - r_1 - l)^2 + \frac{1}{2}k(3L - r_2 - l)^2$$

- Ecuaciones de hamilton

$$\dot{r}_1 = \frac{p_1}{m}$$

$$\begin{aligned} \dot{r}_2 &= \frac{p_2}{m} \\ \dot{p}_1 &= -k(r_1 - l) + k(r_2 - r_1 - l) \\ \dot{p}_2 &= -k(r_2 - r_1 - l) + k(3L - r_2 - l) \end{aligned}$$

- soluciones

La posición de equilibrio corresponde a  $\dot{r}_1 = \dot{r}_2 = 0$  y por tanto a  $\frac{r_2}{2} = r_1 = L$ . Tiene pues sentido hacer el cambio de variables

$$q_1 = r_1 - L$$

$$q_2 = r_2 - 2L$$

en cuyo caso las ecuaciones del movimiento son

$$m\ddot{q}_1 = k(q_2 - 2q_1)$$

$$m\ddot{q}_2 = k(-2q_2 + q_1)$$

buscando soluciones oscilatorias

$$q_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$q_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi)$$

obtenemos

$$-m\omega^2 A_1 = k(A_2 - 2A_1)$$

$$-m\omega^2 A_2 = k(-2A_2 + A_1)$$

es decir

$$A_1(2k - m\omega^2) - kA_2 = 0$$

$$-A_1k + A_2(2k - m\omega^2) = 0$$

Por tanto

$$(2k - m\omega^2)^2 = k^2$$

cuyas soluciones son

$$m\omega^2 = k \implies A_2 = A_1$$

$$m\omega^2 = 3k \implies A_2 = -A_1$$

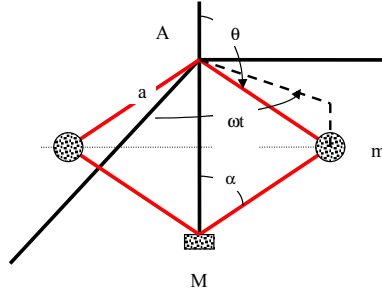
de manera que la solución general es

$$q_1 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1) + B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

$$q_2 = A \cos(\omega_0 t + \varphi_1) - B \cos(\sqrt{3}\omega_0 t + \varphi_2)$$

donde  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

8) Encontrar la función lagrangiana y las ecuaciones de Lagrange de un regulador de Watt. En él la masa  $M$  puede moverse verticalmente y las masas  $m$  están a distancias fijas  $a$  de  $M$  y del punto fijo  $A$ , girando todo el sistema en torno a la vertical con velocidad  $\omega$  constante (ver figura).



### Solución

Hay un solo grado de libertad dado por el ángulo  $\alpha$  que forman las masas con la vertical. Si tomamos el origen en  $A$ . Las coordenadas de las masas son

$$\vec{r}_1 : \{\theta = \pi - \alpha, \varphi = \pi + \omega t, r = a\}$$

$$\vec{r}_2 : \{\theta = \pi - \alpha, \varphi = \omega t, r = a\}$$

$$\vec{r}_3 : \{x = 0, y = 0, z = -2a \cos \alpha\}$$

que en cartesianas son

$$\vec{r}_1 = (-a \sin \alpha \cos \omega t, -a \sin \alpha \sin \omega t, -a \cos \alpha)$$

$$\vec{r}_2 = (a \sin \alpha \cos \omega t, a \sin \alpha \sin \omega t, -a \cos \alpha)$$

$$\vec{r}_3 = (0, 0, -2a \cos \alpha)$$

De modo que:

$$\dot{\vec{r}}_1 = (-a\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \omega t + a\omega \sin \alpha \sin \omega t, -a\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \omega t - a\omega \sin \alpha \cos \omega t, a\dot{\alpha} \sin \alpha)$$

$$\begin{aligned}\dot{\vec{r}}_2 &= (a\dot{\alpha} \cos \alpha \cos \omega t - a\omega \sin \alpha \sin \omega t, a\dot{\alpha} \cos \alpha \sin \omega t + a\omega \sin \alpha \cos \omega t, a\dot{\alpha} \sin \alpha) \\ \dot{\vec{r}}_3 &= (0, 0, 2a\dot{\alpha} \sin \alpha)\end{aligned}$$

y el lagrangiano será

$$L = m[a^2\dot{\alpha}^2 + a^2\omega^2 \sin^2 \alpha] + 2Ma^2\dot{\alpha}^2 \sin^2 \alpha + 2mga \cos \alpha + 2Mga \cos \alpha$$

La ecuación de Lagrange es

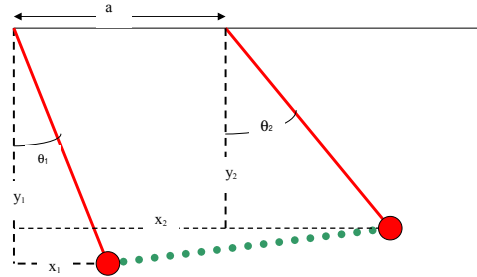
$$\begin{aligned}2ma^2\ddot{\alpha} + 4Ma^2 \sin^2 \alpha \ddot{\alpha} + 8Ma^2\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha = \\ 2ma^2\omega^2 \sin \alpha \cos \alpha + 4Ma^2\dot{\alpha}^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2ag(m + M) \sin \alpha\end{aligned}$$

que puede ser simplificada (para ángulos pequeños) como

$$\ddot{\alpha} + 2\frac{M}{m}\alpha\dot{\alpha}^2 + \left[ \frac{(m + M)g - ma\omega^2}{ma} \right] \alpha = 0$$

9) Utilizar el formalismo lagrangiano para estudiar el sistema formado por dos péndulos idénticos acoplados por un muelle.

### Solución



En términos de los ángulos  $\theta_1$  y  $\theta_2$  podemos escribir

$$x_1 = l \sin \theta_1, \quad x_2 = a + l \sin \theta_2, \quad (5.1)$$

$$y_1 = l \cos \theta_1, \quad y_2 = l \cos \theta_2 \quad (5.2)$$

y para sus derivadas

$$\dot{x}_1 = l \cos \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{x}_2 = l \cos \theta_2 \dot{\theta}_2, \quad (5.3)$$

$$\dot{y}_1 = -l \sin \theta_1 \dot{\theta}_1, \quad \dot{y}_2 = -l \sin \theta_2 \dot{\theta}_2 \quad (5.4)$$

La energía cinética será por tanto

$$T = \frac{1}{2} m l^2 (\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) \quad (5.5)$$

La energía potencial vendrá dada por

$$U = -mgy_1 - mgy_2 + \frac{1}{2} k (d - a)^2 \quad (5.6)$$

Consideremos que los ángulos son pequeños. En tal caso podemos aproximar el seno y coseno en desarrollo de Taylor quedandonos a segundo orden, con lo cual

$$x_1 = l\theta_1 + O(3), \quad x_2 = a + l\theta_2 + O(3), \quad (5.7)$$

$$y_1 = l \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_1^2 \right) + O(4), \quad y_2 = l \left( 1 - \frac{1}{2} \theta_2^2 \right) + O(4) \quad (5.8)$$

En esta aproximación es fácil comprobar que

$$d^2 = (a + l(\theta_2 - \theta_1))^2 \quad (5.9)$$

y por tanto que

$$(d - a)^2 = l^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (5.10)$$

El lagrangiano será entonces

$$L = 2mgl + \frac{1}{2}ml^2(\dot{\theta}_1^2 + \dot{\theta}_2^2) - \frac{1}{2}mgl(\theta_1^2 + \theta_2^2) - \frac{1}{2}kl^2(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (5.11)$$

Las ecuaciones de Lagrange quedan en la forma

$$\ddot{\theta}_1 = -\left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_1 + \frac{k}{m}\theta_2, \quad (5.12)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{k}{m}\theta_1 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right)\theta_2 \quad (5.13)$$

La solución de este sistema lineal de ecuaciones diferenciales acopladas es de la forma

$$\theta_1 = A_1^+ \cos(\omega_1 t - \varphi_+) + A_1^- \sin(\omega_2 t - \varphi_-), \quad (5.14)$$

$$\theta_2 = A_2^+ \cos(\omega_1 t - \varphi_+) + A_2^- \sin(\omega_2 t - \varphi_-) \quad (5.15)$$

donde las frecuencias  $\omega_1$  y  $\omega_2$  son las soluciones de la ecuación

$$\left| \omega^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) - \frac{k}{m} \frac{k}{m} \omega^2 - \left(\frac{g}{l} + \frac{k}{m}\right) \right| = 0 \quad (5.16)$$

es decir,

$$\omega_1 = \omega_+ = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_m^2}, \quad (5.17)$$

$$\omega_2 = \omega_- = \omega_p \quad (5.18)$$

donde  $\omega_p$  y  $\omega_m$  vienen dadas en términos de la masa, la longitud de los péndulos y la constante de elasticidad del muelle,

$$\omega_p = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (5.19)$$

$$\omega_m = \sqrt{2\frac{k}{m}} \quad (5.20)$$

y las amplitudes satisfacen

$$\frac{A_1^+}{A_2^+} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_+^2} = -1, \quad (5.21)$$

$$\frac{A_1^-}{A_2^-} = \frac{\frac{k}{m}}{\frac{g}{l} + \frac{k}{m} - \omega_-^2} = 1 \quad (5.22)$$

Utilizando todos los resultados anteriores tenemos las ecuaciones del movimiento

$$\theta_1 = A^+ \cos(\omega_+ t - \varphi_+) + A^- \cos(\omega_- t - \varphi_-), \quad (5.23)$$

$$\theta_2 = -A^+ \cos(\omega_+ t - \varphi_+) + A^- \cos(\omega_- t - \varphi_-) \quad (5.24)$$

donde hemos redefinido la constante  $\varphi_-$ .

Tenemos por tanto cuatro constantes de integración que determinaremos a partir de las condiciones iniciales. Consideremos tres situaciones diferentes.

• **Caso 1**

Tomamos como condiciones iniciales que los péndulos se encuentren en reposo y formando ambos el mismo ángulo  $\theta_0$  con la vertical, es decir

$$\theta_1(0) = \theta_2(0) = \theta_0, \quad (5.25)$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \quad (5.26)$$

Es fácil ver que en este caso las constantes son

$$A^+ = 0, \quad A^- = \theta_0, \quad \varphi_- = 0 \quad (5.27)$$

y por tanto la solución es

$$\theta_1 = \theta_0 \cos \omega_p t, \quad (5.28)$$

$$\theta_2 = \theta_0 \cos \omega_p t \quad (5.29)$$

Los dos péndulos oscilan de forma sincronizada como si fuera un sólo péndulo, con frecuencia  $\omega_p$ . Es como si el muelle no existiera.

• **Caso 2**

Tomamos como condiciones iniciales que los péndulos se encuentren en reposo y formando ambos el mismo ángulo  $\theta_0$  con la vertical pero en sentidos opuestos, es decir

$$\theta_1(0) = -\theta_2(0) = \theta_0, \quad (5.30)$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \quad (5.31)$$

Es fácil ver que en este caso las constantes son

$$A^+ = \theta_0, \quad A^- = 0, \quad \varphi_+ = 0 \quad (5.32)$$

y por tanto la solución es

$$\theta_1 = \theta_0 \cos \omega_+ t, \quad (5.33)$$

$$\theta_2 = -\theta_0 \cos \omega_+ t \quad (5.34)$$

con lo cual los péndulos oscilan en oposición de fase (desfasados un ángulo  $\pi$ ), con la misma amplitud y con frecuencia

$$\omega_+ = \sqrt{\omega_p^2 + \omega_m^2} \quad (5.35)$$

• **Caso 3**

Tomamos como condiciones iniciales que los péndulos se encuentren en reposo, uno de ellos formando un ángulo  $\theta_0$  con la vertical y el otro vertical, es decir

$$\theta_1(0) = 0, \quad \theta_2(0) = \theta_0, \quad (5.36)$$

$$\dot{\theta}_1(0) = \dot{\theta}_2(0) = 0 \quad (5.37)$$

Es fácil ver que en este caso las constantes son

$$A^+ = -A^- = -\frac{\theta_0}{2}, \quad \varphi_+ = \varphi_- = 0 \quad (5.38)$$

y por tanto la solución es

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2}(\cos \omega_p t - \cos \omega_+ t), \quad (5.39)$$

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2}(\cos \omega_p t + \cos \omega_+ t) \quad (5.40)$$

Luego en este caso el movimiento se transmite de uno a otro péndulo alternativamente.

10) Utilizar el formalismo lagrangiano para estudiar el problema de una partícula de masa  $m$  que se desliza sin rozamiento por la parte superior de un plano inclinado móvil de masa  $M$ . El plano puede deslizar sin rozamiento sobre el suelo horizontal, y esta inicialmente en reposo. Hallar las aceleraciones de la partícula y el plano, así como la reacción de éste sobre aquella.

### Solución

Sean  $(x_1, y_1)$  y  $(x_2, y_2)$  las coordenadas de la partícula y del plano respectivamente en cualquier instante de tiempo, y sea  $\alpha$  la inclinación del plano sobre la horizontal. La coordenada  $y_2$  es una constante ya que el plano sólo se desplaza en dirección horizontal. Tenemos entonces tres coordenadas y una ligadura entre ellas dada por la condición de que la partícula está siempre en el plano. Esta restricción puede expresarse como

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_1}{x_2 - x_1} \quad (5.1)$$

es decir, tenemos una ligadura de la forma

$$f = y_1 - (x_2 - x_1) \operatorname{tg} \alpha = 0 \quad (5.2)$$

Tenemos por lo tanto un sistema con una ligadura y como consecuencia un multiplicador de Lagrange  $\lambda$ . El lagrangiano es simplemente

$$L = T - U = \frac{1}{2}m(\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2) + \frac{1}{2}M\dot{x}_2^2 - mgy_1 \quad (5.3)$$

Las ecuaciones de Lagrange serán entonces

$$m\ddot{x}_1 = \lambda \operatorname{tg} \alpha, \quad (5.4)$$

$$m\ddot{y}_1 = -mg + \lambda, \quad (5.5)$$

$$M\ddot{x}_2 = -\lambda \operatorname{tg} \alpha \quad (5.6)$$

Por otro lado derivando dos veces la condición de la ligadura

$$\ddot{y}_1 = (\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1) \operatorname{tg} \alpha \quad (5.7)$$

Combinando las expresiones anteriores obtenemos para  $\lambda$

$$\lambda = \frac{Mmg \cos^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha} \quad (5.8)$$

En consecuencia, las aceleraciones para la partícula y el plano son

$$a_{1,x} = \ddot{x}_1 = \lambda \frac{\operatorname{tg} \alpha}{m} = Mg \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad (5.9)$$

$$a_{2,x} = \ddot{x}_2 = -\lambda \frac{\operatorname{tg} \alpha}{M} = -mg \frac{\sin \alpha \cos \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad (5.10)$$

$$a_{1,y} = \ddot{y}_1 = -g + \frac{\lambda}{m} = -(M + m)g \frac{\sin^2 \alpha}{M + m \sin^2 \alpha}, \quad (5.11)$$

$$a_{2,y} = \ddot{y}_2 = 0 \quad (5.12)$$

Las fuerzas de ligadura son

$$F_{1,x} = ma_{1,x}, \quad F_{2,x} = Ma_{2,x} = -F_{1,x}, \quad (5.13)$$

$$F_{1,y} = \lambda, \quad F_{2,y} = 0 \quad (5.14)$$

Las fuerzas  $F_{1,x}$  y  $F_{1,y}$  son las componentes cartesianas de la reacción del plano sobre la partícula, su módulo es la fuerza normal. Es interesante notar que  $F_{1,x} + F_{2,x} = 0$  es precisamente la expresión para la tercera ley de Newton.

11) El punto de suspensión de un péndulo simple se desplaza verticalmente según la ley  $s(t)$ . Hallar el lagrangiano y la ecuación de movimiento del péndulo.

### Solución

Se trata de un sistema con dos grados de libertad dados por  $s$  y el ángulo  $\varphi$  que forma el hilo del péndulo con la vertical. Las coordenadas  $x$  e  $y$  de la masa se escriben en términos de las coordenadas generalizadas  $s$  y  $\varphi$  como

$$\begin{aligned}x &= l \sin \varphi, \\y &= s - l \cos \varphi\end{aligned}$$

siendo  $l$  la longitud del hilo del péndulo. La velocidad vendrá dada por

$$v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{s}^2$$

y por lo tanto el lagrangiano es

$$L = \frac{1}{2}m(l^2 \dot{\varphi}^2 + 2l\dot{s}\dot{\varphi} \sin \varphi + \dot{s}^2) - mg(s - l \cos \varphi)$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial s} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{s}}, \\ \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\end{aligned}$$

y por tanto las ecuaciones del movimiento

$$\begin{aligned}g + \ddot{s} + l\ddot{\varphi} \sin \varphi + l\dot{\varphi}^2 \cos \varphi &= 0, \\ \ddot{\varphi} + \frac{1}{l}(g + \ddot{s}) \sin \varphi &= 0\end{aligned}$$

La primera de las ecuaciones puede escribirse

$$(g + \ddot{s}) \cos \varphi + l\dot{\varphi}^2 = 0$$

donde hemos utilizado la segunda para eliminar  $\ddot{\varphi}$ . Es posible ya escribir una ecuación sólo en  $\varphi$  eliminando  $\ddot{s}$ , esto es

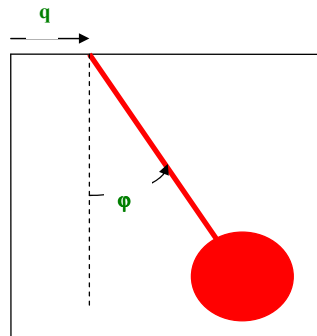
$$\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 \operatorname{tg} \varphi = 0$$

12) Encontrar la función lagrangiana y las ecuaciones de lagrange de un péndulo plano de masa  $m$  y longitud  $l$  cuyo punto de suspensión

- puede desplazarse a lo largo de una recta horizontal
- se desplaza uniformemente en una circunferencia vertical con velocidad angular constante
- efectúa oscilaciones horizontales de la forma  $A \cos \omega t$
- efectúa oscilaciones verticales de la forma  $A \sin \omega t$

## Solución

a) Hay **dos grados de libertad** dados por la distancia  $q$  recorrida por el punto de suspensión y el ángulo  $\theta$  del péndulo.



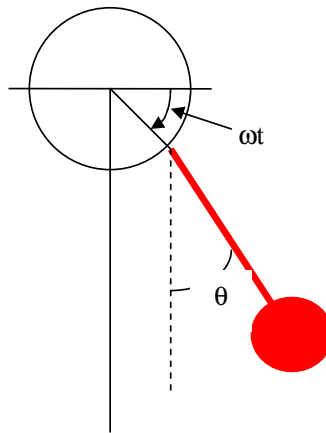
$$x = q + l \sin \theta$$

$$y = -l \cos \theta$$

el sistema es pues **natural** y su lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}[\dot{x}^2 + l^2 \dot{\theta}^2 + 2l\dot{q}\dot{\theta} \cos \theta] + mgl \cos \theta$$

b) Hay **un solo grado de libertad** dado por la coordenada  $\theta$



$$x = R \operatorname{sen} \omega t + l \operatorname{sen} \theta$$

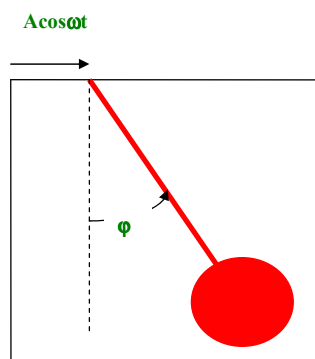
$$y = -R \cos \omega t - l \cos \theta$$

el sistema **no es natural** y su lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}[R^2\omega^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2lR\omega\dot{\theta}\cos(\omega t - \theta)] + mg[R \cos \omega t + l \cos \theta]$$

de manera que **no es autónomo**

c) Hay **un solo grado de libertad** dado por la coordenada  $\theta$



$$x = A \cos \omega t + l \operatorname{sen} \theta$$

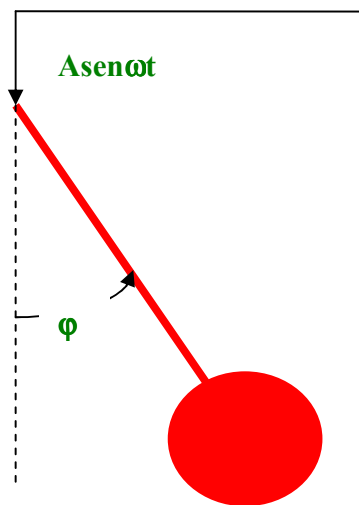
$$y = -l \cos \theta$$

el sistema **no es natural** y su lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}[A^2\omega^2 \operatorname{sen}^2 \omega t + l^2\dot{\theta}^2 - 2Al\omega\dot{\theta} \cos \theta \operatorname{sen} \omega t] + mgl \cos \theta$$

que **no es autónomo**

d) Hay **un solo grado de libertad** dado por la coordenada  $\theta$



$$x = l \operatorname{sen} \theta$$

$$y = -A \operatorname{sen} \omega t - l \cos \theta$$

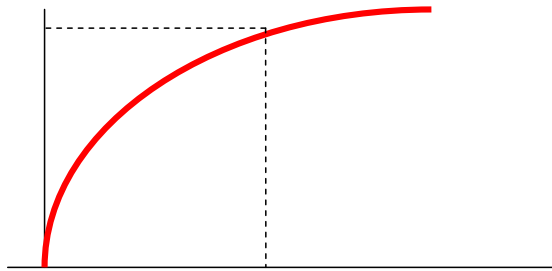
el sistema **no es natural** y su lagrangiano es:

$$L = \frac{1}{2}[A^2\omega^2 \cos^2 \omega t + l^2\dot{\theta}^2 - 2Al\omega\dot{\theta} \cos \omega t \sin \theta] + mg[A \operatorname{sen} \omega t + l \cos \theta]$$

de manera que **no es autónomo**

**13)** Una partícula se mueve a lo largo de una parábola (el eje de la parábola es horizontal) bajo la acción del campo gravitatorio. La partícula parte del reposo y se conoce su posición inicial. Determinar la altura a la que la partícula se despegue de la parábola.

### Solución



Supongamos como condición inicial que la partícula en el instante  $t = 0$  se encuentra en  $y_0$ . Se trata de un sistema con ligaduras, en el cual, antes de despegarse de la parábola la partícula está sujeta a una ligadura dada por

$$f = y^2 - ax = 0$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange son en este caso

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} + \lambda \frac{\partial f}{\partial q_i}$$

siendo  $\lambda$  el multiplicador de Lagrange. En este caso el Lagrangiano será

$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$$

Las ecuaciones del movimiento son entonces

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda a, \\ m\ddot{y} &= -mg + 2\lambda y \\ 0 &= y^2 - ax \end{aligned}$$

multiplicando la primera por  $\dot{x}$  y la segunda por  $\dot{y}$  y sumando tenemos

$$m\dot{x}\ddot{x} + m\dot{y}\ddot{y} + mg\dot{y} + \lambda(a\dot{x} - 2y\dot{y}) = 0$$

Utilizando la ligadura e integrando tenemos

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = cte$$

Empleando las condiciones iniciales

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + g(y - y_0) = 0$$

Sustituyendo  $\dot{x}$  de la condición de ligadura obtenemos una ecuación de primer orden para  $y$

$$\dot{y}^2 \left( 1 + \frac{4}{a}y^2 \right) = 2g(y_0 - y)$$

que una vez resuelta nos proporciona la ecuación para  $x$  a través de la ligadura

$$x = y^2/a$$

En cuanto a  $\lambda$  la podemos obtener substituyendo  $x$  en la primera de las ecuaciones del movimiento

$$\frac{2m}{a}(y\ddot{y} + \dot{y}^2) + \lambda a = 0$$

Substituyendo  $\dot{y}$  y  $\ddot{y}$

$$2m \left[ y(-g + 2\lambda y/m) + 2ga^2 \frac{y_0 - y}{a^2 + 4y^2} \right] + \lambda a = 0$$

es decir

$$\lambda = \frac{2gm}{(a^2 + 4y^2)}(4y^3 + 3a^2y - 2a^2y_0)$$

Para determinar la altura a la cual la partícula se despega de la parábola, basta tener en cuenta que cuando esto sucede la ligadura ya no actúa y por lo tanto  $\lambda = 0$ . Entonces la altura a la cual se despega será  $y_1$  tal que satisfaga

$$4y_1^3 + 3a^2y_1 - 2a^2y_0 = 0$$

14) Demostrar que si  $L$  es el lagrangiano de un sistema que satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange, entonces  $L' = L + dF(q, t)/dt$  también satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange.

### Solución

Si  $L$  satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

Veamos que sucede para el lagrangiano  $L'$ . Calculamos para ello por separado los dos miembros de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

$$\frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial}{\partial q} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} \right) = \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} + \dot{q} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial}{\partial \dot{q}} \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q} \dot{q} \right) \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial t} + \dot{q} \frac{\partial^2 F}{\partial q^2} \right)$$

Luego también para  $L'$  se satisfacen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L'}{\partial q} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} \right) = 0$$

15) Demostrar que las ecuaciones del movimiento de Euler-Lagrange son invariantes respecto a la transformación de las ecuaciones del movimiento  $q \rightarrow s(q, t)$ .

### Solución

Sea la transformación  $q \rightarrow s = s(q, t)$ . Tendremos entonces,

$$\dot{s} = \frac{d}{dt}s = \frac{\partial s}{\partial t} + \dot{q} \frac{\partial s}{\partial q}$$

por lo tanto  $\dot{s} = \dot{s}(q, \dot{q}, t)$ . La ecuación de Lagrange para  $q$  es

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right)$$

Calculemos ambos miembros por separado.

$$\frac{\partial L}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \frac{\partial \dot{s}}{\partial q}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{q}} \right)$$

Teniendo en cuenta la expresión para  $\dot{s}$  es fácil ver que

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial s}{\partial q}$$

y por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial s}{\partial q} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial s}{\partial q} \right) = \frac{\partial s}{\partial q} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right) + \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \frac{\partial \dot{s}}{\partial q}$$

Comparando las dos expresiones se tiene que la ecuación de Lagrange es invariante bajo la transformación, es decir

$$\frac{\partial L}{\partial s} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{s}} \right)$$

16) Demostrar que el lagrangiano  $L = m^2 \dot{x}^4/12 + m \dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$  tiene las mismas ecuaciones del movimiento que  $L' = m \dot{x}^2/2 - V(x)$ .

### Solución

Consideremos en primer lugar el lagrangiano  $L' = m \dot{x}^2/2 - V(x)$ . Sus ecuaciones del movimiento vienen dadas por la ecuación de Lagrange

$$\frac{\partial L'}{\partial x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L'}{\partial \dot{x}} \right)$$

que utilizando la expresión para  $L'$  es

$$m\ddot{x} + \dot{V} = 0$$

siendo  $\dot{V} = dV/dx$ . Para el lagrangiano  $L = m^2 \dot{x}^4/12 + m \dot{x}^2 V(x) - V^2(x)$ , se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x} &= (m\dot{x}^2 - 2V)\dot{V}, \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) &= m\ddot{x}(m\dot{x}^2 + 2V) + 2m\dot{x}^2\dot{V} \end{aligned}$$

y por lo tanto la ecuación de Lagrange es

$$(m\ddot{x} + \dot{V})(m\dot{x}^2 + 2V) = 0$$

La ecuación del movimiento es por tanto idéntica a la asociada al lagrangiano  $L'$

$$m\ddot{x} + \dot{V} = 0$$

**17)** Demostrar que el lagrangiano  $L = \frac{1}{2} e^{\alpha t} (\dot{x}^2 - \omega^2 x^2)$ , proporciona las ecuaciones del movimiento de un oscilador armónico amortiguado. Comentar el resultado.

### Solución

La ecuación de Lagrange es

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = \frac{\partial L}{\partial x}$$

que para el lagrangiano del enunciado es

$$\ddot{x} + \alpha \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

que es la ecuación del oscilador armónico amortiguado con término de amortiguamiento  $\alpha$ .

Para este sistema existen dos constantes del movimiento de la forma,

$$\begin{aligned} D_1 &= e^{\lambda_2 t} (\dot{x} + \lambda_1 x), \\ D_2 &= e^{\lambda_1 t} (\dot{x} + \lambda_2 x) \end{aligned}$$

Calculemos cuales son los valores de  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  para que  $D_1$  y  $D_2$  sean constantes del movimiento, es decir, para que se verifique

$$\frac{dD_i}{dt} = 0$$

El resultado es

$$\frac{dD_i}{dt} = \frac{\partial D_i}{\partial t} + \frac{\partial D_i}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial D_i}{\partial \dot{x}} \ddot{x} = e^{\lambda_j t} [(\lambda_1 + \lambda_2 - \alpha) \dot{x} + (\lambda_1 \lambda_2 - \omega^2) x] = 0$$

con  $i, j = 1, 2$ . Por lo tanto se tiene

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= \alpha, \\ \lambda_1 \lambda_2 &= \omega^2 \end{aligned}$$

de forma que resolviendo obtenemos las expresiones para  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  en términos de  $\alpha$  y  $\omega$  como

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1}{2} (\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}), \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} (\alpha \mp \sqrt{\alpha^2 - 4\omega^2}), \end{aligned} \tag{5.1}$$

Entre las expresiones para  $D_1$  y  $D_2$  es posible eliminar  $\dot{x}$  para obtener la solución más general para la ecuación del movimiento

$$x = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} [D_1 e^{-\lambda_2 t} - D_2 e^{-\lambda_1 t}]$$

que depende de las dos constantes del movimiento  $D_1, D_2$  y de los parámetros del sistema  $\alpha, \omega$ .