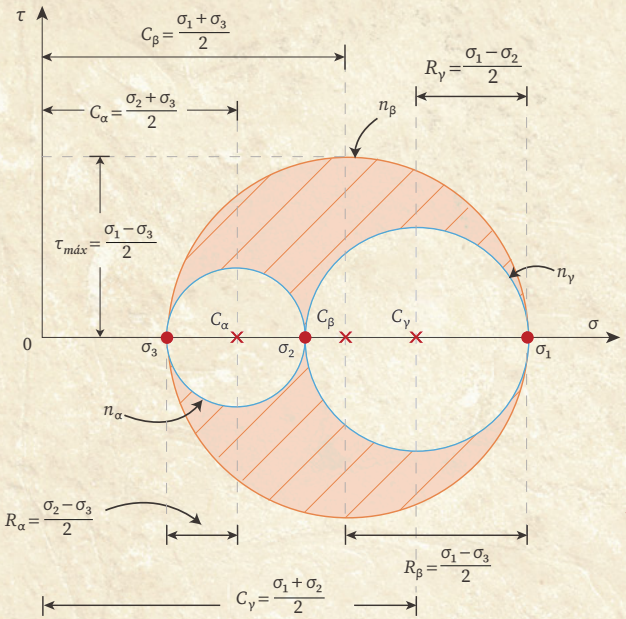
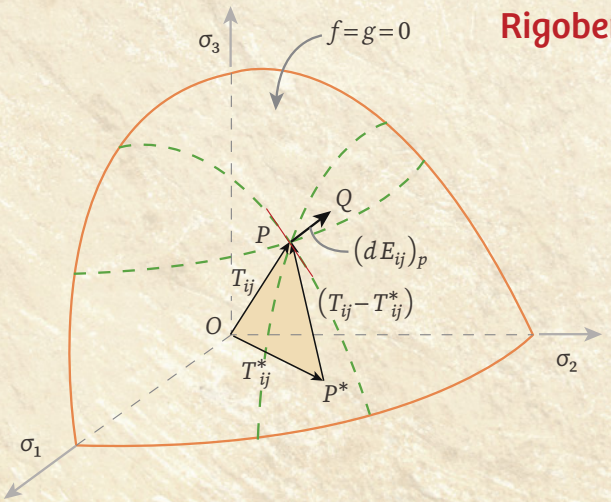
UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA



FUNDAMENTOS DE Mecánica del medio continuo

Rigoberto Rivera Constantino



DIVISIÓN DE INGENIERÍAS CIVIL Y GEOMÁTICA

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
FACULTAD DE INGENIERÍA

FUNDAMENTOS DE MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO

Rigoberto Rivera Constantino

División de Ingenierías Civil y Geomática
Departamento de Geotecnia

Para visualizar la obra te sugerimos

Acrobat Reader
Haz Click

RIVERA CONSTANTINO, Rigoberto.
Fundamentos de mecánica del medio continuo.
México, Universidad Nacional Autónoma de México,
Facultad de Ingeniería, 2024, 356 p.

ISBN 978-607-30-9303-3

Fundamentos de mecánica del medio continuo

Primera edición digital de un ejemplar (6 MB).
Formato PDF. Publicado en línea el 12 de agosto de 2024

D.R. © 2024, UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Avenida Universidad 3000, Col. Universidad Nacional Autónoma de México,
Ciudad Universitaria, Delegación Coyoacán, C.P. 04510, Ciudad de México

FACULTAD DE INGENIERÍA
http://www.ingenieria.unam.mx/

ISBN 978-607-30-9303-3, primera edición digital

Esta edición y sus características son propiedad
de la Universidad Nacional Autónoma de México.
Prohibida la reproducción o transmisión total
o parcial por cualquier medio sin la autorización escrita del titular de los
derechos patrimoniales.

Impreso y hecho en México.

UNIDAD DE APOYO EDITORIAL
Cuidado de la edición: Amelia Guadalupe Fiel Rivera,
Patricia Eugenia García Naranjo. Diseño editorial: Nismet Díaz Ferro

ACERCA DEL AUTOR



Rigoberto Rivera Constantino nació el 4 de enero de 1954, en Ozuluama, Veracruz. Estudió Ingeniería Civil (1973-1977) y la Maestría en Mecánica de Suelos (1979-1981) en la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Posteriormente, realizó un Diplomado de Estudios a Profundidad (DEA) y el Doctorado en Mecánica de Suelos en la Escuela Central de París, Francia (1984-1988). Su trayectoria en el ámbito de la ingeniería civil abarca tanto el ejercicio profesional, la investigación y la docencia.

Actualmente es Profesor de Carrera titular C de Tiempo Completo (desde 1999) en la División de Ingenierías Civil y Geomática (DICyG) de la Facultad de Ingeniería de la UNAM; sin embargo, su trayectoria académica en la Facultad de Ingeniería inicia desde 1979 como profesor de asignatura de medio tiempo. Encabezó el grupo de académicos que crearon el Laboratorio de Geotecnia de la carrera de Ingeniería Civil. Ha impartido en la Licenciatura las materias de *Mecánica del Medio Continuo, Comportamiento de Suelos, Mecánica de Suelos* y *Cimentaciones*. Asimismo, en el Programa de Posgrado en Ingeniería ha impartido las materias de *Laboratorio de Mecánica de Suelos, Propiedades de los Suelos, Mecánica de Suelos Teórica* y es tutor del *Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería*. Ha dirigido 28 tesis de licenciatura, 32 de Maestría y dos de Doctorado. Ha sido sinodal en decenas de exámenes de Licenciatura, 30 exámenes de grado de Especialidad, 171 de Maestría y 26 de doctorado.

Ha participado en 87 cursos extracurriculares de actualización en el área de Geotecnia como conferencista y coordinador en los temas de Laboratorio de Mecánica de Suelos, Ingeniería de cimentaciones, Interacción suelo-estructura y Herramientas de cómputo aplicadas a la Geotecnia, tanto en el país como en el extranjero. Dentro del terreno de la investigación, el Doctor Rivera ha sido coordinador y participante en 12 proyectos de investigación y de desarrollo tecnológico y ha publicado 67 artículos de la especialidad y 10 artículos de divulgación en docencia, como autor y coautor, tanto en revistas como en eventos académicos nacionales e internacionales. Además, ha sido autor de diversos materiales didácticos plasmados en 13 publicaciones de Geotecnia.

Es autor del libro "Introducción a la Mecánica del Medio Continuo" publicado por la Facultad de Ingeniería en 2017, en su segunda edición (ISBN 978-607-02-9695-6, pp., 227) y Coordinador y coautor de dos capítulos de libro "Temas Selectos de Análisis Numérico Aplicados a la Ingeniería Geotécnica", publicado por la SMIG, en el año 2022 con motivo de su 65 aniversario (ISBN 978-607-99185-5-2, pp., 568), y que servirá de texto para los cursos de análisis numérico que se imparten en nuestro posgrado de geotecnia. Cabe resaltar que la obra recibió el reconocimiento al mejor libro de Ingeniería Civil, 2022, por parte del CICM.

En el extranjero, ha sido profesor visitante en la Universidad Nacional de Colombia, sede Manizales. Ha participado como conferencista magistral en las Universidades: Nacional de Chile (Santiago) y Austral de Valdivia, Cuenca, Ecuador, Tecnológica de Honduras, sede Tegucigalpa, Santo Tomás, en la ciudad de Tunja, Boyacá, Colombia, Néstor Cáceres Velázquez, en Juliaca Perú y en el Colegio de Ingenieros del Perú, con sede en las ciudades de Lima y Cusco. Ha participado como ponente en la Universidad de Incheon, Corea del Sur y la Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, España.

En la Facultad de Ingeniería, el Doctor Rivera ha tenido una destacada participación institucional como miembro en 12 Consejos Académicos y Comisiones (CAACFMI, PRIDE y PSPA). Ocupó los cargos de Jefe del Laboratorio de Geotecnia, Jefe de Departamento de Geotecnia y Secretario Académico en la DICyG. Fue el coordinador académico de la Maestría en Vías Terrestres, la primera ofrecida en línea dentro del PPI para el personal de la SCT. Fue miembro de la Comisión de evaluación del Programa de estímulos al rendimiento académico para Investigadores de Carrera de tiempo completo (PRIDE) del Instituto de Ingeniería, UNAM, durante el periodo 2019-2022.

Colabora activamente como miembro en diversas asociaciones técnicas, como el CICM y la SMIG, de esta última fue secretario (1993-1994) y presidente de la mesa directiva 2007-2008, actualmente es miembro del Consejo de Honor de dicha Sociedad. En el ámbito internacional, es miembro desde el 2006 de la *Southeast Asian Geotechnical Society.* Miembro del Comité Técnico Internacional TC-221 "Tailing and Mine Wastes" de la International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering (ISSMGE).

Tuvo una estancia sabática de dos años (2009 y 2010) en la Coordinación de Proyectos Hidroeléctricos de la Comisión Federal de Electricidad (CFE), participando en el diseño y construcción de presas que construye nuestro país para generación de energía eléctrica, siendo la última de ellas la Central Hidroeléctrica "La Yesca". Esta última recibió el premio Milestone CFRD, 2014, a la mejor presa construida en su tipo a nivel mundial. Participó en el Comité Revisor por parte de la CFE de 16 manuales de Diseño de Obras Civiles que desarrolló el Instituto de Ingeniería de la UNAM, Sección C (Geotecnia), que constituyen un referente en la ingeniería práctica de la geotecnia, no sólo en el país sino también en algunos países de habla hispana; dicho material se encuentra a dis-

posición del público para su venta en la página electrónica https://www.amazon.com.mx

Como distinciones el Doctor Rivera ocupó la Cátedra Especial, "Mariano Hernández Barrenechea" en los años 1993 y 1994, otorgada por la Facultad de Ingeniería de la UNAM. Adicionalmente, el CICM le otorgó al Profesor Rivera el Premio Nacional a la Docencia 2015, "Mariano Hernández Barrenechea", por sus contribuciones en favor de la formación de recursos humanos en el área de la Geotecnia e Ingeniería de Cimentaciones.

En 2018 realizó una estancia sabática corta de 3 meses en la empresa *International Foundation Group*, con sede en Dubái y Abu Dhabi, UAE, donde tuvo oportunidad de conocer los procedimientos constructivos de vanguardia en la construcción de cimentaciones profundas para edificios de gran altura, los sistemas de instrumentación para el monitoreo de dichas estructuras, así como las pruebas de carga en pilas de cimentación mediante celdas de carga bidireccionales.

En la Reunión Nacional de Profesores de Geotecnia (XVI, RNPIG, noviembre de 2018), organizada por la SMIG y celebrada en la ciudad de León Guanajuato, fue seleccionado para dictar la *Segunda Conferencia Magistral en Docencia "Eulalio Juárez Badillo", Descripción del comportamiento mecánico de arcillas, arenas y enrocamientos empleando el Principio de la Proporcionalidad Natural de Juárez Badillo.* Teoría y Aplicaciones., (ISBN 978-607-96251-5-3, pp., 104). Evento que tuvo lugar en la XXIX Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica, León Guanajuato, 2018. Una de las más altas distinciones que otorga la SMIG a los docentes de la especialidad.

De igual manera en la Reunión Nacional de Ingeniería Geotécnica (XXXI, noviembre del 2022), organizada por la SMIG y celebrada en la

ciudad de Guadalajara, Jal., fue seleccionado para dictar la *Sexta Conferencia Magistral en práctica profesional "Leonardo Zeevaert Wichers", Sobre algunas contribuciones del Dr. Leonardo Zeevaert a la Ingeniería Geotécnica.* Una visión actual (ISBN 978-607-99185-9-0, pp., 116), la cual ha sido ya dictada por profesores de talla nacional e internacional que son un ícono en la especialidad tanto en la docencia, investigación y práctica profesional.

PRÓLOGO DE LA PRIMERA EDICIÓN DIGITAL

Ya han pasado siete años de la aparición de la segunda edición de la obra *Fundamentos de Mecánica del Medio Continuo*, tiempo durante el cual el autor ha tenido la oportunidad de utilizar el material escrito en los cursos que imparte de manera cotidiana tanto en la licenciatura de Ingeniería Civil, en la Facultad de Ingeniería, como en el Programa de Posgrado en Ingeniería, área Geotecnia, UNAM. La experiencia adquirida durante este tiempo en el uso del libro como material de apoyo al curso, las sugerencias y observaciones de colegas profesores de la asignatura, así como de los alumnos, han sido los factores principales que han motivado al autor para trabajar en una tercera edición de obra.

En esta primera edición digital del libro (tercera edición escrita) se ha hecho una revisión exhaustiva de todo el material, corrigiendo errores tipográficos tanto en el texto como en las ecuaciones matemáticas y se ha mejorado la calidad de algunas figuras. En el capítulo 3, *Principios Generales de la Mecánica*, se ha agregado un anexo sobre el concepto de derivada material, el cual es fundamental para el desarrollo matemático del capítulo. Se ha reestructurado completamente el capítulo 6, *Viscoelasticidad* y se ha adicionado el capítulo 8, *Elastoplasticidad*, con lo cual la obra cubre tanto los temas que se abordan a nivel licenciatura como en el posgrado en geotecnia, quedando constituida finalmente por ocho capítulos y dos apéndices.

En el capítulo 6, *Viscoelasticidad*, se desarrollan con cierto detalle los aspectos matematicos de los modelos constitutivos de Maxwel, Kelvin-Voigth y Burgers, y se estudian los conceptos de Creep y Relajación.

Cabe resaltar que los modelos constitutivos mencionados son la base para resolver problemas viscoelásticos a través de lo que se conoce como el *Principio de Correspondencia*. Este establece que la transformada de Laplace a un problema de un continuo inelástico se obtiene sustituyendo en la solución elástica del mismo continuo, a las variables cinemáticas y estáticas por sus valores transformados así como a las constantes elásticas involucradas. Se incluyen en este capítulo algunos ejemplos resueltos y otros propuestos, con la solución correspondiente.

En el capítulo 8, *Elastoplasticidad*, se desarrollan los conceptos de Superfice de Fluencia, Potencial Plástico, Regla de Flujo, Principio del trabajo Plástico Máximo y Endurecimiento Isotrópico y Cinemático. Se finaliza el capítulo con los Teoremás de Colapso Plástico, ampliamente utilizados en la definición de la carga límite que puede soportar un material plástico y cuyas aplicaciones en la Ingeniería Civil son muy variadas.

En esta primera edición digital del libro *Fundamentos de Mecánica del Medio Continuo*, se han incluido y actualizado algunos temas que por su formalidad y estructura matemática corresponden a un programa de posgrado en Ingeniería Civil, sin embargo, si se escoge adecuadamente el material por estudiar, el libro sigue estando al alcance de los alumnos a nivel licenciatura.

El autor de esta obra reconoce ampliamente a la Unidad de Apoyo Editorial, de la Secretaría General de la Facultad, por el trabajo de edición del libro, ahora en formato digital.

Es claro que esta obra no se hubiera podido llevar a cabo sin el apoyo decidido e incondicional de la División de Ingenierías Civil y Geomática y su Departamento de Geotecnia, para quienes el autor sólo tiene muestras de gratitud.

Por último, se agradece de antemano a toda la comunidad académica de la Facultad de Ingeniería de la UNAM involucrados en el tema, los comentarios y sugerencias que le ayuden al autor a mejorar esta primera edición digital de la obra.

Rigoberto Rivera Constantino
Profesor Titular, Departamento de Geotecnia
División de Ingenierías Civil y Geomática
Facultad de Ingeniería, UNAM
Ciudad Universitaria, 2024

INTRODUCCIÓN

La Mecánica del Medio Continuo es una rama de la Física que estudia el estado de esfuerzo y deformación (o flujo) de sólidos, líquidos y gases. Esta mecánica no toma en cuenta la estructura molecular de la materia, sólo la considera como carente de vacíos, huecos o discontinuidades. Se da por hecho que la materia se encuentra distribuida en forma continua en todo su volumen, llenando por completo el espacio que ocupa.

Desde un punto de vista físico, un medio continuo es cualquier cuerpo deformable que se estudia macroscópicamente, en el cual cada partícula del cuerpo siempre permanece en contacto con sus vecinas. Este concepto de medio continuo constituye el postulado fundamental de la mecánica del medio continuo, lo que permite estudiar de manera semejante el comportamiento de sólidos, líquidos y gases.

La presentación del material se fundamenta en el análisis vectorial, sin embargo, muchas de las ecuaciones que surgen en esta mecánica se expresan también en notación indicial, con objeto de que el alumno se familiarice con este enfoque, que es el que se emplea de manera generalizada en la literatura técnica relacionada con esta rama de la Física.

El concepto de estado de esfuerzo (estática del medio continuo) se establece en el capítulo 1, mientras que el concepto de estado de deformación (cinemática del medio continuo) se trata en el capítulo 2, para lo cual sólo fue necesario adoptar la hipótesis de medio continuo. En estos dos capítulos se demuestra que la estructura matemática para estudiar el estado de esfuerzo y el estado de deformación es enteramente similar.

En el capítulo 3 se estudian las leyes generales de la mecánica, como son los principios de conservación de la masa, de la rapidez de la cantidad de movimiento, de la conservación de energía o primera ley de la termodinámica y el de aumento de entropía o desigualdad de Clausius-Duhem, los cuales son aplicables a cualquier medio continuo.

Para ligar los esfuerzos con las deformaciones es necesario tomar en cuenta las propiedades del material, lo cual se hace a través de lo que se conoce como ecuaciones constitutivas de los materiales, siendo el capítulo 4 donde se aborda la teoría de los materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos. La solución de ciertos problemas elásticos se realiza mediante funciones de esfuerzos y desplazamientos, por considerar que estos métodos de solución siguen siendo muy didácticos, sin embargo, no debemos olvidar que en la actualidad la solución de problemas complejos se lleva a cabo mediante herramientas numéricas muy poderosas, como es el caso de los métodos de diferencias finitas, elemento finito y otros.

En el capítulo 5 se tratan de manera somera algunos aspectos de la mecánica de fluidos, estableciendo las ecuaciones fundamentales de Navier-Stokes que rigen el comportamiento de los fluidos lineales, en tanto que en el capítulo 6 se estudian algunos problemas viscoelásticos a través del Principio de Correspondencia, cuyo fundamento matemático es la transformada de Laplace.

En el capítulo 7 se tratan las teorías de falla y ruptura de los materiales, las cuales están íntimamente ligadas con el diseño de las obras civiles que proyecta el ingeniero.

Finalmente en el capítulo 8, Elastoplasticidad, se abordan algunos conceptos de la teoría de la elastoplasticidad así como los fundamentos de los Teoremás de Colapso Plástico, ampliamente utilizados en la definición de la carga límite que puede soportar un material elastoplástico y cuyas aplicaciones en la Ingeniería Civil son muy variadas.

CONTENIDO

ACERCA DEL AUTOR III
PRÓLOGO DE LA TERCERA EDICIÓN VIII

INTRODUCCIÓN XI

CAPÍTULO 1. ESTADO DE ESFUERZO

Introducción 1
1.1 Fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo 2
1.2 Teoría del estado de esfuerzo 3
1.3 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo 5
1.4 Determinación de las ecuaciones de Cauchy 8
1.5 Esfuerzos principales 16
1.6 Elipsoide de Lamé 23
1.7 Solución gráfica de Mohr 25
1.8 Procedimiento gráfico de Mohr 35
1.9 Casos particulares de estados de esfuerzo 37
1.10 Descomposición de un estado general de esfuerzos en sus componentes volumétrica y desviadora 41
1.11 Estado de esfuerzo plano 43
1.12 Planos principales de esfuerzo 49
1.13 Esfuerzos octaédricos 55
1.14 Equilibrio de partículas en un medio continuo 57
1.15 Ecuaciones de equilibrio de momentos en partículas de un medio continuo 65
1.16 Problemas propuestos 68

CAPÍTULO 2. ESTADO DE DEFORMACIÓN

Introducción 71

2.1 Descripción del movimiento de un medio continuo 72
2.2 Características de rotación y cambio de forma de la partícula 76
2.3 Interpretación física del tensor rotacional 80
2.4 Interpretación física del tensor deformación 85
2.5 Componentes normal y cortante del vector deformación 95
2.6 Deformaciones y direcciones principales de deformación 96
2.7 Significado físico del invariante lineal J_1 97
2.8 Componentes volumétrica y desviadora del tensor deformación . . 99
2.9 Estado plano de deformación. 100
2.10 Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones 102
2.11 Determinación de los elementos del tensor deformación 107
2.12 Problemas propuestos 113

CAPÍTULO 3. PRINCIPIOS GENERALES DE LA MECÁNICA

Introducción 116
3.1 Teorema de Green. 117
3.2 Principio de la conservación de la masa o ecuación de continuidad 117
3.3 Principio de conservación de la cantidad de movimiento 121
3.4 Primera ley de la termodinámica: principio de conservación de energía 124
3.5 Segunda ley de la termodinámica: desigualdad de Clausius-Duhem. 128
Anexo 3.1 Derivada material o sustancial. 129

CAPÍTULO 4. ELASTICIDAD LINEAL

Introducción 133
4.1 Planteamiento matemático para definir las relaciones constitutivas en un continuo cualquiera 134
4.2 Relaciones tensoriales de los materiales elásticos lineales en un marco de referencia principal 142
4.3 Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos en un marco de referencia cartesiano . . 144
4.4 Energía de deformación elástica para un estado uniaxial de esfuerzos. 153

4.5 Energía de deformación elástica para un estado triaxial de esfuerzos. 155
4.6 Solución de problemas elásticos haciendo uso de funciones de esfuerzo 158
4.7 Ecuaciones de Navier-Cauchy 179
4.8 Solución de problemas elásticos haciendo uso de funciones de desplazamientos. 183
4.9 Problemas propuestos 200

CAPÍTULO 5. MECÁNICA DE FLUIDOS

5.1 Aspectos fundamentales de la Mecánica de fluidos lineal 203
5.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico de partículas de fluidos 209
5.3 Interpretación física de la ecuación de Navier-Stokes 211
5.4 Mecánica de los medios viscosos incompresibles 214
5.5 Funciones potenciales para derivar las fuerzas másicas de partículas de un fluido. 216
5.6 Flujos laminares 220
5.7 Clasificación de los flujos en términos del tipo de función potencial 222

CAPÍTULO 6. VISCOELASTICIDAD

Introducción 226
6.1 Modelos mecánicos simples. 227
6.2 Fenómeno de creep y relajación 236
6.3 Relaciones constitutivas de los materiales inelásticos 242
6.4 Nociones sobre la Transformada de Laplace. 243
6.5 Equivalencia entre modelos matemáticos para representar el comportamiento de materiales 252
6.6 Cálculo de las constantes que aparecen en los modelos matemáticos representativos del comportamiento de materiales. . 262
6.7 Problemas propuestos 272

CAPÍTULO 7. TEORÍAS DE FALLA Y RUPTURA

Introducción 274

7.1 Teoría de Rankine 276
7.2 Teoría de Coulomb-Tresca 278
7.3 Teoría de Saint Venant 282
7.4 Teoría de Nadai 284
7.5 Teoría de Von Mises Hencky 286
7.6 Teoría de Mohr-Coulomb 289
7.7 Teoría de Griffith 290
7.8 Problemas resueltos 301

CAPÍTULO 8. ELASTOPLASTICIDAD

Introducción 312
8.1 Criterio de fuencia 312
8.2 Potencial plástico y regla de flujo 314
8.3 Principio del trabajo plástico máximo 315
8.4 Endurecimiento por deformación y plasticidad perfecta 316
8.5 Postulado de estabilidad de Drucker 318
8.6 Endurecimiento por deformación isotrópico y cinemático 320
8.7 Relaciones esfuerzo-deformación para materiales elastoplásticos 324
8.8 Teoremas de colapso plástico 330

Apéndice A. Análisis tensorial 337
Apéndice B. Rotación de ejes coordenados 351

Bibliografía 355

CAPÍTULO

1 Estado de esfuerzo

Introducción

En este capítulo se establecen los conceptos de vector esfuerzo y de tensor esfuerzo asociados a un punto material de un medio continuo. Dado que el número de vectores esfuerzo asociados a cada elemento de superficie que se hace pasar por dicho punto es infinito, por medio del concepto de tensor esfuerzo se demostrará que basta con conocer tres de los infinitos vectores esfuerzo, asociados a tres planos mutuamente ortogonales, para calcular todos los demás.

El resto del capítulo se dedicará al estudio del estado de esfuerzo en un punto del medio continuo, tanto tridimensional como plano, y a desarrollar métodos analíticos y gráficos para calcular los esfuerzos asociados a un plano de corte imaginario a través del medio continuo. Finalmente, se derivan las ecuaciones de equilibrio de partículas de un medio continuo, conocidas como ecuaciones de Cauchy.

Con la finalidad de que los lectores se familiarice con la notación del cálculo tensorial, algunas ecuaciones relevantes derivadas de esta mecánica se plantean tanto en notación vectorial como tensorial, para lo cual se les invita revisar los Apéndices A y B de la obra.

1.1 Fuerzas de superficie y fuerzas de cuerpo

Los tipos de fuerzas que se aceptan en el estudio de los medios continuos son de *superficie* y *de cuerpo*.

a) **Fuerzas de superficie.** Aquellas aplicadas en las fronteras del medio continuo por la acción de otros cuerpos que se encuentran en contacto con el medio.

La fuerza resultante de todas las fuerzas de superficie que actúan sobre un área de un medio continuo está dada por:

$$\int_A \bar{t}_n \, dA = \bar{i}_k \int_A t_k \, dA \qquad (1.1)$$

El subíndice k que aparece en la ecuación (1.1) se usa para expresar el mismo concepto en notación índice y generalmente varía de 1 a 3 (Apéndice A).

donde:

$\bar{t}_n$: vector fuerza de superficie
dA : elemento diferencial de área

Adoptando un sistema de referencia cartesiano, la ecuación (1.1) queda como:

$$\int_A \bar{t}_n \, dA = \bar{i} \int_A t_x \, dA + \bar{j} \int_A t_y \, dA + \bar{k} \int_A t_z \, dA \qquad (1.2)$$

siendo t_x, t_y, t_z las componentes cartesianas del vector esfuerzo $\bar{t}_n$, cuyas unidades son $[F/L^2]$, por ejemplo, kg/cm^2, t/m^2, N/m^2 (Pa).

b) **Fuerzas de cuerpo.** Aquellas provocadas por la acción de cuerpos distantes que generan campos gravitacionales, de temperatura y electromagnéticos.

La fuerza resultante de todas las fuerzas de cuerpo, actuantes en un volumen finito V está dada por:

$$\int_V \rho \bar{f} dV = \bar{i}_k \int_V \rho f_k \, dV \tag{1.3}$$

donde:

$\bar{f}$: vector fuerza de cuerpo
dV : elemento diferencial de volumen
ρ : masa específica del medio, también conocida como densidad

En notación cartesiana la ecuación (1.3) se puede escribir como:

$$\int_V \rho \bar{f} dV = \bar{i} \int_V \rho f_x \, dV + \bar{j} \int_V \rho f_y \, dV + \bar{k} \int_V \rho f_z \, dV \tag{1.4}$$

siendo f_x, f_y, f_z las componentes cartesianas del vector fuerza de cuerpo $\bar{f}$, cuyas unidades se pueden expresar como $[F/M]$ o $[F/L^3]$, siendo M la masa del medio.

1.2 Teoría del estado de esfuerzo

Cuando un cuerpo deformable se somete a solicitaciones de cualquier tipo, este se deforma hasta cierto límite. Esto se debe a que las fuerzas internas han entrado en juego, tomando un valor tal que permiten equilibrar a las fuerzas externas aplicadas.

Para describir las acciones entre todas las partículas materiales de un cuerpo deformable en equilibrio, imaginemos un sistema de fuerzas aplicado al medio, tal como se ilustra en la figura (1.1).

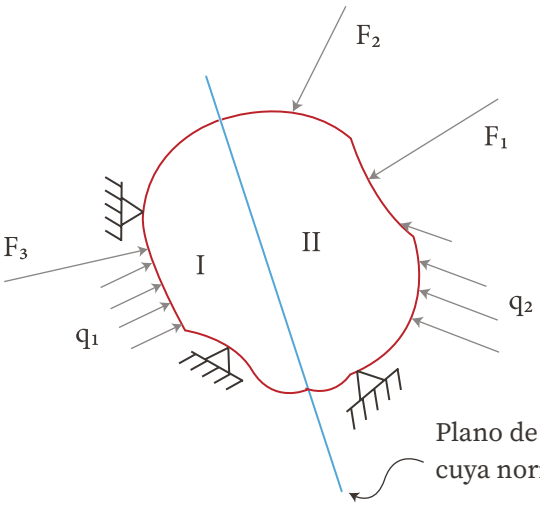


FIGURA 1.1 Cuerpo deformable de volumen *V* en equilibrio sometido a un sistema de fuerzas externas cualquiera

Al hacer un corte imaginario a través de un plano cualquiera del cuerpo, cuya normal está definida por el vector unitario, $\overline{n}$, se obtienen los cuerpos I y II, mostrados en la figura (1.2).

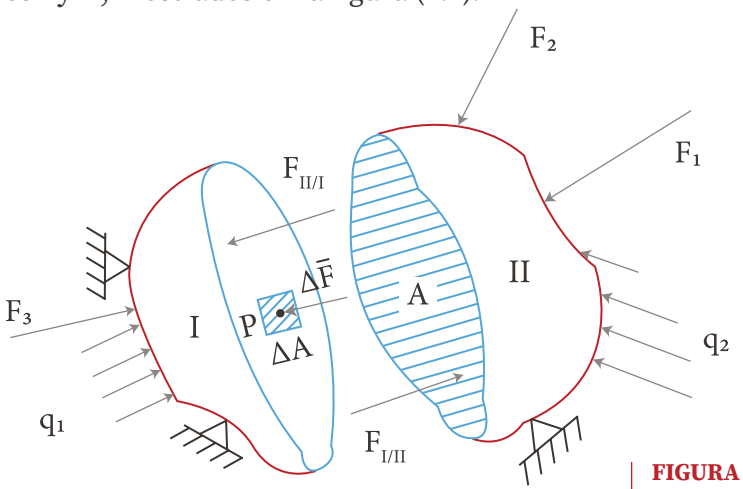


FIGURA 1.2 Definición de vector esfuerzo en el entorno a un punto de un cuerpo deformable

Dado que el cuerpo I y II provienen de un cuerpo inicialmente en equilibrio, cada una de las partes deberá estar en equilibrio también. La sola posibilidad de garantizar esta condición es que en el área de corte imaginaria exista una fuerza resultante que equilibre cada una de las partes del cuerpo. Para determinar dicha fuerza es necesario conocer la distribución de los vectores fuerza de superficie en cada uno de los puntos materiales del área de corte y hacer la integración correspondiente mediante la ecuación (1.3). En aras de la simplicidad llamemos $F_{II/I}$ la fuerza resultante de superficie que representa la acción que el cuerpo II ejerce sobre el cuerpo I a través del área A, para mantener el equilibrio de esa parte del cuerpo. Es claro que la situación inversa es válida también para el cuerpo II.

Consideremos un punto P de dicha sección de corte y tomemos un entorno de área del mismo ΔA y sea $\Delta \overline{F}$ la parte de la acción que el cuerpo II comunica al cuerpo I, únicamente a través de ΔA.

D **Definición:**

El vector esfuerzo $\bar{t}_n$ en un punto P de un cuerpo deformable, asociado a un plano de corte cualquiera que contiene a dicho punto y cuya normal es $\overline{n}$, está *dado por:*

$$\bar{t}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \overline{F}}{\Delta A} \qquad (1.5)$$

1.3 Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo

El vector esfuerzo $\bar{t}_n$ puede descomponerse en un vector esfuerzo normal $\overline{\sigma}_n$ y en un vector esfuerzo cortante $\overline{\tau}_n$, tal como se muestra en la figura (1.3).

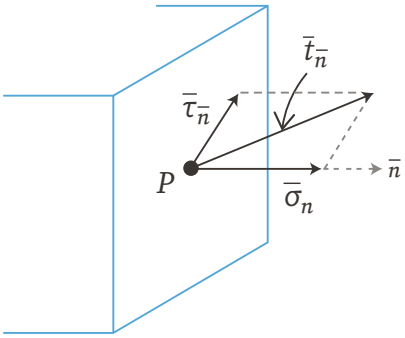


FIGURA 1.3
Componentes normal y tangencial del vector esfuerzo $\bar{t}_n$

De esta manera, se obtiene: $\bar{t}_n = \bar{\sigma}_n + \bar{\tau}_n$

El módulo del vector esfuerzo normal $\bar{\sigma}_n$ se puede calcular como la proyección del vector esfuerzo $\bar{t}_n$ sobre la dirección $\bar{n}$:

$$\left|\bar{\sigma}_n\right| = \sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} \tag{1.6}$$

El vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$ se puede calcular como la diferencia vectorial:

$$\bar{\tau}_n = \bar{t}_n - \bar{\sigma}_n \tag{1.7}$$

La normal $\bar{n}$ que define el plano donde actúa $\bar{t}_n$ se puede expresar en función de sus cosenos directores como:

$$\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k}$$

siendo α, β, γ los ángulos que forman los ejes de referencia cartesianos con la dirección de dicha normal.

Llamando a: $\cos\alpha = n_x$; $\cos\beta = n_y$; $\cos\gamma = n_z$

La normal $\bar{n}$ se puede expresar como: $\bar{n} = n_x \bar{i} + n_y \bar{j} + n_z \bar{k}$

El vector esfuerzo $\bar{\sigma}_n$ es positivo si tiene la misma dirección que el vector $\bar{n}$ (tensión), en caso contrario será negativo (compresión); σ_n siempre será normal al plano de corte.

El vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$ siempre estará alojado en el plano de corte; $\bar{\tau}_n$ adopta cualquier dirección.

En un marco de referencia cartesiano, es usual descomponer a $\bar{\tau}_n$ en dos componentes paralelas a los ejes del marco de referencia.

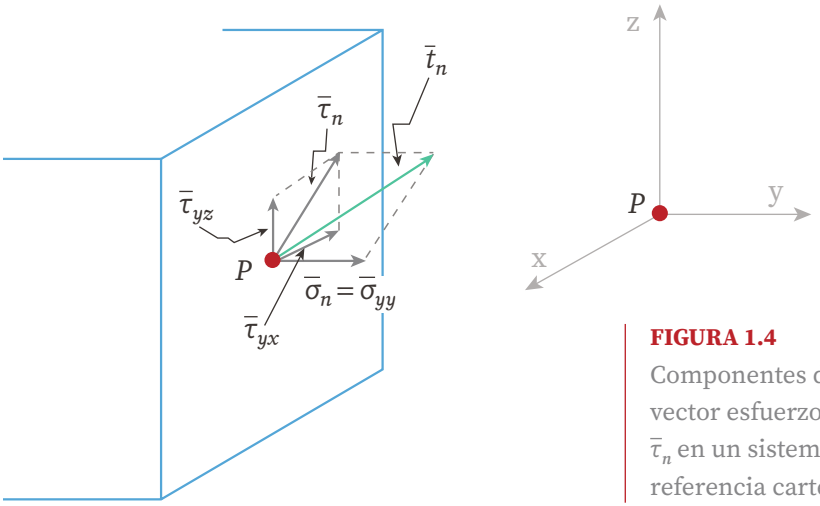


FIGURA 1.4
Componentes del vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$ en un sistema de referencia cartesiano

Por lo tanto, el vector esfuerzo $\bar{t}_n$ se puede expresar como:

$$\bar{t}_n = \bar{\sigma}_{yy} + \bar{\tau}_{yx} + \bar{\tau}_{yz} \qquad (1.8)$$

En esta ecuación, el primer subíndice indica la dirección de la normal al plano donde actúa dicho esfuerzo; mientras que el segundo, indica la dirección del eje cartesiano al cual es paralelo. En *caras positivas* (las

frontales), las componentes de esfuerzos serán positivas, cuando tengan la dirección de los ejes del marco de referencia.

En *caras negativas* (las posteriores), las componentes de esfuerzo serán positivas cuando sean de dirección contraria a la de los ejes del marco de referencia.

1.4 Determinación de las ecuaciones de Cauchy

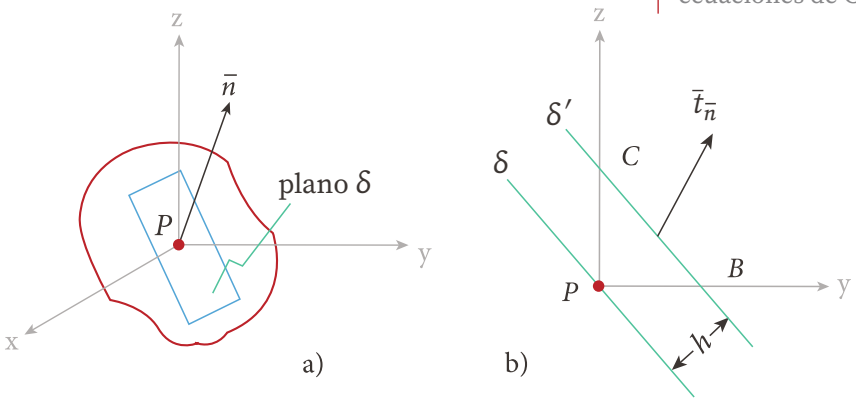
Por lo expuesto anteriormente, podemos decir que para describir las acciones que se generan en un plano de corte de un medio continuo, será necesario describir al conjunto de vectores $\bar{t}_n$, asociados a todos los puntos del plano de corte. Por el momento centraremos nuestra atención sólo en un punto del medio.

Ya que en un punto P del cuerpo deformable se pueden establecer una infinidad de planos de corte que lo contienen, entonces existirán una infinidad de vectores esfuerzo, $\bar{t}_n$, asociados a todos los planos de corte que pasan por P. Es de esperar que la envolvente de todos los vectores esfuerzo $\bar{t}_n$ sea una función continua.

Para describir a esa función, Cauchy propuso el siguiente procedimiento, basado en consideraciones de equilibrio.

Consideremos un punto P de un medio continuo ubicado en el origen de un sistema de referencia cartesiano x, y, z y supongamos conocidos los vectores esfuerzo asociados a tres planos mutuamente ortogonales que representan el entorno a dicho punto. Si ahora se desea calcular el esfuerzo en el punto P, asociado a un plano δ que pasa por él y que está definido mediante la normal $\overline{n}$ (figura 1.5a), se procede de la siguiente manera:

FIGURA 1.5
Determinación de las ecuaciones de Cauchy



Se elige un plano δ' paralelo a δ y separado una distancia h del origen (figura 1.5b). En estas condiciones analicemos el equilibrio estático del tetraedro así obtenido, utilizando como esfuerzo actuante en la cara CB del tetraedro, al promedio de los realmente actuantes en dicha cara. Al tomar el límite cuando $h \to 0$ se tiene que:

a) El esfuerzo medio $\bar{t}_n$ se reduce al realmente actuante en el punto P.
b) El plano δ' coincidirá con δ.

Tomando en cuenta los incisos a) y b), analicemos el equilibrio del tetraedro que se muestra en la figura (1.6), involucrando las fuerzas de cuerpo y de superficie existentes en dicho cuerpo. Cabe señalar que en la figura (1.6) no están indicadas las fuerzas de cuerpo por unidad de masa que actúan en el tetraedro.

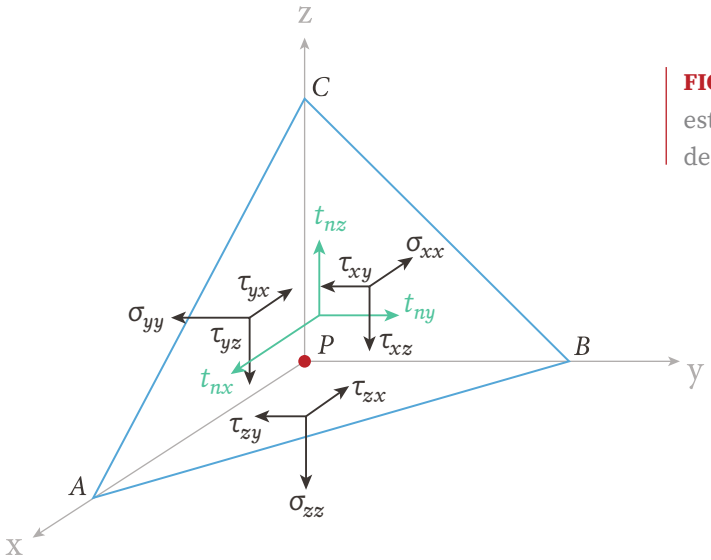


FIGURA 1.6 Equilibrio estático del tetraedro de Cauchy

Definiendo

A_{ABC} = área comprendida entre los vértices ABC que en lo sucesivo denominaremos A.

ρ = masa específica del medio

el área, al proyectarse en cada uno de los ejes coordenados, queda:

$$A_{PBC} = A \cos\alpha = An_x$$

$$A_{PAC} = A \cos\beta = An_y$$

$$A_{PAB} = A \cos\gamma = An_z$$

Estableciendo el equilibrio del tetraedro, se tiene:

Por $\sum F_x = 0$:

$$-\sigma_{xx} A_{PBC} - \tau_{yx} A_{PAC} - \tau_{zx} A_{PAB} + t_x A_{ABC} + \frac{1}{3}\rho f_x A_{ABC} h = 0 \qquad (1.9)$$

Por lo tanto:

$$-\sigma_{xx} A n_x - \tau_{yx} A n_y - \tau_{zx} A n_z + t_x A + \frac{1}{3}\rho f_x A h = 0$$

Tomando límite, cuando $h \to 0$, se obtiene:

$$-\sigma_{xx} A n_x - \tau_{yx} A n_y - \tau_{zx} A n_z + t_x A = 0$$

$$t_x = \sigma_{xx} n_x + \tau_{yx} n_y + \tau_{zx} n_z \qquad (1.10)$$

Obsérvese en la ecuación (1.10), que al tomar el límite cuando $h \to 0$, las fuerzas de cuerpo se anulan, quedando el equilibrio únicamente en términos de las fuerzas de superficie.

Análogamente, se puede calcular por $\sum F_y = 0$ y $\sum F_z = 0$:

$$t_y = \tau_{xy} n_x + \sigma_{yy} n_y + \tau_{zy} n_z \qquad (1.11)$$

$$t_z = \tau_{xz} n_x + \tau_{yz} n_y + \sigma_{zz} n_z \qquad (1.12)$$

Las ecuaciones (1.10), (1.11) y (1.12) pueden ser escritas en forma matricial como sigue:

$$\begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n = \left[T_{ij} \right] \left| \bar{n} \right| \qquad (1.13)$$

donde:

T_{ij} = tensor esfuerzo de orden 2, cuyo número de elementos es 9 (véase Apéndice A).

Físicamente, los elementos del tensor esfuerzo representan los esfuerzos actuantes en tres planos mutuamente ortogonales. Matemáticamente, el tensor esfuerzo es un operador que al actuar sobre $\overline{n}$, produce el vector $\bar{t}_n$. Se dice que se conoce el estado de esfuerzos en un punto P de un medio continuo cuando se conocen todos los elementos del tensor esfuerzo. Se puede demostrar del equilibrio de una partícula diferencial de un medio continuo que el tensor esfuerzo es un tensor simétrico, esto es $T_{ij} = T_{ji}$, por lo tanto, sólo se necesitan conocer seis de los nueve componentes del tensor esfuerzo para establecer el estado de esfuerzos en un punto del medio continuo. Como el tensor esfuerzo representa la respuesta del material cuando se somete a un sistema de cargas, este resulta independiente del sistema de referencia adoptado para medir dicha respuesta, lo que dentro del cálculo tensorial se conoce como la propiedad de invariancia de los tensores.

P

Problema 1.1

En un punto P de un medio continuo, el tensor esfuerzo vale:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

1.1.1.

Determine el vector esfuerzo en un plano que contiene al punto P y es paralelo a los planos a) BGE, b) $BGFC$, del paralelepípedo de la figura (1.7).

S Solución

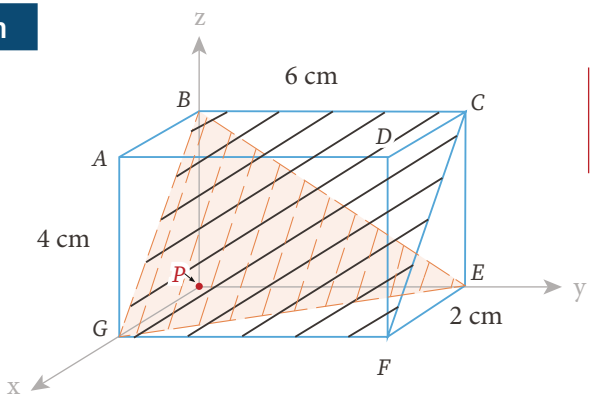


FIGURA 1.7 Vector esfuerzo asociado a un plano

Dado que: $\bar{t}_n = [T_{ij}]|\bar{n}|$

a) Es necesario calcular la normal al plano BGE, para lo cual procedemos como sigue:

Coordenadas de los puntos:

$B\,(0,0,4)$; $\quad \overline{BG} = \bar{a} = 2\bar{i} - 4\bar{k}$

$G\,(2,0,0)$; $\quad \overline{BE} = \bar{b} = 6\bar{j} - 4\bar{k}$

$E\,(0,6,0)$

El producto cruz $\bar{a} \times \bar{b}$ resulta:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & -4 \end{bmatrix} = \bar{i}(24) - 2(4\bar{j} - 6\bar{k})$$

$$\bar{a} \times \bar{b} = 24\bar{i} + 8\bar{j} + 12\bar{k}$$

$$|\bar{a} \times \bar{b}| = \sqrt{24^2 + 8^2 + 12^2} = 28$$

Por lo tanto, la normal al plano BGE es:

$$\bar{n}=\frac{\bar{a}\times\bar{b}}{|\bar{a}\times\bar{b}|}=\frac{1}{28}\left(24\bar{i}+8\bar{j}+12\bar{k}\right)=\frac{6}{7}\bar{i}+\frac{2}{7}\bar{j}+\frac{3}{7}\bar{k}$$

Operando para calcular el vector esfuerzo total, tenemos:

$$\bar{t}_n=\begin{bmatrix}14 & 7 & -7\\ 7 & 21 & 0\\ -7 & 0 & 35\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{6}{7}\\ \frac{2}{7}\\ \frac{3}{7}\end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n=11\bar{i}+12\bar{j}+9\bar{k}\ \text{MPa}$$

b) Para el plano $BGFC$, procedemos de manera similar.

Coordenadas de los puntos:

$B\ (0,0,4)$; $G\ (2,0,0)$; $\overline{BG}=\bar{a}=2\bar{i}-4\bar{k}$
$C\ (0,6,4)$ $\overline{BC}=\bar{c}=6\bar{j}$

$$\bar{a}\times\bar{c}=\begin{bmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 0 & -4\\ 0 & 6 & 0\end{bmatrix}=\bar{i}(+24)-2(-6\bar{k})$$

$$\bar{a}\times\bar{c}=24\bar{i}+12\bar{k}$$

$$|\bar{a}\times\bar{c}|=\sqrt{720}=12\sqrt{5}$$

La normal al plano $BGFC$ resulta:

$$\bar{n} = \frac{\bar{a} \times \bar{c}}{\left|\bar{a} \times \bar{c}\right|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(2\bar{i} + \bar{k}\right)$$

$$\bar{t}_n = \begin{bmatrix} 14 & 7 & -7 \\ 7 & 21 & 0 \\ -7 & 0 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(21\bar{i} + 14\bar{j} + 21\bar{k}\right) \text{ MPa}$$

1.1.2.)

Determine las componentes normal y cortante del vector esfuerzo $\bar{t}_n$ en el plano *BGFC*.

El esfuerzo normal se calcula como:

$$\sigma_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(21, 14, 21\right) \cdot \left(2, 0, 1\right) \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sigma_n = \frac{1}{5}\left(42 + 21\right) = \frac{63}{5}$$

$$\sigma_n = \frac{63}{5} \text{ MPa}$$

$$\bar{\tau}_n = \left[\left|\bar{t}_n\right|^2 - \sigma_n^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\left|\bar{t}_n\right|^2 = \frac{1}{5}\left(21^2 + 14^2 + 21^2\right) = 215.60$$

$$\bar{\tau}_n = \left[215.60 - 158.76\right]^{\frac{1}{2}} = 7.54$$

$$\bar{\tau}_n = 7.54 \text{ MPa}$$

1.5 Esfuerzos principales

Para determinar los valores máximo y mínimo del conjunto de vectores $\bar{t}_n$ asociados a planos de corte imaginarios que contienen al punto P, es necesario encontrar el plano que pasa por dicho punto cuya normal coincida con la dirección del vector $\bar{t}_n$ (figura 1.8).

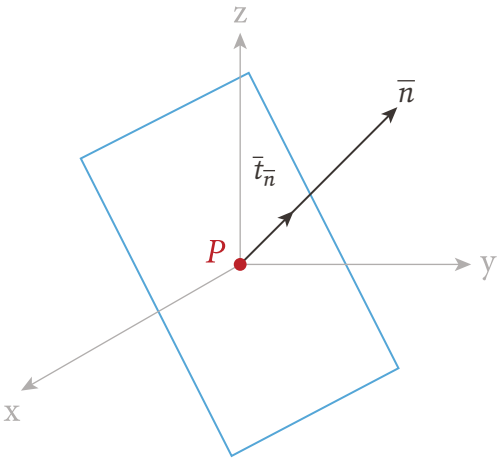


FIGURA 1.8
Determinación de los esfuerzos principales

Si la normal al plano que contiene al punto P coincide con la dirección del vector esfuerzo $\bar{t}_n$, entonces $\bar{\tau}_n = 0$, por lo que:

$$\bar{t}_n = \bar{\sigma}_n = \left[T_{ij}\right] \left| \bar{n} \right|$$

Por otra parte, el vector esfuerzo normal se puede expresar como:

$$\bar{\sigma}_n = \left| \bar{\sigma}_n \right| \bar{n} = \sigma \bar{n}$$

Por lo tanto:

$$\bar{\sigma}_n = \sigma n_x \bar{i} + \sigma n_y \bar{j} + \sigma n_z \bar{k} = \left[T_{ij}\right] \left| \bar{n} \right|$$

Desarrollando:

$$\sigma n_x = \sigma_{xx}\, n_x + \tau_{yx}\, n_y + \tau_{zx}\, n_z \tag{1.14}$$

$$\sigma n_y = \tau_{xy}\, n_x + \sigma_{yy}\, n_y + \tau_{zy}\, n_z \tag{1.15}$$

$$\sigma n_z = \tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y + \sigma_{zz}\, n_z \tag{1.16}$$

En este sistema de ecuaciones las incógnitas son los cosenos directores n_x, n_y, n_z del plano donde $\bar{\tau}_n = 0$ y la magnitud del esfuerzo normal σ asociado a dicho plano.

Dado que se tienen tres ecuaciones y cuatro incógnitas, el problema es indeterminado, por lo que es necesario introducir una ecuación adicional, que es:

$$n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1 \tag{1.17}$$

Las ecuaciones (1.14), (1.15) y (1.16) se pueden representar como:

$$\left(\sigma_{xx} - \sigma\right) n_x + \tau_{yx}\, n_y + \tau_{zx}\, n_z = 0 \tag{1.18}$$

$$\tau_{xy}\, n_x + \left(\sigma_{yy} - \sigma\right) n_y + \tau_{zy}\, n_z = 0 \tag{1.19}$$

$$\tau_{xz}\, n_x + \tau_{yz}\, n_y + \left(\sigma_{zz} - \sigma\right) n_z = 0 \tag{1.20}$$

Las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20) tienen como modelo matemático:

$$\left[T_{ij}\right] \left| \bar{n} \right| = \sigma \left| \bar{n} \right| \tag{1.21}$$

siendo:

σ = valor característico de la matriz que representa a los elementos del tensor T_{ij}

$\overline{n}$ = vector característico de la matriz que representa a los elementos del tensor T_{ij}

Es decir, la solución de las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20) conduce a los valores y vectores característicos de la matriz que representa los elementos del tensor T_{ij}, por lo tanto, la expresión (1.21) puede ser escrita como:

$$\left[T_{ij}-\sigma I\right]\overline{n}=0 \qquad (1.22)$$

siendo: $I=$ matriz identidad.

Obsérvese en la ecuación (1.22), que para que exista una solución diferente a la trivial para n_x, n_y, n_z esto es, $\overline{n}\neq 0$, es necesario que el determinante de la matriz $\left[T_{ij}-\sigma I\right]$ sea igual a cero. Por lo tanto:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma \end{bmatrix} = 0$$

desarrollando el determinante, se obtiene la siguiente ecuación característica:

$$\sigma^3-I_1\sigma^2+I_2\sigma-I_3=0 \qquad (1.23)$$

donde los coeficientes de la ecuación (1.23) están dados por:

$I_1=\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}$; invariante lineal

$$I_2 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{zz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_{xx} \end{vmatrix}; \quad \text{invariante cuadrático}$$

$$I_3 = \left|\left[T_{ij}\right]\right| \quad ; \quad \text{invariante cúbico}$$

Resolviendo la ecuación característica (1.23), se obtienen los valores característicos σ', σ'', σ'''. Se puede demostrar que las raíces de la ecuación cúbica son siempre reales si el tensor T_{ij} es simétrico, como es el caso, por lo que dichas raíces reciben el nombre de *esfuerzos principales*, siendo σ_1 el mayor, σ_2 el intermedio y σ_3 el menor, de esta manera:

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$$

donde los subíndices 1, 2, 3 nos indican tres ejes ortogonales que pasan por el punto *P*, a los cuales se les pueden asociar tres planos ortogonales en los que únicamente existe esfuerzo normal.

Sustituyendo los valores de σ_1, σ_2, y σ_3 en las ecuaciones (1.18), (1.19) y (1.20), en forma sucesiva, y haciendo uso de la identidad fundamental $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, más dos de estas ecuaciones así obtenidas, ya que sólo dos de ellas son linealmente independientes, se determinan los vectores característicos respectivos $\overline{n}_1$, $\overline{n}_2$, $\overline{n}_3$, los cuales representan las direcciones principales de los esfuerzos σ_1, σ_2, y σ_3 respectivamente. Es claro que se debe cumplir que los productos escalares $\overline{n}_1 \cdot \overline{n}_2 = 0$; $\overline{n}_2 \cdot \overline{n}_3 = 0$; $\overline{n}_3 \cdot \overline{n}_1 = 0$; lo cual demuestra la ortogonalidad de las tres direcciones principales de esfuerzo.

Ya que los planos principales son ortogonales entre sí, sus normales pueden ser utilizadas como ejes principales de referencia, el tensor referido a ese marco queda representado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Se dice que dos tensores representan el mismo estado de esfuerzos en un punto cuando sus invariantes son iguales. Puesto que lo que se está midiendo como respuesta del material es una cantidad física, en este caso, esfuerzos, esta debe ser independiente del sistema de referencia adoptado.

P Problema 1.2

En un punto de un medio continuo, se establece el siguiente tensor de esfuerzo:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Obtener:

1.2.1.
El vector esfuerzo en el plano que pasa por el punto cuya normal queda definida por:

$$\bar{n} = \frac{2}{3}\bar{i} - \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{1}{3}\bar{k}$$

1.2.2.
Los esfuerzos principales σ_1, σ_2 y σ_3 .

S **Solución**

a) Calculamos el vector esfuerzo:

$$\bar{t}_n = [T_{ij}] \mid \bar{n} \mid$$

$$\bar{t}_n = \left[(4)\left(\frac{2}{3}\right) + (3)\left(-\frac{2}{3}\right) + (0)\left(\frac{1}{3}\right) \right] \bar{i}$$

$$+ \left[(3)\left(\frac{2}{3}\right) + (-4)\left(-\frac{2}{3}\right) + (0)\left(\frac{1}{3}\right) \right] \bar{j}$$

$$+ \left[(2)\left(\frac{2}{3}\right) + (0)\left(-\frac{2}{3}\right) + (2)\left(\frac{1}{3}\right) \right] \bar{k}$$

$$\bar{t} = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{14}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k} \text{ MPa}$$

El esfuerzo normal quedará definido por:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n}$$

$$\sigma_n = \frac{4}{9} - \frac{28}{9} + \frac{2}{9}$$

$$\sigma_n = -\frac{22}{9} \text{ MPa}$$

El esfuerzo cortante se definirá como:

$$\bar{\tau}_n = \bar{t}_n - \bar{\sigma}_n$$

$$\bar{\tau}_n = \frac{2}{3}\bar{i} + \frac{14}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k} - \left(-\frac{44}{27}\bar{i} + \frac{44}{27}\bar{j} - \frac{22}{27}\bar{k}\right)$$

$$\bar{\tau}_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{44}{27}\right)\bar{i} + \left(\frac{14}{3} - \frac{44}{27}\right)\bar{j} + \left(\frac{2}{3} + \frac{22}{27}\right)\bar{k}$$

$$\bar{\tau}_n = \frac{62}{27}\bar{i} + \frac{82}{27}\bar{j} + \frac{40}{27}\bar{k} \quad \text{MPa}$$

b) Calculamos los esfuerzos principales σ_1, σ_2, σ_3 resolviendo la ecuación característica.

Evaluando los invariantes del tensor esfuerzo se tiene:

$I_1 = 2$; $I_2 = -25$; $I_3 = -50$, por lo tanto, la ecuación característica queda como:

$$\sigma^3 - 2\sigma^2 - 25\sigma + 50 = 0$$

Resolviendo la ecuación característica, obtenemos:

$$\sigma_1 = 5 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_2 = 2 \text{ MPa} \; ; \; \sigma_3 = -5 \text{ MPa}$$

Por lo tanto, la matriz de esfuerzos principales queda:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \text{[MPa]}$$

Dado que los invariantes del tensor esfuerzo en los sistemas de referencia cartesiano y principal son iguales, entonces dichos tensores representan el mismo estado de esfuerzos en el punto *P* del medio continuo.

1.6 Elipsoide de Lamé

Cuando se seleccionan a los ejes principales como marco de referencia, en un plano cualquiera que pase por un punto del medio continuo, definido por su normal $\bar{n} = \cos\alpha\,\bar{e}_1 + \cos\beta\,\bar{e}_2 + \cos\gamma\,\bar{e}_3$; las expresiones que definen a las componentes del vector esfuerzo $\bar{t}_n$ en ese plano, paralelas a las direcciones $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$, se pueden calcular de la siguiente manera (figura 1.9):

Dado que:

$$\bar{t}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{vmatrix}$$

$$\bar{t}_n = \sigma_1 \cos\alpha\,\bar{e}_1 + \sigma_2 \cos\beta\,\bar{e}_2 + \sigma_3 \cos\gamma\,\bar{e}_3$$

Dado que $\bar{n}_1 = \bar{n}_1\,\bar{e}_1$; $\bar{n}_2 = n_2\,\bar{e}_2$; $\bar{n}_3 = n_3\,\bar{e}_3$ y que la magnitud de los vectores que representan las direcciones principales es unitaria, esto es, $n_1 = n_2 = n_3 = 1$, entonces:

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_1 = \sigma_1 \cos\alpha = \bar{t}_n \cdot \bar{e}_1 \qquad (1.24)$$

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_2 = \sigma_2 \cos\beta = \bar{t}_n \cdot \bar{e}_2 \qquad (1.25)$$

$$\bar{t}_n \cdot \bar{n}_3 = \sigma_3 \cos\gamma = \bar{t}_n \cdot \bar{e}_3 \qquad (1.26)$$

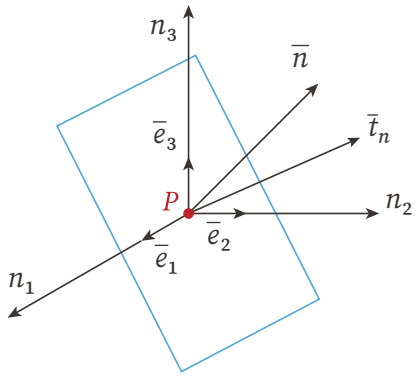


FIGURA 1.9
Vector esfuerzo en un marco de referencia principal

Elevando al cuadrado las ecuaciones (1.24), (1.25) y (1.26), despejando $\cos^2\alpha$, $\cos^2\beta$, $\cos^2\gamma$ y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_1)^2 = (\sigma_1 \cos\alpha)^2$$

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_2)^2 = (\sigma_2 \cos\beta)^2$$

$$(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_3)^2 = (\sigma_3 \cos\gamma)^2$$

Estas últimas ecuaciones se pueden representar como:

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_1)^2}{\sigma_1^2} = \cos^2\alpha \qquad (1.27)$$

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_2)^2}{\sigma_2^2} = \cos^2\beta \qquad (1.28)$$

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_3)^2}{\sigma_3^2} = \cos^2\gamma \qquad (1.29)$$

Sumando (1.27), (1.28) y (1.29), se llega a la ecuación:

$$\frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_2)^2}{\sigma_2^2} + \frac{(\bar{t}_n \cdot \bar{e}_3)^2}{\sigma_3^2} = 1 \qquad (1.30)$$

La ecuación (1.30) muestra que el conjunto de vectores $\bar{t}_n$, que describe el estado de esfuerzo en un punto, queda envuelto por un elipsoide (Lamé), con semiejes, mayor, intermedio y menor, σ_1, σ_2, σ_3, respectivamente, tal como se observa en la figura (1.10).

Por lo tanto, el máximo valor de $\bar{t}_n$ debe ser σ_1 y el mínimo σ_3. Es común en la mecánica del medio continuo representar la respuesta de un material en términos de las magnitudes de los esfuerzos principales, para lo cual el sistema de referencia cartesiano x, y z, se remplaza por la magnitud de los esfuerzos principales σ_1 , σ_2 , σ_3, respectivamente, representación espacial que resulta de gran utilidad en el estudio de las teorías de falla y ruptura de los materiales (capítulo 5).

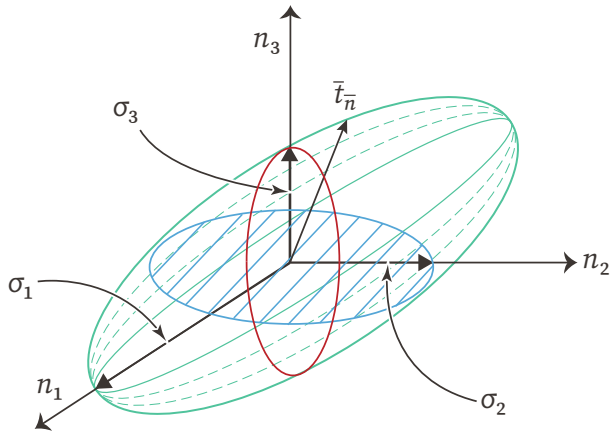


FIGURA 1.10
Elipsoide de Lamé

1.7 Región de Mohr

Puesto que conocido el tensor esfuerzo y elegido un plano de corte imaginario que contiene a un punto *P* del medio continuo, cuya normal está dada por el vector $\bar{n}$, podemos determinar a la pareja de valores (σ_n, τ_n) mediante:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} \tag{1.31}$$

$$\tau_n = \pm\sqrt{\left|\bar{t}_n\right|^2 - \left|\bar{\sigma}_n\right|^2} \tag{1.32}$$

Otto Mohr estableció el plano coordenado (σ_n, τ_n) con lo cual queda establecida la correspondencia entre las normales a los planos que pasan por el punto *P* del material en estudio y el punto (σ_n, τ_n) de dicho plano (figura 1.11).

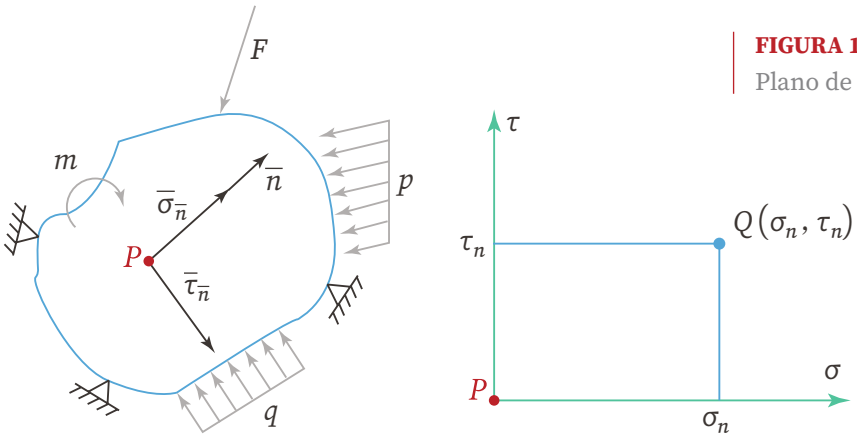


FIGURA 1.11
Plano de Mohr

Sin embargo, la situación inversa no es verdadera, es decir, existen puntos del plano de Mohr, cuyas coordenadas no representan a esfuerzos actuantes en ninguno de los planos que pasan por el punto *P*.

Por lo tanto, resulta de interés definir la región de Mohr, cuyos puntos representan a esfuerzos realmente actuantes en planos que pasan por el punto *P*. Para resolver este problema se procede de la siguiente manera.

Sea $\bar{n}$ la normal a un plano que pasa por un punto P de un medio continuo, cuyos cosenos directores son $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$.

Asociado a dicho plano existirá un vector esfuerzo $\bar{t}_n$, tal que:

$$\bar{t}_n = [T_{ij}] \mid \bar{n} \mid \tag{1.33}$$

Aceptemos además que en el punto *P* existan las direcciones principales $\bar{n}_1$, $\bar{n}_2$, $\bar{n}_3$ en las cuales se definan a los planos principales con esfuerzos actuantes σ_1, σ_2, σ_3 respectivamente. Tomando como base el marco de referencia anterior, la ecuación (1.33) puede ser escrita como:

$$\bar{t}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{vmatrix} \tag{1.34}$$

El vector esfuerzo resulta:

$$\bar{t}_n = \sigma_1 \cos\alpha\, \bar{i} + \sigma_2 \cos\beta\, \bar{j} + \sigma_3 \cos\gamma\, \bar{k}$$

$$\left|\bar{t}_n\right|^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma \tag{1.35}$$

La magnitud del esfuerzo normal es igual a:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma \tag{1.36}$$

haciendo uso de estas dos últimas ecuaciones, conjuntamente con:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

resolvemos el problema planteado, es decir, determinamos al vector $\bar{n}$ que define al plano que pasa por el punto *P* en el cual actúan σ_n y τ_n. Obsérvese que al hacer este planteamiento los cosenos directores $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$

son ahora una función de σ_1, σ_2, σ_3, σ_n y τ_n, los cuales al graficarlos en el plano de Mohr, conducen a la región solución buscada.

El sistema de ecuaciones planteado es el siguiente:

$$\left| \bar{t}_n \right|^2 = \sigma_1^2 \cos^2\alpha + \sigma_2^2 \cos^2\beta + \sigma_3^2 \cos^2\gamma \tag{1.37}$$

$$\sigma = \sigma_1 \cos^2\alpha + \sigma_2 \cos^2\beta + \sigma_3 \cos^2\gamma \tag{1.38}$$

$$1 = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \tag{1.39}$$

Las ecuaciones (1.37), (1.38) y (1.39) pueden representarse de manera matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos^2\alpha \\ \cos^2\beta \\ \cos^2\gamma \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_n^2 + \tau_n^2 \\ \sigma_n \\ 1 \end{vmatrix} \tag{1.40}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones planteado para $\cos^2\alpha$; $\cos^2\beta$; $\cos^2\gamma$, mediante el método de Cramer, procedemos de la siguiente manera.

Cálculo del determinante de la matriz de coeficientes:

$$\begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \sigma_1^2(\sigma_2 - \sigma_3) - \sigma_2^2(\sigma_1 - \sigma_3) + \sigma_3^2(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Para $\cos^2\alpha$, se tiene:

$$\begin{vmatrix} \sigma_n^2+\tau_n^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \\ \sigma_n & \sigma_2 & \sigma_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (\sigma_n^2+\tau_n^2)(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_2^2(\sigma-\sigma_3)+\sigma_3^2(\sigma-\sigma_2)$$

$$=(\sigma_n^2+\tau_n^2)(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_2^2\sigma+\sigma_2^2\sigma_3+\sigma_3^2\sigma-\sigma_3^2\sigma_2$$

$$=(\sigma_n^2+\tau_n^2)(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3(\sigma_2-\sigma_3)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{(\sigma_n^2+\tau_n^2)(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)(\sigma_2-\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3(\sigma_2-\sigma_3)}{\sigma_1^2(\sigma_2-\sigma_3)-\sigma_2^2(\sigma_1-\sigma_3)+\sigma_3^2(\sigma_1-\sigma_2)}$$

$$=\frac{(\sigma_n^2+\tau_n^2)-\sigma_n(\sigma_2+\sigma_3)+\sigma_2\sigma_3}{\sigma_1^2+\dfrac{-\sigma_2^2(\sigma_1-\sigma_3)+\sigma_3^2(\sigma_1-\sigma_2)}{(\sigma_2-\sigma_3)}}$$

El denominador se puede simplificar como sigue:

$$\sigma_1^2+\frac{-\sigma_2^2\sigma_1+\sigma_2^2\sigma_3+\sigma_3^2\sigma_1-\sigma_3^2\sigma_2}{(\sigma_2-\sigma_3)}=$$

$$\sigma_1^2+\frac{(\sigma_2-\sigma_3)(-\sigma_2\sigma_1+\sigma_2\sigma_3-\sigma_1\sigma_3)}{(\sigma_2-\sigma_3)}=(\sigma_2-\sigma_1)(\sigma_3-\sigma_1)$$

Por lo tanto:

$$\cos^2\alpha = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \tag{1.41}$$

De la misma manera, se obtiene para $\cos^2\beta$ y $\cos^2\gamma$:

$$\cos^2\beta = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_3) + \sigma_1\sigma_3}{(\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_3 - \sigma_2)} \tag{1.42}$$

$$\cos^2\gamma = \frac{(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_1 + \sigma_2) + \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \tag{1.43}$$

Procediendo por simple análisis de estas ecuaciones, podemos definir a la región buscada. Así en la ecuación (1.41), observamos lo siguiente:

Dado que: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$

concluimos que: $(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) \geq 0$

y como: $\cos^2\alpha \geq 0$

por lo tanto: $(\sigma_n^2 + \tau_n^2) - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 \geq 0$

Ecuación que puede ser escrita como:

$$\sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \tau_n^2 \geq -\sigma_2\sigma_3$$

Completando el binomio cuadrado del primer miembro:

$$\sigma_n^2 - \sigma_n(\sigma_2+\sigma_3) + \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq -\sigma_2\sigma_3$$

$$+\left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\geq \frac{\sigma_2^2 + 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2 - 4\sigma_2\sigma_3}{4}$$

$$\geq \frac{\sigma_2^2 - 2\sigma_2\sigma_3 + \sigma_3^2}{4} \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2$$

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \geq \left(\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right)^2 \tag{1.44}$$

Obsérvese que con el signo de igualdad la ecuación anterior define a una circunferencia de radio:

$$R_\alpha = \frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}$$

y centro en:

$$C_\alpha = \left(\frac{\sigma_2+\sigma_3}{2}, 0\right)$$

De esta manera concluimos que en lo referente a $\cos\alpha$, la región buscada viene dada por los puntos de la circunferencia definida y los exteriores a él.

Respecto a $\cos^2\beta$, obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right)^2 \tag{1.45}$$

Es decir, la región buscada queda definida por los puntos de la circunferencia de radio:

$$R_\beta = \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2} \qquad \text{y centro en} \qquad C_\beta = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}, 0\right)$$

así como los puntos interiores a él.

Respecto a $\cos^2\gamma$, obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right)^2 + \tau_n^2 \leq \left(\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right)^2 \tag{1.46}$$

Es decir, se trata de los puntos de la circunferencia de radio:

$$R_\gamma = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \qquad \text{y centro en} \qquad C_\gamma = \left(\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}, 0\right),$$

así como los puntos exteriores a él.

Por lo tanto, la región buscada es la parte achurada que se muestra en la figura (1.12).

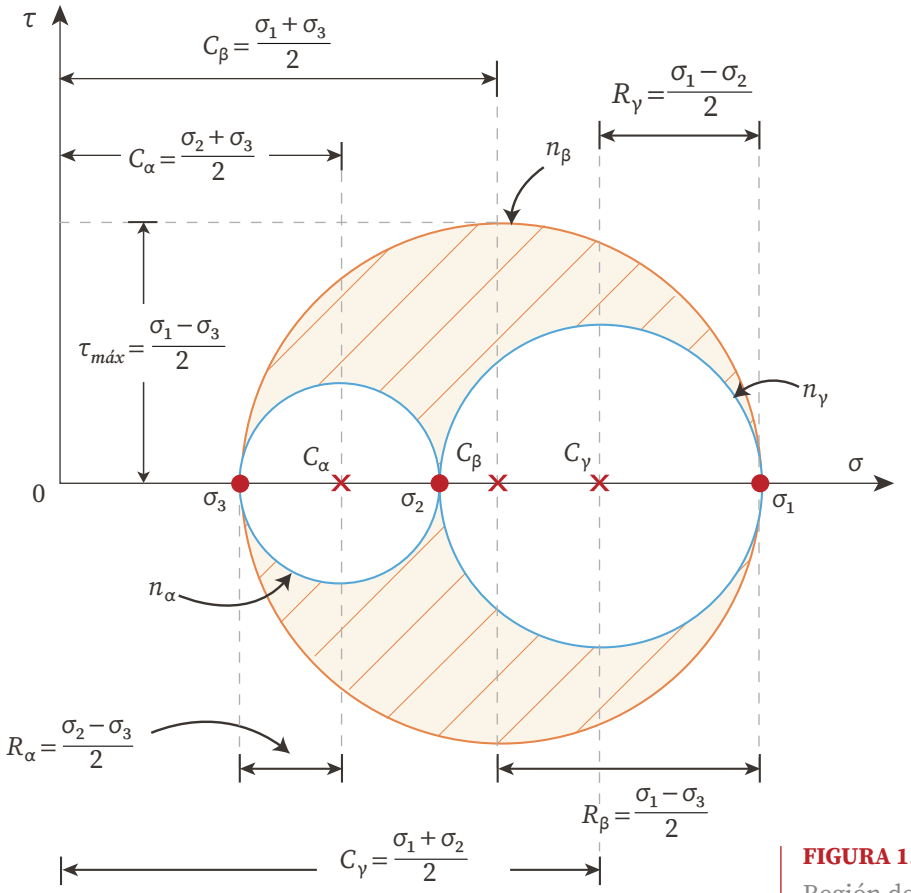


FIGURA 1.12
Región de Mohr

P Problema 1.3

El tensor esfuerzo principal en un punto de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \text{ [MPa]}$$

Determine:

1.3.1

Los esfuerzos σ_n y τ_n, de manera analítica, asociados a un plano que contiene al punto cuya normal está dada por:

$$\bar{n} = \left(\frac{1}{2}\bar{i} + \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k} \right)$$

1.3.2

Los esfuerzos σ_n y τ_n, empleando el círculo de Mohr.

S Solución

Cálculo del vector esfuerzo $\bar{t}_n$:

$$\bar{t}_n = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = 5\bar{i} + 3\bar{j} - \frac{3}{\sqrt{2}}\bar{k} \,[\text{MPa}]$$

Cálculo del esfuerzo normal σ_n:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n}$$

$$\sigma_n = \left(5, 3, -\frac{3}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$$

$$\sigma_n = \frac{5}{2}\,[\text{MPa}]$$

Cálculo del esfuerzo cortante τ_n :

$$\tau_n = \pm\sqrt{\left|\bar{t}_n\right|^2 - \left|\bar{\sigma}_n\right|^2}$$

$$\tau_n = \pm\sqrt{\left[5^2 + 3^2 + \left(\frac{-3}{\sqrt{2}}\right)^2\right] - \left(\frac{5}{2}\right)^2}$$

$$\tau_n = \pm 5.68\ [\text{MPa}]$$

1.8 Procedimiento gráfico de Mohr

Únicamente se enunciarán los pasos a seguir para obtener los esfuerzos σ_n y τ_n, asociados a un plano, cuya normal es $\bar{n}$, por lo que está fuera del alcance de esta obra la demostración rigurosa del procedimiento.

Para obtener los esfuerzos σ_n y τ_n, mediante el procedimiento gráfico de Mohr, se siguen los siguientes pasos:

1) Una vez definida la región de Mohr, por σ_1 se traza una recta perpendicular al eje σ y a partir de ella, pasando por σ_1 trazamos una recta que con la primera forme un ángulo $\theta_1\left(\theta_1 = \cos^{-1}\alpha\right)$.

2) Por σ_3 se traza una recta perpendicular al eje σ y a partir de ella, pasando por σ_3 se traza una recta que con la primera forme un ángulo $\theta_3\left(\theta_3 = \cos^{-1}\gamma\right)$.

3) Haciendo centro en C_α, se traza el arco de circunferencia que pasa por los puntos donde la recta $A - A'$ intersecta a las circunferencias, cuyo centro es C_β y C_γ.

4) Con centro en C_γ, se traza el arco de circunferencia que pasa por los puntos donde la recta $B - B'$ intersecta a las circunferencias, cuyo centro es C_α y C_β.

5) El punto buscado viene dado por la intersección de los dos arcos de circunferencia anteriormente trazados; las coordenadas del punto Q representan a los esfuerzos (σ_n, τ_n) actuantes en el plano cuya normal es $\overline{n}$.

S Solución del problema 1.3 mediante el procedimiento gráfico de Mohr

Los ángulos θ_1 y θ_3 se calculan como: $\theta_1 = \cos^{-1}\alpha$, $\theta_3 = \cos^{-1}\gamma$.

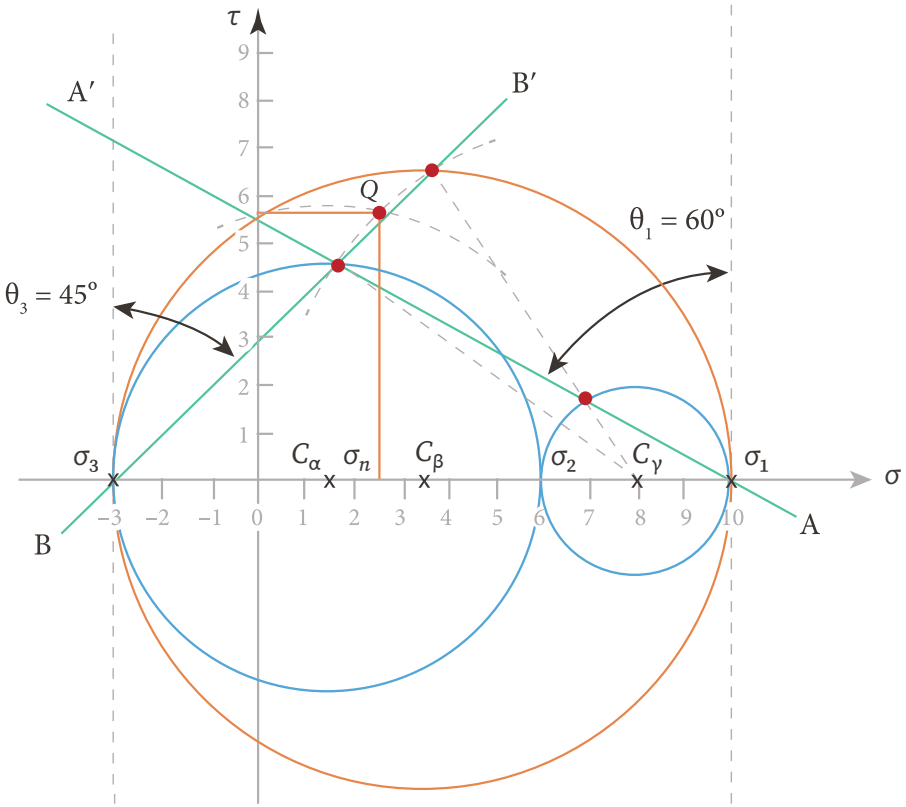


FIGURA 1.13
Solución gráfica de Mohr

Siguiendo la construcción geométrica, indicada en la figura (1.13), se obtiene:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_n &= 2.5 \text{ MPa}\\ \tau_n &= 5.7 \text{ MPa}\end{aligned}\right\} \text{ punto } Q$$

1.9 Casos particulares de estados de esfuerzo

a) **Estado de esfuerzo nulo.** Es aquel en el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0$, por lo tanto, el tensor esfuerzo queda representado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el espacio de Lamé y de Mohr el estado de esfuerzo nulo está representado por un punto, ubicado en el origen del sistema de referencia (figura 1.14).

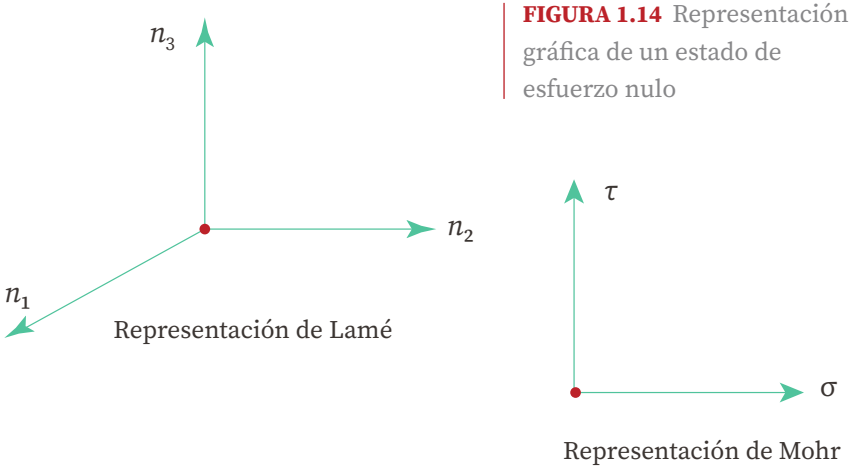


FIGURA 1.14 Representación gráfica de un estado de esfuerzo nulo

b) Estado de esfuerzo uniaxial. Es aquel en el cual $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$.

En este caso, el tensor esfuerzo queda representado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Todos los vectores $\bar{t}_n$ tienen la dirección del eje 1 (figura 1.15).

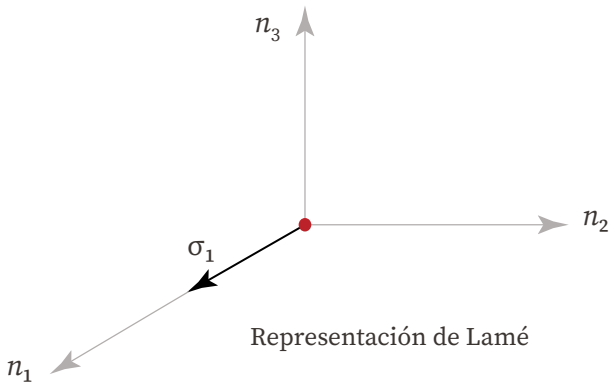


FIGURA 1.15
Estado de esfuerzo uniaxial, espacio de Lamé

El estado de esfuerzo uniaxial en el plano de Mohr está representado por una circunferencia de diámetro σ_1 (figura 1.16).

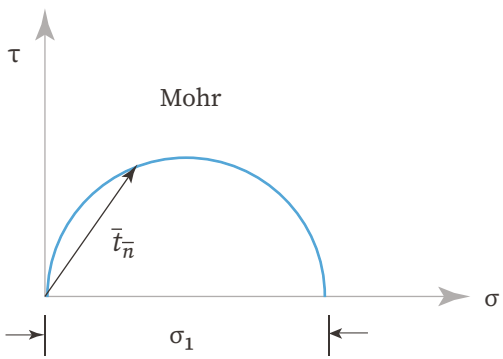


FIGURA 1.16
Estado de esfuerzo uniaxial

c) **Estado de esfuerzo plano.** Es aquel en el cual uno de los esfuerzos principales es nulo, por ejemplo: $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 = 0$, por lo tanto, el tensor esfuerzo se reduce a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En el espacio de Lamé, este estado de esfuerzos se reduce a una elipse (figura 1.17).

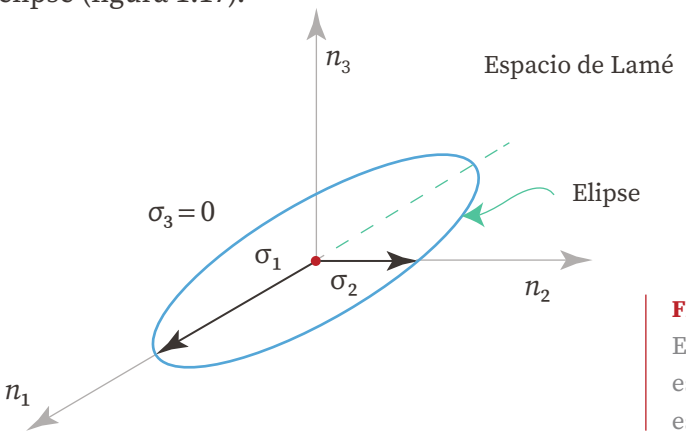


FIGURA 1.17
Estado de esfuerzo plano, espacio de Lamé

Cuando dos circunferencias pasan por el origen se trata de un esfuerzo plano (figura 1.18).

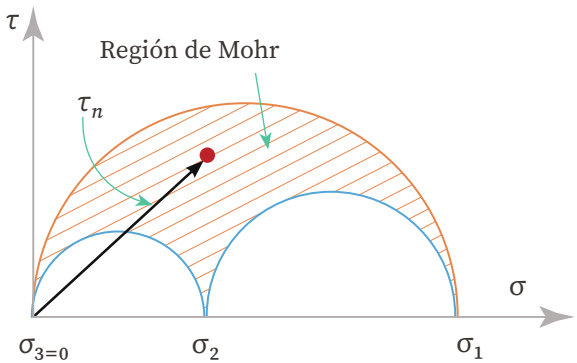


FIGURA 1.18
Estado de esfuerzo plano, región de Mohr, σ_3=0

d) **Estado general de esfuerzos.** Es aquel en el cual $\sigma_1 \neq 0$; $\sigma_2 \neq 0$; $\sigma_3 \neq 0$. El tensor esfuerzo queda representado como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

El estado general de esfuerzo en el espacio de Lamé queda definido por un elipsoide.

La representación en el plano de Mohr quedará, como en el caso anterior, con la variante de que $\sigma_3 \neq 0$.

e) **Estado de esfuerzo hidrostático.** Es aquel en el cual $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma$.

El tensor esfuerzo se reduce a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$

El estado de esfuerzo hidrostático en el espacio de Lamé queda representado por una esfera, mientras que en el plano de Mohr es un segmento de recta sobre el eje σ (figura (1.19)).

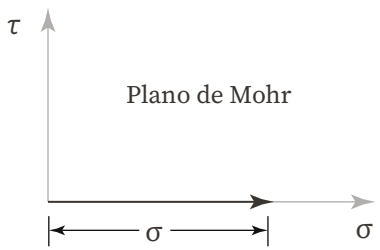


FIGURA 1.19
Estado de esfuerzo hidrostático

1.10 Descomposición de un estado general de esfuerzos en sus componentes volumétrica y desviadora

Supongamos que en un punto P de un medio continuo se establece el siguiente tensor esfuerzo.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{1.47}$$

Sea $\bar{n}$ la normal a un plano que pasa por el punto P de un medio continuo, entonces el vector esfuerzo en dicho plano se calcula como:

$$\bar{t}_n = \left[T_{ij}\right] \left| \bar{n} \right| \tag{1.48}$$

$$\bar{t}_n = \left(\sigma_{xx}\cos\alpha + \tau_{yx}\cos\beta + \tau_{zx}\cos\gamma\right)\bar{i}$$

$$+ \left(\tau_{xy}\cos\alpha + \sigma_{yy}\cos\beta + \tau_{zy}\cos\gamma\right)\bar{j}$$

$$+ \left(\tau_{xz}\cos\alpha + \tau_{yz}\cos\beta + \sigma_{zz}\cos\gamma\right)\bar{k}$$

La ecuación (1.48) puede ser escrita en forma matricial como:

$$\bar{t}_n = \underbrace{\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{I_1}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}}_{T_0} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{I_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}}_{T_v} \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \cos\beta \\ \cos\gamma \end{bmatrix}$$

De donde:

$$\bar{t}_n = [T_0]\,|\,\bar{n}\,| + [T_v]\,|\,\bar{n}\,| \qquad (1.49)$$

siendo:

T_0 = componente desviadora del tensor esfuerzo
T_v = componente volumétrica del tensor esfuerzo

Obsérvese en la ecuación (1.49) que la *componente volumétrica* de T_{ij} representa un estado de esfuerzo hidrostático, cuyos esfuerzos principales son el valor promedio aritmético de los esfuerzos normales que aparecen en T_{ij}, iguales en magnitud a $\frac{I_1}{3}$.

La *componente distorsional* o *desviadora* de un estado general de esfuerzos siempre presenta la siguiente propiedad:

$$[T_0] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} - \frac{I_1}{3} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} - \frac{I_1}{3} \end{bmatrix}$$

$$[T_0] = \begin{bmatrix} 0 & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & \tau_{zx} \\ 0 & 0 & 0 \\ \tau_{xz} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zy} \\ 0 & \tau_{yz} & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{I_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\sigma_{xx} - \frac{I_1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(\sigma_{zz} - \frac{I_1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \left(\sigma_{zz} - \frac{I_1}{3}\right) \end{bmatrix} \qquad (1.50)$$

Obsérvese que:

$$-\left(\sigma_{xx}-\frac{I_1}{3}\right)-\left(\sigma_{zz}-\frac{I_1}{3}\right)=-\sigma_{xx}-\sigma_{zz}+\frac{2I_1}{3}$$

$$=-\sigma_{xx}-\sigma_{zz}-\sigma_{yy}+\sigma_{yy}+\frac{2I_1}{3}=\sigma_{yy}-\frac{I_1}{3}$$

Lo anterior indica que la componente distorsional o desviadora de T_{ij} resulta siempre ser igual a la suma de cinco estados de esfuerzo plano.

A estos *estados de esfuerzo plano* algunos autores los llaman "estados de cortante puro", en los cuales el máximo esfuerzo cortante es igual al valor de cualesquiera de los esfuerzos principales diferente de cero.

Es común considerar que en la componente desviadora se manifiesta la acción del estado de cortante puro, mientras que en la componente volumétrica se manifiesta la acción de los esfuerzos normales promedio en el punto en estudio.

En general, en un cuerpo deformable sometido a un cierto estado de esfuerzo se acostumbra asociar los cambios de volumen a la componente volumétrica, mientras que los cambios de forma se asocian a la componente distorsional o desviadora.

1.11 Estado de esfuerzo plano

En la figura (1.20) se muestra un cuerpo deformable sometido a ciertas solicitaciones en su plano. Si el elemento es de espesor pequeño, los esfuerzos asociados a la dirección z se pueden despreciar, esto es:

$$\sigma_{zz}=0;\quad \tau_{xz}=0;\quad \tau_{yz}=0$$

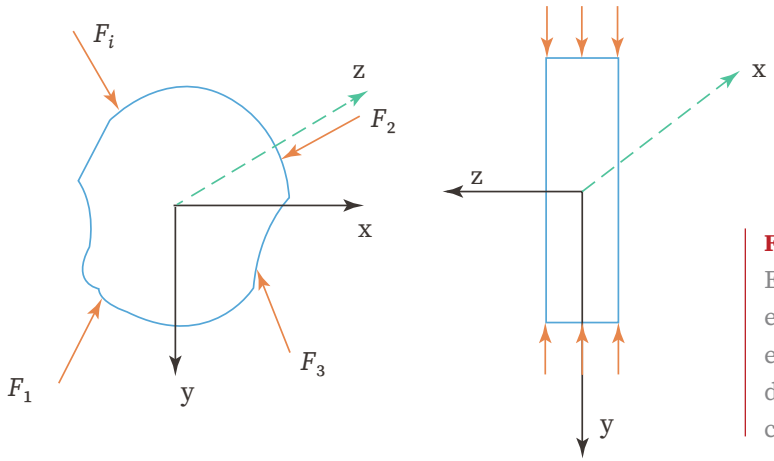


FIGURA 1.20
Estado de esfuerzo plano en un sistema de referencia cartesiano

Por lo que el tensor esfuerzo T_{ij} se reduce a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{1.51}$$

Este tensor representa un estado de esfuerzo plano.

Las componentes normal y cortante del vector esfuerzo $\bar{t}_n$ para un estado de esfuerzo plano se pueden deducir como a continuación se explica.

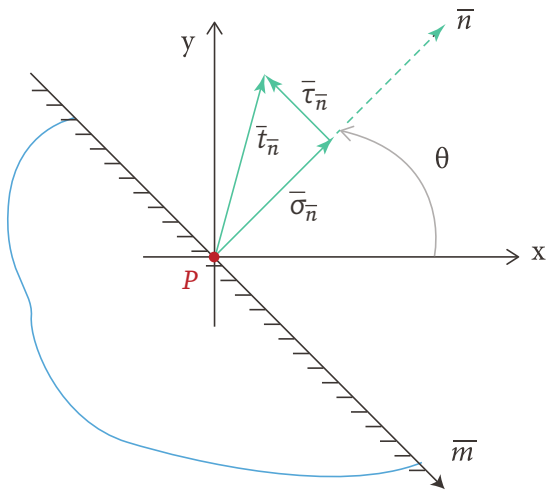


FIGURA 1.21
Derivación de los esfuerzos σ_n y τ_n para un estado de esfuerzos plano

Tomando en cuenta la figura (1.21), los vectores unitarios $\overline{n}$ y $\overline{m}$ se pueden expresar como:

$$\overline{n} = (\cos\theta)\,\overline{i} + (\operatorname{sen}\theta)\,\overline{j} \tag{1.52}$$

$$\overline{m} = (\operatorname{sen}\theta)\,\overline{i} - (\cos\theta)\,\overline{j} \tag{1.53}$$

En estas dos direcciones se pueden establecer las componentes normal y tangencial del vector esfuerzo $\overline{t}_n$, de la siguiente forma:

$$\overline{t}_n = \left[T_{ij}\right] \left| \overline{n} \right| = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix}$$

$$\overline{t}_n = (\sigma_{xx}\cos\theta + \tau_{yx}\operatorname{sen}\theta)\,\overline{i} + (\tau_{xy}\cos\theta + \sigma_{yy}\operatorname{sen}\theta)\,\overline{j} \tag{1.54}$$

La magnitud del esfuerzo normal se calcula como:

$$\sigma_n = \overline{t}_n \cdot \overline{n}$$

$$\sigma_n = (\sigma_{xx}\cos^2\theta + \tau_{yx}\operatorname{sen}\theta\cos\theta) + (\tau_{xy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \sigma_{yy}\operatorname{sen}^2\theta) \tag{1.55}$$

Si σ_n es positivo, quiere decir que tiene la dirección de $\overline{n}$, en caso contrario es negativo.

Para el esfuerzo cortante se tiene, de manera similar:

$$\overline{\tau}_n = \overline{t} \cdot \overline{m} = (\sigma_{xx}\operatorname{sen}\theta\cos\theta + \tau_{yx}\operatorname{sen}^2\theta - \tau_{xy}\cos^2\theta - \sigma_{yy}\operatorname{sen}\theta\cos\theta) \tag{1.56}$$

Si τ_n es positivo, esto quiere decir que tiene la dirección de $\overline{m}$, en caso contrario es negativo.

Haciendo simplificaciones, se tiene que:

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \cos^2\theta + \sigma_{yy} \operatorname{sen}^2\theta + 2\tau_{xy} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{1.57}$$

$$\tau_n = (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \operatorname{sen}\theta \cos\theta + \tau_{yx} (\operatorname{sen}^2\theta - \cos^2\theta) \tag{1.58}$$

Tomando en cuenta las siguientes identidades trigonométricas:

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen}\theta \cos\theta \tag{1.59}$$

$$\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2} \tag{1.60}$$

$$\cos^2\theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \tag{1.61}$$

y sustituyendo estas últimas expresiones en las ecuaciones (1.57) y (1.58), se llega a:

$$\sigma_n = \sigma_{xx} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) + \sigma_{yy} \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\theta + \tau_{xy} \left[\left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2} \right) - \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) \right]$$

Simplificando, se tiene:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{1}{2} (\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \cos 2\theta + \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\theta \tag{1.62}$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} \right) \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta \tag{1.63}$$

Las ecuaciones (1.62) y (1.63), permiten calcular las magnitudes de los esfuerzos normal σ_n y cortante τ_n, respectivamente, que actúan en un plano que pasa por el punto P cuya normal es $\overline{n}$, conocido el estado de esfuerzo plano en dicho punto.

Derivando σ_n respecto a θ, se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = -\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right) \operatorname{sen} 2\theta + 2\tau_{xy} \cos 2\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial \theta} = -2\tau_n \tag{1.64}$$

Este resultado muestra que τ_n es una medida del cambio de σ_n con respecto a θ y que cuando $\tau_n = 0$, se tendrá el máximo o mínimo valor de σ_n (esfuerzos principales).

Si se acepta que los ejes de referencia coincidan con las direcciones en que $\tau_n = 0$, el tensor que representa al estado de esfuerzos en un punto del medio continuo, para $\sigma_2 = 0$ quedará definido por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Para este tensor, las ecuaciones (1.62) y (1.63) quedan:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{1}{2}\left(\sigma_1 - \sigma_3\right) \cos 2\theta \tag{1.65}$$

$$\tau_n = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta \tag{1.66}$$

Estas últimas ecuaciones se pueden representar como sigue:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta \tag{1.67}$$

$$\tau_n = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)\,\text{sen}\,2\theta \tag{1.68}$$

Elevando al cuadrado las ecuaciones (1.67) y (1.68) y sumándolas, obtenemos:

$$\left(\sigma_n - \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau_n^2 = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)^2 \tag{1.69}$$

La ecuación (1.69) nos muestra que el conjunto de vectores $\bar{t}_n$ asociados a planos cuyos vectores esfuerzo estén en el plano de esfuerzos deben tener sus extremos sobre la circunferencia con centro en:

$$C\left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}, 0\right) \quad \text{y radio en} \quad R\left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\right)$$

Para definir a un vector esfuerzo dado, asociado al plano cuya normal forma un ángulo θ con el eje n_1, es necesario girar un ángulo 2θ en la región de Mohr, en dirección contraria a θ, para definir al extremo del vector $\bar{t}_n$ cuyas proyecciones son σ_n y τ_n. Estos esfuerzos se pueden determinar también de manera gráfica empleando lo que se conoce como método del "Polo" y que se explica más adelante a través de un ejemplo.

1.12 Planos principales de esfuerzo

Por definición, los *planos principales de esfuerzo* son aquellos donde el esfuerzo cortante $\tau_n = 0$, por lo que tomando en cuenta la ecuación (1.63), obtenemos:

$$\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right) \operatorname{sen} 2\theta - \tau_{xy} \cos 2\theta = 0$$

Desarrollando, se llega a:

$$\tan 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)} \qquad (1.70)$$

Las raíces de esta última ecuación representan las direcciones de los ejes principales $\overline{n}_1$ y $\overline{n}_3$.

Para encontrar las raíces de la ecuación (1.70), hacemos uso de la figura (1.22)

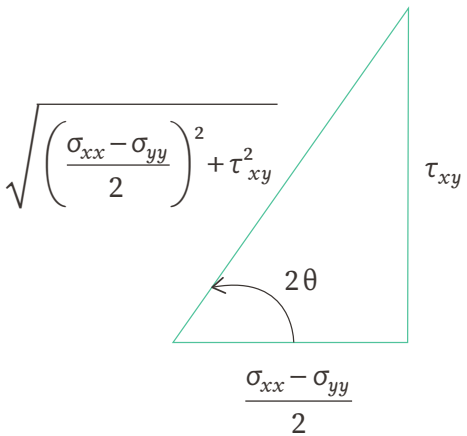


FIGURA 1.22
Relación geométrica entre σ_{xx} , σ_{yy}, τ_{xy} y 2θ

$$\cos 2\theta = \frac{\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{1.71}$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = \frac{\tau_{xy}}{\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}} \tag{1.72}$$

Sustituyendo las ecuaciones (1.71) y (1.72) en la (1.62), obtenemos la magnitud de los esfuerzos principales σ_1 y σ_3, como:

$$\sigma_{1,3} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{1.73}$$

Las magnitudes de σ_1 y σ_3 se pueden determinar también haciendo uso de la ecuación característica (ecuación (1.23)), la cual para un estado de esfuerzo plano se reduce a:

$$-\sigma^2 + I_1\sigma - I_2 = 0 \tag{1.74}$$

donde:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

$$I_2 = \det\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} \end{bmatrix}$$

Siendo las raíces de dicha ecuación las magnitudes de σ_1 y σ_3 .

P Problema 1.4

El estado de esfuerzo plano en un punto de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

Usando los métodos analítico y gráfico del Mohr, determine:

a) Los esfuerzos normal y cortante asociados al plano de corte indicado en la figura 1.23.
b) Los esfuerzos principales.
c) Las direcciones principales de esfuerzo, referidas a los ejes x, y en que se define el tensor esfuerzo.

S Solución

Los elementos del tensor esfuerzo son:

$$\sigma_{xx} = 4\,\text{MPa};\ \sigma_{yy} = 2\,\text{MPa};\ \tau_{xy} = -1\,\text{MPa}$$

El ángulo θ que permite calcular los esfuerzos σ_n y τ_n, mediante las ecuaciones (1.62) y (1.63), vale: $\theta = 135^o$.

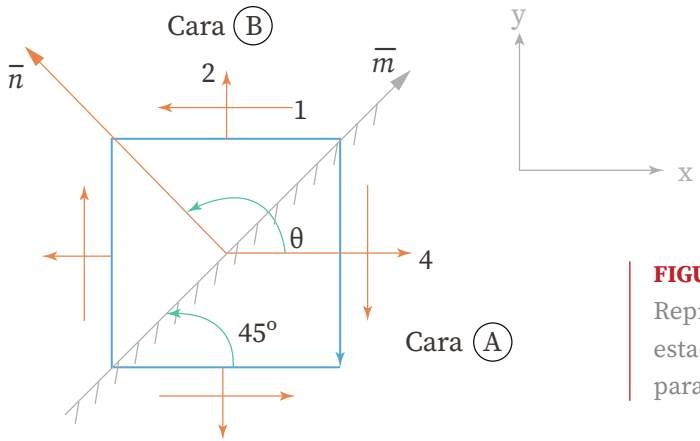


FIGURA 1.23
Representación del estado de esfuerzo para el problema 1.5

a) Esfuerzo normal:

$$\sigma_n = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2}\cos 270° + (-1)\cos 270°$$

$$\sigma_n = 3 + 1 = 4 \ [\text{MPa}]$$

Esfuerzo cortante:

$$\tau_n = \frac{4-2}{2}\,\text{sen}\,270° - (-1)\cos 270°$$

$$\tau_n = -1 \ [\text{MPa}]$$

b) Los esfuerzos principales valen:

$$\sigma_{1,3} = \frac{4+2}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4-2}{2}\right)^2 + (-1)^2} = 3 \pm \sqrt{2.0}$$

$$\sigma_1 = 3 \pm \sqrt{2.0} = 4.41 \ [\text{MPa}]$$

$$\sigma_3 = 3 \pm \sqrt{2.0} = 1.60 \ [\text{MPa}]$$

c) Cálculo de las direcciones principales:

$$\tan 2\theta = \frac{-1}{\left(\frac{4-2}{2}\right)} = -1$$

Las raíces de la ecuación son:

$$2\theta' = -45°; \quad \text{y} \quad 2\theta'' = 135°$$

Para comprobar la dirección asociada a los esfuerzos σ_1 y σ_3, se sustituyen las raíces obtenidas en la ecuación (1.62).

Para $2\theta' = -45°$:

$$\sigma_n = \frac{4+2}{2} + \frac{4-2}{2}\cos(-45°) + (-1)\,\text{sen}(-45°)$$

$$\sigma_n = 3 + 0.7071 + 0.7071 = 4.41 \ \ [\text{MPa}]$$

Por lo tanto, el ángulo $\theta' = -22.5°$ define la normal $\overline{n}_1$ del plano principal donde actúa el esfuerzo principal mayor σ_1, obviamente el ángulo $\theta'' = 67.5°$ define la normal $\overline{n}_3$ del plano principal donde actúa el esfuerzo principal menor σ_3.

Método gráfico del "Polo"

El *polo* es un punto en el círculo de Mohr, el cual se puede ubicar como sigue (figura 1.24):

a) Se traza primeramente la circunferencia de Mohr a partir de los puntos conocidos *A* y *B*. Para que el signo del esfuerzo cortante τ_n sea el correcto, es necesario cambiar el signo del esfuerzo cortante τ_{xy} asociado a la cara *A* antes de trazar la circunferencia de Mohr.

b) Por el punto *A* se traza una línea recta que sea paralela al plano donde actúan los esfuerzos asociados a la cara *A*; donde esta línea corte a la circunferencia estará ubicado el polo.

c) Se realiza lo mismo con el punto *B* para verificar la posición del polo.

d) Una vez conocida la ubicación del polo, y a partir de este, bastará con trazar una recta que tenga la misma orientación del plano donde se desea calcular los esfuerzos σ_n y τ_n.

e) El punto donde esta recta corte a la circunferencia, determina los esfuerzos σ_n y τ_n correspondientes.

En la figura 1.24 se muestra la aplicación del procedimiento seguido para el problema planteado. Para este caso particular, el punto correspondiente al polo coincide con los esfuerzos σ_n y τ_n buscados. Estos valores se pueden obtener también trazando el ángulo doble $2\theta = -270°$, a partir de la linea base que va del centro de la circunferencia al punto A, tal como se muestra en la figura (1.24).

En la misma figura (1.24) se han trazado los ángulos $2\theta_1 = 45°$ y $2\theta_3 = 135°$, que dan los valores de los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, respectivamente. El ángulo $2\theta'''$ está asociado con los valores de $\sigma_n = 0$ y $\tau_n = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 = \tau_{máx}$.

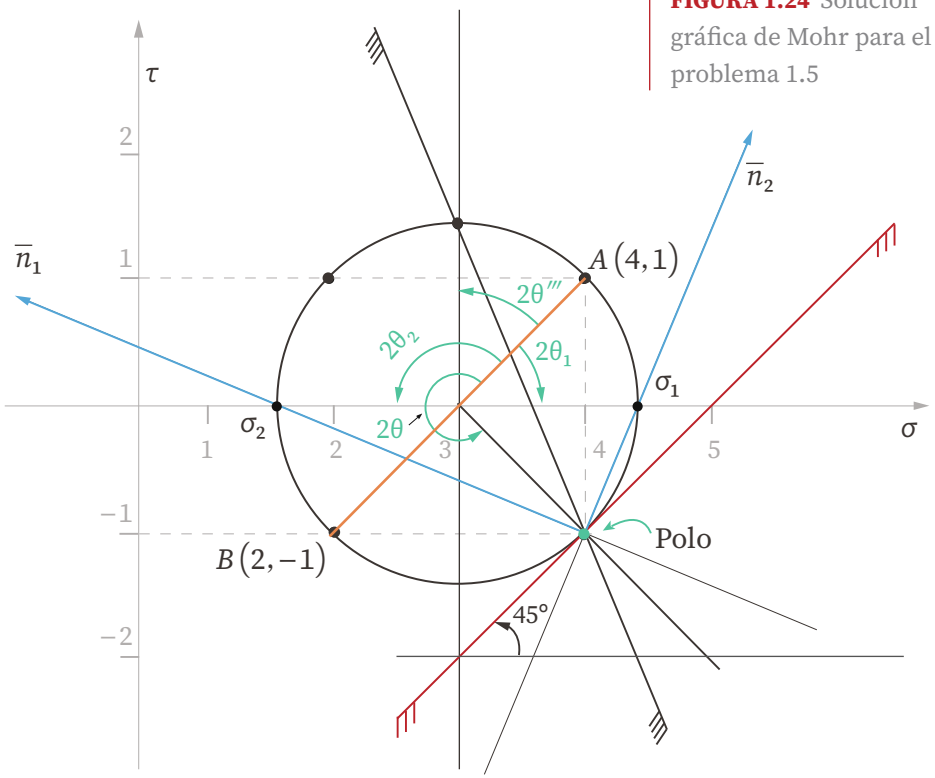


FIGURA 1.24 Solución gráfica de Mohr para el problema 1.5

1.13 Esfuerzos octaédricos

Considérese un punto del medio continuo en el cual se defina un estado general de esfuerzos. En ese punto existen ocho planos octaédricos definidos por normales que dividen en ángulos iguales a cada uno de los octantes del espacio.

Tomemos el plano octaédrico del primer octante, cuya normal es:

$$\bar{n}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\bar{k} \qquad (1.75)$$

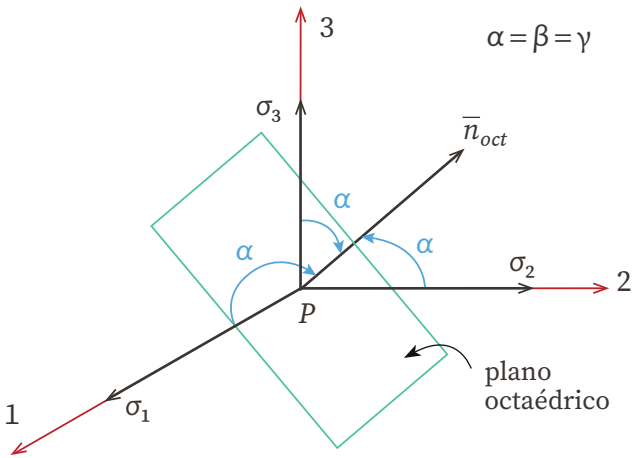


FIGURA 1.25
Definición de esfuerzos octaédricos

Asociado a este plano existirá un vector esfuerzo octaédrico definido por:

$$\bar{t}_{oct} = \left[T_{ij}\right] \left| \bar{n}_{oct} \right| \qquad (1.76)$$

$$\bar{t}_{oct} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_1 \bar{i} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_2 \bar{j} + \frac{1}{\sqrt{3}}\sigma_3 \bar{k} \tag{1.77}$$

La magnitud del esfuerzo normal octaédrico es igual a:

$$\sigma_{oct} = \bar{t}_{oct} \cdot \bar{n}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_1 \bar{i} + \sigma_2 \bar{j} + \sigma_3 \bar{k}\right] \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}\right]$$

$$\sigma_{oct} = \frac{1}{3}\left[\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right]$$

$$\sigma_{oct} = \frac{I_1}{3} \tag{1.78}$$

El vector esfuerzo cortante octaédrico puede calcularse como sigue:

$$\bar{\tau}_{oct} = \bar{t}_{oct} - \bar{\sigma}_{oct} \tag{1.79}$$

$$\bar{\tau}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\sigma_1 \bar{i} + \sigma_2 \bar{j} + \sigma_3 \bar{k}\right] - \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\frac{I_1}{3}\bar{i} + \frac{I_1}{3}\bar{j} + \frac{I_1}{3}\bar{k}\right]$$

$$\bar{\tau}_{oct} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right)\bar{i} + \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right)\bar{j} + \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right)\bar{k}\right]$$

La magnitud de $\bar{\tau}_{oct}$ resulta igual a:

$$\left|\bar{\tau}_{oct}\right| = \tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right)^2} \tag{1.80}$$

De los resultados obtenidos, se puede observar lo siguiente:

a) El *esfuerzo normal* octaédrico depende de la magnitud de la componente volumétrica del tensor esfuerzo.

b) El *esfuerzo cortante octaédrico* tiene como magnitud el valor medio cuadrático de los elementos de la diagonal principal de la componente distorsional o *desviadora*.

En el capítulo 5 se analizarán las relaciones que existen entre estos dos esfuerzos y los conceptos de energía de deformación volumétrica y distorsional, respectivamente.

1.14 Equilibrio de partículas en un medio continuo

Consideremos que en cada punto del medio continuo se conoce el tensor esfuerzo T_{ij} y está dado por:

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Aceptemos que las componentes del tensor esfuerzo T_{ij} son funciones continuas de (x, y, z, t). Cuando el tensor esfuerzo es simétrico, basta con definir a seis funciones continuas y derivables para conocer el estado de esfuerzo en todos los puntos del medio continuo.

Para ello, es suficiente con estudiar el equilibrio de partículas en el medio continuo, de donde surgen las condiciones de frontera y las fuerzas de cuerpo que producen los elementos del tensor esfuerzo T_{ij}.

Consideremos una partícula diferencial interior de un medio continuo de volumen dV.

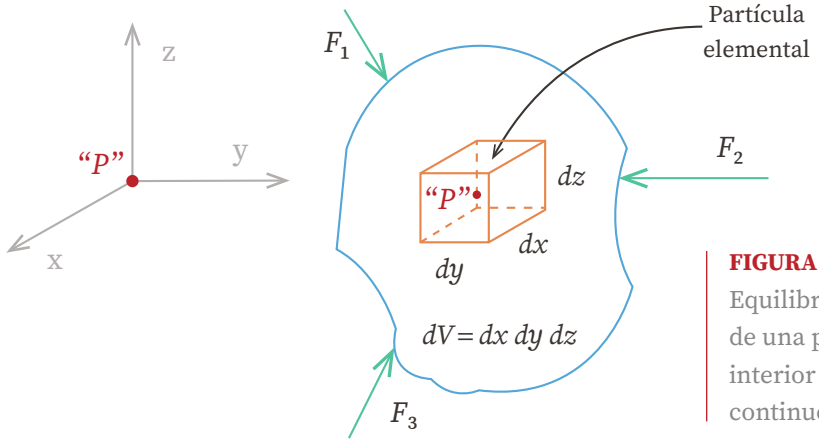


FIGURA 1.26
Equilibrio estático de una partícula interior del medio continuo

En la partícula elemental aparecen:

a) Fuerzas de superficie en las caras laterales, provocadas por la acción de partículas vecinas, las cuales varían de una cara a la otra al moverse una distancia diferencial.

b) Fuerzas de cuerpo generadas por la acción de cuerpos distantes, aplicadas en el centroide de la partícula elemental.

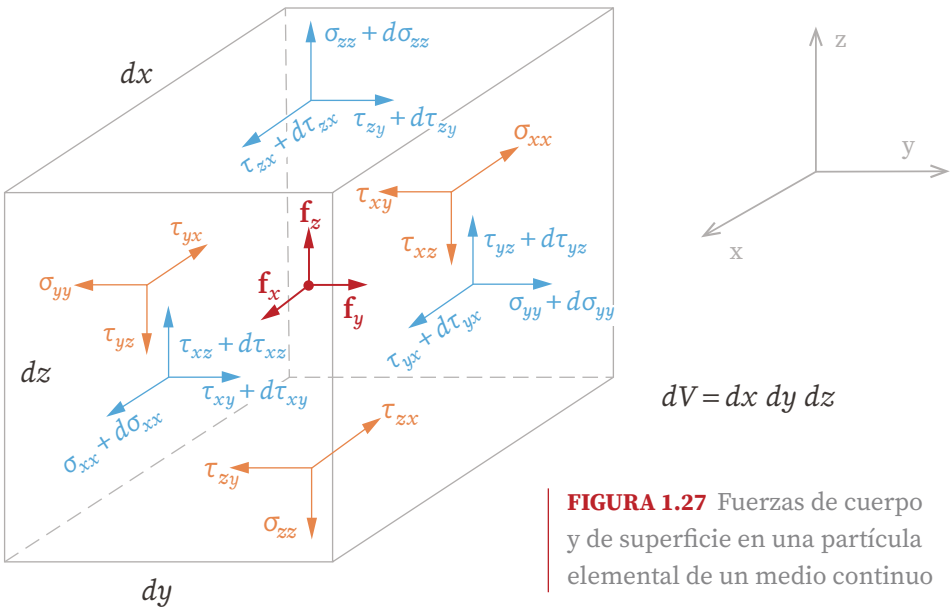


FIGURA 1.27 Fuerzas de cuerpo y de superficie en una partícula elemental de un medio continuo

En el elemento diferencial, que se muestra en la figura (1.27), se indican las fuerzas de cuerpo y de superficie que actúan en una partícula elemental del medio continuo.

En cuanto al equilibrio de fuerzas, se tiene lo siguiente:

a) Por $\sum F_x = 0$

$$(\sigma_{xx} + d\sigma_{xx})\,dy\,dz - (\sigma_{xx}\,dy\,dz) + (\tau_{yx} + d\tau_{yx})\,dx\,dz - (\tau_{yx}\,dx\,dz)$$

$$+ (\tau_{zx} + d\tau_{zx})\,dx\,dy - (\tau_{zx}\,dx\,dy) + f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$d\sigma_{xx}\,dy\,dz + d\tau_{yx}\,dx\,dz + d\tau_{zx}\,dx\,dy + f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dx\,dy\,dz + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dx\,dy\,dz + f_x\,dx\,dy\,dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}\,dV + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\,dV + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\,dV + f_x\,dV = 0 \qquad (1.81)$$

Si $dV \to 0$,

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0 \qquad (1.82)$$

b) De manera similar, por $\sum F_y = 0$, se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0 \qquad (1.83)$$

c) Finalmente, por $\sum F_z = 0$:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0 \qquad (1.84)$$

Las ecuaciones (1.82), (1.83) y (1.84) pueden ser escritas en notación índice como sigue:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0$$

Esta última ecuación se conoce como *ecuación de Cauchy* y representa la condición de equilibrio estático de un medio continuo, formado por un conjunto de partículas materiales. En el caso de que se quiera establecer un equilibrio dinámico basta con igualar dicha ecuación a la masa del medio continuo multiplicada por su aceleración (Segunda ley de Newton).

P **Problema 1.5**

En un medio continuo se establece un tensor esfuerzo definido por:

$$T_{ij} = A \cdot \begin{bmatrix} 2xy & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ; donde } A, c \text{ son constantes}$$

Obtenga:

a) Las fuerzas de cuerpo.
b) Las fuerzas en las fronteras del medio continuo.

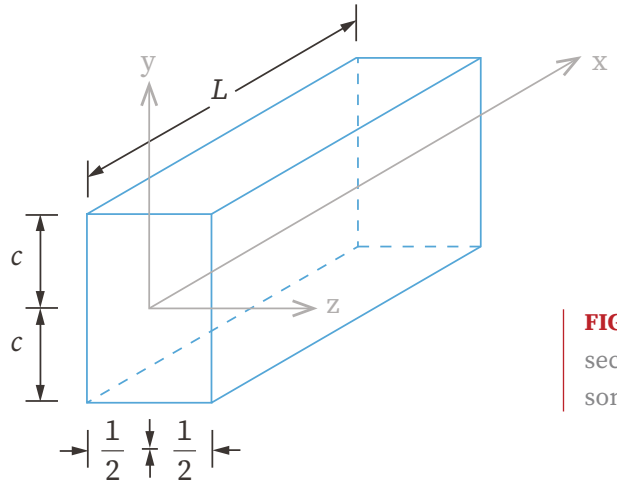


FIGURA 1.28 Viga de sección prismática sometida a flexión simple

S Solución

Analizando cada una de las caras del medio continuo, se tiene:

En el plano $y = c$, $\bar{n} = \bar{j}$, el vector esfuerzo $\bar{t}_n$ vale:

$$\bar{t}_n = [T_{ij}]\,|\,\bar{n}\,| = A \cdot \begin{bmatrix} 2cx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{t}_n = 0 \Rightarrow$ cara descargada.

En el plano $y = -c$, $\bar{n} = -\bar{j}$

$$\bar{t}_n = [T_{ij}]\,|\,\bar{n}\,| = A \cdot \begin{bmatrix} -2cx & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\bar{t}_n = 0 \Rightarrow$ cara descargada.

En el plano $z=+\frac{1}{2},\ \bar{n}=\bar{k}$

$$\bar{t}_n=\left[T_{ij}\right]\left|\bar{n}\right|=A\cdot\begin{bmatrix}2cx & c^2-y^2 & 0\\ c^2-y^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$\bar{t}_n=0 \Rightarrow$ cara descargada.

En el plano $z=-\frac{1}{2},\ \bar{n}=-\bar{k}$

$\bar{t}_n=0 \Rightarrow$ cara descargada.

En el plano $x=0,\ \bar{n}=-\bar{i}$

$$\bar{t}_n=\left[T_{ij}\right]\left|\bar{n}\right|=A\cdot\begin{bmatrix}0 & c^2-y^2 & 0\\ c^2-y^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n=A\left(y^2-c^2\right)\bar{j}$$

$$\bar{\sigma}_n=\bar{t}_n\cdot\bar{n}=0=\left[A\left(y^2-c^2\right)\bar{j}\right]\cdot\left[-\bar{i}\right]=0$$

$$\bar{\tau}_n=\pm\sqrt{\left|\bar{t}_n\right|^2-\left|\bar{\sigma}_n\right|^2}$$

$$\tau_n=A\left(y^2-c^2\right)=Ay^2-Ac^2$$

Si $y=0,\ \tau_n=-Ac^2$.

En la figura (1.29) se muestra la distribución de esfuerzos cortantes correspondiente.

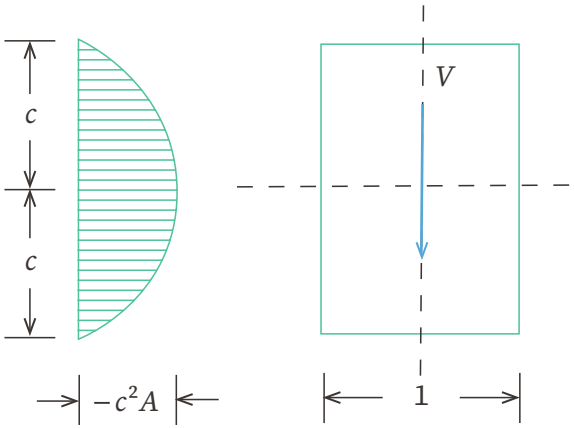


FIGURA 1.29
Distribución de esfuerzos cortantes en el plano $x=0$

Integrando el volumen de esfuerzos cortantes para un ancho unitario, se obtiene la fuerza cortante que actúa en la cara $x=0$:

$$V=\frac{2}{3}\left(-c^2A\right)\left(2c\right)\left(1\right)=-\frac{4}{3}c^3A$$

De donde la constante A vale:

$$A=-\frac{3}{4}\frac{V}{c^3}$$

En el plano $x=L$, $\bar{n}=\bar{i}$

$$\bar{t}_n=\left[T_{ij}\right]\left|\bar{n}\right|=A\cdot\begin{bmatrix}2Ly & c^2-y^2 & 0\\ c^2-y^2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}=A\left(2Ly\right)\bar{i}+A\left(c^2-y^2\right)\bar{j}$$

El esfuerzo normal y el esfuerzo cortante tienen por valor:

$$\sigma_n=\bar{\tau}_n\cdot\bar{n}=2ALy$$

$$\tau_n=A\left(c^2-y^2\right)$$

La distribución de esfuerzos normales en $x = L$ se muestra en la figura (1.30).

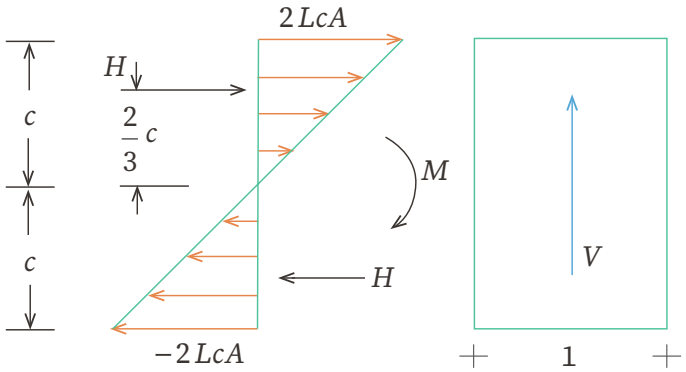


FIGURA 1.30
Distribución de esfuerzos normales en el plano $x = L$

Dicha distribución genera un par interno que vale:

$$M_i = H \cdot d$$

Siendo:

$$H = \frac{2\,Lc\,Ac}{2} = c^2\,LA$$

el brazo de palanca del par vale:

$$d = \frac{4}{3}c$$

Por lo tanto, el momento interno resulta igual a:

$$M_i = \left(c^2 LA\right)\frac{4}{3}\,c = \frac{4}{3}\,c^3 AL$$

La distribución de esfuerzos cortantes produce una fuerza cortante igual a:

$$V = \frac{4}{3}\,c^3 A$$

Esta fuerza está en equilibrio con la que se produce en $x=0$.

El momento de inercia centroidal de la sección se puede expresar como:

$$I=\frac{2}{3}c^3\ ,\ \text{por lo que}\ A=\frac{M_i}{2IL}$$

Por equilibrio, el momento interno que produce la distribución de esfuerzos normales en $x=L$ debe ser igual al momento que produce la distribución de esfuerzos cortantes en ambos extremos de la barra.

Dado que el esfuerzo normal que actúa en la cara $x=L$ se puede expresar como $\sigma_n=2ALy$ y sustituyendo el valor de A en esta última expresión, se llega a:

$$\sigma_n=\frac{M_i}{I}y$$

Ecuación conocida en los textos de mecánica de materiales como *fórmula de la escuadría*.

1.15 Ecuaciones de equilibrio de momentos en partículas de un medio continuo

En la figura (1.31) se muestra el estado de esfuerzo a que se encuentra sometida una partícula elemental de un medio continuo. Por facilidad únicamente se indican las fuerzas en las caras que van a producir giros alrededor del eje x. En este análisis se está aceptando la existencia de momentos externos por unidad de volumen de la partícula, cuyas magnitudes son m_x, m_y y m_z.

Por $\sum M_x = 0$

$$(\tau_{yz} + d\tau_{yz})\, dx\, dz \frac{dy}{2} + \tau_{yz}\, dx\, dz \frac{dy}{2} - (\tau_{zy} + d\tau_{zy})\, dx\, dy \frac{dz}{2}$$

$$-\tau_{zy}\, dx\, dy \frac{dz}{2} + m_x\, dx\, dy\, dz = 0$$

$$d\tau_{yz} - d\tau_{zy} + 2\, m_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\, d_y - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\, dz + 2\, m_x = 0 \qquad (1.85)$$

De manera análoga, por $\sum M_y = 0$ se obtiene:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\, d_x - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}\, dx + 2\, m_y = 0 \qquad (1.86)$$

Finalmente, por $\sum M_z = 0$ se llega a la expresión:

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}\, dx - \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\, dy + 2\, m_z = 0 \qquad (1.87)$$

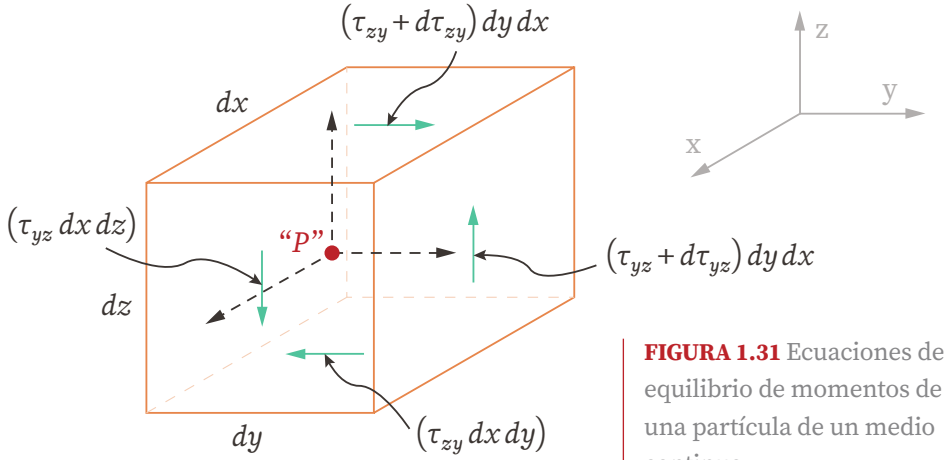


FIGURA 1.31 Ecuaciones de equilibrio de momentos de una partícula de un medio continuo

De las ecuaciones (1.85), (1.86) y (1.87) se pueden definir los valores de m_x, m_y, m_z debidos a la excentricidad de las acciones que se generan en la partícula respecto al centroide.

Para el problema (1.6), la aplicación de las ecuaciones de equilibrio de momentos conduce a lo siguiente:

$$\text{Por} \quad \sum M_x = 0, \quad 0 - 0 + 2\,m_x = 0 \quad \Rightarrow \quad m_x = 0$$

$$\sum M_y = 0, \quad 0 - 0 + 2\,m_y = 0 \quad \Rightarrow \quad m_y = 0$$

$$\sum M_z = 0, \quad 0 - \left(-2y\right) A\,dy + 2\,m_z = 0 \quad \Rightarrow \quad m_z = Ay\,dy$$

donde:

$$m_z = -A \int y\,dy = -A\,\frac{y^2}{2} = \frac{V}{4I}\,y^2$$

Este resultado muestra que existirán tendencias al giro de las partículas alrededor del eje z, dependiendo de su posición en el medio continuo.

La existencia de estos momentos implica que las partículas no se mueven como elementos rígidos, sino que deben presentarse distorsiones para garantizar la existencia de continuidad.

Los pares de esfuerzo se auto equilibran con los correspondientes a las partículas simétricas respecto al eje z, sin que exista la necesidad de aplicar momentos externos para equilibrarlas. Estos momentos se producen en el problema en estudio por la distribución no uniforme de esfuerzos en las caras de las partículas.

Normalmente en campos de esfuerzos no uniformes existen estos pares de esfuerzos que tratan de provocar rotaciones y distorsiones en las partículas.

Así, mediante las ecuaciones de equilibrio se pueden identificar las características del vector fuerza de cuerpo $\bar{f}$ y del vector momento $\bar{m}$, dados por:

$$\bar{f} = f_x \bar{i} + f_y \bar{j} + f_z \bar{k}$$

$$\bar{m} = m_x \bar{i} + m_y \bar{j} + m_z \bar{k}$$

1.16 Problemas propuestos

P

Problema 1.6

El tensor esfuerzo en un punto de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & -12 \\ 0 & -12 & 1 \end{bmatrix} [\text{MPa}];$$

Si la normal a un plano que pasa por el punto vale, $\bar{n} = \frac{1}{3}\bar{i} + \frac{2}{3}\bar{j} + \frac{2}{3}\bar{k}$, calcule:

a) El vector esfuerzo total $\bar{t}_n$; el vector esfuerzo normal $\bar{\sigma}_n$ y el vector esfuerzo cortante $\bar{\tau}_n$. Utilice las ecuaciones analíticas correspondientes.

b) Los esfuerzos principales y las direcciones principales correspondientes.

c) Compruebe la ortogonalidad de las direcciones principales.

d) Resuelva el inciso (1.6.a) empleando el método gráfico de Mohr.

S Solución

a) $\bar{t}_n = -\frac{5}{3}\bar{i} - 12\,\bar{j} - \frac{22}{3}\bar{k}$; $\quad \bar{\sigma}_n = -\frac{1}{27}\left(+121\,\bar{i} + 242\,\bar{j} + 242\,\bar{k}\right)$;

$$\bar{\tau}_n = \frac{76}{27}\bar{i} - \frac{82}{27}\bar{j} + \frac{44}{27}\bar{k}$$

b) $\sigma_1 = 10\,\text{MPa}$; $\sigma_2 = -5\,\text{MPa}$; $\sigma_3 = -15\,\text{MPa}$

$$\bar{n}_1 = -\frac{3}{5}\bar{j} + \frac{4}{5}\bar{k}\,; \quad \bar{n}_2 = \bar{i}\,; \quad \bar{n}_3 = \frac{4}{5}\bar{j} + \frac{3}{5}\bar{k}\,;$$

P Problema 1.7

Demuestre que el esfuerzo cortante octaédrico dado por la ecuación:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left\{\left(\sigma_1 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(\sigma_2 - \frac{I_1}{3}\right)^2 + \left(\sigma_3 - \frac{I_1}{3}\right)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$; es equivalente a

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\left\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right\}^{\frac{1}{2}}$$

P Problema 1.8

El estado de esfuerzos en un punto "P" de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 4 & b & b \\ b & 7 & 2 \\ b & 2 & 4 \end{bmatrix}\ [\text{MPa}]\ ; \quad b: \text{cantidad desconocida}$$

Si, $\sigma_3 = 3\,\text{MPa}$ y $\sigma_1 = 2\sigma_2$, determine:

a) El valor del esfuerzo principal mayor.
b) El valor de b.
c) La dirección del esfuerzo principal σ_2.

Solución

a) $\sigma_1 = 2\,\sigma_2 = 8\,\text{MPa}$; **b)** $b = 0\,\text{MPa}$; **c)** $\overline{n}_2 = \overline{i}$

Problema 1.9

El tensor esfuerzo en un punto "P" de un medio continuo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & \sigma_{yy} & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} [\text{MPa}]$$

a) Determine el esfuerzo desconocido de forma tal que el vector esfuerzo $\overline{t}_n$ en un plano cualquiera que pase por el punto "P" sea igual a cero, es decir $\overline{t}_n = 0$.
b) Determine también la normal al plano donde $\overline{t}_n = 0$.

Solución

a) $\sigma_{yy} = 1\,\text{MPa}$; **b)** $\overline{n} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\overline{i} - 2\overline{j} + \overline{k}\right)$

CAPÍTULO

2

Estado de deformación

Introducción

En este capítulo se estudian los conceptos de vector desplazamiento de un punto de un medio continuo y el de vector desplazamiento relativo de un punto respecto a otro vecino, lo que permite establecer los conceptos de vector deformación y tensor deformación. Se demuestra que la cinemática completa de una partícula material de un medio continuo está constituida por una traslación, una rotación y el estado de deformación de la partícula, este último representado por el tensor deformación.

Asimismo, se demuestra que la estructura matemática establecida para el estudio del estado de esfuerzo, así como las ecuaciones analíticas derivadas y métodos gráficos empleados, son igualmente aplicables al estudio del estado de deformación.

Por último, se establecen las llamadas ecuaciones de compatibilidad que garantizan la continuidad del material durante su proceso de deformación.

2.1 Descripción del movimiento de un medio continuo

Consideremos una partícula elemental de un medio continuo descargado, y llamemos a este estado del cuerpo la *configuración inicial* ($t=0$), *material* o *no deformada*. Cada una de las partículas que conforman el medio continuo en esta configuración recibe el nombre de *partículas materiales,* cuya posición se establecerá en el sistema de referencia cartesiano x_1, x_2, x_3 (también conocido como *sistema local* o *lagrangiano*).

Al someter al cuerpo deformable a un sistema de cargas se generan estados de esfuerzo, los cuales a su vez provocarán estados de deformación. La forma que adopta el medio para un tiempo t cualquiera se conoce como *configuración deformada* o *final* y corresponde a la imagen que proporciona una fotografía del cuerpo para el tiempo especificado. Cada una de las partículas que conforman el cuerpo en esta configuración recibe el nombre de *partículas espaciales,* cuya posición se establecerá en el sistema cartesiano x'_1, x'_2, x'_3 (denominado *sistema espacial* o *euleariano*).

Para describir la cinemática del medio continuo, se supondrá por comodidad que los sistemas de referencia x_1, x_2, x_3 y x'_1, x'_2, x'_3 están superpuestos (figura 2.1).

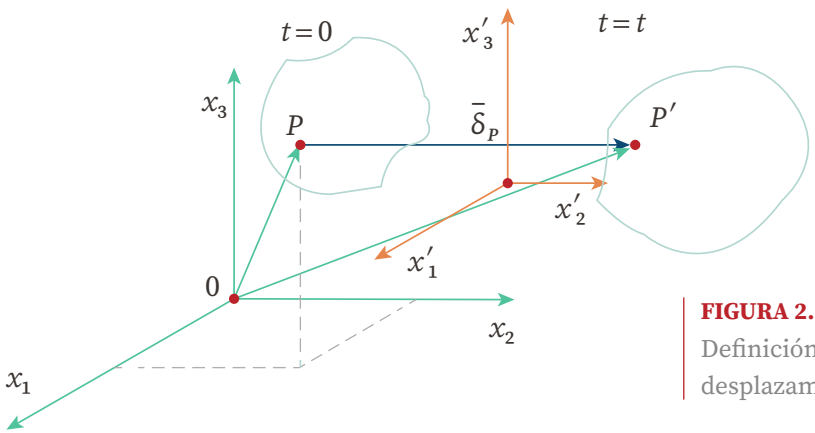


FIGURA 2.1
Definición de vector desplazamiento

La posición de cada partícula del medio en la configuración inicial se puede definir mediante un vector de posición $\overline{OP}$, cuyas componentes son:

$$\left(\overline{OP}\right) = x_1\,\bar{i} + x_2\,\bar{j} + x_3\,\bar{k} \tag{2.1}$$

Al transcurrir el tiempo de $t=0$ a $t=t$, el vector de posición del punto P en la configuración deformada resulta:

$$\left(\overline{OP'}\right) = x'_1\,\bar{i} + x'_2\,\bar{j} + x'_3\,\bar{k} \tag{2.2}$$

De la figura (2.1), se puede establecer que:

$$\left(\overline{OP'}\right) = \overline{OP} + \bar{\delta}_P \tag{2.3}$$

Siendo $\bar{\delta}_P$ el vector desplazamiento del punto P, el cual puede ser escrito como:

$$\bar{\delta}_P = \left(x'_1\,\bar{i} + x'_2\,\bar{j} + x'_3\,\bar{k}\right) - \left(x_1\,\bar{i} + x_2\,\bar{j} + x_3\,\bar{k}\right)$$

$$\bar{\delta}_P = \left(x'_1 - x\right)\bar{i} + \left(x'_2 - y\right)\bar{j} + \left(x'_3 - z\right)\bar{k}$$

Llamando a las componentes del vector desplazamiento:

$$x'_1 - x = u \tag{2.4}$$

$$x'_2 - y = v \tag{2.5}$$

$$x'_3 - z = w \tag{2.6}$$

Tomando en cuenta estas últimas ecuaciones, el vector desplazamiento se puede escribir como:

$$\bar{\delta}_p = u\,\bar{i} + v\,\bar{j} + w\,\bar{k} \tag{2.7}$$

Evidentemente, las componentes del vector desplazamiento u, v, w dependen de la posición del punto en el continuo y del tiempo transcurrido de $t=0$ a $t=t$.

Si el vector desplazamiento está asociado con cualquier partícula en la configuración no deformada, entonces sus componentes se pueden escribir (notación índice) como:

$$\bar{\delta}_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right) = x'_i\left(x_1, x_2, x_3, t\right) - x_i \tag{2.8}$$

La ecuación (2.8) representa la descripción material de las partículas de un medio continuo, generalmente utilizada en la *mecánica de sólidos*. En esta descripción, se sigue el movimiento de la partícula para diferentes tiempos.

Cuando el vector desplazamiento esté asociado con cualquier partícula en la configuración deformada, se tiene:

$$\bar{\delta}_i\left(x'_1, x'_2, x'_3, t\right) = x'_i - x_i\left(x'_1, x'_2, x'_3, t\right) \tag{2.9}$$

En este caso, la ecuación (2.9) expresa la descripción espacial de las partículas de un medio continuo, comúnmente utilizada en la *mecánica de fluidos*. En esta descripción, la atención se centra en un punto fijo del espacio o en una región. Se describe la propiedad como una función del punto y del tiempo. Se obtiene la evolución de la propiedad para las distintas partículas que van pasando por dicho punto del espacio a lo

largo del tiempo. Por ejemplo, sería el caso de un observador que registra la velocidad de un fluido en un punto fijo del espacio en función del tiempo. Por otra parte, al fijar el argumento tiempo en la ecuación (2.9) se obtiene una distribución instantánea (fotografía) de la propiedad en el espacio.

Así, las ecuaciones (2.8) y (2.9) continuas y derivables permitirán describir el campo vectorial de desplazamientos de todos los puntos de un continuo en cualquier instante. El lugar geométrico de los extremos de vectores desplazamiento $\overline{\delta}$ respecto a la posición original describirá la trayectoria de cada punto material del continuo. El conocimiento de las trayectorias permite describir la cinemática de las partículas de un medio continuo, pero para conocer la cinemática completa de las partículas es necesario describir el movimiento relativo de la partícula respecto a la trayectoria.

Para ello se analizará una partícula elemental del medio continuo, tal como se muestra en la figura (2.2), donde por facilidad de exposición se adoptará un sistema de referencia cartesiano x , y , z .

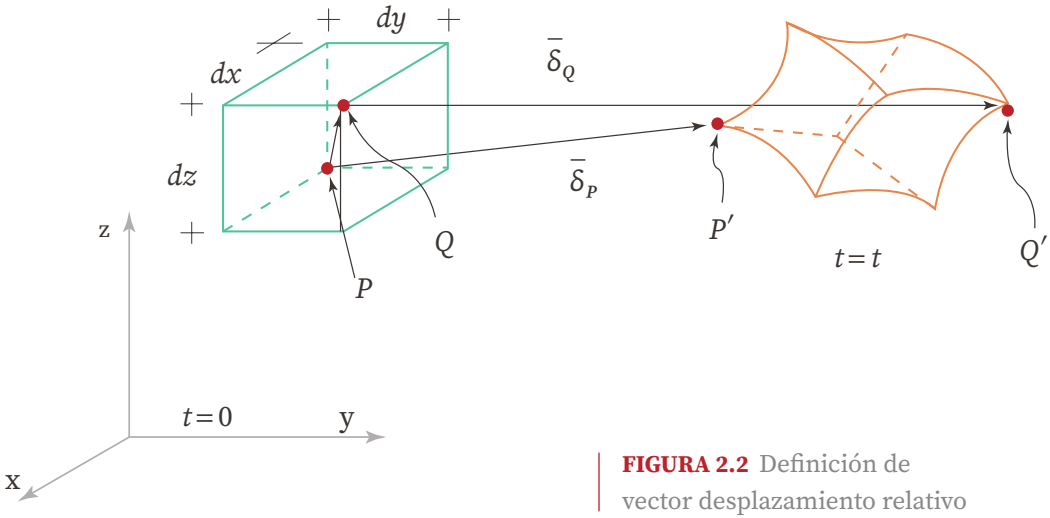


FIGURA 2.2 Definición de vector desplazamiento relativo

Supongamos una partícula material del medio $(t=0)$ y fijemos dos puntos de dicha partícula, por ejemplo, P y Q, separados una distancia diferencial. La posición de dichos puntos está dada por las siguientes coordenadas:

$$P(x, y, z);\ Q(x+dx, y+dy, z+dz)$$

Al transcurrir el tiempo, la posición de la partícula en la configuración deformada estará dada por las coordenadas de los puntos P' y Q', esto es:

$$P'(x+u, y+v, z+w)$$

$$Q'(x+dx+u+du, y+dy+v+dv, z+dz+w+dw)$$

Así, la nueva posición de la partícula quedará definida una vez que se establezca el campo de desplazamiento $\overline{\delta}$ mediante funciones continuas y derivables.

2.2 Características de rotación y cambio de forma de la partícula

Con referencia a la figura (2.2), llamaremos al vector $\Delta\overline{\delta}_{Q/P}$ la diferencia vectorial siguiente:

$$\Delta\overline{\delta}_{Q/P} = \overline{\delta}_Q - \overline{\delta}_P \qquad (2.10)$$

El vector $\Delta\overline{\delta}_{Q/P}$ mide la rotación y el cambio de forma de la partícula y representa el movimiento relativo del punto Q respecto al punto P.

Evaluando la ecuación (2.10), el movimiento relativo de la partícula quedará descrito por:

$$\Delta\bar{\delta}_{Q/P}=(u+du)\,\bar{i}+(v+\ dv)\,\bar{j}+(w+dw)\,\bar{k}-(u\,\bar{i}+v\,\bar{j}+w\,\bar{k}) \qquad (2.11)$$

$$\Delta\bar{\delta}_{Q/P}=du\,\bar{i}+dv\,\bar{j}+dw\,\bar{k}$$

Desarrollando la ecuación (2.11), se tiene:

$$\Delta\bar{\delta}_{Q/P}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy+\frac{\partial u}{\partial z}dz\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy+\frac{\partial v}{\partial z}dz\right)\bar{j}$$

$$+\left(\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{\partial w}{\partial y}dy+\frac{\partial w}{\partial z}dz\right)\bar{k} \qquad (2.12)$$

La ecuación (2.12) se puede escribir de manera matricial como:

$$\Delta\bar{\delta}_{Q/P}=\begin{bmatrix}\frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}\\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z}\\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z}\end{bmatrix}\begin{vmatrix}dx\\ dy\\ dz\end{vmatrix} \qquad (2.13)$$

De la figura (2.2), se puede observar que el vector que une los puntos P y Q resulta igual a:

$$\overline{PQ}=dx\,\bar{i}+dy\,\bar{j}+dz\,\bar{k} \qquad (2.14)$$

Dividiendo la ecuación (2.13) entre el módulo de $\overline{PQ}$, se obtiene:

$$\frac{\Delta\bar{\delta}_{Q/P}}{\left|\overline{PQ}\right|} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \frac{dx}{\left|\overline{PQ}\right|} \\ \frac{dy}{\left|\overline{PQ}\right|} \\ \frac{dz}{\left|\overline{PQ}\right|} \end{vmatrix} \tag{2.15}$$

Obsérvese en esta última ecuación que los elementos del vector columna representan los cosenos directores del vector que va de P a Q, el cual se puede expresar de la siguiente forma:

$$\bar{e} = \cos\alpha\,\bar{i} + \cos\beta\,\bar{j} + \cos\gamma\,\bar{k} \tag{2.16}$$

Llamando a $\frac{\Delta\bar{\delta}_{Q/P}}{\left|\overline{PQ}\right|}$ el vector deformación total $\bar{\varepsilon}$, la ecuación (2.15) se puede escribir como:

$$\bar{\varepsilon} = \left[\bar{E}_{ij}\right]\left|\bar{e}\right| \tag{2.17}$$

Siendo:

$$\bar{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$\bar{E}_{ij}$ recibe el nombre de gradiente de desplazamiento material o tensor deformación total.

Este tensor representado por una matriz cuadrada, una simétrica y la otra antisimétrica, se puede expresar como la suma de dos matrices, esto es:

$$\overline{E}_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

La primera matriz (simétrica) se conoce como tensor deformación E_{ij}, mientras que la segunda (antisimétrica) recibe el nombre de tensor rotacional Ω_{ij}.

Así, el tensor deformación total se puede expresar como la suma de dos tensores, esto es:

$$\overline{E}_{ij} = E_{ij} + \Omega_{ij} \tag{2.20}$$

2.3 Interpretación física del tensor rotacional

Definiendo a los términos del tensor rotacional Ω_{ij} como:

$$\Omega_{yx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right); \qquad \Omega_{zx} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

$$\Omega_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right); \qquad \Omega_{zy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

$$\Omega_{xz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}\right); \qquad \Omega_{yz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Obsérvese que los elementos del tensor rotacional guardan la siguiente relación:

$$\Omega_{yx} = -\Omega_{xy}\,; \qquad \Omega_{zx} = -\Omega_{xz}\,; \qquad \Omega_{zy} = -\Omega_{yz}$$

Por lo que dicho tensor se puede representar como:

$$\Omega_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \Omega_{yx} & \Omega_{zx} \\ -\Omega_{yx} & 0 & \Omega_{zy} \\ -\Omega_{zx} & -\Omega_{zy} & 0 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Para identificar los términos del tensor rotacional Ω_{ij}, apliquemos la definición de rotacional al campo de desplazamientos $\bar{\delta}$:

$$\operatorname{rot}\bar{\delta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\operatorname{rot}\bar{\delta} = \left[\Omega_{yz}\bar{i} + \Omega_{zx}\bar{j} + \Omega_{xy}\bar{k}\right] \tag{2.22}$$

Calculando el producto vectorial $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}$, se tiene:

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}=\begin{bmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ -\Omega_{zy} & \Omega_{zx} & \Omega_{xy}\\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\end{bmatrix} \tag{2.23}$$

$$=\left\{\Omega_{zx}\cos\gamma-\Omega_{xy}\cos\beta\right\}\bar{i}-\left\{-\Omega_{zy}\cos\gamma-\Omega_{xy}\cos\alpha\right\}\bar{j}$$

$$+\left\{\Omega_{zy}\cos\beta-\Omega_{zx}\cos\alpha\right\}\bar{k}$$

$$\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}=\left\{\Omega_{zx}\cos\gamma+\Omega_{yx}\cos\beta\right\}\bar{i}+\left\{\Omega_{zy}\cos\gamma+\Omega_{xy}\cos\alpha\right\}\bar{j}$$

$$+\left\{\Omega_{yz}\cos\beta+\Omega_{xz}\cos\alpha\right\}\bar{k}$$

Por otra parte, el tensor rotacional aplicado a la dirección definida por el vector $\bar{e}$ resulta igual a:

$$\left[\Omega_{ij}\right]\left|\bar{e}\right|=\left\{\Omega_{yx}\cos\beta+\ \Omega_{zx}\cos\gamma\right\}\bar{i}+\left\{\Omega_{xy}\cos\alpha+\Omega_{zy}\cos\gamma\right\}\bar{j}$$

$$+\left\{\Omega_{xz}\cos\alpha+\Omega_{yz}\cos\beta\right\}\bar{k} \tag{2.24}$$

Obsérvese que las ecuaciones (2.23) y (2.24) resultan ser iguales, por lo que:

$$\left[\Omega_{ij}\right]\left|\bar{e}\right|=\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}=\bar{v} \tag{2.25}$$

La interpretación física de $\frac{1}{2}\,\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}=\bar{v}$ se muestra en la figura (2.3).

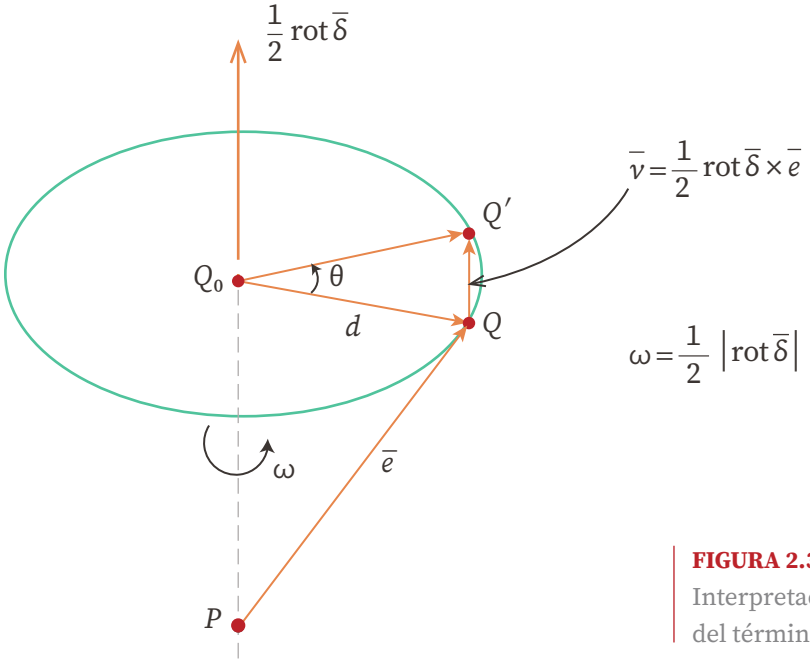


FIGURA 2.3
Interpretación física del término $\mathrm{rot}\,\bar{\delta}\times\bar{e}$

Se puede observar en esta figura que dicho término representa al conjunto de vectores $\bar{v}$ generados por una rotación alrededor del eje rot $\bar{\delta}$, con un giro ω de magnitud:

$$\frac{1}{2}\,|\mathrm{rot}\,\bar{\delta}|$$

El conjunto de vectores $\bar{v}$ tiene magnitudes proporcionales a su distancia d al vector rot $\bar{\delta}$.

Para aclarar el significado físico del tensor rotacional en el plano, consideremos una barra rígida sometida a un giro ω_z, tal como se muestra

en la figura (2.4). Consideremos que en los extremos de la barra se localizan los puntos P y Q separados una distancia diferencial.

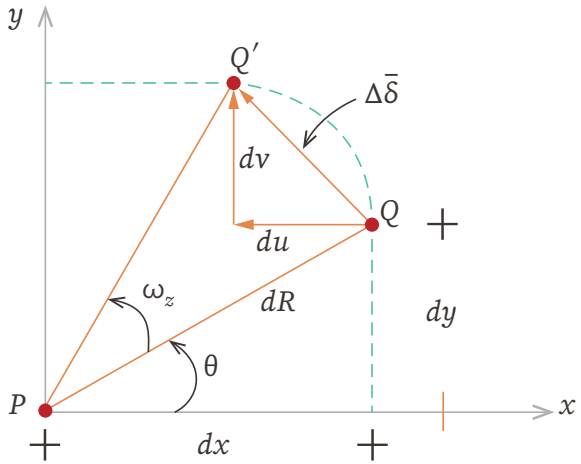


FIGURA 2.4
Rotación pura de una barra rígida

El vector desplazamiento relativo del punto Q respecto al punto P es:

$$\Delta\bar{\delta} = du\,\bar{i} + dv\,\bar{j} \tag{2.26}$$

El desplazamiento du se puede calcular como:

$$\begin{aligned} du &= dR\cos(\omega_z+\theta) - dR\cos\theta \\ &= dR\left(\cos\omega_z\ cos\ \theta - \operatorname{sen}\omega_z\ \operatorname{sen}\theta\right) - dR\cos\theta \\ \frac{du}{dR} &= \left(\cos\omega_z - 1\right) cos\ \theta - \operatorname{sen}\omega_z\ \operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned} dv &= dR\operatorname{sen}(\omega_z+\theta) - dR\ \operatorname{sen}\theta \\ &= dR\left(\operatorname{sen}\omega_z\cos\theta + \cos\omega_z\ \operatorname{sen}\theta\right) - dR\ \operatorname{sen}\theta \\ \frac{dv}{dR} &= \operatorname{sen}\omega_z\ \cos\theta + \left(\cos\omega_z - 1\right)\operatorname{sen}\theta \end{aligned} \tag{2.28}$$

Las ecuaciones (2.27) y (2.28) se pueden representar en forma matricial:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dR} \\ \frac{dv}{dR} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\omega_z - 1 & -\operatorname{sen}\omega_z \\ \operatorname{sen}\omega_z & \cos\omega_z - 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \tag{2.29}$$

Si ω_z es pequeño, entonces sen $\omega_z = \omega_z$ y cos $\omega_z = 1$, por lo que la ecuación (2.29) se reduce a:

$$\begin{vmatrix} \frac{du}{dR} \\ \frac{dv}{dR} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z \\ \omega_z & 0 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} \cos\theta \\ \operatorname{sen}\theta \end{vmatrix} \tag{2.30}$$

Obsérvese que esta última ecuación puede ser expresada de la siguiente manera:

$$\bar{\varepsilon} = \left[\Omega_{ij}\right] \left| \bar{e} \right| \qquad \text{con} \qquad E_{ij} = 0$$

por lo tanto:

$$\Omega_{yx} = -\omega_z \qquad \text{y} \qquad \Omega_{xy} = \omega_z$$

Así, los términos del tensor rotacional Ω_{ij} representan los giros del elemento alrededor del eje z.

2.4 Interpretación física del tensor deformación

El tensor deformación quedó definido por:

$$|E_{ij}| = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (2.31)$$

A continuación, se presenta la interpretación física de cada uno de los elementos del tensor deformación. El término:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{\Delta u}{\Delta x}$$

donde Δu representa el desplazamiento del elemento dx en la dirección x, mientras que Δx es la dimensión original del elemento. Así:

$$\frac{\partial u}{\partial x}$$

representa la deformación normal o longitudinal unitaria en la dirección x, y en lo que sigue la designaremos como ε_{xx} . El primer subíndice indica la dirección del desplazamiento del punto Q a Q', en tanto que el segundo, la dirección de los puntos P a Q dada por el vector unitario $\bar{e}$.

De manera similar, designaremos a los términos:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy} \quad \text{y} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_{zz}$$

los cuales constituyen las deformaciones normales o longitudinales unitarias en las direcciones y y z, respectivamente. Los valores de ε serán positivos cuando los lados de la partícula aumentan de longitud, en caso contrario, serán negativos.

En lo que respecta al término:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

la interpretación física se hará con referencia a la figura (2.5).

Considérese un elemento diferencial cuya configuración no deformada está definida por los vértices O, P, Q y R, asumiendo que está fijo en O. Una vez que el elemento ha sido deformado, los vértices en la configuración deformada son P', Q', R'.

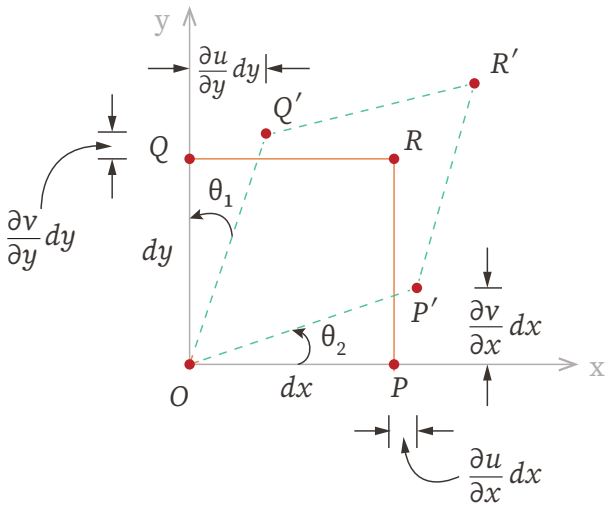


FIGURA 2.5
Interpretación física del término $\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)$

Con base en esta figura, se tiene:

$$\tan \theta_1 = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y} dy}{dy} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.32}$$

$$\tan \theta_2 = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x} dx}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.33}$$

Por otra parte, si el ángulo θ es pequeño, entonces:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} \approx \theta_1 + \theta_2 \tag{2.34}$$

En lo que sigue, designaremos al término:

$$\left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\} = \gamma_{yx}$$

Observamos que este representa la suma del cambio angular entre los lados *dx, dy* inicialmente ortogonales y se conoce como *deformación angular* o *deformación cortante.*

Analizando las características de deformación en los planos *xz*, *yz*, se puede establecer por analogía:

$$\gamma_{zx} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right\} \qquad \gamma_{zy} = \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right\}$$

siendo γ_{zx} y γ_{zy} los cambios angulares entre los lados *dx* y *dz* y los lados *dy* y *dz*, respectivamente. Los valores de las deformaciones angulares γ serán positivos cuando decrece el ángulo que forman los lados correspondientes, en caso contrario, serán negativos.

De esta manera, el tensor deformación puede ser representado como:

$$[E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

Así, en el tensor E_{ij} aparecen:

a) En su diagonal principal, las deformaciones longitudinales unitarias en tres direcciones ortogonales.
b) Simétricamente a la diagonal principal aparecen la mitad de las deformaciones angulares entre tres lados originalmente ortogonales.

P Problema resuelto 2.1

En el medio continuo representado en la figura (2.6), se establece el siguiente vector desplazamiento:

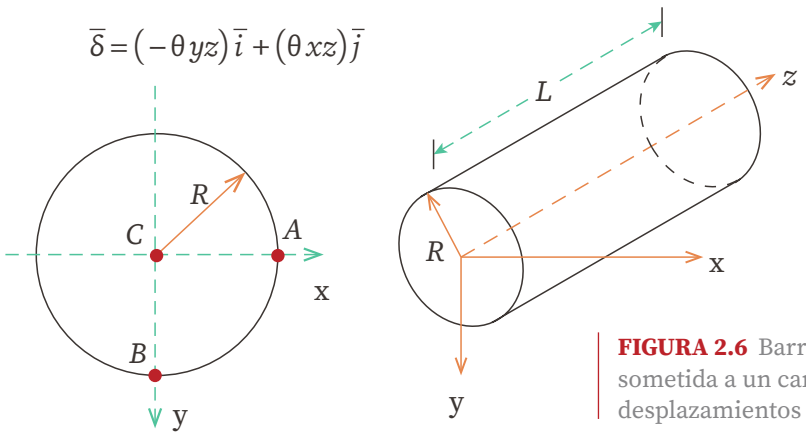


FIGURA 2.6 Barra cilíndrica sometida a un campo de desplazamientos

Determine la cinemática de las partículas A, B y C, en $z=0$.

Solución

Las componentes del vector desplazamiento son:

$$u=-\theta yz\,;\qquad v=\theta xz\,;\qquad w=0\,;\qquad \theta=cte$$

Los elementos del tensor deformación se calculan como:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad;\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\theta z$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\theta z\quad;\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-\theta y\quad;\qquad \frac{\partial v}{\partial z}=\theta x$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=0\quad;\qquad \frac{\partial w}{\partial y}=0\quad;\qquad \frac{\partial w}{\partial z}=0$$

$$rot\,\bar{\delta}=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{vmatrix}=\bar{i}\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial z}\right)-\bar{j}\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\bar{k}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Por lo tanto:

$$\text{rot}\,\bar{\delta}=\bar{i}(0-\theta x)-\bar{j}(0+\theta y)+\bar{k}(\theta z+\theta z)$$

$$\text{rot}\,\bar{\delta}=\bar{i}(-\theta x)-\bar{j}(\theta y)+\bar{k}(2\theta z)$$

Además:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-\theta y}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\theta x}{2} \\ \frac{-\theta y}{2} & \frac{\theta x}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

La evaluación del tensor deformación E_{ij} y del rotacional del vector desplazamiento para cada una de las partículas permite conocer su cinemática.

a) En el origen (partícula C),

$$x=0, \quad y=0, \quad z=0$$

se tiene:

$$\overline{\delta}=0, \quad E_{ij}=0, \quad \text{rot}\,\overline{\delta}=0$$

De lo anterior, podemos concluir que no hay traslación ni rotación y tampoco cambio de forma.

b) En el borde de la barra (partícula A),

$$x=R, \quad y=0, \quad z=0$$

por lo que $\overline{\delta}=0$.

El rotacional del vector $\bar{\delta}$ resulta:

$\text{rot}\,\bar{\delta} = -R\theta\,\bar{i} \rightarrow$ la partícula gira alrededor del eje x en dirección negativa.

El tensor deformación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \theta\dfrac{R}{2} \\ 0 & \theta\dfrac{R}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ hay cambio de forma}$$

c) En el borde de la barra (partícula B),

$x = 0,\ y = R,\ z = 0$

por lo que $\bar{\delta} = 0$.

El rotacional del vector $\bar{\delta}$ resulta:

$\text{rot}\,\bar{\delta} = -R\theta\,\bar{j} \rightarrow$ la partícula gira alrededor del eje y en dirección negativa.

El tensor de formación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\dfrac{\theta R}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\dfrac{\theta R}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \text{ hay cambio de forma}$$

d) Describa el movimiento de las partículas *A, B, C* en $z = L$ y compare los resultados con $z = 0$.

Se encontró que el vector desplazamiento queda expresado como:

$$\bar{\delta} = (-\theta yz)\,\bar{i} + (\theta xz)\,\bar{j}$$

Si $z = 0 \rightarrow \bar{\delta} = 0$, este resultado implica que las partículas no experimentan desplazamientos paralelos a ningún eje.

Para el rotacional, se tiene:

$$\text{rot}\,\bar{\delta} = (-\theta x)\,\bar{i} + (-\theta y)\,\bar{j} + (2\theta z)\,\bar{k}$$

$$\text{rot}\,\delta = (-\theta x)\,\bar{i} - (\theta y)\,\bar{j} = -\theta\,(x\,\bar{i} + y\,\bar{j})$$

El tensor deformación vale:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -y \\ 0 & 0 & x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\theta$$

Si se compara el vector rotacional con el vector de posición de cada partícula, descrito por:

$$\bar{r} = x\,\bar{i} + y\,\bar{j} \rightarrow \text{rot}\,\bar{\delta} = -\theta\,\bar{r}$$

Se observa que ambos vectores tienen las mismas líneas de acción, pero difieren en dirección en 180°. Además, las magnitudes de los vectores $\text{rot}\,\bar{\delta}$ son proporcionales en θ a la magnitud de los vectores de posición.

Lo anterior indica que todos los vectores rot $\bar{\delta}$ coinciden en el origen. Por lo tanto:

$$\left[\text{rot}\,\bar{\delta}\right]_{origen} = 0 \rightarrow \text{no hay giro}$$

Analizando la sección $z = 1$ (figura 2.7), se tiene:

$$\bar{\delta} = (-\theta y)\,\bar{i} + (\theta x)\,\bar{j}$$

Ya que en $w = 0$, la sección permanece plana y sólo se presentan desplazamientos en el plano de la sección.

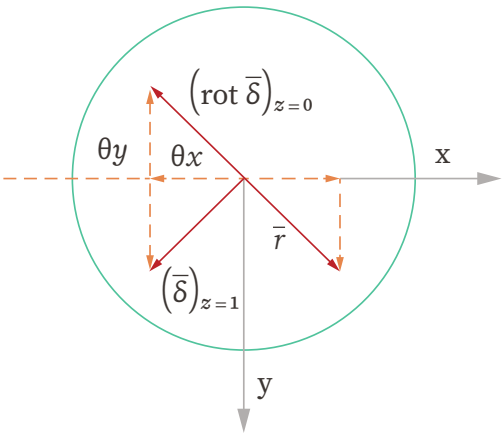


FIGURA 2.7 Componentes del vector desplazamiento en las secciones $z = 0$ y $z = 1$

Dado que:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} \quad \text{y} \quad \bar{\delta} = (-\theta y)\bar{i} + (\theta x)\bar{j}$$

Los desplazamientos son proporcionales a la magnitud del vector de posición $\bar{r}$ y ortogonales a él, por lo que podemos escribir:

$$\left|\bar{\delta}\right| = \theta \left|\bar{r}\right|$$

Por lo tanto, la sección $z=1$ permanece plana y gira rígidamente alrededor del eje z, un ángulo θ.

El ángulo θ mide el giro respecto a z, de una sección distante $z=1$, de la sección que no se mueve ($z=0$).

Además: $\left[\text{rot}\,\bar{\delta}\right]_{z=1}=\left(-\theta x\right)\bar{i}-\left(\theta y\right)\bar{j}+\left(2\theta\right)\bar{k}$

Este vector es igual al de la sección $z=0$ más un vector $2\theta\bar{k}$, que implica una rotación rígida alrededor de $z=0$.

Además de estos movimientos rígidos de las partículas, se cumple que:

$$\left[E_{ij}\right]_{z=1}=\left[E_{ij}\right]_{z=0}$$

Finalmente, en $z=L$:

$$\left[\,\bar{\delta}\,\right]_{z=L}=\left[\,\bar{\delta}\,\right]_{z=1}\;L$$

La sección permanece plana, girando un ángulo θL respecto al eje z:

$$\left[\text{rot}\,\bar{\delta}\,\right]_{z=L}=\left[\text{rot}\,\bar{\delta}\,\right]_{z=0}+\left(2\theta L\right)\bar{k}$$

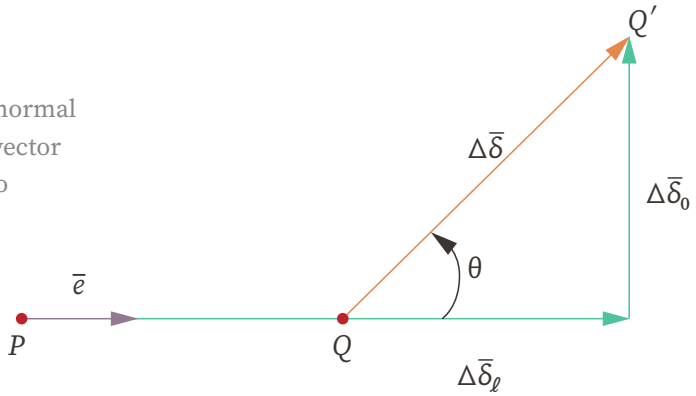
Así, las rotaciones de las partículas son similares a las de $z=0$, pero son una rotación rígida alrededor de z con magnitud igual a θL.

Por lo tanto, $\bar{\delta}=\left(-\theta yz\right)\bar{i}+\left(\theta xz\right)\bar{j}$ describe la torsión de una barra cilíndrica cuando las secciones permanecen planas y la sección $z=L$ gira un ángulo θL respecto a la primera sección.

2.5 Componentes normal y cortante del vector deformación

Previamente se estableció que el vector desplazamiento relativo de un punto Q respecto a un punto P, se puede expresar como la diferencia vectorial $\Delta\overline{\delta}_{Q/P}=\overline{\delta}_Q-\overline{\delta}_P$. En la figura (2.8) se muestra gráficamente dicho vector.

FIGURA 2.8
Componentes normal y cortante del vector desplazamiento relativo



Se puede observar en dicha figura que si P y Q son dos puntos en la configuración no deformada del cuerpo, cuya dirección está dada por el vector unitario $\overline{e}$, entonces $\Delta\overline{\delta}$ es el vector que va del punto Q al punto Q', ubicado este último en la configuración deformada del cuerpo. De esta manera, y con referencia a la figura (2.8), se puede establecer la siguiente suma vectorial:

$$\Delta\overline{\delta}=\Delta\overline{\delta}_\ell+\Delta\overline{\delta}_0 \tag{2.36}$$

Dividiendo esta última ecuación entre el módulo del vector $\overline{PQ}$, se obtiene:

$$\frac{\Delta\delta}{\left|\overline{PQ}\right|}=\frac{\Delta\delta_\ell}{\left|\overline{PQ}\right|}+\frac{\Delta\delta_0}{\left|\overline{PQ}\right|} \tag{2.37}$$

La ecuación (2.37) se puede escribir como:

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_{\ell} + \bar{\varepsilon}_{0} \tag{2.38}$$

siendo $\bar{\varepsilon}_{\ell}$ el vector deformación normal o longitudinal y $\bar{\varepsilon}_{0}$ el vector deformación cortante o desviador. Obsérvese que la ecuación (2.38) tiene la misma forma que la establecida para el vector esfuerzo $\bar{t}$.

Dado que el vector deformación $\bar{\varepsilon}$ presenta la misma estructura matemática que el vector esfuerzo $\bar{t}$, todo lo establecido con anterioridad en el estudio del estado de esfuerzo será válido para el estado de deformación.

2.6 Deformaciones principales y direcciones principales asociadas

Para determinar las *direcciones principales de deformación,* se realiza un planteamiento análogo al del estado de esfuerzos.

Las magnitudes de las *deformaciones principales* quedan definidas por la ecuación característica siguiente:

$$\varepsilon^3 - J_1\varepsilon^2 + J_2\varepsilon - J_3 = 0 \tag{2.39}$$

donde:

$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}$; invariante lineal

$J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2$; invariante cuadrático

$J_3 = \left|\left[E_{ij}\right]\right|$; invariante cúbico

Por lo tanto, el tensor deformación en un sistema de referencia principal se puede expresar como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \tag{2.40}$$

siendo ε_1, ε_2, ε_3 las deformaciones principales mayor, intermedia y menor, respectivamente.

Por analogía, se puede llegar a establecer un elipsoide de Lamé que describe el conjunto de vectores $\bar{\varepsilon}$ en un marco de referencia principal $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_3$. En dichas direcciones sólo se generan cambios de dimensiones lineales, pero no angulares.

Las direcciones principales de deformación se calculan con el modelo matemático de valores y vectores característicos, de manera similar a lo que se hizo para el estado de esfuerzo.

2.7 Significado físico del invariante lineal J_1

Consideremos un elemento de volumen de un medio continuo sometido a un estado de esfuerzos tal que sus dimensiones se incrementan, pero el cuerpo mantiene su forma (figura (2.9)), por ejemplo, el generado por un campo de temperatura.

Por facilidad de presentación, supondremos que las dimensiones originales del elemento son unitarias.

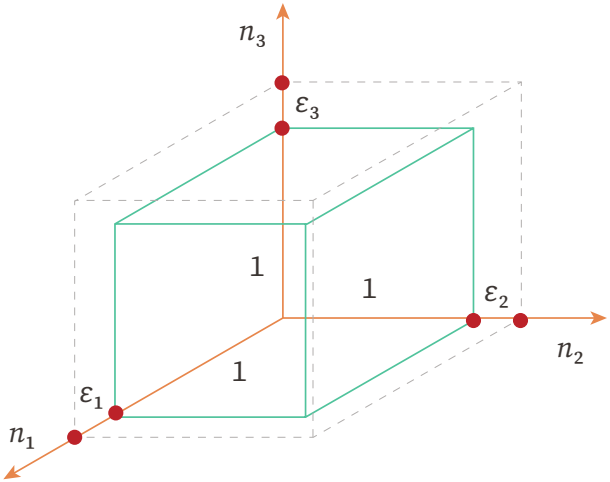


FIGURA 2.9 Cambio volumétrico de una partícula de un medio continuo

El cambio de volumen ΔV que experimenta el cuerpo resulta igual a:

$$\Delta V = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3) - (1)(1)(1)$$

Desarrollando:

$$\Delta V = (\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3) + (\varepsilon_1\,\varepsilon_2 + \varepsilon_2\,\varepsilon_3 + \varepsilon_3\,\varepsilon_1) + (\varepsilon_1\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3)$$

y teniendo presente la definición de invariantes de deformación, resulta que:

$$\Delta V = J_1 + J_2 + J_3 \qquad (2.41)$$

La suma de los tres invariantes mide el cambio de volumen de una partícula unitaria. Dado que en muchos problemas de ingeniería las deformaciones longitudinales son menores de 1 %, se acepta que:

$$\Delta V \approx J_1 \qquad (2.42)$$

Puesto que la deformación volumétrica unitaria es igual a $\varepsilon_v = \frac{\Delta V}{V}$, entonces $\varepsilon_v = J_1$.

2.8 Componentes volumétrica y desviadora del tensor deformación

Supongamos que en un punto de un medio continuo se conoce el *tensor deformación* E_{ij} en un marco de referencia principal. Este tensor, al igual que en el caso del tensor esfuerzo, puede ser descompuesto en sus partes volumétrica y distorsional (o desviadora). Así:

$$E_{ij} = E_v + E_0 \tag{2.43}$$

donde:

$$E_0 = \frac{J_1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$E_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix} \tag{2.45}$$

El tensor E_v mide el cambio de volumen de las partículas unitarias del cuerpo deformable, mientras que el tensor E_0 mide su distorsión o cambio de forma.

2.9 Estado de deformación bidimensional

El estudio del estado de deformación bidimensional, desde un enfoque matemático, es muy similar a lo que se estableció para el estado de esfuerzo plano; sin embargo, desde el punto de vista físico, existen algunas particularidades que es conveniente puntualizar.

Se tiene un estado de deformación bidimensional cuando las deformaciones asociadas, por ejemplo, a la dirección z se pueden despreciar, esto es:

$$\varepsilon_{zz}=0\,;\ \gamma_{xz}=0\,;\ \gamma_{yz}=0$$

Esta condición se presenta en la práctica en el caso de cuerpos deformables donde una de las dimensiones es considerablemente mayor a las otras dos, por lo que las deformaciones asociadas con la dirección larga se suelen despreciar, así todo el estudio de deformaciones se hace en el plano.

Asumiendo la condición planteada, el tensor deformación E_{ij} se reduce a:

$$E_\theta=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.46}$$

Este último tensor representa un estado de deformación bidimensional.

Las deformaciones principales y las direcciones correspondientes se calculan de manera análoga para el estado de esfuerzo plano.

Las magnitudes de las componentes lineal $\bar{\varepsilon}_\ell$ y cortante $\bar{\varepsilon}_0$ del vector deformación $\bar{\varepsilon}$ para un estado de deformación plano se pueden deducir como a continuación se explica.

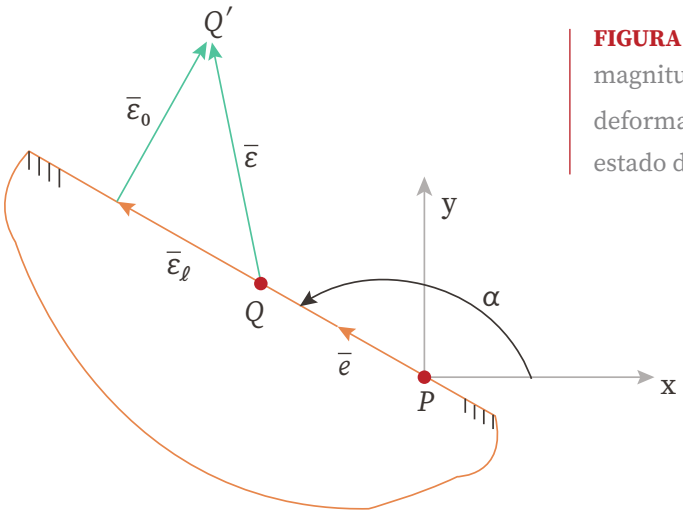


FIGURA 2.10 Derivación de las magnitudes de los vectores deformación $\bar{\varepsilon}_\ell$ y $\bar{\varepsilon}_0$ para un estado de deformación plano

Siguiendo un procedimiento similar al realizado para el estado de esfuerzo plano, se obtiene:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right)\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha \qquad (2.47)$$

$$\varepsilon_0 = \left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)\text{sen}\,2\alpha - \frac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\alpha \qquad (2.48)$$

Las ecuaciones (2.47) y (2.48) permiten calcular las magnitudes de las deformaciones longitudinal $\bar{\varepsilon}_\ell$ y cortante $\bar{\varepsilon}_0$, respectivamente, que actúan en la dirección de los puntos P a Q (figura (2.10)), dada por el vector unitario $\bar{e}$, conocido el tensor deformación E_{ij} en el punto P.

A diferencia del estado de esfuerzo plano, donde el ángulo θ se mide del eje horizontal (el x) a la normal al plano donde se quieren calcular los esfuerzos, ahora el ángulo α se mide del eje horizontal x, a la dirección de los puntos P a Q, dada por el vector unitario $\bar{e}$.

Para un estado de deformación bidireccional en un sistema de referencia principal, el tensor deformación resulta ($\varepsilon_2 = 0$):

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Para este tensor, las ecuaciones (2.47) y (2.48) quedan:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2} + \frac{1}{2}(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)\cos 2\alpha \qquad (2.49)$$

$$\varepsilon_\theta = \left(\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3}{2}\right) \operatorname{sen} 2\alpha \qquad (2.50)$$

2.10 Ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

Se demostró en el cuerpo del capítulo que para conocer el estado de deformación en un punto de un medio continuo es suficiente con determinar las seis componentes del tensor deformación E_{ij} (simétrico). Dado que las seis componentes del tensor deformación forman un sistema de seis ecuaciones diferenciales parciales, donde las incógnitas son los desplazamientos u, v y w, es claro que el sistema está indeterminado y, en general, no poseerá una solución única para una elección arbitraria de las componentes u, v y w. Para que un tensor simétrico de orden dos corresponda a

un tensor deformación y, por lo tanto, sea integrable y exista un campo de desplazamientos del cual provenga, es necesario que se garantice la continuidad del medio continuo durante el proceso de deformación. Para ello, los elementos del tensor deformación deben cumplir con ciertas condiciones, conocidas como *ecuaciones de compatibilidad.*

Supongamos que de alguna manera se establecen las dos ecuaciones diferenciales siguientes, siendo la variable desconocida la componente del vector desplazamiento $u(x, y)$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = x + 3y \tag{2.51}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2$$

El análisis de estas dos ecuaciones nos lleva a que no pueden ser resueltas debido a que son inconsistentes. El cálculo en ambas ecuaciones de la derivada:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}$$

pone en evidencia dicha inconsistencia. La derivada de la primera ecuación da 3, mientras que la segunda da $2x$.

Si las ecuaciones (2.51) se expresan como:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f(x, y) \tag{2.52}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = g(x, y)$$

entonces, para que estas ecuaciones puedan ser integradas, se debe cumplir la siguiente condición:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{2.53}$$

La ecuación (2.53) representa la *condición de integrabilidad de Riemann* o *ecuación de compatibilidad.*

Por lo expuesto, es claro que los elementos del tensor deformación deben guardar cierta relación entre sí para asegurar la existencia de continuidad del campo de desplazamientos $\overline{\delta}$ correspondiente.

Para establecer las ecuaciones de compatibilidad, recordemos la definición de cada uno de los elementos del tensor deformación E_{ij}:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.54}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{2.55}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.56}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.57}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.58}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \tag{2.59}$$

Para relacionar los elementos del tensor deformación, efectuemos las siguientes operaciones. Derivando la ecuación (2.54) respecto a y^2, se obtiene:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \tag{2.60}$$

Haciendo lo mismo con la ecuación (2.55), pero ahora respecto a x^2, se llega a:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} \tag{2.61}$$

Derivando la ecuación (2.57) respecto a x , y:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial x} \tag{2.62}$$

Si u, v son funciones continuas,

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \tag{2.63}$$

Análogamente, si u, w son funciones continuas y derivables,

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} \tag{2.64}$$

Finalmente, si v, w son funciones continuas y derivables,

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \tag{2.65}$$

Las ecuaciones (2.63), (2.64) y (2.65) forman el *primer grupo de ecuaciones de compatibilidad.*

Ahora, estableceremos las relaciones entre los valores de las deformaciones angulares γ que permitan definir explícitamente a las deformaciones longitudinales ε.

Derivando la ecuación (2.57) respecto a z:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} \tag{2.66}$$

La ecuación (2.58) respecto a y:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.67}$$

Finalmente, la ecuación (2.59) respecto a x:

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \tag{2.68}$$

Multiplicando la ecuación (2.68) por (–1) y sumando miembro a miembro con las ecuaciones (2.66) y (2.67), se llega a:

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} \tag{2.69}$$

Derivando esta última ecuación respecto a x, se obtiene:

$$2\left(\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \tag{2.70}$$

De manera similar, se puede obtener:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \tag{2.71}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \tag{2.72}$$

Las ecuaciones (2.70), (2.71) y (2.72) forman el *segundo grupo de ecuaciones de compatibilidad.* Si estas seis ecuaciones son satisfechas, se concluirá que los elementos de E_{ij} son compatibles.

Las seis ecuaciones previas garantizan que se satisfagan las condiciones de Riemann para establecer las condiciones de integrabilidad que permiten la aceptación de la existencia del campo $\bar{\delta} = u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k}$ que dé origen a un tensor E_{ij} compatible.

2.11 Determinación de los elementos del tensor deformación

Existen varios métodos para determinar los elementos del tensor deformación en un punto de un cuerpo deformable: a) analíticos, b) numéricos y c) experimentales. En los dos primeros, los elementos del tensor deformación se determinan resolviendo las ecuaciones de comportamiento del medio continuo, en general, sistemas de ecuaciones diferenciales. Dependiendo de la complejidad del problema que se quiera resolver, se puede llegar a una solución cerrada (analítica), o bien, a una

solución aproximada de tipo numérico. Ambos métodos están fuera del alcance de este primer curso, no obstante, en el capítulo 4, Teoría de la elasticidad, se abordarán algunos problemas sencillos haciendo uso de funciones potenciales de esfuerzo y de desplazamiento.

Con respecto a los métodos experimentales, el problema se reduce a la medición de las deformaciones unitarias longitudinales en un mismo punto del cuerpo deformable para diferentes direcciones. Para ello, es necesario emplear instrumentos de medición de mucha precisión, como es el caso de los transductores de desplazamiento que trabajan bajo el principio de resistencia eléctrica, también conocidos como *strain gages.*

En cuanto al tensor deformación en el espacio, sería necesario medir las deformaciones longitudinales en seis direcciones diferentes para un mismo punto del cuerpo deformable; en cambio, para un tensor deformación bidireccional, es suficiente con tres mediciones. En este último caso, los elementos del tensor deformación ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy} se determinan haciendo uso de la ecuación que da la magnitud de la deformación longitudinal ε_{ℓ}, asociada a una dirección (ecuación (2.47)), lo que conduce a un sistema de ecuaciones algebraicas donde las incógnitas son los tres elementos del tensor deformación.

Para facilitar las mediciones de las deformaciones longitudinales en varias direcciones, existen ya en el mercado arreglos de strain gages, denominados *rosetas de deformación,* lo cual ayuda mucho en su montaje, ya que para lograr una medición confiable estos dispositivos deben ser solidarios al cuerpo deformable. Para conseguir esto, se utiliza un pegamento especial que evite que haya corrimientos entre el medidor de deformación y el punto donde se quieren conocer las deformaciones.

En el problema 2.2, se ilustra la forma de obtener los elementos del tensor deformación empleando strain gages.

P Problema resuelto 2.2

Se colocó una roseta de deformación en un punto de un cuerpo deformable y se obtuvieron los resultados que se muestran en la figura siguiente:

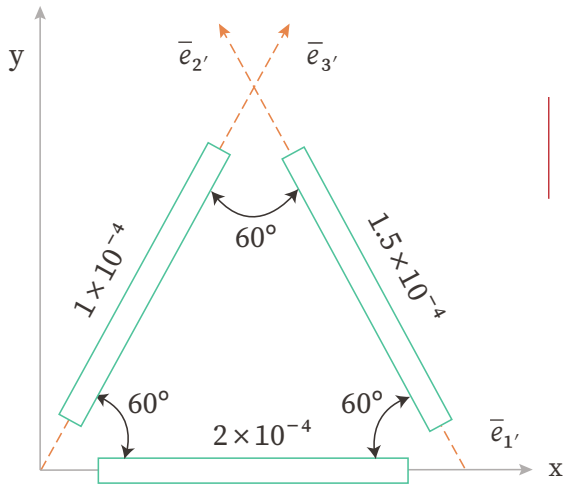


FIGURA 2.11 Deformaciones obtenidas con la roseta de deformación

Determine:

a) Los elementos del tensor deformación.

$$\varepsilon_{xx},\ \varepsilon_{yy},\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}$$

b) Las deformaciones principales ε_1 , ε_3.

c) Las direcciones principales de deformación.

S **Solución**

a) Determinamos los elementos del tensor deformación usando la ecuación (2.47).

$$\varepsilon_{\ell} = \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,2\alpha$$

Para: $\bar{e}_{1'}$, $\alpha = 0 : \varepsilon_{1'} = 2\times 10^{-4}$

$$2\times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx}}{2}(1+1) + \frac{\varepsilon_{yy}}{2}(1-1) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,0° \; ; \quad 2\times 10^{-4} = \varepsilon_{xx}$$

Para: $\bar{e}_{2'}$, $\alpha = 120° : \varepsilon_{2'} = 1.5\times 10^{-4}$

$$1.5\times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx}}{2}\left(1+\cos 240°\right) + \frac{\varepsilon_{yy}}{2}\left(1-\cos 240°\right) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,240°$$

$$1.5\times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right);$$

$$1\times 10^{-4} = \frac{2\times 10^{-4}}{4} + \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)$$

Para: $\bar{e}_{3'}$, $\alpha = 60° : \varepsilon_{3'} = 1\times 10^{-4}$

$$1\times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx}}{2}\left(1+\cos 120°\right) + \frac{\varepsilon_{yy}}{2}\left(1-\cos 120°\right) + \frac{1}{2}\gamma_{xy}\,\text{sen}\,120° \; ;$$

$$1\times 10^{-4} = \frac{\varepsilon_{xx}}{4} + \frac{3}{2}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right);$$

$$0.5\times 10^{-4} = \frac{3}{4}\varepsilon_{yy} - \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones formado para las direcciones $\bar{e}_{2'}$ y $\bar{e}_{3'}$, se obtiene:

$$\varepsilon_{yy} = 1\times10^{-4};\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} = -2.8867\times10^{-5}$$

Por lo tanto:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 2\times10^{-4} & -2.8867\times10^{-5} \\ -2.8867\times10^{-5} & 1\times10^{-4} \end{bmatrix}$$

b) Calculamos las deformaciones principales ε_1 y ε_3 empleando expresiones análogas a las desarrolladas para el estado de esfuerzo plano, pero en términos de deformaciones.

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

$$\varepsilon_{1,3} = \frac{\left(2\times10^{-4}\right)+\left(1\times10^{-4}\right)}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{2\times10^{-4}-1\times10^{-4}}{2}\right)^2 + \left(-2.8867\times\ 10^{-5}\right)^2}$$

c) Las direcciones principales de deformación podemos determinarlas utilizando una expresión similar a la empleada para el estado de esfuerzo plano, pero en términos de deformaciones.

$$\tan 2\alpha = \frac{\frac{1}{2}\gamma_{xy}}{\frac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}};$$

$$\tan 2\alpha = \frac{\left(-2.8867\times10^{-5}\right)}{\left(\frac{2\times10^{-4}-1\times10^{4}}{2}\right)} = -0.57734$$

$$2\alpha = \frac{\tan^{-1}\left(-0.57734\right)}{2} = -30°;\ 2\alpha' = -30°;\ 2\alpha'' = 180° - 30° = 150°;$$

Comprobación de las direcciones principales de deformación:

Con $2\alpha' = -30°$

$$\varepsilon_\ell = \frac{\left(2\times10^{-4}\right)+\left(1\times10^{-4}\right)}{2} + \frac{\left(2\times10^{-4}\right)-\left(1\times10^{-4}\right)}{2}\cos\left(-30°\right) +$$

$$+\left(-2.8867\times10^{-5}\right)\operatorname{sen}\left(-30°\right)$$

$$\varepsilon_\ell = 2.0773\times10^{-4} = \varepsilon_1;\ \bar{e}_1 = 0.9659\,\bar{i} - 0.2588\,\bar{j}$$

$$\varepsilon_\ell = \frac{\left(2\times10^{-4}\right)+\left(1\times10^{-4}\right)}{2} + \frac{\left(2\times10^{-4}\right)-\left(1\times10^{-4}\right)}{2}\cos 150° +$$

$$+\left(-2.8867\times10^{-5}\right)\operatorname{sen}150°$$

$$\varepsilon_\ell = 9.2265\times10^{-5} = \varepsilon_3;\ \bar{e}_3 = 0.2588\,\bar{i} - 0.9659\,\bar{j}$$

2.12 PROBLEMAS PROPUESTOS

P Problema 2.3

El tensor deformación en un punto de un medio continuo está dado por:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & \sqrt{2} \\ -3 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 4 \end{bmatrix}$$

Determine:

a) El vector deformación asociado a la dirección $\bar{e} = \frac{1}{2}\bar{i} - \frac{1}{2}\bar{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\bar{k}$

b) Las magnitudes de los vectores deformación normal ε_ℓ y cortante ε_θ

S Solución

a) $\varepsilon = 3\bar{i} - 3\bar{j} + \frac{6}{\sqrt{2}}\bar{k}$

b) $\varepsilon_\ell = 6\,;\ \varepsilon_\theta = 0$

P Problema 2.4

Dado el campo de desplazamientos: $\bar{\delta} = 3xy^2\,\bar{i} + 2xz\,\bar{j} + (z^2 - xy)\,\bar{k}$

Determine:

a) Los elementos del tensor deformación E_{ij}.

b) Revisar la compatibilidad del tensor deformación E_{ij}.

c) Calcular la componente volumétrica E_v y la componente distorsional E_θ para el punto $P\,(1, 2, 3)$.

S Solución

a) $$E_{ij} = \begin{bmatrix} 3y^2 & 3xy+z & -\frac{y}{2} \\ 3xy+z & 0 & \frac{x}{2} \\ -\frac{y}{2} & \frac{x}{2} & 2z \end{bmatrix}$$

b) El tensor deformación satisface las de ecuaciones (2.63) a (2.65) y (2.70) a (2.72), por lo tanto, es compatible.

c) $$E_v = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad ; \quad E_\theta = \begin{bmatrix} 6 & 9 & -1 \\ 9 & -6 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

P Problema 2.4

Se coloca una roseta de deformación en un punto de un cuerpo deformable y se obtienen los valores de la deformación que se indican en la figura para las direcciones indicadas. Calcule los elementos del tensor deformación ε_{xx}, ε_{yy}, γ_{xy}, asumiendo que el primer invariante del tensor deformación es igual a 6×10^{-4}.

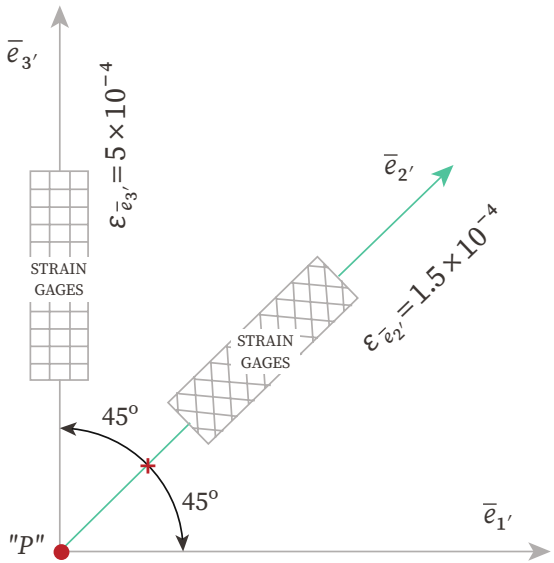


FIGURA 2.12 Arreglo de los *strain gages* para un punto del cuerpo deformable

S Solución

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 5 \end{bmatrix} 10^{-4}$$

CAPÍTULO

3

Principios generales de la mecánica

Introducción

La mecánica de los medios continuos tiene como base una serie de principios o postulados de carácter general que se suponen válidos para cualquier tipo de material, independientemente del rango de desplazamientos o deformaciones que este experimente cuando se somete a ciertas solicitaciones.

Estos principios constituyen las *leyes fundamentales que rigen el comportamiento mecánico de los medios continuos*, y muchas de las veces son expresados como leyes de conservación de ciertas cantidades físicas. Tal es el caso de los principios de la conservación de la masa o ecuación de continuidad, el de la conservación de la cantidad de movimiento, el de la conservación de la energía (primera ley de la termodinámica) y el de aumento de entropía (segunda ley de la termodinámica).

En ciertos fenómenos mecánicos es frecuente ignorar algunos de estos principios por considerar que sus efectos son despreciables, lo que permite una formulación matemática del fenómeno más simple.

En este capítulo se enuncian los principios mencionados y se establecen las ecuaciones matemáticas correspondientes.

3.1 Teorema de la divergencia de Gauss

Las leyes de conservación, nombradas anteriormente, pueden ser aplicadas a un cierto volumen de materia, que tenga como frontera una superficie cerrada de forma cualquiera. En el desarrollo del modelo de comportamiento es usual encontrar que ciertas cantidades físicas aparecen como integrales de superficie y otras como integrales de volumen. La transformación de una integral de volumen a una de superficie y viceversa es una operación matemática requerida en esta formulación. Esta transformación matemática es conocida como el *teorema de Gauss* o *de la divergencia*, el cual establece que para una función vectorial espacial $\bar{f}(x, y, z)$, continua y derivable, con primeras derivadas parciales también continuas, se cumple que:

$$-\int_A \left(\bar{f}\cdot\bar{n}\right) dA = \int_V \operatorname{div}\left(\bar{f}\right) dV = \int_V \frac{\partial f_i}{\partial x_i}\, dV \qquad (3.1)$$

siendo n_i los cosenos directores de la normal a una superficie cerrada A (con el subíndice i variando de 1 a 3), frontera de un volumen V, en el entorno a un punto definido por dA.

3.2 Principio de la conservación de la masa o ecuación de continuidad

Este principio establece que en el interior de un "volumen de control", entendido este como un elemento diferencial asociado a un sistema de

referencia fijo en el espacio, la masa no se crea ni se destruye. De esta manera, la existencia de cambios de masa en tal volumen de control tendrá que estar asociada a un flujo de masa a través de la superficie de control.

Con referencia a la figura (3.1), y suponiendo que la densidad ρ del medio llena todo el volumen *V*, la masa total *M*, ocupada por dicho volumen en un tiempo *t*, resulta:

$$M = \int_V \rho \, dV \tag{3.2}$$

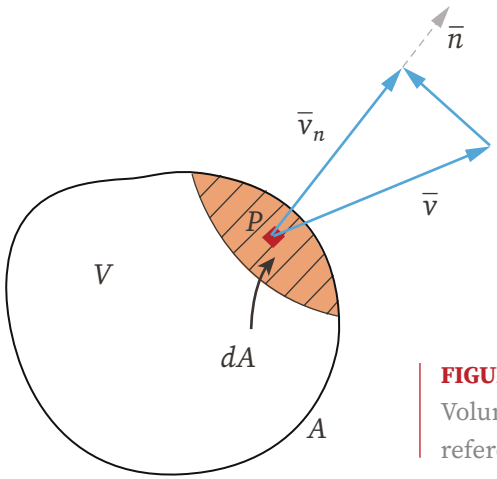


FIGURA 3.1
Volumen de referencia

Dado que la densidad del medio es una función de posición y del tiempo, esta se puede expresar como:

$$\rho = \rho\,(x, y, z, t) \tag{3.3}$$

Por lo tanto, la rapidez de variación de la masa total respecto al tiempo, en el volumen *V*, se obtiene derivando la ecuación (3.2) con respecto al tiempo, así:

$$\frac{\partial M}{\partial t} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dV \tag{3.4}$$

Considerando que dentro del volumen V, la masa no se crea ni se destruye, entonces la ecuación (3.4) es equivalente a la rapidez de variación del flujo de masa hacia el interior del área A.

Por otra parte, el flujo de masa hacia el exterior del área dA en el entorno del punto P, es $\rho v_n\, dA$, siendo $v_n = \overline{v}\cdot\overline{n}$ la magnitud de la componente normal del vector velocidad $\overline{v}$. Así, la rapidez de variación del flujo de masa total es:

$$\int_A \left(-\rho v_n\right) dA = -\int_A \rho\left(\overline{v}\cdot\overline{n}\right) dA \tag{3.5}$$

En esta ecuación, el signo menos obedece a que al entrar flujo el vector velocidad va en sentido contrario de la dirección de la normal $\overline{n}$ a la superficie, y puede ser expresada, de acuerdo con el teorema de Gauss, como:

$$\int_A \left(-\rho v_n\right) dA = -\int_V \operatorname{div}\left(\rho\overline{v}\right) dV \tag{3.6}$$

Dado que las ecuaciones (3.4) y (3.6) representan el mismo fenómeno, se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{\partial M}{\partial t} &= -\int_V \operatorname{div}\left(\rho\overline{v}\right) dV \\ &= \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\, dV\end{aligned} \tag{3.7}$$

Reordenando esta última ecuación, se tiene:

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho\overline{v}\right)\right] dV = 0 \tag{3.8}$$

La ecuación (3.8) se debe satisfacer para cualquier volumen V, por lo que el integrando necesariamente tendrá que ser nulo, esto es:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}\left(\rho \bar{v}\right) = 0 \tag{3.9}$$

La ecuación (3.9) se puede representar en notación índice como:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \left(\rho \bar{v}_i\right)}{\partial x_i} = 0 \tag{3.10}$$

Desarrollando cada uno de los términos de la ecuación (3.10), se tiene:

$$\frac{\partial \left(\rho v_i\right)}{\partial x_i} = \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \tag{3.11}$$

Por otra parte:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + v_i \frac{\partial \rho}{\partial x_i} \tag{3.12}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.11) y (3.12) en la ecuación (3.10), se obtiene:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \tag{3.13}$$

La ecuación (3.13) se puede escribir en un sistema de referencia cartesiano como:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right] = 0 \qquad \frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\left(\bar{v}\right) = 0 \tag{3.14}$$

Despejando la div $(\bar{v})$ de esta última ecuación, se tiene:

$$\operatorname{div}(\bar{v}) = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt} \tag{3.15}$$

De la ecuación (3.15) se puede observar que si el medio es incompresible, la div $(\bar{v}) = 0$. Así, en un sistema de referencia cartesiano se tiene que:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{3.16}$$

Esta ecuación diferencial representa el *principio de conservación de la masa* y se conoce también como *ecuación de continuidad.*

3.3 Principio de conservación de la cantidad de movimiento

La rapidez de variación con respecto al tiempo de la cantidad de movimiento de un sistema de partículas que conforman un medio continuo de volumen V, y que se mueve con una velocidad $\bar{v}$, es igual al vector fuerza resultante de todas las fuerzas externas, que actúan sobre el conjunto de partículas, siempre y cuando sea la tercera ley de Newton (acción y reacción) la que gobierne las fuerzas internas en el sistema.

En relación con la figura (3.2), dicho principio queda expresado como:

$$\int_A \bar{t}_n \, dA + \int_V \rho \bar{f} \, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho \bar{v} \, dV \tag{3.17}$$

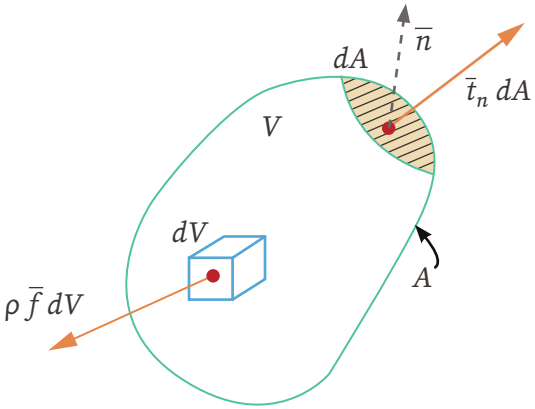


FIGURA 3.2
Conservación de la cantidad de movimiento

La ecuación (3.17) se puede expresar en notación índice como:

$$\int_A t_i\, dA + \int_V \rho\, f_i\, dV = \frac{d}{dt} \int_V \rho\, v_i\, dV \tag{3.18}$$

Obsérvese que el término del lado derecho de la ecuación (3.18) se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho v_i\, dV = \int_V \rho\, \frac{dv_i}{dt}\, dV \tag{3.19}$$

Por otra parte, en el estudio del estado de esfuerzo se estableció que:

$$t_i = T_{ij}\, n_j \tag{3.20}$$

Sustituyendo la ecuación (3.20) en la (3.18) y aplicando el teorema de Gauss, se obtiene:

$$\int_V \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}\, dV + \int_V \rho\, f_i\, dV = \int_V \rho\, \frac{dv_i}{dt}\, dV$$

Reordenando términos, se llega a:

$$\int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right] dV = \int_V \rho \frac{dv_i}{dt} dV \tag{3.21}$$

Finalmente, el principio de conservación de la cantidad de movimiento conduce a:

$$\int_V \left[\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dv_i}{dt} \right] dV = 0 \tag{3.22}$$

Dado que la ecuación (3.22) se debe cumplir para todo volumen V, entonces el integrando debe ser igual a cero, esto es:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dv_i}{dt} = 0 \tag{3.23}$$

Esta ecuación se conoce como la *ecuación del balance de la cantidad de movimiento o ecuación de Cauchy.*

En el caso de equilibrio estático, la aceleración $\frac{dv_i}{dt} = 0$, por lo que la ecuación (3.23) se reduce a:

$$\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0 \tag{3.24}$$

La ecuación (3.24) representa un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales donde las incógnitas son los nueve elementos del tensor esfuerzo, que, por simetría del mismo, bastará con conocer seis elementos de dicho tensor. Es obvio que el problema es estáticamente indeterminado, por lo que será necesario incluir ecuaciones adicionales, por ejemplo, aquellas que relacionen los esfuerzos con las deformaciones de

un material en particular. Dichas relaciones reciben el nombre de *ecuaciones constitutivas*, las cuales se estudiarán en el capítulo 4 para el caso de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos.

3.4 Primera ley de la termodinámica: principio de conservación de la energía

El *principio de conservación de energía* es una consecuencia de la primera ley de la termodinámica, el cual establece que la energía no se crea ni se destruye sólo se transforma. Esta ecuación de energía involucra una incógnita adicional, la *energía interna*, por lo que su utilidad radica en poder relacionar dicha energía interna con alguna variable de estado.

En la mecánica de los medios continuos un *sistema termodinámico* se define como una porción de materia continua, donde no existe intercambio de materia con cuerpos vecinos, lo que se ha dado en llamar un *sistema cerrado*. Las superficies fronteras del sistema se mueven en general con el flujo de materia.

La rapidez de variación del trabajo realizado por las fuerzas de superficie y de cuerpo sobre un sistema termodinámico, se puede expresar como:

$$\dot{W} = \int_A \bar{t}_n \cdot \bar{v}\, dA + \int_V \rho \bar{f} \cdot \bar{v}\, dV$$

$$\dot{W} = \int_A t_i v_i\, dA + \int_V \rho f_i v_i\, dV \qquad (3.25)$$

Sustituyendo en la integral de superficie el valor de $t_i = T_{ij} n_j$, y aplicando el teorema de Gauss, se tiene:

$$\int_A T_{ij} n_j v_i\, dA = \int_V \frac{\partial T_{ij} v_i}{\partial x_j}\, dV = \int_V \left[v_i \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) \right]_W dV \qquad (3.26)$$

Sustituyendo la ecuación (3.26) en la (3.25), se llega a:

$$\dot{W} = \int_v \left[v_i \left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) + T_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right] dV \tag{3.27}$$

Obsérvese que el término entre paréntesis, por la ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento, resulta igual a:

$$\left(\frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i \right) = \rho \frac{dv_i}{dt} \tag{3.28}$$

De esta manera, la rapidez de variación del trabajo $\dot{W}$ es igual a:

$$\dot{W} = \int_v \rho v_i \frac{dv_i}{dt} dV + \int_v T_{ij} v_{i,j} dV$$

El primer término del segundo miembro de la ecuación se puede expresar como:

$$\dot{W} = \frac{d}{dt} \int_v \frac{1}{2} \rho v_i v_i dV + \int_v T_{ij} v_{i,j} dV \tag{3.29}$$

Por otra parte:

$$v_{i,j} = D_{ij} + V_{ij} \tag{3.30}$$

siendo D_{ij} el *tensor rapidez de deformación* y V_{ij} el *tensor vorticidad*. Este último es un tensor antisimétrico, esto es, $V_{ij} = -V_{ij}$.

El producto tensorial que aparece en la segunda integral de la ecuación (3.29) es:

$$T_{ij}\left(D_{ij} + V_{ij}\right) = T_{ij} D_{ij} + T_{ij} V_{ij} \tag{3.31}$$

En la ecuación (3.31), el término $T_{ij}\, V_{ij}$ es igual a cero (contracción del producto tensorial de un tensor simétrico y otro antisimétrico), por lo que:

$$T_{ij}\, v_{i,j} = T_{ij}\, D_{ij} \tag{3.32}$$

De esta manera, la ecuación (3.29) queda como:

$$\dot{W} = \frac{d}{dt}\int_V \frac{1}{2}\,\rho v_i\, v_i\, dV + \int_V T_{ij}\, D_{ij}\, dV \tag{3.33}$$

La primera integral de esta última ecuación representa la *energía cinética del sistema*, en tanto que la segunda representa la *rapidez de variación de la energía interna total*, por lo tanto:

$$\dot{W} = \dot{K} + \dot{U} \tag{3.34}$$

El principio de la conservación de la energía establece que la variación de la energía cinética más la energía interna por unidad de tiempo es igual a la variación del trabajo más cualquier otra energía suministrada o extraída por unidad de tiempo en el sistema termomecánico.

Definiendo al vector $\overline{q}$ como flujo de calor por unidad de área y tiempo en el fenómeno de conducción calorífica y a r como la constante de radiación de calor por unidad de masa y tiempo, entonces la *rapidez de aumento de la cantidad de calor en el medio* se puede expresar como:

$$\dot{Q} = -\int_A \overline{q}\cdot\overline{n}\, dA + \int_V \rho r\, dV \tag{3.35}$$

Para un medio continuo termomecánico es costumbre expresar la variación de la energía interna total por unidad de tiempo como una

función de la energía específica interna u por unidad de tiempo, por lo que $\dot{U}$ queda como:

$$\dot{U} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u \, dV = \int_V \rho \dot{u} \, dV \tag{3.36}$$

Aplicando el principio de la conservación de la energía, se tiene:

$$\dot{K} + \dot{U} = \dot{W} + \dot{Q} \tag{3.37}$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.33), (3.35) y (3.36) en (3.37), se obtiene:

$$\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{1}{2} \rho v_i \, v_i \, dV + \rho u_i \right) dV = \frac{d}{dt} \int_V \frac{1}{2} \rho v_i \, v_i \, dV + \int_V T_{ij} \, D_{ij} \, dV$$

$$- \int_A \overline{q} \cdot \overline{n} \, dA + \int_V \rho r \, dV \tag{3.38}$$

Tomando en cuenta el teorema de Gauss, el integrando $\overline{q} \cdot \overline{n} \, dA$ se puede expresar como:

$$\int_A q_j \, n_j \, dA = \int_V \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \, dV \tag{3.39}$$

De esta manera, la ecuación (3.38) queda como:

$$\int_V \left(\frac{\partial q_j}{\partial x_j} + \rho \frac{du}{dt} - T_{ij} \, D_{ij} - \rho r \right) dV = 0 \tag{3.40}$$

Para un volumen arbitrario V dentro del medio continuo, el integrando de la ecuación (3.40) debe ser nulo, por lo que:

$$\rho \frac{du}{dt} = T_{ij} D_{ij} + \rho r - \frac{\partial q_j}{\partial x_j} \tag{3.41}$$

Esta última ecuación se conoce como la *ecuación de la conservación de la energía* o *primera ley de la termodinámica*.

3.5 Segunda ley de la termodinámica: desigualdad de Clausius-Duhem

Desde el punto de vista termodinámico la entropía de un medio continuo es una magnitud física que mide la parte de la energía no empleada para realizar trabajo mecánico y se expresa generalmente como el cociente entre el calor cedido por el medio continuo y su temperatura absoluta.

La segunda ley de la termodinámica establece que la variación con respecto al tiempo de la entropía total, s, en un medio continuo de volumen V, siempre es mayor que la suma del flujo de entropía que entra a través de la superficie A del medio, más la entropía creada interiormente a causa del propio cuerpo.

Esta ley se puede expresar desde un punto de vista matemático en forma integral como:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho s \, dV \geq \int_V \rho \frac{r}{\theta} \, dV - \int_A \frac{q}{\theta} \, dA \tag{3.42}$$

siendo θ una función de estado denominada *temperatura absoluta*.

En la ecuación (3.42), el signo "=" corresponde a procesos reversibles; ">", a procesos irreversibles, y el signo "<" indica que el proceso es no factible.

Tomando en cuenta los principios generales de la mecánica, la respuesta termomecánica de un medio continuo, constituido de un número finito de partículas materiales, queda descrita por ocho funciones que dependen de la posición de las partículas materiales y del tiempo. Ellas son:

- Posición espacial de las partículas materiales: $\overline{\delta}_i = x'(\overline{x}, t) - x_i$
- Tensor esfuerzo: $T_{ij} = T_{ij}(\overline{x}, t)$
- Fuerzas de cuerpo por unidad de masa: $f_i = f_i(\overline{x}, t)$
- Energía interna específica: $u = u(\overline{x}, t)$
- Vector flujo de calor: $q_i = q_i(\overline{x}, t)$
- Calor suministrado por unidad de masa: $r = r(\overline{x}, t)$
- Entropía total: $s = s(\overline{x}, t)$
- Temperatura absoluta (positiva): $\theta = \theta(\overline{x}, t)$

Anexo 3.1 Derivada material o sustancial

La derivada material es una descripción temporal de alguna cantidad física (densidad, calor, etc.) de un volumen finito de un medio continuo, constituido de un sistema de partículas materiales en función del tiempo y del espacio, sujeto a un campo de velocidades.

Consideremos $I(t)$ la integral de volumen de una función continua y derivable $\varphi(\overline{x}, t)$ definida sobre un dominio espacial $V(\overline{x}, t)$, ocupado por un sistema de partículas materiales. De esta manera:

$$I(t) = \int_V \varphi(\bar{x}, t)\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad \text{(A3.1)}$$

La rapidez de variación de $I(t)$ con respecto al tiempo, se escribe como $\frac{DI}{Dt}$, y se denomina la derivada material.

Tomando en cuenta la figura (A3.1), para un tiempo $t = 0$, el medio continuo tiene un volumen V, y una superficie envolvente A, en tanto que para un tiempo $t + dt$ su volumen será V' y su superficie envolvente A'. La derivada material se define en este caso como:

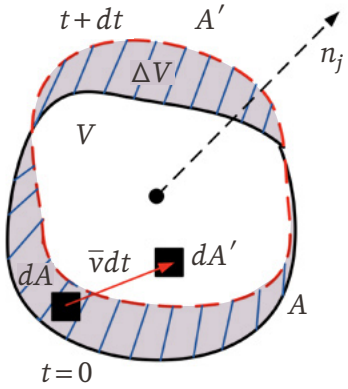


Figura A3.1 Definición de derivada material

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \left[\int_{V'} \varphi(\bar{x}, t + dt)\, dV - \int_V \varphi(\bar{x}, t)\, dV \right] \qquad \text{(A3.2)}$$

Tomando en cuenta que $V' = V + \Delta V$, la ecuación (A3.2) se puede escribir como:

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \left[\int_V \varphi(\bar{x}, t + dt)\, dV + \int_{\Delta V} \varphi(\bar{x}, t + dt)\, dV - \int_V \varphi(\bar{x}, t)\, dV \right] \qquad \text{(A3.3)}$$

Reordenando términos en la ecuación (A3.3), se tiene:

$$\frac{DI}{Dt} = \lim_{dt \to 0} \left[\frac{d}{dt} \int_V \left\{ \varphi(\bar{x}, t+dt) - \varphi(\bar{x}, t) \right\} dV + \frac{d}{dt} \int_{\Delta V} \varphi(\bar{x}, t+dt)\, dV \right] \qquad \text{(A3.4)}$$

En la ecuación (A3.4) el primer término del segundo miembro de la ecuación representa:

$$\lim_{dt \to 0} \left[\frac{d}{dt} \int_V \left\{ \varphi(\bar{x}, t+dt) - \varphi(\bar{x}, t) \right\} dV \right] = \int_V \frac{\partial \varphi(\bar{x}, t)}{\partial t} dV \qquad \text{(A3.5)}$$

Cuya integración nos dará la contribución a $\frac{DI}{Dt}$.

El diferencial de volumen dV del segundo término del segundo miembro de la ecuación (A3.4), resulta igual $dV = n_j v_j dA dt$, el cual representa el volumen barrido por las partículas materiales que ocupan un dA en la frontera A, en el intervalo de tiempo dt, las cuales se desplazaron a la frontera A' una distancia $v_i dt$ (figura (A3.1)), por lo que la ecuación (A3.4), toma la forma:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_V \frac{\partial \varphi(\bar{x}, t)}{\partial t} dV + \int_A \varphi(\bar{x}, t)\, v_j\, n_j\, dA \qquad \text{(A3.6)}$$

Transformando el segundo término del segundo miembro de la ecuación (A3.6) a una integral de volumen, y tomando en cuenta que:

$$\operatorname{div}\left(\varphi(\bar{x}, t)\, \bar{v}\right) = \varphi(\bar{x}, t) \operatorname{div} \bar{v} + \operatorname{grad} \varphi(\bar{x}, t) \cdot \bar{v} \qquad \text{(A3.7)}$$

Se tiene:

$$\int_A \varphi(\bar{x}, t) v_j\, n_j\, dA = \int_V \left\{ \varphi(\bar{x}, t) \operatorname{div} \bar{v} + \operatorname{grad} \varphi(\bar{x}, t) \cdot \bar{v} \right\} dV \qquad \text{(A3.8)}$$

Así la derivada material $\frac{DI}{Dt}$ queda como:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_V \left\{ \frac{\partial \varphi(\bar{x}, t)}{\partial t} + \varphi(\bar{x}, t) \operatorname{div} \bar{v} + \operatorname{grad} \varphi(\bar{x}, t) \cdot \bar{v} \right\} dV \qquad \text{(A3.9)}$$

La ecuación (A3.9) se puede simplificar aún más si se toma en cuenta que:

$$\frac{\partial \varphi(\bar{x}, t)}{\partial t} + \operatorname{grad} \varphi(\bar{x}, t) \cdot \bar{v} = \frac{d\varphi(\bar{x}, t)}{dt} \qquad \text{(A3.10)}$$

Finalmente, la ecuación (A3.9) toma la forma:

$$\frac{DI}{Dt} = \int_V \left\{ \frac{d\varphi(\bar{x}, t)}{dt} + \varphi(\bar{x}, t) \operatorname{div} \bar{v} \right\} dV \qquad \text{(A3.11)}$$

CAPÍTULO

4 Elasticidad lineal

Introducción

La *elasticidad lineal* es la parte de la mecánica de los medios continuos que estudia el comportamiento esfuerzo-deformación de sólidos cuyas propiedades son independientes del tiempo. Se dice que un material es elástico cuando al ser sometido a ciertas solicitaciones que provocan deformaciones en el mismo, el material regresa a su condición original una vez que las solicitaciones son eliminadas.

Si los esfuerzos y las deformaciones están relacionados linealmente se asume que el material además de ser elástico es lineal. Es común también asumir que el material es *homogéneo* (sus propiedades son las mismas en cualquier punto) e *isótropo* (sus propiedades son independientes de la dirección adoptada), con lo cual las ecuaciones constitutivas de los *materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos* se simplifican considerablemente.

En este capítulo se desarrollan las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos y se presenta el procedimiento de funciones de esfuerzo y funciones de desplazamientos para resolver algunos problemas elásticos.

4.1 Planteamiento matemático para definir las relaciones constitutivas en un continuo cualquiera

Para establecer la relación entre las fuerzas que actúan en un medio continuo y los desplazamientos que provocan, es necesario seguir la siguiente secuencia:

$$\text{Fuerzas} \rightarrow T_{ij} \leftrightarrow E_{ij} \rightarrow \text{Desplazamientos}$$
$$\downarrow$$
$$\text{Relaciones constitutivas}$$

Considérese que el estado de deformación y de esfuerzo de un medio continuo corresponde al estado A o inicial (figura (4.1)), dado por:

$$\left[E_{ij}\right]_A = 0 \; ; \; \left[T_{ij}\right]_A = 0$$

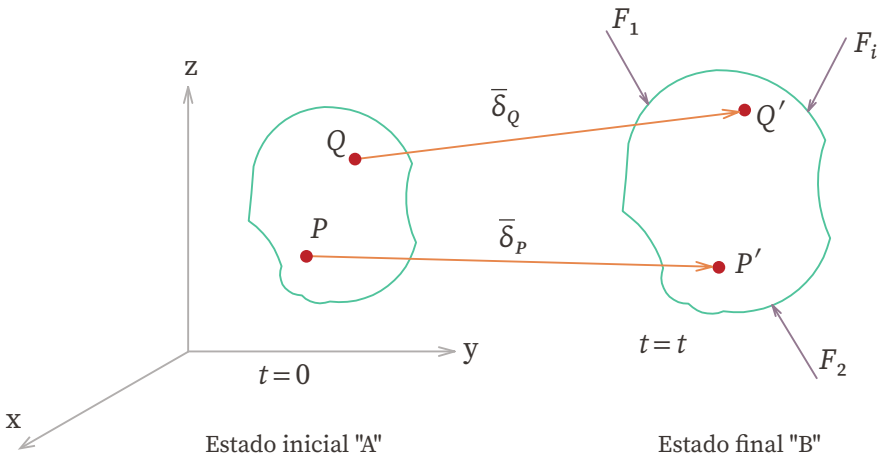


FIGURA 4.1 Relaciones entre esfuerzos y deformaciones en un medio continuo elástico lineal

Al aplicar las fuerzas $\{F_i\}$ se establece un campo de desplazamientos $\overline{\delta} = u\overline{i} + v\overline{j} + w\overline{k}$, el cual genera en cada punto del medio continuo un tensor deformación $[E_{ij}]_B$ y este a su vez genera un tensor esfuerzo $[T_{ij}]_B$.

$$[E_{ij}]_B \neq 0 \;\; ; \;\; [T_{ij}]_B \neq 0$$

Sabemos que:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \;\; ; \;\; [E_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Ya que físicamente existe relación entre los tensores E_{ij} y T_{ij}, se puede escribir:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \phi_1(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \sigma_{yy} &= \phi_2(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \sigma_{zz} &= \phi_3(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{xy} &= \psi_1(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{xz} &= \psi_2(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \\ \tau_{yz} &= \psi_3(\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}) \end{aligned} \qquad (4.1)$$

Las ecuaciones (4.1) definen las relaciones constitutivas de los medios continuos elásticos-lineales, siendo las funciones ϕ y ψ continuas y derivables.

Las relaciones constitutivas que se seleccionan en la mecánica del medio continuo son relaciones probadas experimentalmente, que permiten describir de manera razonable el comportamiento real de los materiales.

Se considera que el tiempo transcurrido entre el estado A y el estado B es una cantidad pequeña, por lo que sería posible establecer, siguiendo las ideas de continuidad que:

$$
\begin{aligned}
\left[\sigma_{xx}\right]_B &= \left[\sigma_{xx}\right]_A + d\sigma_{xx} \\
\left[\sigma_{yy}\right]_B &= \left[\sigma_{yy}\right]_A + d\sigma_{yy} \\
\left[\sigma_{zz}\right]_B &= \left[\sigma_{xx}\right]_A + d\sigma_{xx} \\
\left[\tau_{xy}\right]_B &= \left[\tau_{xy}\right]_A + d\tau_{xy} \\
\left[\tau_{xz}\right]_B &= \left[\tau_{xz}\right]_A + d\tau_{xz} \\
\left[\tau_{yz}\right]_B &= \left[\tau_{yz}\right]_A + d\tau_{yz}
\end{aligned}
\qquad (4.2)
$$

Desarrollando las diferenciales totales de las ecuaciones (4.2), se tiene:

$$\left[\sigma_{xx}\right]_B = \left[\sigma_{xx}\right]_A + \frac{\partial \phi_1}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \phi_1}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$\left[\sigma_{yy}\right]_B = \left[\sigma_{xx}\right]_A + \frac{\partial \phi_2}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \phi_2}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$[\sigma_{zz}]_B = [\sigma_{xx}]_A + \frac{\partial \phi_3}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \phi_3}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$[\tau_{xy}]_B = [\tau_{xy}]_A + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \psi_1}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$[\tau_{xz}]_B = [\tau_{xz}]_A + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \psi_2}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

$$[\tau_{yz}]_B = [\tau_{yz}]_A + \frac{\partial \psi_3}{\partial \varepsilon_{xx}} d\varepsilon_{xx} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \varepsilon_{yy}} d\varepsilon_{yy} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \varepsilon_{zz}} d\varepsilon_{zz} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \gamma_{xy}} d\gamma_{xy} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \gamma_{xz}} d\gamma_{xz} + \frac{\partial \psi_3}{\partial \gamma_{yz}} d\gamma_{yz}$$

Estas últimas ecuaciones pueden ser escritas de la siguiente manera:

$$[\sigma_{xx}]_B = [\sigma_{xx}]_A + C_{11}\varepsilon_{xx} + C_{21}\varepsilon_{yy} + C_{31}\varepsilon_{zz} + C_{41}\gamma_{xy} + C_{51}\gamma_{xz} + C_{61}\gamma_{yz}$$

$$[\sigma_{yy}]_B = [\sigma_{yy}]_A + C_{12}\varepsilon_{xx} + C_{22}\varepsilon_{yy} + C_{32}\varepsilon_{zz} + C_{42}\gamma_{xy} + C_{52}\gamma_{xz} + C_{62}\gamma_{yz}$$

$$[\sigma_{zz}]_B = [\sigma_{xx}]_A + C_{13}\varepsilon_{xx} + C_{23}\varepsilon_{yy} + C_{33}\varepsilon_{zz} + C_{43}\gamma_{xy} + C_{53}\gamma_{xz} + C_{63}\gamma_{yz} \qquad (4.3)$$

$$[\tau_{xy}]_B = [\tau_{xy}]_A + C_{14}\varepsilon_{xx} + C_{24}\varepsilon_{yy} + C_{34}\varepsilon_{zz} + C_{44}\gamma_{xy} + C_{54}\gamma_{xz} + C_{64}\gamma_{yz}$$

$$[\tau_{xz}]_B = [\tau_{xz}]_A + C_{15}\varepsilon_{xx} + C_{25}\varepsilon_{yy} + C_{35}\varepsilon_{zz} + C_{45}\gamma_{xy} + C_{55}\gamma_{xz} + C_{65}\gamma_{yz}$$

$$[\tau_{yz}]_B = [\tau_{yz}]_A + C_{16}\varepsilon_{xx} + C_{26}\varepsilon_{yy} + C_{36}\varepsilon_{zz} + C_{46}\gamma_{xy} + C_{56}\gamma_{xz} + C_{66}\gamma_{yz}$$

Obsérvese que en las expresiones planteadas (4.3) aparecen 36 operadores diferenciales C_{ij} que representan las constantes elásticas del material.

$$\left[C_{ij}\right]=\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & C_{41} & C_{51} & C_{61} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & C_{42} & C_{52} & C_{62} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{43} & C_{53} & C_{63} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{54} & C_{64} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{65} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

El desarrollo anterior indica que para definir a $\left[T_{ij}\right]_B$ es necesario conocer los tensores $\left[T_{ij}\right]_A$, $\left[E_{ij}\right]_B$ y los 36 operadores deferenciales C_{ij}.

Estas relaciones indican que es posible seguir la siguiente secuencia para conocer el vector de fuerzas externas $\left\{F_i\right\}$ que dio origen al campo de desplazamientos $\overline{\delta}$.

$$\overline{\delta} \rightarrow \left[E_{ij}\right]_B \rightarrow \text{Relaciones constitutivas} \rightarrow \left[T_{ij}\right]_B \rightarrow \left\{F_i\right\}$$

Para definir a estos 36 operadores diferenciales es necesario analizar pruebas experimentales en diversos materiales y observar las características de su respuesta, esta deberá compararse con formulaciones teóricas para predecir dicha respuesta con suficiente aproximación.

Cabe señalar que cuando existe una función energía de deformación para el continuo elástico, esto es, cuando los elementos del tensor esfuerzo se pueden obtener derivando la función energía de deformación respecto a los elementos del tensor deformación, entonces $C_{ij}=C_{ji}$, de esta manera la matriz de operadores diferenciales se reduce a 21. Los materiales elásticos a los que se les puede asociar una función energía de deformación se denominan *hiperelásticos*.

Si el continuo elástico tiene tres planos de simetría elástica mutuamente ortogonales, se le denomina material *ortotrópico*. En este caso la matriz

constantes elásticas se reduce a 12, y si $C_{ij} = C_{ji}$ el número de elementos independientes es 9.

$$\left[C_{ij}\right] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

En ingeniería es común establecer algunas hipótesis que permiten simplificar las formulaciones matemáticas de los materiales elásticos. Las más comunes son:

1° El material que ocupa el continuo es homogéneo. Sólo existirán seis relaciones esfuerzo-deformación.
2° El material es isótropo. Las constantes elásticas que representan al material se reducen a dos: el módulo de elasticidad, E, y la relación de Poisson ν.
3° Las direcciones principales de esfuerzos coinciden con las direcciones principales de deformación.

Tomando en cuenta las hipótesis anteriores, supongamos que en un punto del medio continuo se conocen los tensores esfuerzo y deformación en un sistema de referencia principal:

$$\left[T_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}; \quad \left[E_{ij}\right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}$$

Para este caso particular, las relaciones constitutivas se reducen a:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon_2 + C_{31}\varepsilon_3$$

$$\sigma_2 = C_{12}\varepsilon_1 + C_{22}\varepsilon_2 + C_{32}\varepsilon_3 \qquad (4.6)$$

$$\sigma_3 = C_{13}\varepsilon_1 + C_{23}\varepsilon_2 + C_{33}\varepsilon_3$$

Obsérvese que la tercera hipótesis reduce a nueve el número de operadores diferenciales necesarios.

Haciendo una rotación de los ejes coordenados 2 y 3 de 90°, respecto al eje 1, se obtiene un nuevo sistema de referencia $1'$, $2'$, $3'$, con $1' = 1$ (eje de rotación). Cambiando los ejes 2 y 3 por $3'$ y $2'$, respectivamente, σ_1 (ecuaciones (4.6)) se puede expresar como:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon_{3'} + C_{31}\varepsilon_{2'} \qquad (4.7)$$

Debido a que la respuesta del material debe ser independiente del marco de referencia, se debe tener que:

$$C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon_2 + C_{31}\varepsilon_3 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}\varepsilon_{3'} + C_{31}\varepsilon_{2'}$$

$$\Rightarrow C_{21} = C_{31} \qquad (4.8)$$

Por lo anterior, σ_1 queda como:

$$\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1 + C_{21}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

$$\sigma_1 = (C_{11} - C_{21})\,\varepsilon_1 + C_{21}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \qquad (4.9)$$

llamando a:

$$C_{11} - C_{21} = 2G \quad \text{y} \quad C_{21} = \lambda \tag{4.10}$$

y tomando en cuenta que $J_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, entonces la ecuación (4.7) resulta:

$$\sigma_1 = 2G\varepsilon_1 + \lambda J_1 \tag{4.11}$$

En la ecuación (4.11) λ es conocida como la constante de Lamé y G el módulo de rigidez al cortante.

Para σ_2 y σ_3, se tiene (ecuaciones 4.6):

$$\sigma_2 = 2G\varepsilon_2 + \lambda J_1 \tag{4.12}$$

$$\sigma_3 = 2G\varepsilon_3 + \lambda J_1 \tag{4.13}$$

Tomando en cuenta la tercera hipótesis planteada, las ecuaciones (4.11) a (4.13) se pueden generalizar como:

$$\sigma_n = 2G\varepsilon_n + \lambda J_1 \tag{4.14}$$

De esta manera, las relaciones elásticas esfuerzo-deformación de continuos homogéneos, isótropos y con coincidencia de direcciones principales de esfuerzos y deformaciones, se reduce a la búsqueda de dos operadores diferenciales λ y G en lugar de 36.

4.2 Relaciones tensoriales de los materiales elásticos lineales en un marco de referencia principal

Considérese que en un punto de un medio continuo se establece el tensor deformación:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = E_v + E_0 \tag{4.15}$$

El tensor esfuerzo correspondiente, tomando en cuenta la ecuación (4.12), resulta igual a:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda J_1 + 2G\varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda J_1 + 2G\varepsilon_3 \end{bmatrix} = T_v + T_0 \tag{4.16}$$

Estas expresiones pueden ser ligeramente transformadas, descomponiendo los tensores esfuerzo y deformación en sus componentes volumétrica y desviadora, esto es:

$$E_v = \frac{J_1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix}$$

Ahora, las componentes del tensor T_{ij} son:

$$T_v = \begin{bmatrix} \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\lambda+2G}{3} J_1 \end{bmatrix}$$

$$T_0 = \begin{bmatrix} 2G\left(\varepsilon_1 - \frac{J_1}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 2G\left(\varepsilon_2 - \frac{J_1}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 2G\left(\varepsilon_3 - \frac{J_1}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Analizando las componentes de ambos tensores, y haciendo $(3\lambda + 2G) = 3K$; K recibe el nombre de *módulo de deformación volumétrico.*

$$[T_v] = 3K\,[E_v] \qquad (4.17)$$

$$[T_o] = 2G\,[E_o] \qquad (4.18)$$

Las ecuaciones (4.17) y (4.18) muestran una relación tensorial simple entre las componentes volumétrica y desviadora de los tensores T_{ij} y E_{ij}, a través de las constantes K y G.

4.3 Ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos en un marco de referencia cartesiano

Supongamos que en un punto del medio continuo se establecen los tensores E_{ij} y T_{ij} en un marco de referencia cartesiano, esto es:

$$E_{ij}=\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}; \quad T_{ij}=\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Se establecerá la forma que adquieren las relaciones esfuerzo-deformación entre ambos tensores en un marco de referencia cartesiano.

Para ello calculemos el esfuerzo normal σ_n, asociado a un plano cuya normal es el vector unitario $\bar{n}$ y la deformación longitudinal ε_l, asociada a la dirección dada por el vector unitario $\bar{n}$ (hipótesis 3), por lo que $\varepsilon_l=\varepsilon_n$. Una vez hecho esto, se aplicará la relación constitutiva previamente derivada para materiales isótropos (ecuación (4.14)).

Por definición: $\bar{t}_n=\left[T_{ij}\right]\left|\,\bar{n}\,\right|$

Desarrollando:

$$\bar{t}_n=\left(\sigma_{xx}\cos\alpha+\tau_{yx}\cos\beta+\tau_{zx}\cos\gamma\right)\bar{i}+\left(\tau_{xy}\cos\alpha+\sigma_{yy}\cos\beta+\tau_{zy}\cos\gamma\right)\bar{j}$$

$$+\left(\tau_{xz}\cos\alpha+\tau_{yz}\cos\beta+\sigma_{zz}\cos\gamma\right)\bar{k} \qquad (4.19)$$

El esfuerzo normal se calcula como:

$$\sigma_n = \bar{t}_n \cdot \bar{n} = \sigma_{xx}\cos^2\alpha + \sigma_{yy}\cos^2\beta + \sigma_{zz}\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+ 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \qquad (4.20)$$

De manera análoga, se puede establecer para la deformación normal ε_n:

$$\varepsilon_n = \varepsilon_{xx}\cos^2\alpha + \varepsilon_{yy}\cos^2\beta + \varepsilon_{zz}\cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+ \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha \qquad (4.21)$$

Aplicando la ecuación (4.14):

$$\sigma_n = \lambda J_1 + 2G\varepsilon_n,$$

se tiene:

$$\sigma_{xx}\cos^2\alpha + \sigma_{yy}\cos^2\beta + \sigma_{zz}\cos^2\gamma + 2\tau_{xy}\cos\alpha\cos\beta$$

$$+ 2\tau_{yz}\cos\beta\cos\gamma + 2\tau_{zx}\cos\gamma\cos\alpha$$

$$= \lambda J_1\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma\right) + 2G\left(\varepsilon_{xx}\cos^2\alpha + \varepsilon_{yy}\cos^2\beta\right.$$

$$\left. + \varepsilon_{zz}\cos^2\gamma + \gamma_{xy}\cos\alpha\cos\beta + \gamma_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \gamma_{zx}\cos\gamma\cos\alpha\right)$$

Para que se satisfaga la igualdad planteada los coeficientes, en términos de los cosenos directores, deben cumplir que:

$$\sigma_{xx} = \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{xx} \;; \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{yy} \quad ; \qquad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda J_1 + 2G\varepsilon_{zz} \quad ; \qquad \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \tag{4.22}$$

Estas ecuaciones reciben el nombre de ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos.

Las ecuaciones (4.22) se pueden expresar en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda+2G & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda+2G & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda+2G & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Estas ecuaciones toman la siguiente forma:

$$[\sigma] = [C][\varepsilon] \tag{4.24}$$

siendo

$[\sigma]$: matriz de esfuerzos

$[\varepsilon]$: matriz de deformaciones

$[C]$: matriz de constantes elásticas del medio

Las ecuaciones (4.23) pueden ser escritas en notación índice como:

$$T_{ij} = \lambda\delta_{ij} E_{kk} + 2G E_{ij} \tag{4.25}$$

Siendo δ_{ij} la *delta de Kronecker* (tensor de orden 2) y los subíndices i, j, k variando de 1 a 3.

Para expresar las deformaciones en función de los esfuerzos, es necesario invertir la matriz de constantes elásticas y operar matricialmente, esto es:

$$[\varepsilon] = [C]^{-1}[\sigma] \tag{4.26}$$

En lugar de buscar invertir la matriz de constantes elásticas se puede seguir el siguiente procedimiento alternativo.

De la ecuación (4.22), los esfuerzos normales se pueden escribir como:

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= (\lambda + 2G)\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{yy} &= \lambda\varepsilon_{xx} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{yy} + \lambda\varepsilon_{zz} \\
\sigma_{zz} &= \lambda\varepsilon_{xx} + \lambda\varepsilon_{yy} + (\lambda + 2G)\varepsilon_{zz}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Resolviendo el sistema para ε_{xx}, ε_{yy}, ε_{zz} empleando el método de Cramer, se tiene que el determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\Delta = \begin{vmatrix} (\lambda+2G) & \lambda & \lambda \\ \lambda & (\lambda+2G) & \lambda \\ \lambda & \lambda & (\lambda+2G) \end{vmatrix} = \lambda + 2G \begin{vmatrix} (\lambda+2G) & \lambda \\ \lambda & (\lambda+2G) \end{vmatrix}$$

$$+(-\lambda) \begin{vmatrix} \lambda & \lambda \\ \lambda & (\lambda+2G) \end{vmatrix} + \lambda \begin{vmatrix} \lambda & (\lambda+2G) \\ \lambda & \lambda \end{vmatrix}$$

$$\Delta=(\lambda+2G)\left[(\lambda+2G)^2-\lambda^2\right]-\lambda\left[\lambda(\lambda+2G)-\lambda^2\right]+\lambda\left[\lambda^2-\lambda(\lambda+2G)\right]$$

$$\Delta=(\lambda+2G)(4G\lambda+4G^2)-\lambda^3-2\lambda^2G+\lambda^3+\lambda^3-\lambda^3-2\lambda^2G$$

$$\Delta=4G\lambda^2+4G^2\lambda+8G^2\lambda+8G^3-\lambda^3-2\lambda^2G+\lambda^3+\lambda^3-\lambda^3-2\lambda^2G$$

$$\Delta=12G^2\lambda+8G^3=4G^2\left[3\lambda+2G\right] \qquad (4.28)$$

En consecuencia:

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix}\sigma_{xx} & \lambda & \lambda\\ \sigma_{yy} & (\lambda+2G) & \lambda\\ \sigma_{zz} & \lambda & (\lambda+2G)\end{vmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{\Delta}\left[\sigma_{xx}\left\{(\lambda+2G)(\lambda+2G)-\lambda^2\right\}-\lambda\left\{\sigma_{yy}(\lambda+2G)-\lambda\sigma_{zz}\right\}\right.$$

$$\left.+\lambda\left\{(\sigma_{yy}\lambda)-(\lambda+2G)(\sigma_{zz})\right\}\right]$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{\Delta}\left[\sigma_{xx}(4\lambda G+4G^2)-\sigma_{yy}\lambda^2-2\sigma_{yy}\lambda G+\lambda^2\sigma_{zz}\right.$$

$$\left.+\sigma_{yy}\lambda^2-\sigma_{zz}\lambda^2-2\sigma_{zz}\lambda G\right]$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{\Delta}\left[\sigma_{xx}(4G)(\lambda+G)-2\lambda G(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right]$$

$$\varepsilon_{xx}=\frac{(4G)(\lambda+G)}{4G^2\left[3\lambda+2G\right]}\left[\sigma_{xx}-\frac{2\lambda G}{(4G)(\lambda+G)}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right]$$

Haciendo:

$$\frac{1}{E}=\frac{(4G)(\lambda+G)}{4G^2[3\lambda+2G]}\;;\quad \nu=\frac{2\lambda G}{(4G)(\lambda+G)}$$

Simplificando:

$$\frac{1}{E}=\frac{(\lambda+G)}{G[3\lambda+2G]}\;;\quad \nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+G)} \tag{4.29}$$

Las ecuaciones (4.29) permiten relacionar las constantes elásticas primarias E y ν con la constante de Lamé λ y el módulo de rigidez G.

$$\varepsilon_{xx}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{xx}-\nu(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})\right] \tag{4.30}$$

De manera similar, para ε_{yy} y ε_{zz}:

$$\varepsilon_{yy}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{yy}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{zz})\right] \tag{4.31}$$

$$\varepsilon_{zz}=\frac{1}{E}\left[\sigma_{zz}-\nu(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})\right] \tag{4.32}$$

Las ecuaciones (4.30), (4.31) y (4.32) son las leyes generalizadas de Hooke para relacionar deformaciones unitarias con esfuerzos normales.

La relación entre los esfuerzos cortantes τ y las deformaciones angulares γ queda como:

$$\gamma_{xy}=\frac{\tau_{xy}}{G} \tag{4.33}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \tag{4.34}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \tag{4.35}$$

En notación índice, las ecuaciones (4.30) a (4.35), quedan representadas de la siguiente manera:

$$E_{ij} = \frac{-\lambda}{2G\left(3\lambda + 2G\right)} \delta_{ij} T_{kk} + \frac{1}{2G} T_{ij} \tag{4.36}$$

Con los subíndices i , j y k variando de 1 a 3.

P Problema 4.1

En el continuo que se muestra en la figura (4.2) se establece el tensor:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Calcule los elementos del tensor deformación y de una interpretación física a las constantes elásticas E y ν.

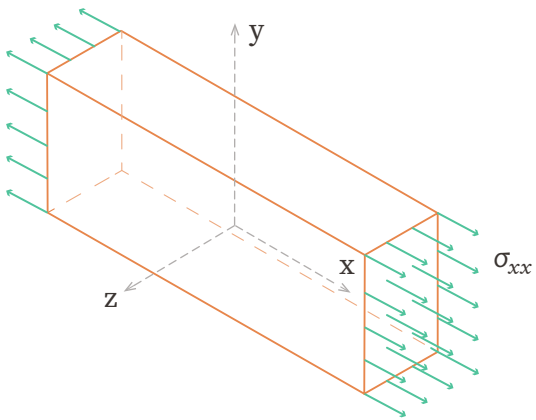


FIGURA 4.2
Interpretación física de las constantes E, ν

El tensor de deformaciones unitarias quedará definido por:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

Aplicando las relaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, se tiene:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}; \quad \varepsilon_{yy} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}; \quad \varepsilon_{zz} = -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Así, el tensor deformación E_{ij} queda:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \frac{\sigma_{xx}}{E} \end{bmatrix}$$

Dado que:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx}$$

y haciendo $\varepsilon_{xx} = x$; $y = \sigma_{xx} \Rightarrow y = mx$, siendo la pendiente $m = E$.

La constante E representa la pendiente del diagrama esfuerzo-deformación de una barra prismática sometida a tensión uniaxial y representa el *módulo de elasticidad* o *módulo de Young* del material. Esta constante

elástica es una característica del material y tiene las mismas unidades que un esfuerzo $\left[F/L^2\right]$.

El módulo E implica que el diagrama esfuerzo-deformación es lineal e independiente del tiempo. En caso contrario, diremos que el material es inelástico y esto conlleva a que las relaciones constitutivas del continuo deben involucrar operadores diferenciales respecto al tiempo.

Analicemos ahora la interpretación física de ν.

Del tensor E_{ij} se tiene que:

$$\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = \frac{-\nu\dfrac{\sigma_{xx}}{E}}{\dfrac{\sigma_{xx}}{E}} = -\nu \quad ; \qquad \nu = -\frac{\varepsilon_{yy}}{\varepsilon_{xx}} = -\frac{\varepsilon_{zz}}{\varepsilon_{xx}}$$

donde ν resulta ser la relación entre la deformación unitaria transversal y la longitudinal en valor absoluto y recibe el nombre de *relación de Poisson*. Teóricamente esta constante elástica toma valores entre 0 y 0.5, siendo el segundo valor el que corresponde a un material incompresible. Haciendo:

$$\varepsilon_{xx} = x \; ; \quad \varepsilon_{yy} = y \; ; \quad y = -\nu x$$

La relación de Poisson ν resulta ser constante sólo cuando la relación entre ε_{xx} y ε_{yy} es una constante.

4.4 Energía de deformación elástica para un estado uniaxial de esfuerzos

Supongamos que la curva esfuerzo-deformación para un material elástico lineal, sometido a un estado de esfuerzos uniaxial, es como se muestra en la figura (4.3).

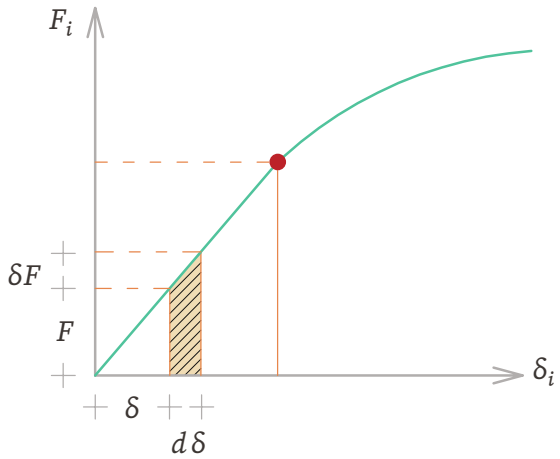


FIGURA 4.3
Definición de energía de deformación elástica

La energía que un cuerpo absorbe como resultado de su deformación bajo cierta carga se llama *energía de deformación* (W). Esta se puede expresar como:

$$W = \int_0^{\delta} F\, d\delta \tag{4.37}$$

La energía de deformación por unidad de volumen o densidad de energía U, se puede expresar como:

$$U = \frac{1}{V} \int_0^{\delta} F\, d\delta \tag{4.38}$$

Para una partícula elemental de un medio continuo de volumen $dV = dx\,dy\,dz$ y asumiendo que la fuerza se aplica en la dirección x, se tiene:

$$U = \int_0^{\delta_x} \frac{F_x\, d\delta_x}{dx\,dy\,dz} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx}\, d\varepsilon_{xx} = \int_0^{\varepsilon_{xx}} E\,\varepsilon_{xx}\, d\varepsilon_{xx}$$

Integrando se obtiene:

$$U = \frac{\sigma_{xx}\,\varepsilon_{xx}}{2} = \frac{\sigma_{xx}^2}{2E} \tag{4.39}$$

El área bajo la parte lineal de la curva uniaxial $\sigma - \varepsilon$ es una medida de la capacidad del material para almacenar energía elástica (figura (4.4)). Esta medida se llama *módulo de resiliencia* (R) y se puede calcular como:

$$R = \int_0^{\varepsilon_{LE}} \sigma\, d\varepsilon = \frac{1}{2}\,\sigma_{LE}\,\varepsilon_{LE} = \frac{\sigma_{LE}^2}{2E} \tag{4.40}$$

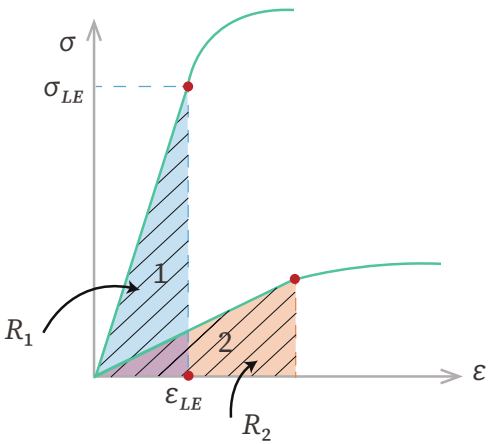


FIGURA 4.4
Definición de módulo de resiliencia

siendo ε_{LE} y σ_{LE} la deformación longitudinal y el esfuerzo normal en el límite elástico, respectivamente.

4.5 Energía de deformación elástica para un estado triaxial de esfuerzos

Para un estado de esfuerzo principal el trabajo total realizado por los esfuerzos $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ será la suma de los trabajos efectuados por cada uno de ellos de manera independiente (figura (4.5)).

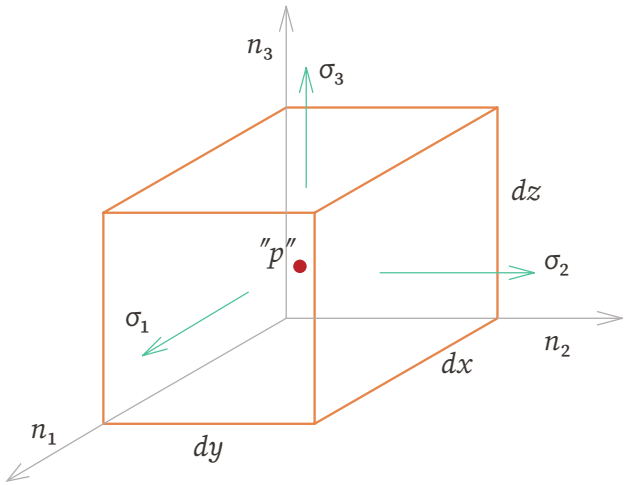


FIGURA 4.5 Energía de deformación elástica para un estado de esfuerzo principal

Por lo tanto, el trabajo realizado por σ_1 se calcula como:

$$dW = \frac{1}{2}\,\sigma_1\,\varepsilon_1\,dV \tag{4.41}$$

De esta forma, la densidad de energía resulta:

$$\frac{dW}{dV} = U_1 = \frac{1}{2}\,\sigma_1\,\varepsilon_1 \tag{4.42}$$

Repitiendo el razonamiento para las demás caras de la partícula elemental, se concluye que la densidad de energía de deformación elástica

total U almacenada en el material, debido a un estado de esfuerzo principal σ_1, σ_2, σ_3, es:

$$U=\frac{1}{2}\left(\sigma_1\varepsilon_1+\sigma_2\varepsilon_2+\sigma_3\varepsilon_3\right) \tag{4.43}$$

tomando en cuenta que:

$$\varepsilon_1=\frac{1}{E}\left(\sigma_1-\nu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_2=\frac{1}{E}\left(\sigma_2-\nu\left(\sigma_1+\sigma_3\right)\right)$$

$$\varepsilon_3=\frac{1}{E}\left(\sigma_3-\nu\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\right)$$

Sustituyendo estas últimas ecuaciones en la ecuación (4.43), se obtiene:

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1\left(\sigma_1-\nu\left(\sigma_2+\sigma_3\right)+\sigma_2\left(\sigma_2-\nu\left(\sigma_1+\sigma_3\right)+\sigma_3\left(\sigma_3-\nu\left(\sigma_1+\ \sigma_2\right)\right)\right]\right.$$

$$U=\frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\nu\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

$$U=\frac{1}{2E}\left[\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2-2\left(1+\nu\right)\left(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1\right)\right]$$

$$U=\frac{1}{2E}\left[I_1^2-2\left(1+\nu\right)I_2\right];\ \text{dado que: } G=\frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

$$U=\frac{1}{2}\left[\frac{I_1^2}{E}-\frac{I_2}{G}\right] \tag{4.44}$$

La densidad de energía se puede descomponer como:

$$U = U_V + U_0 \tag{4.45}$$

siendo U_V la densidad de energía volumétrica y U_0 la densidad de energía desviadora o distorsional.

Asumiendo que existe la siguiente relación:

$U_V \leftrightarrow T_V$, parte isotrópica (dilatación o compresión)

$U_0 \leftrightarrow T_0$, parte distorsional o desviadora

La energía de deformación volumétrica se puede calcular como:

$$U_V = \frac{\sigma_V\, \varepsilon_V}{2} \;\; ; \;\; \varepsilon_V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \;\; ; \;\; \sigma_V = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3}$$

$$\sigma_V = K\,\varepsilon_V \;\; ; \;\; K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \;\; ; \;\; G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$U_V = \frac{\sigma_V}{2}\,\varepsilon_V = \frac{\sigma_V^2}{2K} = \frac{I_1^2}{18K}$$

$$U_V = \frac{I_1^2}{18K} = \frac{I_1^2}{18}\,\frac{3(1-2\nu)}{E}$$

$$U_V = \frac{(1-2\nu)}{6E}\, I_1^2 \tag{4.46}$$

La energía de deformación desviadora se puede calcular como:

$$U_0 = U - U_V$$

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\frac{I_1^2}{E} - \frac{I_2}{G}\right) - \frac{(1-2\nu)}{6E} I_1^2$$

Desarrollando esta última ecuación, se obtiene:

$$U_0 = \frac{1}{12G}\left\{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right\} \tag{4.47}$$

Las densidades de energía volumétrica y desviadora están relacionadas con los esfuerzos normal y cortante octaédricos mediante las siguientes expresiones, respectivamente:

$$\sigma_{oct}^2 = 2KU_V \tag{4.48}$$

$$\tau_{oct}^2 = \frac{4}{3} GU_0 \tag{4.49}$$

Las ecuaciones (4.48) y (4.49) son muy importantes cuando la respuesta del medio continuo sometido a ciertas solicitaciones se formula en términos de energía de deformación elástica.

4.6 Solución de problemas elásticos aplicando funciones de esfuerzo

Las relaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos quedaron expresadas en términos de esfuerzos a partir

de las ecuaciones (4.22), las cuales podrán ser utilizadas para solucionar problemas elásticos, conjuntamente con las ecuaciones de equilibrio (ecuaciones (1.82), (1.83) y (1.84)), de continuidad (ecuaciones (2.63) a (2.65) y (2.70) a (2.72)) y cumpliendo con las condiciones de contorno del problema por resolver. Para ello se pueden emplear funciones de esfuerzos, como las conocidas *funciones de Airy*.

4.6.1 Función de esfuerzos de Airy en coordenadas cartesianas

Airy propone el empleo de una función $\phi = \phi(x, y)$, continua y derivable, que permite definir a los elementos de un tensor cartesiano T_{ij} en el que no existan fuerzas de cuerpo.

Mediante el uso de la mecánica del medio continuo, Airy logra definir las condiciones que debe satisfacer la función ϕ para cumplir los requisitos de continuidad y equilibrio. La secuencia a seguir es:

$$\text{Estática} \rightarrow \text{Dinámica} \rightarrow \text{Cinemática}$$

$$\phi \rightarrow T_{ij} \rightarrow \text{Relaciones constitutivas} \rightarrow E_{ij}$$

Para un estado de esfuerzo bidireccional, los elementos del tensor esfuerzo se pueden calcular como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} & -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & 0 \\ -\dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.50}$$

Veamos qué sucede desde el punto de vista de equilibrio al aceptar esta definición:

Por $\sum F_x = 0 \; ; \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right) + 0 + f_x = 0$$

$$\Rightarrow f_x = 0$$

Por $\sum F_y = 0 \; ; \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + f_y = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\right) + 0 + f_y = 0$$

$$\Rightarrow f_y = 0$$

Por $\sum F_z = 0 \; ; \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + f_z = 0$

$$\Rightarrow f_z = 0$$

En consecuencia, al aceptar la definición de Airy, el equilibrio de medios continuos sin fuerzas de cuerpo es automáticamente satisfecho. Así, cuando $\phi = (x, y)$ es continua y derivable, el equilibrio en el medio se cumple.

P Problema 4.2

a) Sea $\phi = Ax^2$, con $A =$ constante

Por definición de función de Airy:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fuerza resultante

$$\left|\overline{F}\right|_V = 2Abt$$

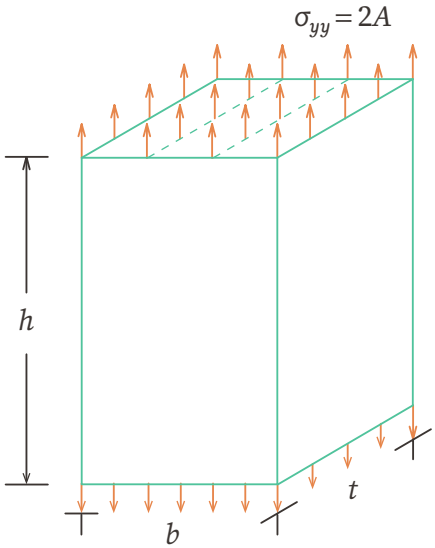


FIGURA 4.6 Barra prismática sometida a un estado de esfuerzo uniaxial

Por lo tanto, la función $\phi = Ax^2$ resuelve el problema de una barra sometida a fuerzas colineales de magnitud $2Abt$ (figura (4.6)).

b) Sea la función $\phi = By^2$, con $B =$ constante

Esta función representa la solución de un continuo sometido a fuerzas horizontales colineales de magnitud:

$$\left|\overline{F}_H\right| = 2Bht$$

c) Sea la función $\phi = Ax^2 + By^2$

Esta función, al ser la suma de las funciones ya analizadas en los incisos a) y b), resuelve el problema de una barra prismática sometida a un estado de esfuerzos biaxial (figura 4.7).

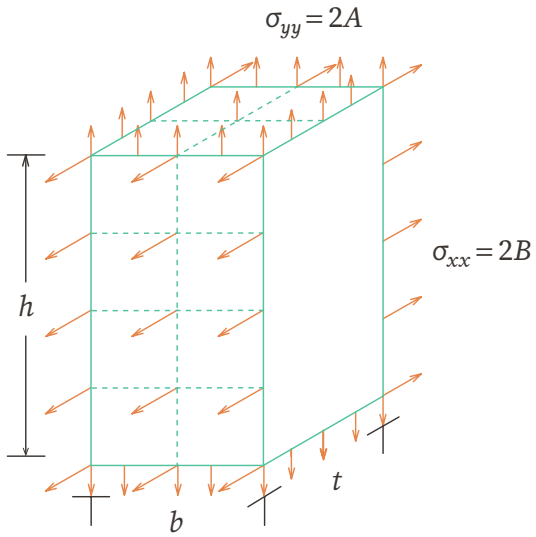


FIGURA 4.7 Barra prismática sometida a un estado de esfuerzo biaxial

d) Sea la función $\phi = Cxy$, con $C =$ constante

Esta función resuelve el estado de cortante puro (figura (4.7)).

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & -C & 0 \\ -C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

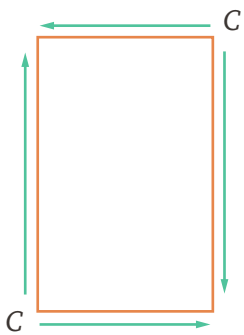


FIGURA 4.8 Estado de cortante puro

Para buscar los desplazamientos generados en el continuo por un conjunto de fuerzas definidas por $\phi = \phi(x, y)$, se sustituyen los elementos del tensor deformación, expresadas en función de esfuerzos y de las constantes elásticas, en términos de la definición de Airy, esto es:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \nu\nabla^2\phi\right] & -\frac{\partial^2\phi}{2G\,\partial x\,\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial^2\phi}{2G\,\partial x\,\partial y} & \frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \nu\nabla^2\phi\right] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{E}\left[-\nu\nabla^2\phi\right] \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

Para afirmar la existencia del campo de desplazamiento $\bar{\delta}$, debe comprobarse la compatibilidad de E_{ij}. La primera ecuación del primer grupo de compatibilidad es:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \nu\nabla^2\phi\right\}\right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{E}\left\{(1+\nu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \nu\nabla^2\phi\right\}\right]$$

$$= -\frac{1}{G}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[-\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\right]$$

Desarrollando:

$$\frac{1}{E}\left[(1+\nu)\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4} + \frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\right] - \nu\frac{\nabla^2\,\nabla^2\phi}{E} = -\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}\frac{2(1+\nu)}{E}$$

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\right]-\nu\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\left[\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right]$$

$$=-2(1+\nu)\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}$$

De aquí puede escribirse:

$$(1+\nu)\left[\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}\right]-\nu\left[\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}\right]$$

$$=-2(1+\nu)\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}-2\nu\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial y^4}=-2\nu\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}-2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\phi}{\partial x^2\,\partial y^2}+\frac{\partial^4\phi}{\partial x^4}=0$$

Esta última expresión puede escribirse como:

$$\nabla^2\left(\nabla^2\phi\right)=0 \qquad (4.52)$$

La primera ecuación del primer grupo de ecuaciones de compatibilidad se satisface si ϕ es una *función biarmónica.*

Verifiquemos ahora la segunda ecuación del primer grupo.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}$$

$$0 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[-\frac{\nu}{E}\nabla^2\phi\right] = 0$$

En consecuencia:

$$-\frac{\nu}{E}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\nabla^2\phi = 0$$

$$-\frac{\nu}{E}\nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = 0 \qquad (4.53)$$

Esta última ecuación se satisface si $\nu = 0$, o bien, si $\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}$ es una función armónica cuando $\nu \neq 0$.

La tercera ecuación del primer grupo es:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial z}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[-\frac{\nu}{E}\nabla^2\phi\right] = 0$$

$$-\frac{\nu}{E}\nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right) = 0 \qquad (4.54)$$

La ecuación (4.54) es válida si $\nu = 0$, o bien, verificando que $\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}$ es una función armónica cuando $\nu \neq 0$.

Revisemos ahora la primera ecuación del segundo grupo:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$0=0$$

Segunda ecuación del segundo grupo:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}-\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}+\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$0=0$$

Tercera ecuación del segundo grupo:

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right]$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x\,\partial y}=0\;;\;\frac{2\partial^2}{\partial x\,\partial y}\left[-\frac{\nu}{E}\nabla^2\phi\right]=0$$

$$-\frac{\nu}{E}\nabla^2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\right)=0 \qquad (4.55)$$

La ecuación (4.55) se satisface si $\nu=0$, o bien, si $\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$ es una función armónica cuando $\nu\neq 0$.

En consecuencia, en medios elásticos en equilibrio, existe solución cuando es posible definir una función de Airy $\phi=\phi(x,\ y)$ con los siguientes requisitos:

a) Si $\nu = 0$; ϕ debe ser una función biarmónica.

b) Si $\nu \neq 0$; ϕ debe tener derivadas segundas armónicas, es decir, T_{ij} debe tener a sus elementos armónicos.

P Problema 4.3

Sea $\phi = -Cy^3$ una función continua y derivable, asociada al continuo que se muestra en la figura (4.9). Matemáticamente se puede demostrar que $\nabla^4\phi = 0$ y $\nabla^2 T_{ij} = 0$, por lo tanto la función propuesta es solución de algún problema elástico, el cual se identifica a continuación.

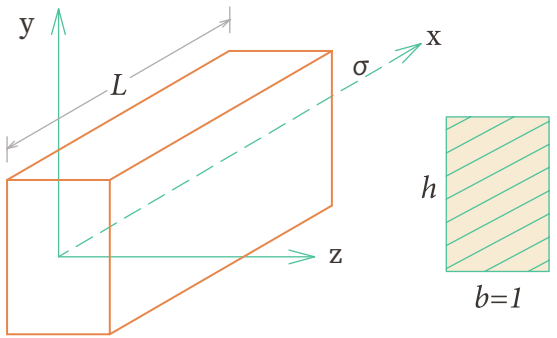


FIGURA 4.9 Barra prismática sometida a flexión pura

Aplicando la definición de Airy, se obtienen los elementos del tensor esfuerzo:

$$\sigma_{xx} = -6Cy \;\; ; \;\; \sigma_{yy} = 0 \;\; ; \;\; \tau_{xy} = 0$$

Por lo tanto T_{ij} resulta igual a:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} -6Cy & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora se analizarán cada una de las caras de la barra para conocer si existe un estado de esfuerzos.

En $x=0\,;\ \bar{n}=-\bar{i}$

$$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}-6Cy & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n=[\,T_{ij}\,]\,|\,\bar{n}\,|=6Cy\,\bar{i}$$

$$\sigma_n=\bar{t}_n\cdot\bar{n}=-6Cy\ ;\ \bar{\sigma}_n=6Cy\,\bar{i}$$

$$\bar{\tau}_n=\bar{t}_n-\bar{\sigma}_n=6Cy\,\bar{i}-6Cy\,\bar{i}=0$$

El volumen de esfuerzos normales $x=0$ se muestra en la figura (4.10), el cual al ser integrado resulta ser un par M alrededor del eje z.

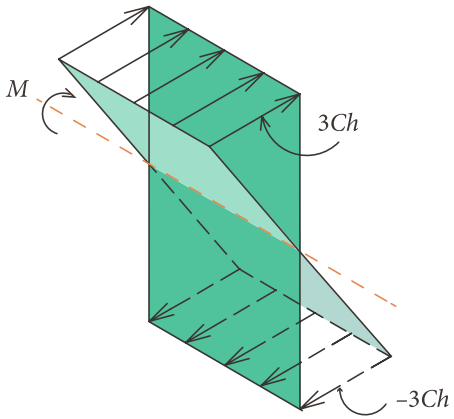


FIGURA 4.10 Volumen de esfuerzos normales en $x=0$

En la cara $x=L\,;\ \bar{n}=\bar{i}$

$$[T_{ij}]=\begin{bmatrix}-6Cy & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\bar{t}_n=[T_{ij}]\,|\,\bar{n}\,|=-6Cy\,\bar{i}$$

$$\sigma_n=\bar{t}_n\cdot\ \bar{n}=-6Cy\ ;\ \bar{\sigma}_n=-6Cy\,\bar{i}$$

$$\bar{\tau}_n=\bar{t}_n-\bar{\sigma}_n=-6Cy\,\bar{i}-(-6Cy\,\bar{i})$$

$$\bar{\tau}_n=0$$

El volumen de esfuerzos mostrado en la figura (4.9), es equivalente a un par $-M$ en la cara $x=L$.

En la cara $y=\frac{h}{2}$; $\bar{n}=\bar{j}$: $\quad [T_{ij}]=\begin{bmatrix} -3Ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{t}_n=[\,T_{ij}\,]\,|\,\bar{n}\,|=0 \Rightarrow$ el plano se encuentra descargado.

En la cara $y=-\frac{h}{2}$; $\bar{n}=-\bar{j}$: $\quad [T_{ij}]=\begin{bmatrix} 3Ch & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\bar{t}_n=[\,T_{ij}\,]\,|\,\bar{n}\,|=0 \Rightarrow$ el plano se encuentra descargado.

La función de esfuerzos propuesta resuelve el problema de una barra prismática sometida a flexión para cualquier material elástico.

Dado que: $C=\frac{M}{6I_z}$, entonces $\bar{t}_n=\left(\frac{M}{I_z}y\right)\bar{i}$

Esta última ecuación se conoce como *fórmula de la escuadría*, la cual es de suma importancia en mecánica de materiales.

4.6.2 Función de esfuerzos de Airy en coordenadas cilíndricas

Existen algunos problemas elásticos donde la geometría del medio continuo es tal que el manejo de los tensores esfuerzo y deformación se facilita mucho si se utiliza un sistema de referencia diferente al cartesiano, por ejemplo, el cilíndrico o esférico.

En el caso particular de un sistema de referencia cilíndrico, con coordenadas r, θ, z, el tensor esfuerzo resulta igual a:

$$[T_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{\theta r} & \tau_{zr} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{z\theta} \\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

Este estado de esfuerzos se representa en un elemento diferencial de volumen en la figura (4.10).

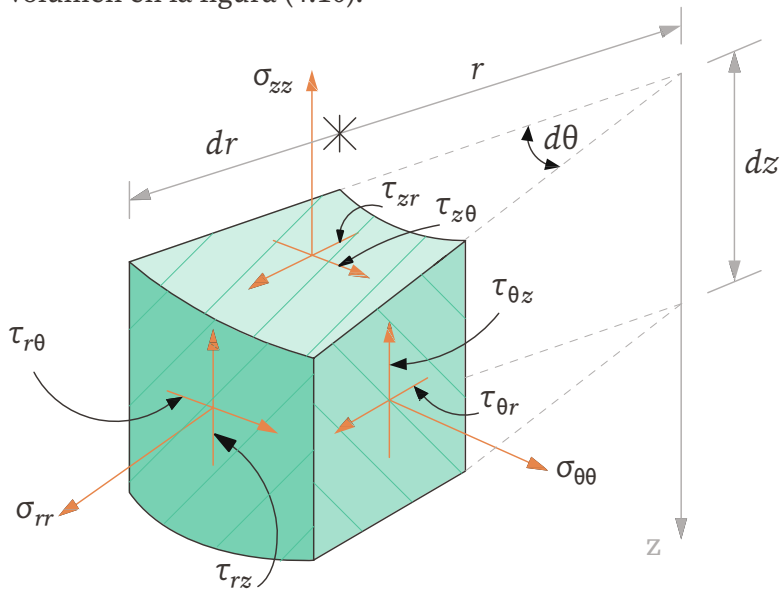


FIGURA 4.11 Estado de esfuerzos en un elemento diferencial de volumen en coordenadas cilíndricas

En coordenadas cilíndricas, las ecuaciones de equilibrio se pueden expresar como:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \frac{1}{r}\left(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}\right) + f_r = 0 \qquad (4.56)$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau z_{\theta}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}+f_{\theta}=0 \tag{4.57}$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}+f_{z}=0 \tag{4.58}$$

Siendo f_r, f_θ y f_z las componentes del vector fuerza de cuerpo en coordenadas cilíndricas.

En coordenadas polares, el tensor esfuerzo se reduce a:

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, las ecuaciones de equilibrio que debe satisfacer la función de Airy para un estado de esfuerzo plano y fuerzas de cuerpo nulas son:

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta}+\frac{1}{r}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)=0 \tag{4.59}$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta}+\frac{2}{r}\tau_{r\theta}=0 \tag{4.60}$$

La función de Airy en términos de coordenadas polares resulta:

$$\phi=\phi\left(r\,,\,\theta\right)$$

Realizando el cambio de variables, se puede establecer que:

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \tag{4.61}$$

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \tag{4.62}$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) \tag{4.63}$$

Para comprobar la compatibilidad de deformaciones, bastará establecer la definición de ∇^2 en coordenadas cilíndricas.

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

$$\nabla^2 \phi = \sigma_{xx} + \sigma_{yy}$$

Dado que debe cumplir la invariancia de tensores, $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = \sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta}$; de donde:

$$\nabla^2 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right)\phi$$

Siendo:

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}\right) \tag{4.64}$$

Con esta definición se puede revisar la armonía y la biarmonía de ciertas funciones de esfuerzos que permiten resolver algunos problemas de interés en la práctica de la ingeniería dentro del marco de la teoría de la elasticidad.

P Problema 4.5

Sea la función $\phi = -\frac{P}{\pi}(r\theta \operatorname{sen}\theta)$ continua y derivable, donde P es una constante.

a) Determine los elementos del tensor esfuerzo T_{ij}.
b) Identifique el tipo de problema que resuelve la función propuesta.

Cálculo de los elementos del tensor esfuerzo.

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \tau_{\theta r} \\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{P}{\pi}\theta \operatorname{sen}\theta \; ; \quad \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{P}{\pi} r\left(\operatorname{sen}\theta + \theta\cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\frac{P}{\pi} r\cos\theta - \frac{Pr}{\pi}\left(\theta \operatorname{sen}\theta\,(-1) + \cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = \frac{Pr}{\pi}\left[\theta \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta\right] ; \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = 0$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{\pi r}\theta \operatorname{sen}\theta + \frac{P}{\pi r}\left[\theta \operatorname{sen}\theta - 2\cos\theta\right] = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta$$

$$\sigma_{\theta\theta} = 0 \; ; \quad \tau_{r\theta} = 0$$

Por lo tanto, los elementos del tensor esfuerzo son:

$$T_{ij} = \left(-\frac{2P}{\pi r}\right)\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En cualquier medio, este tensor genera un campo de esfuerzos en el cual $f_r = f_\theta = f_z = 0$. Ya que únicamente existe un sólo término σ_{rr}, calculemos:

$$\nabla^2 \sigma_{rr} = \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \sigma_{rr} \; ; \quad \sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{2P}{\pi r^2}\cos\theta \; ; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} = -\frac{4P}{\pi r^3}\cos\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial \theta} = \frac{2P}{\pi r}\operatorname{sen}\theta \; ; \quad \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial \theta^2} = \frac{2P}{\pi r}\cos\theta$$

$$\nabla^2 \sigma_{rr} = \left(-\frac{4P}{\pi r^3}\cos\theta + \frac{2P}{\pi r^3}\cos\theta + \frac{2P}{\pi r^3} \right) \cos\theta$$

$$\nabla^2 \sigma_{rr} = 0 \text{ , por lo tanto } \quad \nabla^2 T_{ij} = 0$$

Este resultado muestra que el tensor propuesto es armónico y resuelve problemas elásticos para cualquier medio siempre y cuando la relación de Poisson $\nu \neq 0$.

La función propuesta representa al estado radial simple y corresponde al problema de una placa de pequeño espesor sometida a una fuerza horizontal de magnitud P (figura 4.12).

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{rr} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \; ; \quad \sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta$$

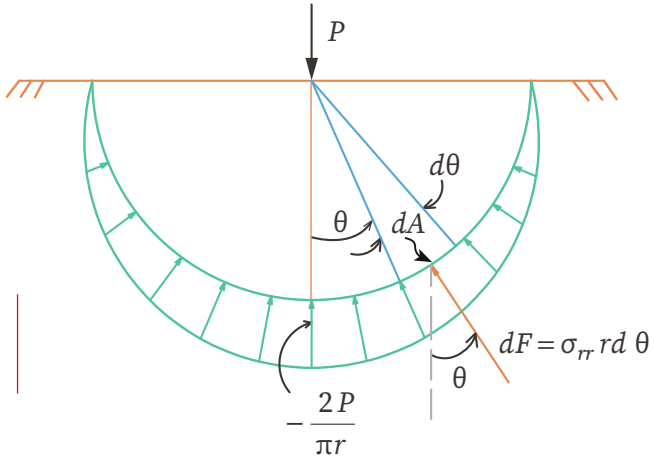


FIGURA 4.12
Estado radial simple

Con referencia a la figura (4.12), la fuerza que actúa sobre un elemento $dA = rd\,\theta$ es $\sigma_{rr}\,rd\,\theta$ y su componente vertical es $(\sigma_{rr}\,rd\,\theta)\cos\theta$. La fuerza resultante vertical es:

$$\sum F_v = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sigma_{rr}\cos\theta\; rd\,\theta = -\frac{4P}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\,\theta$$

$$\sum F_v = -\frac{4P}{\pi}\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\text{sen}2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -P$$

La figura (4.12) muestra que todos los puntos del semiespacio, excepto los de la frontera superior, contribuyen a soportar la carga *P*.

La función propuesta $\phi = -\frac{P}{\pi}(r\theta\,\text{sen}\,\theta)$ genera el estado radial simple que aplicado a un semiespacio elástico conduce a la *solución de Flamant.*

Variación de σ_{rr} con θ constante y *r* variable.

Haciendo $\quad [\sigma_{rr}]_{\theta=0} = y \quad ; \quad y = -\frac{2P}{\pi r}$

Haciendo $-\frac{2P}{\pi}=c$; $r=x \Rightarrow y=\frac{c}{x}$; la variación de esta última función se muestra en la figura (4.13).

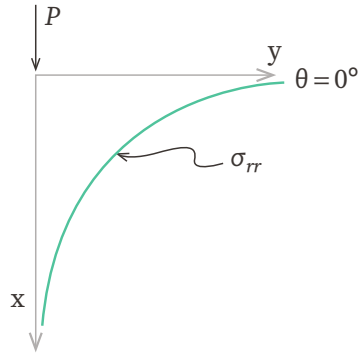


FIGURA 4.13
Variación de σ_{rr} para $\theta = \text{cte}$ y r variable

Ahora definiremos el lugar geométrico de los puntos del semiespacio con el mismo valor del esfuerzo principal.

Con relación a la figura (4.14), el punto A que se encuentra sobre la circunferencia tiene como radio vector:

$$r = D\cos\theta$$

Por lo tanto, el esfuerzo radial vale:

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r}\cos\theta = -\frac{2P}{\pi D}\frac{\cos\theta}{\cos\theta} = -\frac{2P}{\pi D}$$

En consecuencia, ya que A se encuentra sobre la circunferencia, se debe tener el mismo esfuerzo $\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi D}$ en todos los puntos de la circunferencia, exceptuando al punto de tangencia de la circunferencia con la frontera superior.

Se llama *isobara* a la circunferencia de diámetro D correspondiente al esfuerzo $\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi D}$.

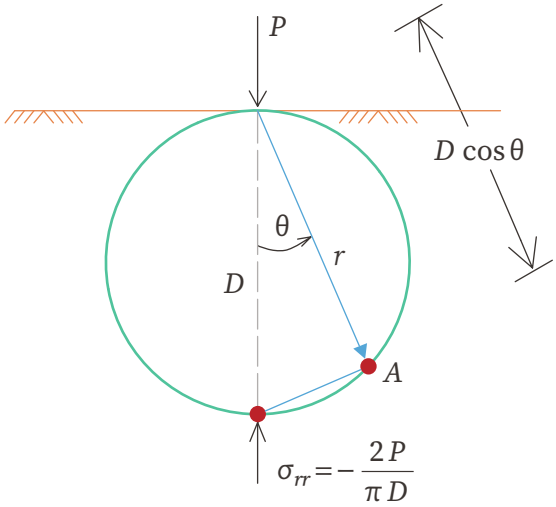


FIGURA 4.14 Lugar geométrico del semiespacio con el mismo valor del esfuerzo radial al máximo σ_{rr}

En la figura (4.15) se muestra la construcción de isobaras para diferentes valores de σ_{rr}.

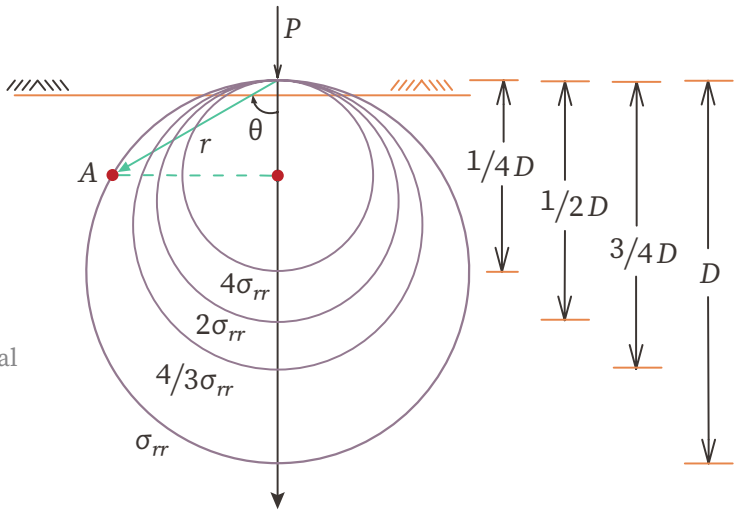
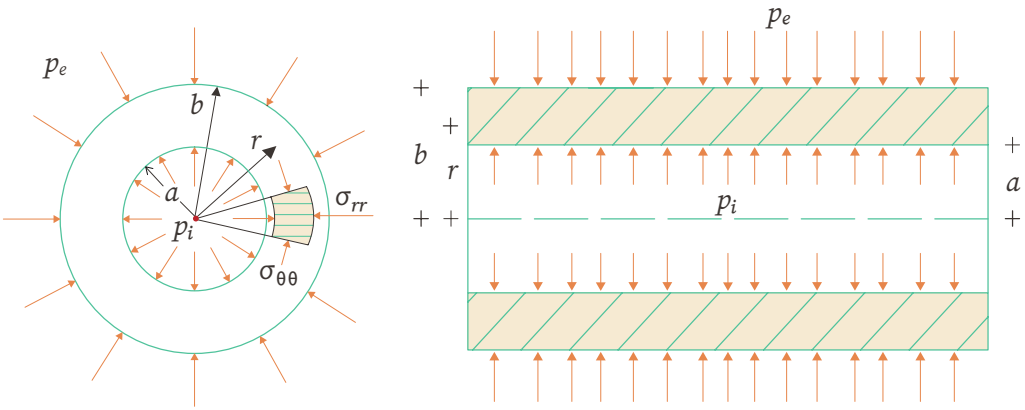


FIGURA 4.15 Isobaras para el estado radial simple

P Problema 4.6

La función de Airy $\phi = ALn(r) + Br^2$, es válida para el medio continuo que se muestra en la figura (4.15), siendo A y B dos constantes. El continuo (tubo cilíndrico) está sometido a una presión interna p_i y una presión externa p_e.



a) Corte Transversal

a) Corte longitudinal

FIGURA. 4.16 Tubo de sección transversal cilíndrica sometido a una presión interna p_i y externa p_e. a) corte transversal; b) corte longitudinal

a) Determine los elementos del tensor esfuerzo

b) Evalúe el valor de las constantes A y B.

Las contantes A y B se evaluarán para dos casos particulares:

a) Suponiendo $p_i \neq 0$ y $p_e = 0$

$$\text{para;} \begin{cases} r = a\,; & \sigma_{rr} = -p_i \\ r = b\,; & \sigma_{rr} = -p_e = 0 \end{cases}$$

Cálculo de los elementos del tensor esfuerzo.

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2}\,;\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\sigma^2 \phi}{\partial r^2}\,;\ \tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial \theta}\right)$$

$$\sigma_{rr} = -\frac{A}{r^2} + 2B\,;\ \sigma_{\theta\theta} = -\frac{A}{r^2} + 2B\,;\ \tau_{r\theta} = 0$$

Para $\sigma_{rr} = -p_i \Rightarrow -p_i = -\frac{A}{r^2} + 2B \Rightarrow 0 = -\frac{A}{b^2} + 2B$

Resolviendo para A y B, se tiene:

$$A = \frac{p_i}{\frac{b^2 - a^2}{a^2 b^2}} \; ; \qquad B = \frac{p_i}{2\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$$

Sustituyendo las constantes A y B, en σ_{rr} y $\sigma_{\theta\theta}$, se tiene:

$$\sigma_{rr} = -\frac{p_i\left(\frac{b^2}{r^2} - 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)} \; ; \qquad \sigma_{\theta\theta} = \frac{p_i\left(\frac{b^2}{r^2} + 1\right)}{\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right)}$$

b) Para el caso en que $p_i \neq 0$ y $p_e \neq 0$, se deja como ejercicio al lector demostrar que los elementos de tensor esfuerzo T_{ij} están dados por:

$$\sigma_{rr} = -\,p_i \frac{\frac{b^2}{r^2} - 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} - p_e \frac{1 - \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \; ; \qquad \sigma_{\theta\theta} = -p_i \frac{\frac{b^2}{r^2} + 1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} - p_e \frac{1 + \frac{a^2}{r^2}}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \; ;$$

$$\tau_{r\theta} = 0$$

4.7 Ecuaciones de Navier-Cauchy

Las ecuaciones de Navier-Cauchy permiten ligar los desplazamientos y las fuerzas de cuerpo, con las constantes elásticas del material. Para ello partiremos del campo de desplazamientos.

$$\bar{\delta} = u\,\bar{i} + v\,\bar{j} + w\,\bar{k}$$

Por definición, las deformaciones unitarias quedan definidas por:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \qquad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Por otra parte, las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogeneos e isótropos, están dadas por la ecuación (4.20):

$$\sigma_{xx} = \lambda J_1 + 2G\,\varepsilon_{xx} = \lambda\left(\operatorname{div}\bar{\delta}\right) + 2G\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\left(\operatorname{div}\bar{\delta}\right) + 2G\,\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\operatorname{div}\bar{\delta}\right) + 2G\,\frac{\partial w}{\partial z}$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right);\ \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right);\ \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

Para definir las fuerzas de cuerpo haremos uso de las ecuaciones de equilibrio del medio continuo. Así por suma de fuerzas en x igual a cero, se tiene (ecuación (1.82), capítulo 1):

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + f_x = 0$$

Sustituyendo los esfuerzos en términos de los desplazamientos en la ecuación anterior, se tiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda\left(\operatorname{div}\bar{\delta}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(2G\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}G\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)+f_x=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda\operatorname{div}\bar{\delta}+G\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+G\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+G\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}+G\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}+G\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f_x=0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\lambda\operatorname{div}\bar{\delta}+G\nabla^2 u+G\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)+f_x=0$$

Por lo tanto la primera ecuación de equilibrio toma la forma:

$$\left(\lambda+G\right)\frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\bar{\delta}+G\nabla^2 u+f_x=0 \qquad (4.65)$$

De manera similar, sustituyendo los esfuerzos en términos de deformaciones en la ecuación de equilibrio (1.83), se obtiene:

$$\left(\lambda+G\right)\frac{\partial}{\partial y}\operatorname{div}\bar{\delta}+G\nabla^2 v+f_y=0 \qquad (4.66)$$

Finalmente, sustituyendo los esfuerzos en términos de deformaciones en la ecuación de equilibrio 1.84, se llega a:

$$\left(\lambda+G\right)\frac{\partial}{\partial z}\operatorname{div}\bar{\delta}+G\nabla^2 w+f_z=0 \qquad (4.67)$$

Multiplicando la ecuación (4.65) por $\bar{i}$, la (4.66) por $\bar{j}$ y la (4.67) por $\bar{k}$ y sumando miembro a miembro, se obtiene:

$$(\lambda + G)\ \text{grad div}\,\overline{\delta} + G\nabla^2\overline{\delta} + \overline{f} = 0$$

$$\left[(\lambda + G)\ \text{grad div} + G\nabla^2\right]\overline{\delta} = -\overline{f}$$

Pero:

$$\lambda + G = \frac{2\nu E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} + \frac{E(1-2\nu)}{2(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$\lambda + G = \frac{E}{2(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{G}{(1-2\nu)}$$

Por lo tanto:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu}\ \text{grad div} + \nabla^2\right)\overline{\delta} = -\frac{\overline{f}}{G} \qquad (4.68)$$

La ecuación (4.68) puede ser escrita en notación índice como:

$$G\delta_{i,jj} + (\lambda + 2G)\,\delta_{j,ji} + f_i = 0 \qquad (4.69)$$

En esta última ecuación la derivada parcial respecto a la variable independiente se representa con una *coma*, con los subíndices *i* y *j* variando de 1 a 3.

La ecuación (4.68) o (4.69) se conoce como *ecuación de Navier-Cauchy* y representa un sistema de tres ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, donde las incognitas son las componentes del vector desplazamiento *u*, *v* y *w*, la cual se puede resolver tomano en cuenta las condiciones de contorno del problema, ya sea que se conozcan los desplazamientos o los esfuerzos en todo el contorno. En la mayoría de

los problemas de elasticidad las condiciones de frontera son tales que sobre una parte del contorno se conocen los desplazamientos en tanto que sobre el resto se conocen los esfuerzos.

4.8 Solución de problemas elásticos aplicando funciones potenciales

Las ecuaciones de Navier-Cauchy pueden ser resueltas mediante métodos numéricos, como es el caso del método del elemento finito que se puede aplicar a una gran variedad de problemas con condiciones de frontera complejas, o bien, empleando métodos analíticos para condiciones muy particulares.

Otra forma de resolver dichas ecuaciones es empleando funciones potenciales escalares y vectoriales, haciendo uso del teorema de Helmholtz, el cual establece que cualquier campo vectorial $\overline{\delta}\,(u,v,w)$ puede ser expresado como:

$$\overline{\delta} = \operatorname{grad}\phi + \operatorname{rot}\overline{\psi}$$

siendo ϕ una función potencial escalar (término irrotacional) y $\overline{\psi}$ una función potencial vectorial (término rotacional).

4.8.1 Funciones potenciales escalares en términos de desplazamientos (Función de Lamé)

En este problema se define al campo de desplazamientos y se buscan las fuerzas que dieron origen a ese campo.

La secuencia a seguir sería:

Función de desplazamientos $\rightarrow \overline{\delta} \rightarrow E_{jk} \rightarrow T_{jk} \rightarrow$ Fuerzas

Lamé propuso definir al campo de desplazamientos mediante una función potencial escalar $\phi(x, y, z)$, con $\overline{\psi} = 0$, la cual llamó *función potencial de desplazamientos,* mediante la cual se puede establecer:

$$2Gu = \frac{\partial \phi}{\partial x} \; ; \quad 2Gv = \frac{\partial \phi}{\partial y} \; ; \quad 2Gw = \frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{4.70}$$

Multiplicando estas últimas ecuaciones por los vectores unitarios $\overline{i}$, $\overline{j}$ y $\overline{k}$, respectivamente, y sumándolas, se obtiene:

$$2G\overline{\delta} = \text{grad}\,\phi = \nabla\phi \tag{4.71}$$

Usando esta definición, la ecuación de Navier se simplifica de la siguiente manera:

$$(\lambda + G)\,\text{grad div}\,\frac{\nabla\phi}{2G} + G\nabla^2\frac{\nabla\phi}{2G} = -\overline{f} \tag{4.72}$$

Dado que: $\text{div grad}\,\phi = \nabla^2\phi$, entonces:

$$(\lambda + G)\,\nabla^2\,\nabla\phi + G\nabla^2\,\nabla\phi = -\overline{f}\,(2G)$$

$$(\lambda + 2G)\,\nabla^2\,\nabla\phi = -\overline{f}\,(2G)\;; \Rightarrow \frac{(\lambda + 2G)}{2G}\,\nabla^2\,\nabla\phi = -\overline{f}$$

Para fuerzas de cuerpo nulas, la ecuación anterior se satisface si:

$$\nabla^2 \nabla\phi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla\left(\nabla^2\phi\right) = 0 \tag{4.70}$$

Si se establece que ϕ sea una función armónica, la ecuación de Navier se satisface.

En consecuencia, *funciones de Lame ϕ armónicas resuelven el problema de encontrar el campo de desplazamientos buscado.*

Con la definición anterior, el primer invariante del tensor deformación se puede expresar como:

$$J_1 = \operatorname{div}\bar{\delta} = \operatorname{div}\frac{1}{2G}\left[\operatorname{grad}\phi\right]$$

Así, J_1 queda como

$$J_1 = \frac{1}{2G}\operatorname{div}\left[\operatorname{grad}\phi\right] = \frac{1}{2G}\nabla^2\phi = 0 \tag{4.74}$$

Dado que el primer invariante del tensor deformación es cero, la deformación volumétrica es nula, por lo tanto al aplicar la definición de Lamé sólo será posible generar soluciones a problemas en las cuales únicamente existe componente distorsional.

P **Problema 4.7**

Sea $\phi = A\left(x^2 - y^2\right) + Bxy$; una función contínua y derivable.

Al aplicar el Laplaciano a la función anterior, se tiene $\nabla^2\phi = 2A - 2A = 0$, por lo tanto se trata de una función armónica.

En lo que sigue definiremos al campo de desplazamientos, su cinemática y los esfuerzos que genera.

Por definición:

$$u = \frac{1}{2G}\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{2G}\left(2Ax + By\right)$$

$$v = \frac{1}{2G}\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{1}{2G}\left(-2Ay + Bx\right)$$

$$w = \frac{1}{2G}\left(0\right)$$

Lo anterior implica que se trata de un campo de deformación plana.

El tensor de deformaciones unitarias es:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{A}{G} & \frac{1}{2}\frac{B}{G} \\ \frac{B}{2G} & -\frac{A}{G} \end{bmatrix}$$

Para definir a los esfuerzos se puede establecer que :

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Rightarrow \sigma_{xx} = 2A$$

$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \Rightarrow \sigma_{yy} = -2A$$

$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \Rightarrow \sigma_{zz} = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = B \; ; \; \tau_{yz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} = 0 \; ; \; \tau_{xz} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = 0$$

Por lo tanto el tensor esfuerzo queda como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 2A & B \\ B & -2A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2A & 0 \\ 0 & -2A \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & B \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

Este tensor esfuerzo representa un estado de cortante puro.

Finalmente para terminar de describir la cinemática del problema, obtengamos el rotacional del campo $\bar{\delta}$.

$$\text{rot}\bar{\delta} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial \phi}{\partial x} & \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial \phi}{\partial y} & \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{1}{2G}\left[\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial z}\right)\bar{i}\right.$$

$$\left. - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial z}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y}\right)\bar{k}\right]$$

La operación anterior conduce a rot $\bar{\delta} = 0$.

Por lo tanto, el empleo de la definición de Lamé, únicamente permite resolver un caso particular de problemas elásticos, esto es, aquellos en los cuales no existe componente volumétrica y además resultan siempre ser problemas irrotacionales.

4.8.2 Funciones potenciales vectoriales: Vectores Galerkin

Galerkin en 1930 propuso seleccionar una función vectorial de desplazamientos definida por: $\overline{F} = F_x\overline{i} + F_y\overline{j} + F_z\overline{k}$, siendo F_x, F_y, F_z funciones continuas de x, y, z.

El campo de desplazamientos $\overline{\delta}$ se selecciona de tal forma que constituya una solución de la ecuación de Navier, por lo que:

$$2G\overline{\delta} = \left(c\nabla^2 - \nabla\,\mathrm{div}\right)\overline{F} \tag{4.75}$$

siendo c es una constante que puede ser ajustada para satisfacer la ecuación de Navier:

$$G\left(\nabla^2 + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\right)\overline{\delta} = -\overline{f} \tag{4.76}$$

Sustituyendo en la ecuación (4.72) la (4.73), se obtiene:

$$\left(\nabla^2 + \frac{1}{1-2\nu}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\right)\left(c\nabla^2 - \nabla\,\mathrm{div}\right)\overline{F} = -2\overline{f}$$

Haciendo operaciones se llega:

$$\left(c\nabla^4 - \nabla^2\,\nabla\,\mathrm{div} + \frac{c}{1-2\nu}\,\nabla\,\mathrm{div}\,\nabla^2 - \frac{1}{1-2\nu}\,\nabla\,\mathrm{div}\,\nabla\,\mathrm{div}\right)\overline{F} = -2\overline{f}$$

Matemáticamente se puede demostrar que:

$$\nabla^2\,\nabla\mathrm{div} = \nabla\mathrm{div}\,\nabla^2 = \nabla\mathrm{div}\,\nabla\mathrm{div}$$

$$\nabla\mathrm{div}\,\nabla\mathrm{div}\,(\text{constante}) = 0$$

Por lo que se puede lograr hacer desaparecer estos términos si:

$$-1+\frac{c}{1-2\nu}-\frac{1}{1-2\nu}=\frac{-1+2\nu+c-1}{1-2\nu}=0$$

$$\Rightarrow \quad c=2(1-\nu) \tag{4.77}$$

Por lo tanto:

$$2\,(1-\nu)\,\nabla^4\,\overline{F}=-2\,\overline{f}\;\Rightarrow\;\nabla^4\,\overline{F}=-\;\frac{\overline{f}}{(1-\nu)} \tag{4.78}$$

Debe entonces seleccionarse a funciones $\overline{F}$ que satisfagan la ecuación (4.78) para que el equilibrio y las relaciones constitutivas elásticas sean satisfechas también en el cálculo del campo de desplazamientos $\overline{\delta}$.

Sustituyendo la ecuación (4.78) en la (4.75) se pueden calcular las componentes del vector desplazamiento como:

$$2Gu=2(1-\nu)\,\nabla^2F_x-\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{div}\,\overline{F} \tag{4.79}$$

$$2Gv=2(1-\nu)\,\nabla^2F_y-\frac{\partial}{\partial y}\,\mathrm{div}\,\overline{F} \tag{4.80}$$

$$2Gw=2(1-\nu)\,\nabla^2F_z-\frac{\partial}{\partial z}\,\mathrm{div}\,\overline{F} \tag{4.81}$$

Si se deriva la ecuación (4.79) con respecto a x, la (4.80) con respecto y, la (4.81) respecto a z y se suman miembro a miembro, se obtiene:

$$2G\ \mathrm{div}\,\overline{\delta} = 2(1-\nu)\ \nabla^2 \mathrm{div}\,\overline{F} - \nabla^2 \mathrm{div}\,\overline{F}$$

$$2G\ \mathrm{div}\,\overline{\delta} = (1-2\nu)\ \nabla^2 \mathrm{div}\,\overline{F} \qquad (4.82)$$

Esta última ecuación muestra una dependencia entre la divergencia del vector de Galerkin y la componente volumétrica del tensor deformación dada por $\mathrm{div}\,\overline{\delta}$.

A partir de las ecuaciones (4.79) a la (4.81) se pueden definir los elementos del tensor deformación E_{ij} y mediante las relaciones constitutivas para los materiales elásticos lineales homogeneos es isótropos se pueden conocer los elementos de tensor esfuerzo T_{ij}.

Puesto que: $\sigma_{xx} = \lambda\ \mathrm{div}\,\overline{\delta} + 2G\varepsilon_{xx}$, siendo $\lambda = \dfrac{2\nu G}{(1-2\nu)}$

y de la ecuación (4.82) $\mathrm{div}\,\overline{\delta} = \dfrac{1-2\nu}{2G}\ \nabla^2\ \mathrm{div}\,\overline{F}$.

De la ecuación (4.79) se tiene:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{2(1-\nu)}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{div}\,\overline{F}\ \frac{1}{2G}$$

Sustituyendo esta última ecuación σ_{xx} obtenemos:

$$\sigma_{xx} = \frac{2\nu G}{(1-2\nu)}\frac{(1-2\nu)}{2G}\nabla^2 \mathrm{div}\,\overline{F} + 2G\left\{\frac{2(1-\nu)}{2G}\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{div}\,\overline{F}\ \frac{1}{2G}\right\}$$

$$\sigma_{xx} = \nu\nabla^2 \mathrm{div}\,\overline{F} + 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_x - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{div}\,\overline{F}$$

Finalmente se obtiene:

$$\sigma_{xx} = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_x + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial x}\right)\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.83}$$

Procediendo de manera similar para los otros esfuerzos se llega a,

$$\sigma_{yy} = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 F_y + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.84}$$

$$\sigma_{zz} = 2(1-\nu)\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 F_z + \left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.85}$$

$$\tau_{xy} = (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 F_x + \frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_y\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.86}$$

$$\tau_{yz} = (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 F_y + \frac{\partial}{\partial y}\nabla^2 F_z\right) - \frac{\partial^2}{\partial y\,\partial z}\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.87}$$

$$\tau_{zx} = (1-\nu)\left(\frac{\partial}{\partial x}\nabla^2 F_z + \frac{\partial}{\partial z}\nabla^2 F_x\right) - \frac{\partial^2}{\partial x\,\partial z}\operatorname{div}\overline{F} \tag{4.88}$$

Las ecuciones (4.83) a la (4.88), permiten determinar los elementos del tensor esfuerzo a partir de un vector Galenkin $\overline{F}$.

a) Análisis de la acción de un vector de Galerkin en un semiespacio elástico

Sea $$\overline{F} = \overline{k}\left[\frac{P}{2\pi}\left(2\nu R + (1-2\nu)\,z\,\operatorname{In}(R+z)\right)\right] \tag{4.86}$$

un vector Galenkin (figura (4.17)) en un sistema de referencia cilíndrico, donde:

$P=$ fuerza vertical puntual aplicada en la superficie del semiespacio elástico.

$\nu=$ relación de Poisson

$z=$ profundidad

$R=$ $\left[x^2+y^2+z^2\right]^{1/2}$: magnitud del vector de posición de un punto cualquiera del medio.

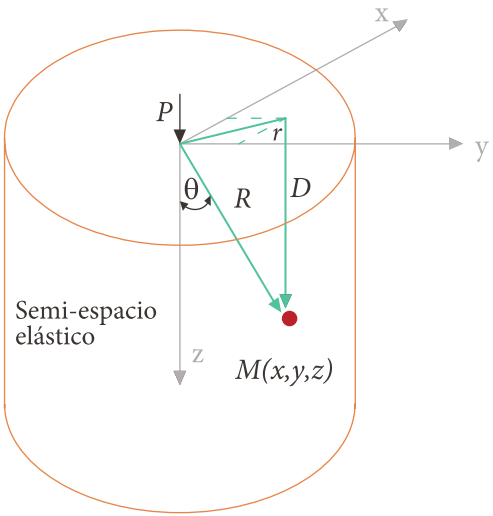


FIGURA 4.17 Vector Galerkin para una carga puntual *P* aplicada en la superficie de un semiespacio elástico lineal

La función propuesta es contínua y derivable en todos los puntos del semiespacio elástico, excepto en el origen del marco de referencia. Su aplicación dará resultados válidos si $R\neq 0$.

A partir del vector propuesto se puede obtener el campo de desplazamientos.

$$\bar{\delta}=u_r\left(\bar{e}_r\right)+v_\theta\left(\bar{e}_\theta\right)+w_z\left(\bar{e}_z\right)$$

Siguiendo las definiciones del campo de desplazamientos, se obtienen:

$$u_r=\frac{Pr}{4\pi GR}\left[\frac{z}{R^2}-\frac{1-2\nu}{R+z}\right]$$

$$v_\theta = 0 \tag{4.90}$$

$$w_z = \frac{P}{4\pi GR}\left[2(1-\nu)+\frac{z^2}{R^2}\right]$$

En el campo sólo existen desplazamientos u_r, w_z, siendo $v_\theta = 0$, lo cual implíca una condición axisimétrica ya que las funciones no dependen del valor de θ.

Para calcular los desplazamientos u_r en la superficie del medio, se tiene que para $z=0$, $r=R$, por lo tanto:

$$[u_r]_{z=0} = \frac{P}{4\pi Gr}\left[-(1-2\nu)\right] = -\frac{2P}{4\pi Er}\left[(1+\nu)(1-2\nu)\right] \tag{4.91}$$

$$[u_r]_{z=0} = \frac{P}{\pi Er}\left[\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2}\right]$$

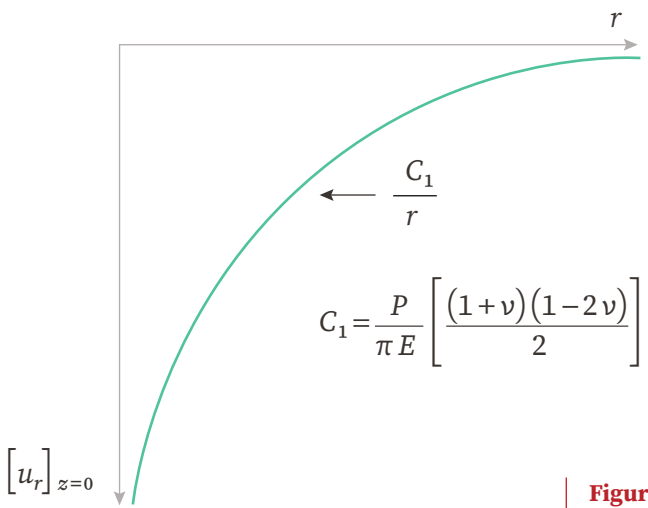


Figura 4.18 Variación del desplazamiento u_r en función de r

Los desplazamientos u_r en la superficie varían inversamente proporcionales a su distancia al polo del marco de referencia y siempre estan dirigidos hacia dicho polo (figura (4.19)).

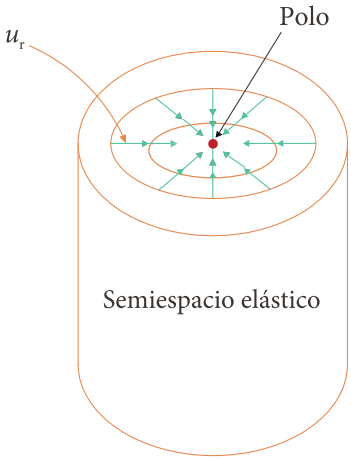


Figura 4.19 Campo de desplazamientos en la superficie de un semiespacio elástico lineal

Los desplazamientos verticales en la superficie del semiespacio quedan definidas por:

$$\left[w_z\right]_{z=0} = \frac{P}{4\pi Gr}\left[2\left(1-\nu\right)\right] = \frac{P\left(1-\nu^2\right)}{\pi Er} \tag{4.92}$$

A partir del campo de desplazamientos, y siguiendo la secuencia de Galerkin, se obtiene el siguiente campo de esfuerzo.

$$\sigma_{rr} = \frac{P}{2\pi R^2}\left[-\frac{3r^2 z}{R^3} + \frac{\left(1-2\nu\right)R}{R+z}\right]$$

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{\left(1-2\nu\right)P}{2\pi R^2}\left[\frac{z}{R} - \frac{R}{R+z}\right] \tag{4.93}$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3Pz^3}{2\pi R^5} \;;\quad \tau_{rz} = -\frac{3Prz^3}{2\pi R^5}$$

En la superficie, donde $z=0$ se tiene:

$$[\sigma_{rr}]_{z=0} = \frac{P}{2\pi r^2}(1-2\nu) \tag{4.94}$$

$$[\sigma_{\theta\theta}]_{z=0} = -\frac{(1-2\nu)P}{2\pi r^2} = -[\sigma_{rr}]_{z=0}$$

$$[\sigma_{zz}]_{z=0} = 0$$

$$[\tau_{rz}]_{z=0} = 0$$

En las partículas de la superficie existe un estado de esfuerzo plano, que corresponde a un estado de cortante puro, excepto en $r=0$ donde el vector de Galerkin no define al estado de esfuerzos.

En el semiespacio elástico con $\nu = \frac{1}{2}$, en la superficie se tienen siempre partículas descargadas, excepto en $r=0$

Si $\nu \neq \frac{1}{2}$, existirá cortante puro en las partículas superficiales.

Analicemos ahora qué sucede a una profundidad D bajo la superficie (figura (4.20)).

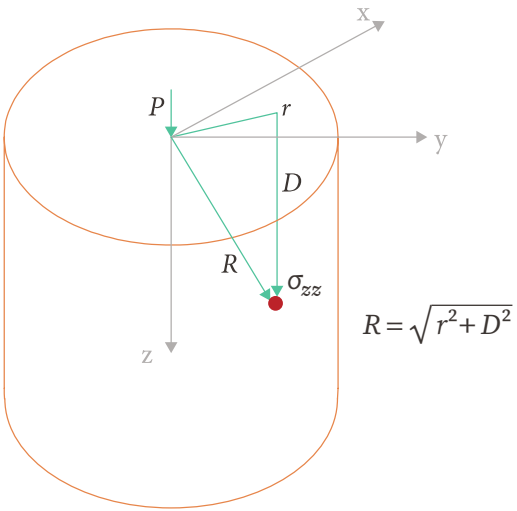


FIGURA. 4.20 Esfuerzo normal σ_{zz} a una profundidad D

$$\left[\sigma_{zz}\right]_{z=D} = \frac{3PD^3}{2\pi\left(\sqrt{r^2+D^2}\right)^5} \tag{4.95}$$

Simplificando se puede escribir:

$$\left[\sigma_{zz}\right]_{z=D} = -\frac{P}{D^2}\frac{\frac{3}{2\pi}}{\left[1+\left(\frac{r}{D}\right)^2\right]^{5/2}} \tag{4.96}$$

Haciendo: $\left[\sigma_{zz}\right]_{z=D} = -\frac{P}{D^2} N_B$

$$N_B = \frac{\frac{3}{2\pi}}{\left[1+\left(\frac{r}{D}\right)^2\right]^{5/2}} \qquad \text{siendo } \frac{r}{D} = \tan\varphi$$

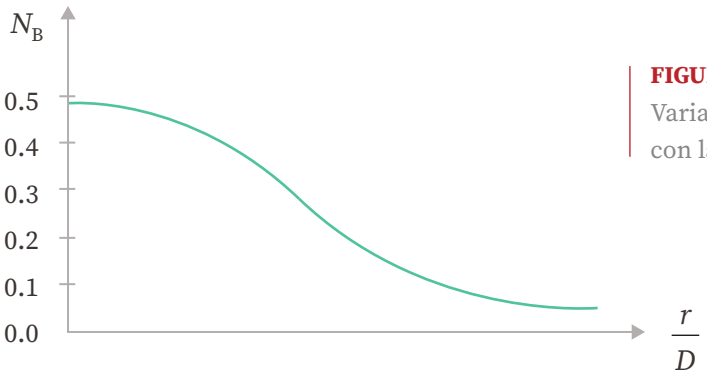


FIGURA 4.21
Variación de N_B con la relación r/D

N_B se conoce como factor de de influencia y conocida su variación se puede representar la correspondiente variación espacial de los esfuerzos σ_{zz} (figura (4.21)). Los esfuerzos σ_{zz} varían con el inverso del cuadrado de la profundidad del plano $z = D$.

La función propuesta conduce a la solución fundamental de *Boussinesq,* ampliamente utilizada en mecánica de suelos.

b) Vector Galerkin para resolver el problema de Mindlin

Se trata del problema de una carga concentrada aplicada a una profundidad *c,* bajo la superficie de un semi espacio elástico. La carga es normal a la superficie dirigida hacia el semi espacio y el origen del marco de referencia coincide con la proyección sobre la superficie del punto *P* donde está aplicada la carga (figura (4.22)).

Debido a que existe simetría respecto al eje z, el sistema de referencia apropiado es el de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) y el vector de Garlekin es tal que $F_1 = F_2 = 0$ *y* $F_3 = Z\,(r, z)$.

$$F_3 = Z = \frac{P}{8\pi(1-\nu)}\left\{ R_1 + \left[8\nu(1-\nu)-1\right] R_2 + 4(1-2\nu)\left[(1-\nu)z - \nu c\right] \right.$$

$$\left. \log\left(R_2 + z + c\right) - \frac{2cz}{R^2} \right\} \qquad (4.94)$$

Siendo:

$$R_1 = \left[r^2 + (z-c)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad ; \quad R_2 = \left[r^2 + (z+c)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

El campo de desplazamientos y los esfuerzos quedan definidos por el vector de Galerkin en todos los puntos del semi espacio excepto en el punto de aplicación de la carga, en el cual existe una discontinuidad y resulta imposible valuar los esfuerzos y desplazamientos.

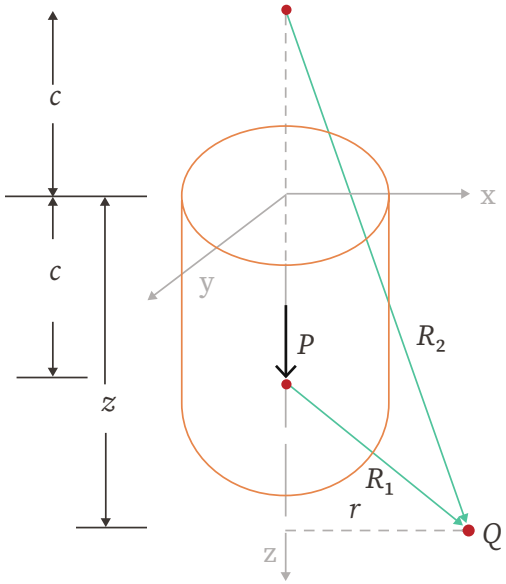


FIGURA 4.22 Carga concentrada en el interior de un semiespacio elástico

El campo de desplazamientos está dado por:

$$u_r = -\frac{1}{2G}\frac{\partial^2 Z}{\partial r \partial z};\ v_\theta = 0;\ w_z = \frac{1}{2G}\left[2(1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]Z \qquad (4.98)$$

Los elementos del tensor esfuerzo se pueden calcular en función del vector Galerkin propuesto como:

$$\sigma_{rr} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\nu\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial r^2}\right)Z;\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2 - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right]Z;\ \sigma_{zz} = \frac{\partial}{\partial z}\left((2-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Z$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0$$

$$\tau_{zr} = \frac{\partial}{\partial r}\left((1-\nu)\nabla^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)Z \qquad (4.99)$$

Operando matemáticamente, se obtiene:

$$\sigma_{rr}=\frac{-P}{8\pi(1-\nu)}\left[\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3}-\frac{(1-2\nu)(z+7c)}{R_2^3}+\frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2^2(R_2+z+c)}\right.$$

$$\left.-\frac{3r^2(z-c)}{R_1^5}+\frac{6c(1-2\nu)(z+c)^2-6c^2(z+c)-3(3-4\nu)\,r^2(z-c)}{R_2^5}\right.$$

$$\left.-\frac{30\,cr^2z\,(z+c)}{R_2^7}\right] \qquad (4.100)$$

$$\sigma_{\theta\theta}=\frac{-P(1-2\nu)}{8\pi(1-\nu)}\left[\frac{(z-c)}{R_1^3}+\frac{(3-4\nu)(z+c)-6c}{R_2^3}-\frac{4(1-\nu)}{R_2(R_2+z+c)}\right.$$

$$\left.+\frac{6c(z+c)^2}{R_2^5}-\frac{6c^2(z+c)}{(1-2\nu)R_2^5}\right] \qquad (4.98)$$

$$\sigma_{zz}=\frac{-P}{8\pi(1-\nu)}\left[-\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_1^3}+\frac{(1-2\nu)(z-c)}{R_2^3}-\frac{3(z-c)^3}{R_1^5}\right.$$

$$\left.-\frac{3(3-4\nu)z(z+c)^2-3c(z+c)(5z-c)}{R_2^5}-\frac{30cz(z+c)^3}{R_2^7}\right] \qquad (4.102)$$

$$\tau_{rz}=\frac{-Pr}{8\pi(1-\nu)}\left[-\frac{(1-2\nu)}{R_1^3}+\frac{(1-2\nu)}{R_2^3}-\frac{3(z-c)^3}{R_1^5}\right.$$

$$\left.-\frac{3(3-4\nu)z(z+c)-3c(3z+c)}{R_2^5}-\frac{30cz(z+c)^2}{R_2^7}\right] \qquad (4.103)$$

4.9 Problemas propuestos

P Problema 4.11

Sea la función $\phi = \dfrac{3F}{4c}\left\{xy - \dfrac{xy^3}{3c^2}\right\}$, una función continua y derivable.

a) Calcule los elementos del tensor esfuerzo T_{ij}.

b) Analice el estado de esfuerzos en cada una de las caras del medio continuo que se muestra en la figura y una vez analizado el equilibrio diga qué tipo de problema resuelve la función propuesta.

S Solución

a) $$T_{ij} = \begin{bmatrix} -\dfrac{3Fxy}{2c^3} & \dfrac{3Fy^2}{4c^3} - \dfrac{3F}{4c} \\ \dfrac{3Fy^2}{4c^3} - \dfrac{3F}{4c} & 0 \end{bmatrix}$$

b) Ya que el tensor no tiene términos armónicos, la solución no es aplicable a medios continuos con $v \neq 0$. Obviamente $\nabla^4 \phi = 0$; es decir, resuelve el problema en medios elásticos en los cuales $v = 0$. La función ϕ representa la solución de una ménsula sin fuerzas de cuerpo, sometida a una carga en su extremo libre, tal como se muestra en la figura (4.23).

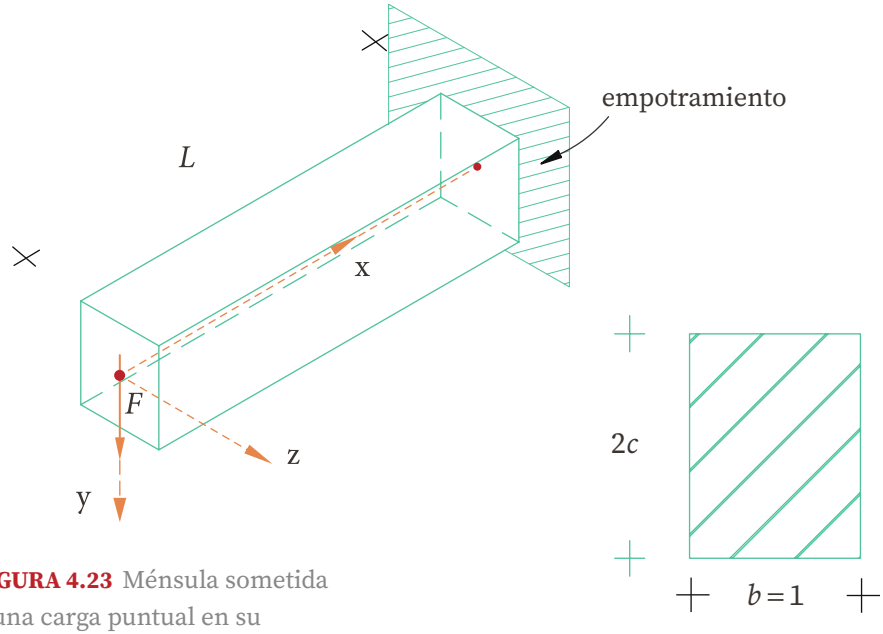


FIGURA 4.23 Ménsula sometida a una carga puntual en su extremo libre

P

Problema 4.12

Para la barra que se muestra en la figura (4.24) se conoce el campo de desplazamientos y está dado por:

$$\bar{\delta} = u\,\bar{i} + v\,\bar{j} + w\,\bar{k}\,; \quad \text{donde:}$$

$$u = \frac{-\nu\gamma\, xz}{E} \;\; ; \;\; v = \frac{-\nu\gamma\, yz}{E} \;\; ; \;\; w = \gamma\,\frac{\left[z^2 - \ell^2 + \nu\left(x^2 + y^2\right)\right]}{2E}$$

siendo ℓ = Longitud de la barra; ν = relación de Poisson; E = Módulo de Elasticidad; γ = peso específico del material de la barra.

Determinar:

a) El tensor deformación E_{ij}

b) El tensor esfuerzo T_{ij}

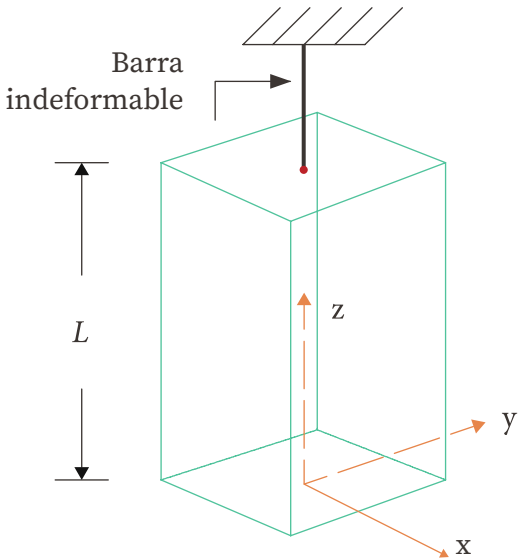


FIGURA 4.24 Barra prismática colgada de un extremo sometida a peso propio

S Solución

a)

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\nu\gamma z}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{\nu\gamma z}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\gamma z}{E} \end{bmatrix}$$

b)

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma z \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO

5

Mecánica de fluidos

5.1 Aspectos fundamentales de la mecánica de fluidos lineal

La Mecánica de Fluidos es la parte de la mecánica del medio continuo que estudia los fluidos en reposo (estática de fluidos) o en movimiento (dinámica de fluidos) y sus efectos sobre los contornos, que pueden ser una superficie sólida o bien otro fluido. En los fluidos las caracteristicas de viscosidad del medio son fundamentales en la respuesta de los mismos.

Las relaciones constitutivas para los fluidos lineales pueden definirse de la siguiente manera.

El tensor rapidez de deformación se obtiene derivado el tensor deformación E_{ij} respecto al tiempo, lo que conduce a:

$$\dot{E}_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial z}+\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{u}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial x}\right) & \frac{\partial \dot{v}}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{v}}{\partial z}+\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial x}+\frac{\partial \dot{u}}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \dot{w}}{\partial y}+\frac{\partial \dot{v}}{\partial z}\right) & \frac{\partial \dot{w}}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

En la ecuación (5.1) los componentes del vector deformación están derivados respecto al tiempo, lo que da origen a las componentes del vector velocidad $\overline{v}(\overline{v}_x, \overline{v}_y, \overline{v}_z)$.

El tensor rapidez de deformación puede ser escrito como:

$$\dot{E}_{ij}=\begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial z}+\frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}+\frac{\partial v_y}{\partial z}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Dado que el tensor deformación puede ser descompuesto en sus partes volumétrica y distorsional, podemos escribir:

$$\dot{E}_{ij}=\dot{E}_v+\dot{E}_0 \tag{5.3}$$

Siendo:

$$E_v = \begin{bmatrix} \frac{\dot{J}_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{J}_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{J}_1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.4}$$

$$\dot{E}_0 = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{\dot{J}_1}{3} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{\dot{J}_1}{3} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{\dot{J}_1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

donde:

$$\dot{J}_1 = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \operatorname{div} \bar{v} \tag{5.6}$$

Por otra parte el tensor esfuerzo se puede descomponer en sus partes volumétrica y distorsional, esto es:

$$\dot{T}_{ij} = \dot{T}_v + \dot{T}_0 \tag{5.7}$$

Para aplicar las leyes constitutivas se acepta que existe la siguiente relación tensorial (ecuaciones (4.15) y (4.16)):

$$\dot{T}_v = 3\kappa \begin{bmatrix} \frac{\dot{J}_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{J}_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{J}_1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

$$T_0 = 2\mu \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{\dot{J}_1}{3} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yx} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{\dot{J}_1}{3} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{zy} \\ \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{xz} & \frac{1}{2}\dot{\gamma}_{yz} & \dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{\dot{J}_1}{3} \end{bmatrix} \tag{5.9}$$

De aquí se puede encontrar el valor de T_{ij} definido por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

Intengrando respecto al tiempo:

$$T_v = 3\kappa \begin{bmatrix} \int \frac{\dot{J}_1}{3} dt & 0 & 0 \\ 0 & \int \frac{\dot{J}_1}{3} dt & 0 \\ 0 & 0 & \int \frac{\dot{J}_1}{3} dt \end{bmatrix} = \kappa \begin{bmatrix} \int \dot{J}_1 dt & 0 & 0 \\ 0 & \int \dot{J}_1 dt & 0 \\ 0 & 0 & \int \dot{J}_1 dt \end{bmatrix} \tag{5.11}$$

$$+\kappa_2 \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

Cuando el líquido se encuentra en reposo, el vector velocidad $\vec{v} = 0$ en todos los puntos:

$$T_v = \kappa_2 \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} ; \; T_0 = 0 \Rightarrow T_{ij} = T_v$$

Por lo tanto:

$$T_{ij} = \kappa_2 \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \text{; se trata de un fluido en reposo}$$

Para un fluido en reposo, en un punto particular de ese fluido, el elipsoide de Lamé degenera en una esfera de radio p; es decir, en cualquier plano que pase por el punto, siempre se tiene el mismo valor de los esfuerzos normales y no existen esfuerzos cortantes.

A "p" se le conoce como presión hidrostática actuando en un punto en particular del medio continuo y siempre resulta ser un esfuerzo de compresión.

La presión en el punto analizado resulta ser el peso de todas las partículas colocadas sobre el plano y representaría a una compresión que debe ser igual a los esfuerzos normales en cualquier otro plano que pase por el mismo punto.

En un fluido siempre se tienen esfuerzos residuales, los cuales pueden ser visualizados como aquellos que existen al iniciarse el movimiento.

Tomando en cuenta la ecuaciones (5.6), (5.8) y (5.10), obtenemos las leyes constitutivas para los fluidos lineales.

$$\sigma_{xx} = -p + 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{xx} - \frac{\dot{J}_1}{3}\right) + \kappa \int \dot{J}_1 \, dt \qquad (5.12)$$

$$\sigma_{yy} = -p + 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{yy} - \frac{\dot{J}_1}{3}\right) + \kappa \int \dot{J}_1 \, dt \qquad (5.13)$$

$$\sigma_{zz} = -p + 2\mu\left(\dot{\varepsilon}_{zz} - \frac{\dot{J}_1}{3}\right) + \kappa \int \dot{J}_1 \, dt \qquad (5.14)$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{5.15}$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{5.16}$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{5.17}$$

Donde κ *y* μ son los coeficientes de viscosidad volumétrica y desviadora del fluido respectivamente.

Para un fluido con viscosidad volumétrica nula, $\kappa = 0$ y dado que $3\kappa = (3\lambda + 2\mu) = 0$, entonces el coeficiente $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$, así las expresiones (5.12) a (5.17) pueden ser escritas como:

$$\sigma_{xx} = -p + \lambda \dot{J}_1 + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x} \tag{5.18}$$

De igual foma para σ_{yy} y σ_{zz}, se tiene:

$$\sigma_{yy} = -p + \lambda \dot{J}_1 + 2\mu \frac{\partial v_y}{\partial y} \tag{5.19}$$

$$\sigma_{zz} = -p + \lambda \dot{J}_1 + 2\mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{5.20}$$

$$\tau_{xy} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \tag{5.21}$$

$$\tau_{xz} = \mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \tag{5.22}$$

$$\tau_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y}\right) \tag{5.23}$$

5.2 Ecuaciones de equilibrio dinámico de partículas de fluidos

Por $\sum F_x = \rho a_x$, siendo a_x la componente del vector aceleración de las partículas en la dirección x, se tiene:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho F_x = \rho a_x \qquad (5.24)$$

Sustituyendo las ecuaciones (5.18), (5.21) y (5.22) en la (5.24), se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{-p + \lambda \dot{J}_1 + 2\mu \frac{\partial v_x}{\partial x}\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial vy}{\partial x}\right)\right\} +$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left\{\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial vz}{\partial x}\right)\right\} + \rho F_x = \rho a_x$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + \lambda \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + 2\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} +$$

$$\mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \rho\left(-a_x + F_x\right) = 0$$

Definiendo a:

$\rho a_x =$ Fuerza de inercia provocada por el movimiento.
$\rho F_x =$ Fuerzas de cuerpo (másicas) provocadas a distancia.

Se tiene que:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial y} + (\lambda + \mu)\frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial z} + \mu \nabla^2 v_x + \rho\left(-a_x + F_x\right) = 0$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{v})+\mu\nabla^2 v_x+\rho(-a_x+F_x)=0$$

Siendo $\operatorname{div}\bar{v}=\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}$, y dado que $\rho a_x=\rho\frac{\partial v_x}{\partial t}$, entonces:

$$\rho a_x=-\frac{\partial p}{\partial x}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\bar{v})+\mu\nabla^2 v_x+\rho F_x \qquad (5.25)$$

De manera similar, por $\sum F_y=\rho a_y$ y por $\sum F_z=\rho a_z$, siendo a_y y a_z las componentes del vector aceleración de las partículas en las direcciones y y z, respectivamente, se obtiene:

$$\rho a_y=-\frac{\partial p}{\partial y}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{div}\bar{v})+\mu\nabla^2 v_y+\rho F_y \qquad (5.26)$$

$$\rho a_z=-\frac{\partial p}{\partial z}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{div}\bar{v})+\mu\nabla^2 v_z+\rho F_z \qquad (5.27)$$

Multiplicando las ecuaciones (5.25), (5.26), y (5.27) por los vectores unitarios por $\bar{i}$, $\bar{j}$ y $\bar{k}$, respectivamente, y sumando miembro a miembro, se puede plantear:

$$\rho\bar{a}=\rho(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})$$

$$\rho\bar{a}=\operatorname{grad}p+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}+\mu\nabla^2\bar{v}+\rho\bar{F} \qquad (5.28)$$

La ecuación (5.28) recibe el nombre de *ecuación de Navier-Stokes.*

5.3 Interpretación física de la ecuación de Navier-Stokes

Tomando en cuenta que $\nabla^2 \bar{v} = \text{grad}\left(\text{div}\,\bar{v}\right) - \text{rot}\left(\text{rot}\,\bar{v}\right)$ y desarrollando el segundo miembro de esta ecuación, se tiene:

$$\text{grad}\left(\text{div}\,\bar{v}\right) = \bar{i}\left(\frac{\partial}{\partial x}\,\text{div}\,\bar{v}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial}{\partial y}\,\text{div}\,\bar{v}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial}{\partial z}\,\text{div}\,\bar{v}\right)$$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial z}\right) + \bar{j}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y\,\partial z}\right) +$$

$$\bar{k}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial y} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right)$$

Por otra parte:

$$\text{rot}\,\bar{v} = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{bmatrix} = \bar{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

$$\text{rot}\left(\text{rot}\,\bar{v}\right) = \begin{bmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial v_z}{\partial y} - \dfrac{\partial v_y}{\partial z} & -\dfrac{\partial v_z}{\partial x} + \dfrac{\partial v_x}{\partial z} & \dfrac{\partial v_y}{\partial x} - \dfrac{\partial v_x}{\partial y} \end{bmatrix} =$$

$$\bar{i}\left\{\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right) - \left(-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right) - \bar{j}\left\{\left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}\right) - \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y\,\partial z} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial z^2}\right)\right\}\right.$$

$$\bar{k}\left\{\left(-\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v_x}{\partial x\,\partial y}\right)-\left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 v_y}{\partial z\,\partial y}\right)\right\}$$

Por lo tanto:

$$\operatorname{grad}\left(\operatorname{div}\bar{v}\right)-\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\bar{v}\right)=\bar{i}\left(\nabla^2 v_x\right)+\bar{j}\left(\nabla^2 v_y\right)+\bar{k}\left(\nabla^2 v_z\right)=\nabla^2\bar{v} \qquad (5.29)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (5.29) en la (5.28), se obtiene:

$$\rho\,\bar{a}=-\operatorname{grad}p+\left(\lambda+\mu\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}+\mu\left(\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{v}\right)+\rho\,\bar{F}$$

$$\rho\,\bar{a}=-\operatorname{grad}p+\left(\lambda+2\,\mu\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}-\mu\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\bar{v}\right)+\rho\,\bar{F} \qquad (5.30)$$

Conocidas las fuerzas másicas $\bar{F}$, se puede llegar a conocer el campo de velocidades que se engendra en el medio continuo.

Para fluidos incompresibles, $\left(\operatorname{div}\bar{v}\right)=0$, e irrotacionales, $\left(\operatorname{rot}\bar{v}\right)=0$, por lo tanto, la ecuación de Navier se reduce a:

$$\rho\,\bar{a}=-\operatorname{grad}p+\rho\,\bar{F} \qquad (5.31)$$

Esta última ecuación es aplicable a problemas *hidrostáticos.*

Para fluidos solamente incompresibles:

$$\rho\,\bar{a}=-\operatorname{grad}p-\mu\operatorname{rot}\left(\operatorname{rot}\bar{v}\right)+\rho\,\bar{F} \qquad (5.32)$$

La ecuación (5.32) es aplicable a problemas *hidrodinámicos.*

P Problema resuelto 5.1

El recipiente que se muestra en la figura contiene un fluido de densidad ρ. Determine la presión hidrostática que se genera en el fondo del recipiente.

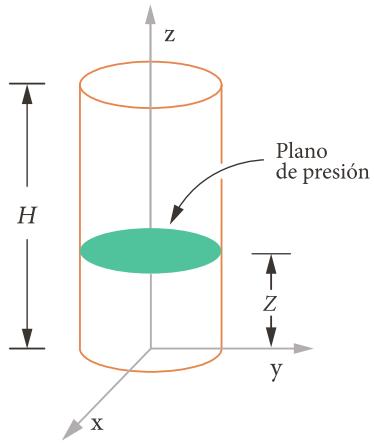


FIGURA 5.1.
Recipiente sometido a una presión hidrostática

Si el fluido está en reposo, $\bar{a}=0$, y la ecuación de Navier (5.30) se reduce a:

$$-\text{grad}\ p+\rho\bar{F}=0,\ \text{siendo}\ \bar{F}=-\bar{g}k$$

$$-\frac{\partial p}{\partial x}=0\ ;-\frac{\partial p}{\partial y}=0\ ;-\frac{\partial p}{\partial z}=\rho g$$

Integrando:

$$p=-\rho gz+c\ ;\quad \text{para:}\ z=H\ ;\quad p=0$$

$$0=-\rho gH+c\quad\Rightarrow\quad c=\rho gH$$

$$p=-\rho gz+\rho gH$$

$p=pg(H-z)$; esta ecuación muestra que la presión hidrostática tiene una variación lineal, siendo cero en $z=H$ y adquiere su valor máximo en $z=0$ (figura (5.1)).

5.4 Mecánica de los medios viscosos incompresibles (div $\bar{v} = 0$)

Para fluidos viscosos incompresibles la ecuación de Navier-Stokes (5.28) se reduce a la ecuación (5.32):

$$\rho \bar{a} = -\operatorname{grad} p + \mu \nabla^2 \bar{v} + \rho \bar{F}$$

Para comprender el significado físico de esta ultima expresión desarrollemos el primer miembro, sabiendo que: $\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}$, pero como el vector velocidad $\bar{v}$ es una función de x, y ,z y t, entonces:

$$dv_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} dt + \frac{\partial v_x}{\partial x} dx + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy + \frac{\partial v_x}{\partial z} dz$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

Pero como:

$$\frac{dx}{dt} = v_x \; ; \quad \frac{dy}{dt} = v_y \; ; \quad \frac{dz}{dt} = v_z$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z$$

$$= \frac{\partial v_x}{\partial t} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \right) + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z - \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x$$

Pero:

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x = v_x (\operatorname{grad} v_x),$$

$$a_x = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \operatorname{grad} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z - \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \qquad (5.33)$$

Para las componentes del vector aceleración en los sentidos y y z, se puede obtener una ecuación similar a la (5.33), esto es:

$$a_y = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_y \operatorname{grad} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} v_x - \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z - \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y \qquad (5.34)$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_z \operatorname{grad} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} v_x - \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y - \frac{\partial v_z}{\partial y} v_z \qquad (5.35)$$

Multiplicando la ecuación (5.33) por $\bar{i}$, la (5.34) por $\bar{j}$ y la (5.35) por $\bar{k}$ y sumando miembro a miembro se obtiene:

$$\bar{a} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \left[(v_x \operatorname{grad} v_x)\bar{i} + (v_y \operatorname{grad} v_y)\bar{j} + (v_z \operatorname{grad} v_z)\bar{k} \right] +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} v_y - \frac{\partial v_x}{\partial y} v_x + \frac{\partial v_x}{\partial z} v_z - \frac{\partial v_x}{\partial z} v_x \right) \bar{i} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} v_x - \frac{\partial v_y}{\partial x} v_y + \frac{\partial v_y}{\partial z} v_z - \frac{\partial v_y}{\partial z} v_y \right) \bar{j} +$$

$$+ \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} v_x - \frac{\partial v_z}{\partial x} v_z + \frac{\partial v_z}{\partial y} v_y - \frac{\partial v_z}{\partial y} v_z \right) \bar{k}$$

En esta última ecuación, el término:

$$(v_x \operatorname{grad} v_x)\,\bar{i} + (v_y \operatorname{grad} v_y)\,\bar{j} + (v_z \operatorname{grad} v_z)\,\bar{k} = \operatorname{grad} \frac{\bar{v}^2}{2}$$

Por otra parte, se puede demostrar que:

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y}v_y-\frac{\partial v_x}{\partial y}v_x+\frac{\partial v_x}{\partial z}v_z-\frac{\partial v_x}{\partial z}v_x\right)\bar{i}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}v_x-\frac{\partial v_y}{\partial x}v_y+\frac{\partial v_y}{\partial z}v_z-\frac{\partial v_y}{\partial z}v_y\right)\bar{j}$$

$$+\left(\frac{\partial v_z}{\partial x}v_x-\frac{\partial v_z}{\partial x}v_z+\frac{\partial v_z}{\partial y}v_y-\frac{\partial v_z}{\partial y}v_z\right)\bar{k}=(\text{rot}\,\bar{v})\times(\bar{v})$$

$$\therefore\qquad \bar{a}=\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\text{grad}\left(\frac{\bar{v}^2}{2}\right)+(\text{rot}\,\bar{v})\times(\bar{v}) \tag{5.36}$$

La ecuación (5.36) muestra que la aceleración $\bar{a}$, del fluido viscoso incompresible, es la suma de tres aceleraciones: la *local,* $(\partial\bar{v}/\partial t)$; la *convectiva,* grad $(\bar{v}^2/2)$; y la de *Coriolis,* $(\text{rot}\,\bar{v})\times(\bar{v})$.

5.5 Funciones potenciales para derivar las fuerzas másicas de partículas de un fluido

Sustituyendo la ecuación (5.36) en la ecuación de Navier-Stokes para fluidos incompresibles (5.32) y aceptando que las fuerzas másicas puedan ser derivadas de un potencial, Φ, esto es:

$$\bar{F}=\text{grad}\,\Phi$$

Entonces:

$$\rho\left(\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\text{grad}\left(\frac{1}{2}\bar{v}^2\right)+(\text{rot}\,\bar{v})\times(\bar{v})\right)=\rho\ \text{grad}\,\Phi+\mu\nabla^2\bar{v}-\text{grad}\,p$$

Acomodando términos, se tiene:

$$\text{grad}\left(\frac{1}{2}\rho\overline{v}^2-\rho\,\Phi+p\right)+\rho\left(\text{rot}\,\overline{v}\right)\times\left(\overline{v}\right)-\mu\nabla^2\overline{v}=-\rho\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}$$

Llamando:

$$\frac{1}{2}\rho\overline{v}^2-\rho\,\Phi+p=\overline{E} \tag{5.37}$$

Siendo $\overline{E}$ la energía mecánica específica:

$$\rho\,\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\text{grad}\,\overline{E}+\rho\left(\text{rot}\,\overline{v}\right)\times\left(\overline{v}\right)-\mu\nabla^2\overline{v}=0$$

Dado que:

$$\nabla^2\,\overline{v}=\text{grad}\left(\text{div}\,\overline{v}\right)-\text{rot}\left(\text{rot}\,\overline{v}\right)$$

Y considerando un fluido incompresible, es decir, $\text{div}\,\overline{v}=0$. La ecuación de Navier-Stokes se puede escribir como:

$$\frac{\partial\overline{v}}{\partial t}+\text{grad}\,\frac{\overline{E}}{\rho}+\left(\text{rot}\,\overline{v}\right)\times\left(\overline{v}\right)=-\,\frac{\mu}{\rho}\,\text{rot}\left(\text{rot}\,\overline{v}\right) \tag{5.38}$$

En esta última ecuación el término $\left(\partial\overline{v}/\partial t\right)$ representa la aceleración local, $\text{grad}\left(\overline{E}/\rho\right)$ la aceleración convectiva y $\left(\text{rot}\,\overline{v}\right)\times\left(\overline{v}\right)$ la de Coriolis. La aceleración local es la que puede observarse en un volumen de control sumamente pequeño, determinando la variación con el tiempo de las velocidades de las partículas que pasan sucesivamente por él. La aceleración convectiva resulta de la variación en magnitud de la velocidad de las partículas a lo largo de sus trayectorias, sin tener en cuenta el efecto de cambios de dirección. La aceleración de Coriolis resulta de los

cambios de dirección, por tanto suele aparecer en movimientos curvilíneos, en particular en los giratorios.

La ecuación de Navier-Stokes establece que la energía que se suministra a un fluido sirve para establecer un campo de velocidades y un campo vorticoso, esto es, parte de la energía se emplea para trasladar a las partículas y otra parte para generar movimientos de rotación.

Para visualizar el flujo de los fluidos incompresibles hace usos de:

a) *Líneas de corriente* (o de flujo). Lugar geométrico de los puntos en los cuales la tangente en un punto coincide con la dirección del vector velocidad $\overline{v}$ en ese punto.
b) *Líneas vorticosas.* Lugar geométrico de los puntos en los cuales la tangente en un punto coincide con la dirección del vector rot $\overline{v}$ en ese punto. Toda superficie cubierta completamente por líneas vorticosas se llama *superficie vorticosa.*

Se puede afirmar que a lo largo de toda linea de corriente y de toda linea vorticosa la energía mecanica específica $\overline{E}$ es constante. El lugar geometrico de los puntos del espacio en los cuales la energía mecánica específica, adquiere un valor constante se llama *superficie isoenergética;* una para cada valor $\overline{E}$ = constante.

Si se considera a una superficie, engendrada por todas las lineas de flujo que pasan por una curva, se forma lo que se conoce como *tubo de corriente.*

Consideremos un tubo de corriente limitado por una superficie de flujo y dos secciones A_1 y A_2, definidas por los vectores unitarios n_1 y n_2.

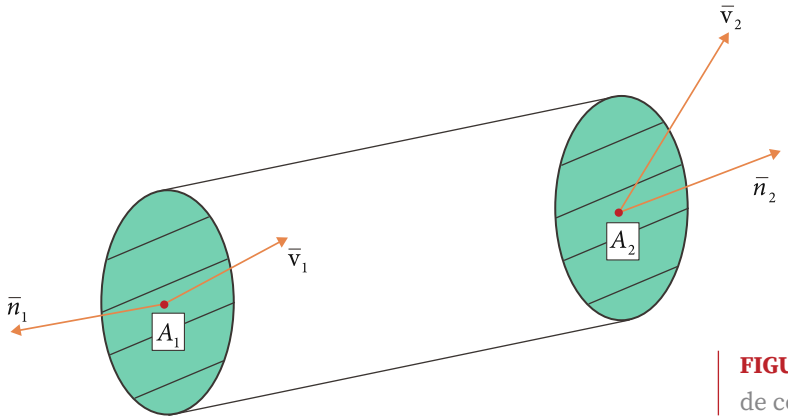


FIGURA 5.2 Tubo de corriente

Dentro de la superficie interior se encuentra un volumen de fluido incompresible que debe satisfacer en cada punto la condición:

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v}\, d\bar{v} = 0 \tag{5.39}$$

Se puede demostrar que (teorema de Gauss):

$$\int_V \operatorname{div} \bar{v}\, d\bar{v} = \int_A \bar{v}\, \bar{n}\, dA$$

$$= \int_{A_1} (\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1)\, dA_1 - \int_{A_2} (\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2)\, dA_2 = 0 \tag{5.40}$$

$$\int_{A_1} (\bar{v}_1 \cdot \bar{n}_1)\, dA_1 = \int_{A_2} (\bar{v}_2 \cdot \bar{n}_2)\, dA_2 = Q = (\text{gasto o caudal})$$

De manera similar puede hablarse de *intensidad de un tubo vorticoso* definida por:

$$H = \int_A (\operatorname{rot} \bar{v} \cdot \bar{n})\, dA$$

En un tubo vorticoso $H = \Gamma$, siendo esta última la circulación.

Las características de un flujo en términos del campo de velocidades y del campo vorticoso pueden ser visulizadas en una vena líquida. Las intensidades de las velocidades y de los torbellinos están relacionadas con el gasto y la circulación, respectivamente.

5.6 Flujos laminares

En fluidos viscosos incompresibles que se mueven a baja velocidad en planos paralelos, en los cuales las aceleraciones son prácticamente nulas, se asume que se ha establecido un flujo laminar. Aplicando a este flujo la ley de Navier-Stokes se tiene:

$$\rho\bar{a} = -\operatorname{grad} p + \rho\bar{F} + \mu\nabla^2\bar{v}$$

Pero como $\bar{a}$ es casi nula.

$$-\operatorname{grad} p + \rho\bar{F} + \mu\nabla^2\bar{v} = 0$$

Si no se considera el efecto de peso propio.

$$-\operatorname{grad} p + \mu\nabla^2\bar{v} = 0$$

$$\operatorname{grad} p = \mu\nabla^2\bar{v} \qquad (5.41)$$

Ecuación que define el movimiento de *flujos laminares sin fuerzas másicas.*

La ecuación (5.41) puede ser simplificada recurriendo a la siguiente operación:

$$\operatorname{grad} p = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}\right) p$$

Como el flujo es laminar:

$$\text{rot}\left(\text{grad}\, p\right) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} & \dfrac{\partial p}{\partial y} & \dfrac{\partial p}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \bar{i}\left(\frac{\partial p}{\partial y \partial z} - \frac{\partial p}{\partial y \partial z}\right) - \bar{j}\left(\frac{\partial p}{\partial x \partial z} - \frac{\partial p}{\partial x \partial z}\right) + \bar{k}\left(\frac{\partial p}{\partial x \partial y} - \frac{\partial p}{\partial x \partial y}\right) = 0$$

Si se toma el el operador rotacional de ambos miembros de la ecuación de Navier-Stokes, se tiene:

$$\text{rot}\left(\text{grad}\, p\right) = \mu\ \text{rot}\left(\nabla^2 \bar{v}\right) = 0$$

$$\nabla^2\ \text{rot}\, \bar{v} = 0 \qquad (5.42)$$

Considerando que $\bar{v}$ sea función sólo de x y de y, entonces:

$$\text{rot}\, \bar{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \bar{k} \begin{vmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \bar{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Ahora, aceptemos la existencia de una función potencial $\psi = \psi(x, y)$, tal que:

$$v_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \ ; \quad v_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$$\text{rot}\, \bar{v} = \bar{k}\left(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}\right) = -k \nabla^2 \psi \qquad (5.43)$$

Sustituyendo la ecuación (5.43) en la (5.42), se llega a:

$$\nabla^2\left(-k\ \nabla^2\psi\right)=0$$

$$\nabla^4\psi=0 \qquad (5.44)$$

En todos los flujos laminares en donde las fuerzas másicas no se consideren, se puede demostrar que el campo de velocidades $v=v_x\bar{i}+v_y\bar{j}$ queda definido por la función de corriente $\psi=\psi\left(x,\,y\right)$, la cual debe ser una *función biarmónica.*

5.7 Clasificación de los flujos en términos del tipo de función potencial

Es posible establecer diversos tipos de flujo a partir de funciones continuas $\psi\left(x,\,y\right)$. *Cuando las funciones son armónicas, los flujos son laminares irrotacionales, mientras que cuando la función de corriente es biarmónica el flujo es rotacional.*

Así, la solución de la ecuación:

$$-\operatorname{grad}p+\left(\lambda+\mu\right)\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{v}+\mu\nabla^2\bar{v}+\rho\bar{f}=\rho\,\bar{a}$$

Cuando se tienen las siguientes condiciones

a) Sólo existen componentes v_x y v_y en el flujo
b) El fluido es incompresible $\left(\operatorname{div}\bar{v}=0\right)$
c) $\bar{a}=\bar{f}=0$
d) $\nabla^2\ \operatorname{rot}\bar{v}=0$

la solución de la ecuación de Navier-Stokes conduce a un flujo laminar.

La existencia de flujos laminares definidos por funciones de corriente $\psi(x, y)$ permite visualizar muy facilmente las trayectorias de las partículas del fluido, como se muestra en la figura (5.3).

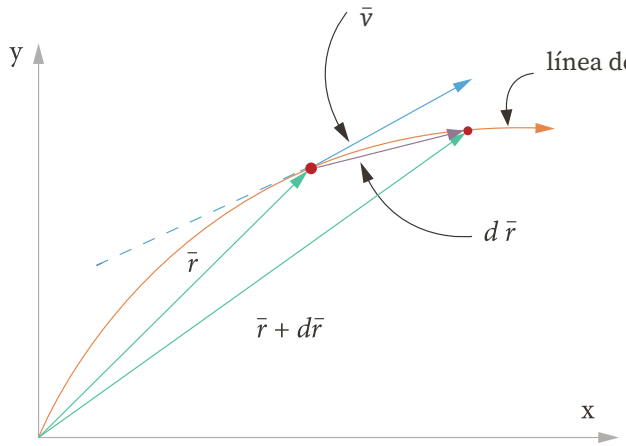


FIGURA 5.3
Líneas de flujo o de corriente

Para que $\bar{v}$ sea tangente a la trayectoria se debe cumplir que:

$$\bar{v} \times d\bar{r} = 0$$

Dado que se trata de flujo bidimensional:

$$v_z = 0 \;\Rightarrow\; \bar{v} = v_x \bar{i} + v_y \bar{j}$$

$$dz = 0 \;\Rightarrow\; d\bar{r} = dx\,\bar{i} + dy\,\bar{j}$$

$$\bar{v} \times d\bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ v_x & v_y & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \bar{k}(v_x\,dy - v_y\,dx) = 0$$

Pero:

$$v_x\,dy - v_y\,dx = \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}\,dx = 0$$

$$\rightarrow\ d\psi = 0 \quad \therefore \quad \psi = \text{cte.}$$

Este resultado implica que el vector velocidad $\bar{v}$ será tangente en un punto de la trayectoria si $\psi = cte$, por lo tanto, las líneas $\psi = cte$ constituyen las trayectorias reales del fluido, conocidas como líneas de corriente o de flujo.

El conocimiento de las lineas de corriente conduce a algunas soluciones de gran utilidad en la mecánica de fluidos, que tienen que ver con la evaluación de gastos, velocidades, gradientes hidráulicos, etc.

Aceptemos la existencia de dos lineas de corriente vecinas, tal como se muestra en la figura (5.4).

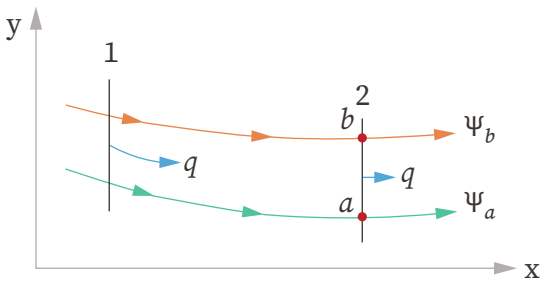


FIGURA 5.4 Gasto entre dos líneas de corriente

En la sección se puede valuar el gasto entre las dos lineas de corriente como:

$$q = \int_a^b v_x\,dA = \int_a^b \frac{\partial \psi}{\partial y}\,dy = (\psi_b - \psi_a) = \text{cte.} \qquad (5.45)$$

La ecuación (5.45) muestra que el gasto entre dos lineas de corriente es una *constante*.

Se ha demostrado a lo largo del capítulo que para deducir las ecuaciones que rigen el comportamiento de los fluidos lineales (ecuaciones de Navier-Stokes), se puede seguir un procedimiento similar al que se estableció para los materiales elásticos lineales (ecuaciones de Navier-Cauchy), manejando en el caso de los fluidos el concepto de tensor rapidez de deformación (la derivada del tensor deformación E_{ij} respecto al tiempo) e introduciendo las constantes viscosas que caracterizan al fluido. Los casos particulares de las ecuaciones de Navier-Stokes y su solución se estudian en los cursos de Mecánica de Fluidos, Hidráulica (Hidrostática e Hidrodinámica) y Flujo de Agua en Suelos y Rocas.

CAPÍTULO

6 Viscoelasticidad

Introducción

Los materiales viscoelásticos son aquellos cuya respuesta depende tanto de sus características elásticas como viscosas, tal es el caso de algunos plásticos, materiales sintenticos, asfaltos y ciertos geomateriales. Las condiciones de temperatura en estos materiales influye de manera relevante en su comportamiento cuando se someten a un estado de esfuerzo.

En este capítulo se establecen algunos modelos mecánicos simples que permiten describir el comportamiento de los materiales viscoelasticos y se dan las bases teóricas para la aplicación del Principio de correspondencia, que permite resolver problemas viscoelásticos, conocida la respuesta elástica del fenómeno estudiado.

Finalmente se presentan algunos ejemplos ilustrativos relativos al tema abordado.

6.1 Modelos Mecánicos simples

En el capítulo 4 (Teoría de la Elasticidad) de esta obra se estableció que cuando un cuerpo deformable se somete a solicitaciones de diferente naturaleza, se producen estados de esfuerzos en los diferentes puntos materiales del cuerpo, los cuales a su vez producen estados de deformaciones. Cuando las deformaciones resultantes no dependen del tiempo, los esfuerzos y las deformaciones se pueden relacionar mediante operadores diferenciales lineales que son independientes del tiempo, tal es el caso de la teoría de la elasticidad y de la plasticidad. En el primer caso la unidad reológica fundamental que representa las deformaciones recuperables o reversibles es un "resorte", de rigidez conocida G, (Unidad de Hooke, figura (6.1a)), en tanto que en el segundo caso la unidad reológica fundamental está constituida por un "patín" que representa las deformaciones no recuperables o irreversibles (Unidad de Coulomb), que se manifiestan cuando se alcanza un valor límite del esfuerzo cortante representado por τ_u (figura (6.1b)). Dado que en este capítulo se estudia sólo el comportamiento viscoelástico de los medios continuos, esta última unidad básica tiene poco interés por el momento.

Cuando las deformaciones son función del tiempo, los operadores diferenciales lineales lo serán también, por lo que los tensores esfuerzo en los diferentes puntos materiales del medio continuo se relacionarán ahora con los tensores rapidez de defomación correspondientes (Ec. 5.9), siendo la unidad reológica fundamental un "amortiguador", de características viscosas lineales representadas por la letra η (viscosidad dinámica) conocida como Unidad de Newton (figura (6.2)).

En el caso de los materiales viscoelásticos, su comportamiento mecánico se puede estudiar a partir de la unidad fundamental de Newton, combinándola en paralelo o en serie, con las unidades de Hooke y de

Coulomb, dando origen de esta manera a otros modelos simples de comportamiento (Fluido de Maxwell, Sólido de Kelvin-Voigt, Modelo de Burgers, otros).

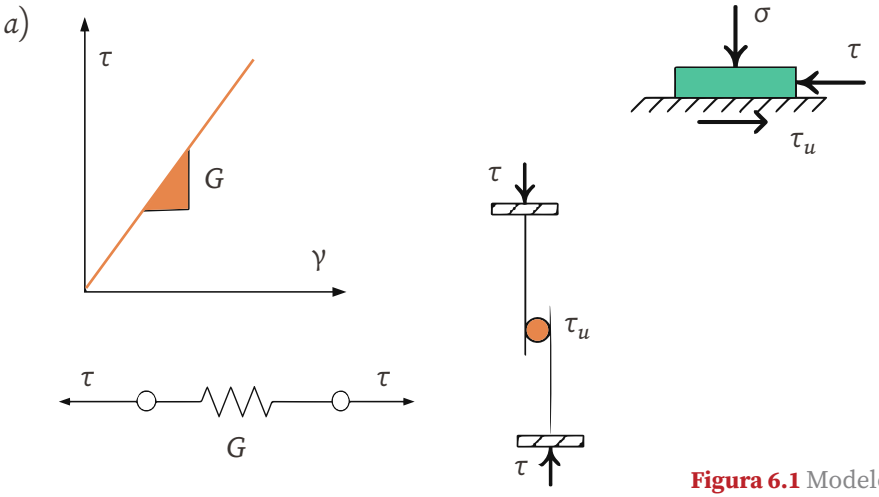


Figura 6.1 Modelos mecánicos simples: a) Unidad de Hooke; b) Unidad de Coulomb

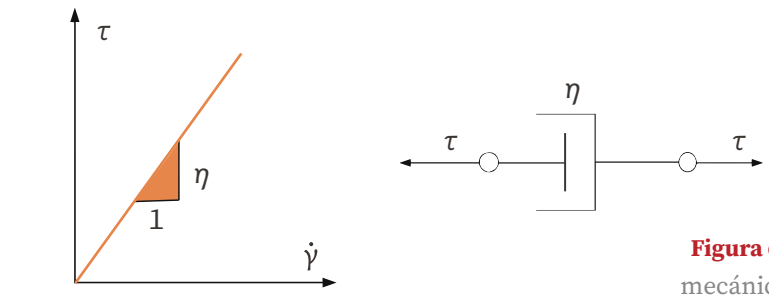


Figura 6.2 Modelos mecánicos simples: Unidad de Newton

6.1.1 Fluido de Maxwell

Cuando una unidad de Hooke se combina en serie con una unidad de Newton, se obtiene un modelo de comportamiento conocido como fluido de Maxwell (figura (6.3a)). Dado que la deformacion angular del modelo será la suma de las deformaciones de cada unidad, en tanto que los esfuerzos son los mismos, y, tomando en cuenta las ecuacion 4.16, se tiene:

$$\gamma = \gamma_H + \gamma_N \tag{6.1}$$

Siendo γ_H y γ_N las deformaciones angulares en las unidades de Hooke y de Newton, respectivamente.

Derivando con respecto al tiempo la ecuación (6.1) y sustituyendo los valores de las deformaciones, se tiene:

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\tau}}{G_M} + \frac{\tau}{\eta_M} \tag{6.2}$$

Definiendo a $t^*_M = (\eta_M / G_M)$ como el *tiempo de retardo* en el modelo de Maxwell, la ecuación (6.2), toma la forma:

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{t^*_M} \right\} \tau = \left\{ G \frac{d}{dt} \right\} \gamma \tag{6.3}$$

La ecuación (6.3) es la *ecuación constitutiva del fluido de Maxwell*, cuya solución permite conocer la relación esfuerzo-deformación del modelo en función del tiempo.

6.1.2 Modelo de Kelvin-Voigth

Si se combina una unidad de Hooke con una unidad de Newton en paralelo, se obtiene lo que se conoce como el modelo de Kelvin-Voigt (figura (6.3b)). En este caso las deformaciones del modelo serán las mismas en tanto que los esfuerzos serán la suma de cada unidad. Por lo tanto se puede establecer la siguiente ecuación:

$$\tau = \tau_H + \tau_N \tag{6.4}$$

Sustiuyendo los esfuerzos en términos de las deformaciones en las unidades de Hooke y de Newton, se llega a:

$$\tau = \left\{ G_K + \eta_K \frac{d}{dt} \right\} \gamma \tag{6.5}$$

La ecuación (6.5) es la ecuación constitutiva del modelo de Kelvin-Voigt, cuya solución permite conocer la relación esfuerzo-deformación del modelo en función del tiempo.

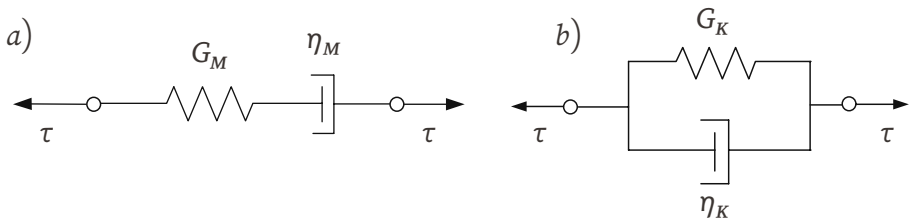


Figura 6.3 Modelos reológicos: a) Fluido de Maxwell, b) Modelo de Kelvin-Voigt

El modelo de Maxwell se puede generalizar conectando *N* unidades en paralelo, obteniéndose como ecuación constitutiva (figura (6.4)):

$$\tau = \frac{G_1\dot{\gamma}}{\frac{d}{dt}+\frac{1}{t^*_{M_1}}} + \frac{G_2\dot{\gamma}}{\frac{d}{dt}+\frac{1}{t^*_{M_2}}} + \cdots + \frac{G_N\dot{\gamma}}{\frac{d}{dt}+\frac{1}{t^*_{M_N}}} \tag{6.6}$$

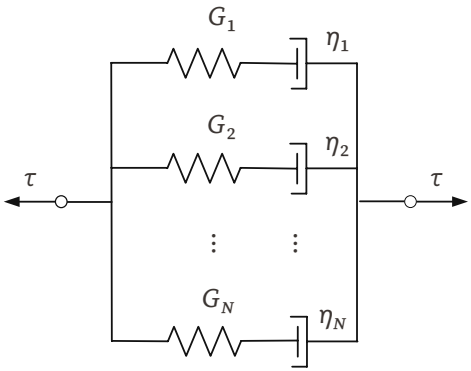


Figura 6.4 Modelo de Maxwell generalizado

En el caso del modelo de Kelvin-Voigt, este se puede gereralizar conectando N unidades en serie, obteniéndose como ecuación constitutiva (figura (6.5)):

$$\tau = \frac{\tau}{G_1+\eta_1+\frac{d}{dt}} + \frac{\tau}{G_2+\eta_2+\frac{d}{dt}} + \cdots + \frac{\tau}{G_N+\eta_N+\frac{d}{dt}} \tag{6.7}$$

Estos modelos generalizados permiten describir de manera más racional la respuesta de los materiales cuando se someten a ciertas solicitaciones, sin embargo, siguen siendo una representación aproximada del comportamiento real de los materiales, por lo que tienen que ser ajustados en función de la evidencia experimental.

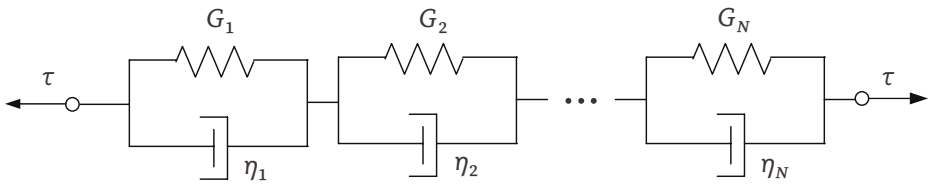


Figura 6.5 Modelo de Kelvin-Voigt generalizado

6.1.3 Modelo de Bourgers

Cuando un cuerpo de Kelvin se combina en serie con un fluido de Maxwell, se obtiene lo que se conoce como un cuerpo de Bourgers (figura (6.6)).

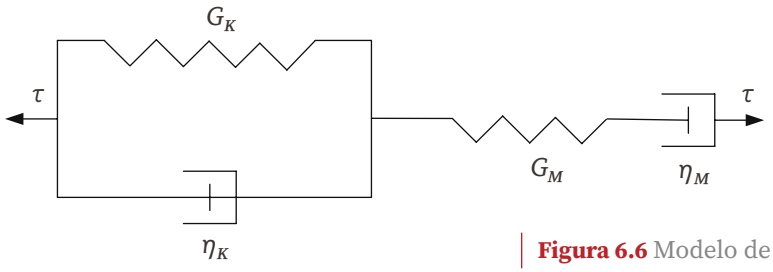


Figura 6.6 Modelo de Bourgers

Para encontrar la ecuación constitutiva del cuerpo de Bourgers, es suficiente con sumar la deformación del cuerpo de Kelvin con la del fluido de Maxwell, esto es:

$$\gamma = \gamma_K + \gamma_M \tag{6.8}$$

La ecuación constitutiva para el cuerpo de Kelvin está dada por la ecuación (6.5), siendo:

$$\tau_K = \left\{ G_K + \eta_K \frac{d}{dt} \right\} \gamma_K \tag{6.5}$$

En el caso del fluido de Maxwell, se tiene (Ec. 6.3):

$$\left\{ \frac{d}{dt} + \frac{1}{t_M^*} \right\} \tau_M = \left\{ G_M + \frac{d}{dt} \right\} \gamma_M \tag{6.3}$$

Por estar el cuerpo de Kelvin y el fluido de Maxwell en serie, se debe cumplir que:

$$\tau = \tau_K = \tau_M \tag{6.9}$$

Despejando la deformación γ_K de la ecuación (6.5), se obtiene:

$$\gamma_K = \frac{\tau_K}{G_K + \eta_K \dfrac{d}{dt}} \tag{6.10}$$

Si ahora se despeja la deformación γ_M de la ecuación (6.3), se tiene:

$$\gamma_M = \frac{\dot{\tau}_M + \dfrac{\tau_M}{t^*_M}}{G_M \dfrac{d}{dt}} \tag{6.11}$$

Desarrollando la ecuación anterior, se obtiene:

$$\gamma_M = \frac{t^*_M \dot{\tau}_M + \tau_M}{G_M \dfrac{d}{dt} t^*_M} \tag{6.12}$$

Dado que: $t^*_M = \dfrac{\eta_M}{G_M}$

$$\gamma_M = \frac{t^*_M \dot{\tau}_M + \tau_M}{\eta_M \dfrac{d}{dt}} \tag{6.13}$$

Sustituyendo las ecuaciones (6.10) y (6.13) en (6.8) y tomando en cuenta la ecuación (6.9), se obtiene:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_K + \eta_K \frac{d}{dt}} + \frac{t_M^* \dot{\tau} + \tau}{\eta_M \frac{d}{dt}} \tag{6.13}$$

Por lo que:

$$\gamma = \frac{\eta_M \dot{\tau} + \left(G_K + \eta_K \frac{d}{dt}\right)\left(t_M^* \dot{\tau} + \tau\right)}{\eta_M \frac{d}{dt}\left(G_K + \eta_K \frac{d}{dt}\right)} \tag{6.14}$$

Desarrollando 6.14, se obtiene:

$$\gamma = \frac{\eta_M \dot{\tau} + G_K t_M^* \dot{\tau} + G_K \tau + \eta_K t_M^* \ddot{\tau} + \eta_K \dot{\tau}}{\left(\eta_M G_K \frac{d}{dt} + \eta_M \eta_K \frac{d^2}{dt^2}\right)} \tag{6.15}$$

Desarrollando 6.15:

$$\eta_M G_K \dot{\gamma} + \eta_M \eta_K \ddot{\gamma} = \ddot{\tau} \eta_K \frac{\eta_M}{G_M} + \dot{\tau}\left(\eta_M + G_K t_M^* + \eta_K\right) + \tau G_K$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación anterior por $\frac{G_M}{\eta_M}$, se obtiene:

$$\ddot{\gamma} G_M \eta_K + \dot{\gamma} G_M G_K = \eta_K \ddot{\tau} + \dot{\tau}\left(G_M + G_K + \frac{\eta_K}{t_M^*}\right) + \left(\frac{G_K}{t_M^*}\right) + \tau \tag{6.16}$$

La ecuación (6.16) representa la *ecuación constitutiva del cuerpo de Bourgers.*

Si ambos miembros de la ecuación (6.16) se dividen por $\frac{G_K}{t_M^*}$, y tomando en cuenta que $t_M^* = \frac{\eta_M}{G_M}$, se obtiene:

$$\ddot{\gamma}\left(\frac{\eta_M\eta_K}{G_K}\right)+\dot{\gamma}\left(\eta_M\right)=\ddot{\tau}\left(\frac{\eta_K\eta_M}{G_KG_M}\right)+\dot{\tau}\left(\frac{\eta_MG_M+G_K\eta_M+\eta_KG_M}{G_KG_M}\right)+\tau$$

Desarrollando esta última ecuación:

$$\ddot{\gamma}\left(\frac{\eta_M\eta_K}{G_K}\right)+\dot{\gamma}\left(\eta_M\right)=\ddot{\tau}\left(\frac{\eta_K\eta_M}{G_KG_M}\right)+\dot{\tau}\left(\frac{\eta_M}{G_K}+\frac{\eta_M}{G_M}+\frac{\eta_K}{G_K}\right)+\tau \qquad (6.17)$$

Llamando:

$$P_2=\frac{\eta_K\eta_M}{G_KG_M};\quad P_1=\left(\frac{\eta_M}{G_K}+\frac{\eta_M}{G_M}+\frac{\eta_K}{G_K}\right);\quad q_2=\frac{\eta_M\eta_K}{G_K};\quad q_1=\eta_M \qquad (6.18)$$

La ecuación (6.17) toma la forma:

$$P_2\ddot{\tau}+P_1\dot{\tau}+\tau=q_2\ddot{\gamma}+q_1\dot{\gamma} \qquad (6.19)$$

Esta última ecuación relaciona la componente desviadora T_o del tensor esfuerzo T_{ij} con la componente desviadora E_o del tensor deformación E_{ij}, que en notación tensorial toma la forma $P_oT_o=Q_oE_o$, siendo:

$$P_o=\left(P_2\frac{d^2}{dt^2}+P_1\frac{d}{dt}+1\right) \qquad (6.20)$$

$$Q_o=\left(q_2\frac{d^2}{dt^2}+q_1\frac{d}{dt}\right) \qquad (6.21)$$

De las ecuaciones (6.20) y (6.21), se puede identificar que P_o y Q_o son dos operadores matemáticos que dependen del tiempo.

6.2 Fenómeno de Creep y Relajación

El fenómeno de *creep* tiene lugar cuando una probeta de material deformable al ser sometida a un estado de cortante puro de magnitud τ_0, aplicado este de manera instantanea, la deformación angular correspondiente es una función del tiempo, $\gamma(t)$. La *relajación* en cambio se manifiesta cuando a una probeta de un material deformable se le impone un estado de deformación desviador de magnitud γ_0, aplicado este de manera instantánea, y el esfuerzo cortante correspondiente es una función del tiempo $\tau(t)$. En este último caso, como el esfuerzo cortante resultante disminuye en función del tiempo, el fenómeno también se identifica como *relajación de esfuerzos*.

Desde un punto de vista matemático ambos fenómenos se pueden estudiar haciendo uso de una función escalonada unitaria $U(t-t_1)$ definida como (figura (6.7) a y b):

$$U(t-t_1)=\begin{cases}1 & t>t_1\\ 0 & t\le t_1\end{cases} \tag{6.22}$$

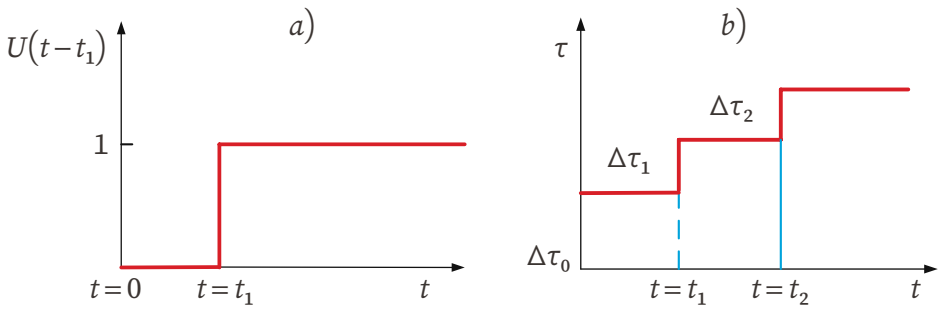


Figura 6.7 Fenómeno de creep: a) función escalonada unitaria o función de Dirac; b) función escalonada generalizada

Si el esfuerzo se aplica de manera instantanea en $t=0$, este se puede representar como:

$$\tau = \tau_0 U(t) \tag{6.23}$$

Sustituyendo la ecuación (6.23) en la ecuación constitutiva del modelo de Kelvin-Voigt (ecuación (6.5)), se llega a la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d\gamma}{dt} + \frac{1}{t^*_K}\gamma = \frac{\tau_0}{\eta_K} U(t) \tag{6.24}$$

Resolviendo la ecuación diferencial 6.24, se obtiene:

$$\gamma(t) = \tau_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{t^*_K}}\right) \frac{U(t)}{G_K} \tag{6.25}$$

De la ecuación (6.25) se observa que cuando $t=\infty$ la deformación alcanza un valor límite igual a $\gamma(t=\infty) = \tau_0/G_K$, mientras que para $t=0$ la tasa de deformación resulta igual a $\dot{\gamma} = \tau_0/\eta_K$, lo cual significa que si el fenómeno de creep continuara a esta tasa de deformación, en $t = t^*_K$ se alcanzaría el valor final, esto es la intersección de la pendiente $\dot{\gamma}$ en $t=0$ con el valor límite de $\gamma(t=\infty) = \tau_0/G_K$, razón por la cual t^*_K recibe el nombre de *tiempo de retardo*.

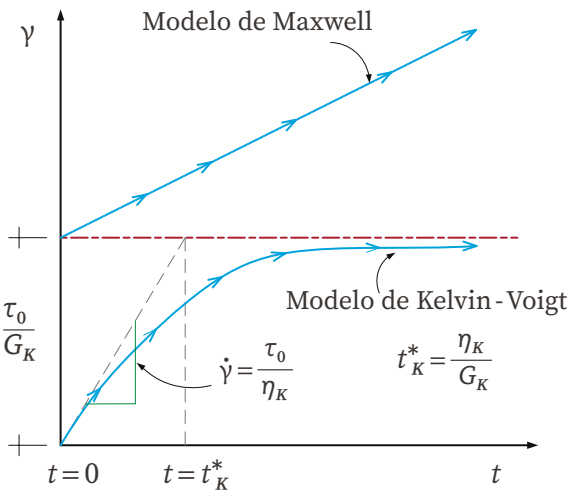


Figura 6.8 Definición de tiempo de retardo t^*_K en el modelo de Kelvin-Voigt

La ecuación (6.25) puede ser escrita como:

$$\gamma(t) = J(t)\,\tau_0\,U(t) \tag{6.26}$$

Ecuación en la cual $J(t)$ recibe el nombre de *función de creep*, cuyo valor es:

$$J(t) = \frac{\left(1 - e^{-\frac{t}{t_K^*}}\right)}{G_K} = J\left(1 - e^{-\frac{t}{t_K^*}}\right) \tag{6.27}$$

En esta última ecuación $J = 1/G_K$ recibe el nombre de *módulo de deformación unitaria al esfuerzo cortante*.

En general, la función de creep para cualquier modelo viscoelástico, formado por combinaciones en serie o en paralelo de las unidades fundamentales de Hooke y de Newton, se puede expresar como la suma de las funciones de creep de cada uno de sus elementos. Así, para un sólido de tres parámetros, por ejemplo, las unidades de Kelvin y Hooke en serie, dicha función resulta:

$$J(t) = J_1\left(1 - e^{-\frac{t}{t_K^*}}\right) + J_2 \tag{6.28}$$

En el caso del modelo de Kelvin-Voigt generalizado, se tiene:

$$J(t) = \sum_{i=1}^{N} J_i\left(1 - e^{-\frac{t}{t_{K_i}^*}}\right) \tag{6.29}$$

El fenómeno de creep en el modelo de Maxwell se puede estudiar de manera similar a lo que se hizo con el modelo de Kelvin-Voigt, haciendo

uso de su ecuación constitutiva correspondiente (ecuación (6.3)), y definiendo una función $\delta(t)$ como:

$$\delta(t-t_1)=\frac{dU(t-t_1)}{dt} \tag{6.30}$$

La cual debe cumplir con las siguientes condiciones:

$$\delta(t-t_1)=0, \quad \text{para} \quad t\neq t_1 \tag{6.31}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-t_1)\,dt=1 \tag{6.32}$$

La ecuación (6.32) recibe el nombre de *función impulso unitaria* o *función delta de Dirac*. Esta función es nula en cualquier parte excepto para $t=t_1$, donde alcanza un pico indeterminado. Para una función continua $f(t)$, se puede demostrar que para t' como variable de integración:

$$\int_{-\infty}^{t}f(t')\,\delta(t'-t_1)\,dt'=f(t_1)\,U(t-t_1) \quad \text{si} \quad t>t_1 \tag{6.33}$$

Tomando en cuenta la definición de función impulso unitaria, la ecuación (6.3) puede ser escrita como:

$$\dot{\gamma}=\tau_0\frac{\delta(t)}{G_M}+\tau_0\frac{U(t)}{\eta_M} \tag{6.34}$$

Integrando la ecuación (6.34), se obtiene:

$$\gamma=\int_{-\infty}^{t}\tau_0\frac{\delta(t)}{G_M}\,dt+\int_{-\infty}^{t}\tau_0\frac{U(t)}{\eta_M}\,dt \tag{6.35}$$

$$\gamma = \frac{\tau_0}{G_M} U(t) + \frac{\tau_0}{\eta_M} U(t)\, t \tag{6.36}$$

$$\gamma(t) = \tau_0 J \left(1 + \frac{t}{t^*_M}\right) U(t) \tag{6.37}$$

De donde la función de creep de Maxwell resulta:

$$J(t) = J \left(1 + \frac{t}{t^*_M}\right) \tag{6.38}$$

Si se realiza una prueba de laboratorio a un material que se comporta de acuerdo al modelo de Kelvin-Voigt, imponiendo una deformación instantanea en $t = 0$ igual a:

$$\gamma = \gamma_0 U(t) \tag{6.39}$$

El esfuerzo resultante se puede obtener sustituyendo en la ecuación (6.5) dicha deformación, con lo cual:

$$\tau(t) = \left\{G_K U(t) + \eta_K \delta(t)\right\} \gamma_0 \tag{6.40}$$

La función delta de Dirac que aparece en en el segundo término del segundo miembro de la ecuación (6.40) significa que se requiere un esfuerzo infinito para producir una deformación instantanea γ_0.

Si ahora la deformación instantanea se sustituye en un material que se comporta como un fluido de Maxwell, la ecuación (6.3), toma la forma:

$$\dot{\tau} + \frac{1}{t^*_M} \tau = G\gamma_0 \delta(t) \tag{6.41}$$

Intergrando esta última ecuación, se obtiene:

$$\tau(t) = \gamma_0 \, G e^{-\frac{t}{t^*_M}} U(t) \tag{6.42}$$

Derivando esta última ecuación con respecto al tiempo, se obtiene la tasa de variación del esfuerzo respecto al tiempo, esto es:

$$\dot{\tau} = -\frac{\gamma_0 G}{t^*_M} e^{-\frac{t}{t^*_M}} U(t) \tag{6.43}$$

Evaluando la ecuación (6.29) en $t = 0$, se obtiene, la tasa de variación inicial del esfuerzo respecto al tiempo:

$$\dot{\tau} = -\frac{\gamma_0 G}{t^*_M} \tag{6.44}$$

Si en la prueba se mantuviera la tasa de variación inicial del esfuerzo respecto al tiempo, el esfuerzo sería nulo en $t = t^*_M$, por esta razón t^*_M recibe el nombre de *tiempo de relajación* en el modelo de Maxwell.

La ecuación (6.42) se puede expresar en terminos de una función de relajación que denominaremos $G(t)$, por lo que $\tau(t)$ resulta:

$$\tau(t) = G(t)\gamma_0 \, U(t) \tag{6.45}$$

Siendo:

$$G(t) = G e^{-\frac{t}{t^*_M}} \tag{6.46}$$

Para el modelo e Maxwell generalizado la ecuación (6.46) toma la forma:

$$G(t) = \sum_{i=1}^{N} G_i \, e^{-\frac{t}{t^*_{M_i}}} \tag{6.47}$$

6.3 Relaciones constitutivas de los materiales inelásticos

Los materiales inelásticos son a aquellos cuyas propiedades y características de respuesta resultan dependientes del tiempo.

Desde el punto de vista matemático son materiales que pueden ser representados mediante relaciones constitutivas esfuerzo-deformación en las cuales las cantidades C_{ij} (Capítulo 4, ecuación (4.3)) son operadores diferenciales respecto al tiempo.

En aquellos casos donde se acepta la existencia de una ecuación de estado termodinámico, en la que se establezca un balance entre energía, entropía, temperatura y difusión, las relaciones constitutivas que pueden ser manejadas matemáticamente, desde un punto de vista tensorial, adquieren la siguiente forma:

$$P_v\, T_v = Q_v\, E_v \tag{6.48}$$

$$P_0\, T_0 = Q_0\, E_0 \tag{6.49}$$

Siendo P_v, Q_v, P_0 y Q_0 operadores diferenciales respecto al tiempo.

Cuando el material es homogéneo e isótropo, con igualdad de direcciones principales de esfuerzo y deformación, es posible esperar que P_v, Q_v, P_0 y Q_0 sean operadores diferenciales lineales respecto al tiempo, siempre y cuando la estructura del material y la temperatura permanezcan prácticamente constantes.

En su forma más general, un operador diferencial lineal puede tener la siguiente forma:

$$\sum a_n \frac{d^n}{dt^n} = a_n \frac{d^n}{dt^n}(\cdots) + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(\cdots) + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dt^2}(\cdots) + a_1 \frac{d}{dt}(\cdots) + a_0(\cdots) \tag{6.50}$$

En estos operadores, las cantidades $a_n, \cdots, a_0$, resultan ser cantidades constantes respecto al tiempo.

Para trabajar matemáticamente con este tipo de relaciones constitutivas resulta útil recurrir al concepto de transformada de Laplace.

6.4 Nociones sobre la Transformada de Laplace

Por definición, se dice que la transformada de Laplace de una función $f(t)$, continua y derivable, es la función:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \overline{f} \tag{6.51}$$

1º Transformada de Laplace de una constante:

Sea $f(t) = A$, donde A es una constante:

$$L\{f(t)\} = L\{A\} = \int_0^\infty A e^{-st}\, dt$$

$$\Rightarrow L\{A\} = \frac{A}{-s}\left[e^{-st}\right]_0^\infty = \frac{A}{-s}\left[e^{-\infty(s)} - e^0\right] = \frac{A}{s}$$

2º Transformada de la suma de dos funciones:

Sea: $f(t) = g(t) + h(t)$

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty [g(t) + h(t)] e^{-st}\, dt$$

$$= \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt + \int_0^\infty h(t)\, e^{-st}\, dt = \overline{g} + \overline{h}$$

$$L\{f(t)\} = \overline{f} = \overline{g} + \overline{h}$$

3º Si $f^*(t) = A f(t)$, donde A es un número real, entonces:

$$L[A f(t)] = \int_0^\infty A f(t)\, e^{-st}\, dt = A \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = A\overline{f}$$

$$\Rightarrow L[A f(t)] = A\overline{f}$$

4º Sea $f(t) = \dfrac{d}{dt} g(t)$, determine la transformada de Laplace correspondiente:

$$L\{f(t)\} = \int_0^\infty \frac{d}{dt} g(t)\, e^{-st}\, dt$$

Definiendo:

$$u = e^{-st} \quad ; \quad du = -s e^{-st}\, dt$$

$$dv = \frac{d}{dt} g(t) dt \quad ; \quad v = g(t)$$

Ahora, integrando por partes, se tiene:

$$\int_0^\infty u\, dv = uv - \int_0^\infty v\, du$$

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt} g(t) e^{-st}\, dt = e^{-st} g(t)\Big]_0^\infty - (-s) \int_0^\infty g(t)\, e^{-st}\, dt$$

$$L\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\} = -g(t) + s\bar{g}$$

Si no existen condiciones iniciales, es decir: $g(0) = 0$

$$L\left\{\frac{d}{dt}g(t)\right\} = s\bar{g}$$

5º Sea $f(t) = \dfrac{d^2}{dt^2}g(t)$, determine la transformada de Laplace de la función.

$f(t) = \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{d}{dt}g(t)\right]$, haciendo $\dfrac{d}{dt}g(t) = h(t)$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}g(t)\right\} = L\left\{\frac{d}{dt}h(t)\right\} = s\bar{h} - h(0)$$

Pero: $\bar{h} = L\{h(t)\} = L\left\{\dfrac{d}{dt}g(t)\right\}$

$\bar{h} = s\bar{g} - g(0)$

$$L\left\{\frac{d^2}{dt^2}g(t)\right\} = s^2\bar{g} - sg(0) - \frac{d}{dt}g(0)$$

Si las condiciones iniciales son nulas:

$$L\left\{\frac{d^2g(t)}{dt^2}\right\} = s^2\bar{g}$$

6º Sea $f(t)=\dfrac{d^n}{dt^n}g(t)$, determine la transformada de Laplace:

$$L\left\{\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right\}=s^n L\{g(t)\}-s^{n-1}g(0)-\cdots-g^{n-1}(0)$$

7º Sea $f(t)=A\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$, su transformada de Laplace resulta igual a:

$L\{f(t)\}=A\,s^n\,\bar{g}$; cuando A es constante y no existen condiciones iniciales.

8º Sea $f(t)=\sum a_n\dfrac{d^n g(t)}{dt^n}$, y las condiciones iniciales son nulas.

$$L\{f(t)\}=L\left\{\sum a_n\frac{d^n g(t)}{dt^n}\right\}$$

$$=\sum a_n s^n\,\bar{g}=L\{P\,g(t)\}$$

La transformada de Laplace de un operador diferencial P operado sobre una función continua y derivable $g(t)$, cuyas condiciones iniciales son nulas y las de sus derivadas, es $P^{\otimes}=\sum a_n s^n$, el cual resulta un operador algebráico en la variable s.

Por lo tanto, la transformada de Laplace de:

$$L\{Pg(t)\}=\bar{g}\sum a_n s^n \qquad (6.52)$$

9º Sea $f(s)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{a_n}{s^{n+1}}$, entonces la transformada inversa de la función $f(s)$, resulta igual a:

$$L^{-1}\{f(s)\}=f(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{a_n}{n!}\right)t^n$$

Al aplicar la ecuación (6.52) a la operación:

$$P\,T = Q\,E$$

Siendo T y E dos funciones continuas y derivables dependientes del tiempo, resulta:

$$L\{P\,T\} = L\{Q\,E\}$$

$$P^{\otimes}\,\overline{T} = Q^{\otimes}\,\overline{E} \qquad (6.53)$$

donde $P^{\otimes}$ y $Q^{\otimes}$ son operadores algebráicos en s, con lo cual la ecuación (6.53) resulta independiente del tiempo.

Todo el planteamiento anterior indica un camino simple para buscar la solución a problemas de materiales inelásticos una vez conocida la solución elástica. El procedimiento es el siguiente:

1º Se hace el planteamiento elástico del problema, utilizando como constantes las correspondientes a los operadores P y Q.

2º Conocida la solución elástica en la que las variables cinemáticas y estáticas se transforman, conduce a la transformada de Laplace de la solución elástica.

3º Para obtener la solución inelástica bastará antitransformar la solución obtenida en dos y se tendrá así la solución inelástica en las variables de espacio y tiempo real.

Para materiales homogéneos, isótropos y con igualdad de direcciones principales de esfuerzo y deformaciones, las relaciones constitutivas pueden ser expresadas como relaciones diferenciales entre las componentes volumétricas y distorsional de los tensores esfuerzo T_{ij} y deformación E_{ij}.

$$P_v T_v = Q_v E_v$$

$$P_0 T_0 = Q_0 E_0$$

Para que estas relaciones existan es necesario aceptar un equilibrio termodinámico en el material, y que su estructura resulte prácticamente invariable, ante el estado de esfuerzos impuesto.

En materiales inelásticos, los operadores P_v, Q_v, P_0, Q_0 pueden ser expresados mediante operadores diferenciales lineales, mientras exista continuidad en el medio.

Cuando estos operadores existan, siempre será posible establecer un procedimiento matemático simple, basado en el concepto de transformada de Laplace, para evaluar el efecto de cargas en materiales reales inicialmente libres de esfuerzo y deformación.

Al tomar la transformada de Laplace de toda la estática y de toda la cinemática del medio continuo, las relaciones constitutivas correspondientes resultan ser:

$$P_v^{\otimes} \overline{T}_v = Q_v^{\otimes} \overline{E}_v$$

$$P_0^{\otimes} \overline{T}_0 = Q_0^{\otimes} \overline{E}_0$$

Ahora, $P_v^{\otimes}$, $Q_v^{\otimes}$, $P_0^{\otimes}$, $Q_0^{\otimes}$, resultan ser operadores algebráicos en s.

Para materiales inelásticos:

$$\overline{T}_v = \frac{Q_v^{\otimes}}{P_v^{\otimes}} \overline{E}_v \;\; ; \;\; \overline{T}_0 = \frac{Q_0^{\otimes}}{P_0^{\otimes}} \overline{E}_0 \qquad (6.54)$$

Para materiales elásticos lineales, se tiene:

$$T_v = (3\lambda + 2G)E_v\,; \qquad T_0 = (2G)E_0 \tag{6.55}$$

La analogía entre las ecuaciones (6.54) y (6.55) dio lugar al llamado *Principio de Correspondencia,* que indica:

La transformada de Laplace a un problema de un continuo inelástico se obtiene sustituyendo, en la solución elástica del mismo continuo, a las variables estáticas y cinemáticas por sus valores transformados, así como a las constantes elásticas involucradas.

De esta manera en las ecuaciones (6.54) y (6.55) se tiene la siguiente correspondencia:

$$(3\lambda + 2G) \leftrightarrow \frac{Q_v^{\otimes}}{P_v^{\otimes}}\,; \qquad (2G) \leftrightarrow \frac{Q_0^{\otimes}}{P_0^{\otimes}} \tag{6.56}$$

Al hacer la sustitución, se obtiene la transformada de la solución inelástica. La solución inelástica se obtiene antitransformando las expresiones así obtenidas.

P Problema resuelto 6.1

Para el medio continuo sometido a un estado uniaxial de esfuerzos, que se muestra en la figura (6.9), obtenga la solución inelástica en términos de deformaciones.

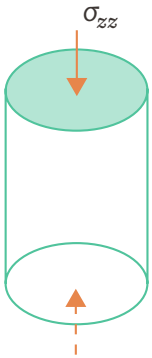


FIGURA 6.9. Medio continuo viscoelástico sometido a un estado unixial de esfuerzos

El tensor esfuerzo está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \qquad \text{(P.6.1)}$$

Debido a la existencia de continuidad y de una ecuación de estado, existirá:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \qquad \text{(P.6.2)}$$

Si el continuo es un material viscoelástico lineal, la solución inelástica que relaciona el tensor esfuerzo T_{ij} con el tensor deformación E_{ij}, puede ser obtenida de la siguiente manera:

1º Se obtiene la solución elástica:

$$\varepsilon_{xx} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \;\; ; \;\; \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E}\sigma_{zz} \;\; ; \;\; \varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E} \qquad \text{(P.6.3)}$$

2º Para obtener la solución elástica transformada, basta efectuar las siguientes sustituciones:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = -\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}}\,\bar{\sigma}_{zz} \;\; ; \;\; \bar{\varepsilon}_{yy} = -\frac{\bar{\nu}}{\bar{E}}\,\bar{\sigma}_{zz} \;\; ; \;\; \bar{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{\bar{E}}\,\bar{\sigma}_{zz} \qquad \text{(P.6.4)}$$

3º Se antitransforma la solución; para ello conviene expresar los segundos miembros de la ecuación (P.6.4) en fracciones simples en *s*.

4º Conocidas las fracciones simples en *s*, es posible buscar en tablas de transformadas de Laplace a esas fracciones simples y sus correspondientes antitransformadas.

5º Sumando todas las antitransformadas de las fracciones simples, se obtiene la solución inelástica del problema propuesto.

En la solución previa, los operadores algebráicos $\bar{\nu}$, $\bar{E}$ dependen de las características del material inelástico que ocupa el continuo y sus características sólo pueden ser obtenidas a partir de pruebas controladas de los materiales inelásticos.

La aplicación de este procedimiento sólo es válida para materiales inelásticos en los cuales sus operadores $P_\nu^{\otimes}$, $Q_\nu^{\otimes}$, $P_0^{\otimes}$, $Q_0^{\otimes}$ sean expresables por:

$$\sum_{n=0}^{n=N} a_n \frac{d^n}{dt^n} \;\; ; \text{ operadores diferenciales lineales}$$

Si en el problema propuesto:

$$\sigma_{zz} = \text{cte} \ \forall t \ ; \quad \bar{\sigma}_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{s} \tag{P.6.5}$$

$$\bar{\varepsilon}_{zz} = -\frac{1}{\bar{E}} \bar{\sigma}_{zz} = -\frac{1}{\bar{E}} \frac{\sigma_{zz}}{s} \tag{P.6.6}$$

siendo $\bar{E}$ un cociente de polinomios en s.

6.5 Equivalencia entre modelos matemáticos para representar el comportamiento de materiales

En lo que sigue, se aplicará el Principio de Correspondencia a un continuo sometido a un estado uniaxial de esfuerzos, en este caso el tensor esfuerzo vale:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

El estado de esfuerzos en el continuo genera un estado de deformación dado por:

$$E_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

Se asumirá que existe homogeneidad, isotropía e igualdad de direcciones principales de esfuerzo y deformación en el continuo.

Para relacionar ambos tensores, aceptamos que las relaciones constitutivas son:

$$P_v T_v = Q_v E_v \tag{6.59}$$

$$P_0 T_0 = Q_0 E_0 \tag{6.60}$$

Donde P_v, Q_v, P_0, Q_0 son operadores diferenciales respecto al tiempo.

Para aplicar las relaciones constitutivas se calculan las componentes volumétrica (T_v, E_v) y distorsional (T_0, E_0) de los tensores esfuerzo y deformación. Así:

$$T_v = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{xx}}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{xx}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{xx}}{3} \end{bmatrix} \qquad T_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma_{xx}}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma_{xx}}{3} \end{bmatrix} \tag{6.61}$$

$$E_v = \frac{J_1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad E_0 = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \frac{J_1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} - \frac{J_1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} - \frac{J_1}{3} \end{bmatrix} \tag{6.62}$$

Siendo J_1 el primer invariante del tensor deformación. Dado que $\varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$, entonces $J_1 = \varepsilon_{xx} + 2\varepsilon_{yy}$.

Al aplicar las relaciones constitutivas, se obtiene:

$$P_v\left(\frac{\sigma_{xx}}{3}\right)=Q_v\left(\frac{\varepsilon_{xx}+2\,\varepsilon_{yy}}{3}\right) \tag{6.63}$$

Para la componente distorsional y para el término $\frac{2}{3}\,\sigma_{xx}$, se tiene:

$$P_0\left(\frac{2}{3}\,\sigma_{xx}\right)=Q_0\left(\varepsilon_{xx}-\frac{J_1}{3}\right)=Q_0\left(\frac{2}{3}\,\varepsilon_{xx}-\frac{2}{3}\,\varepsilon_{yy}\right)$$

$$P_0\left(\frac{2}{3}\,\sigma_{xx}\right)=Q_0\left(\frac{2}{3}\right)\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right) \tag{6.64}$$

Para el término $-\frac{1}{3}\,\sigma_{xx}$, se tiene:

$$P_0\left(-\frac{\sigma_{xx}}{3}\right)=Q_0\left(\varepsilon_{yy}-\frac{J_1}{3}\right)=Q_0\left(\frac{\varepsilon_{yy}}{3}-\frac{\varepsilon_{xx}}{3}\right)$$

$$P_0\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\sigma_{xx}\right)=Q_0\left(-\frac{1}{3}\right)\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right) \tag{6.65}$$

Por lo tanto, las relaciones constitutivas, en términos de las componentes volumétrica y distorsional, de los tensores esfuerzo y deformación resultan:

$$P_v\,\sigma_{xx}=Q_v\left(\varepsilon_{xx}+2\varepsilon_{yy}\right) \tag{6.66}$$

$$P_0\,\sigma_{xx}=Q_0\left(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}\right) \tag{6.67}$$

Para conocer a los elementos del tensor deformación E_{ij}, basta poner de manera explícita a ε_{xx} y ε_{yy} en términos de σ_{xx}.

Para ello, aplicaremos el operador Q_0 a la ecuación (6.66) y el operador Q_v a la ecuación (6.67), lo que da como resultado:

$$Q_0\, P_v \sigma_{xx} = Q_0\, Q_v\, \varepsilon_{xx} + 2\, Q_0\, Q_v\, \varepsilon_{yy} \tag{6.68}$$

$$Q_v P_0\, \sigma_{xx} = Q_v Q_0 \varepsilon_{xx} - Q_v Q_0 \varepsilon_{yy} \tag{6.69}$$

Restando la ecuación (6.69) de la (6.68), se obtiene:

$$\left(Q_0 P_v - Q_v P_0\right) \sigma_{xx} = \; 3\, Q_0\, Q_v \varepsilon_{yy} \tag{6.70}$$

Si ahora multiplicamos la ecuación (6.69) por 2 y se suma con la (6.68), se obtiene:

$$\left(Q_0 P_v + 2\, Q_v P_0\right) \sigma_{xx} = 3\, Q_0\, Q_v \varepsilon_{xx} \tag{6.71}$$

Las expresiones (6.70) y (6.71) son las ecuaciones básicas de la mecánica de los medios continuos inelásticos.

Diremos que dos relaciones constitutivas son equivalentes desde el punto de vista matemático, si al sustituir sus operadores en las ecuaciones (6.66) y (6.67) se obtienen operadores del mismo orden.

Aplicando la transformada de Laplace a las ecuaciones (6.70) y (6.71), para lo cual tomaremos en cuenta que:

$$L\left(P_0\; T_0\right) = P_0^{\otimes}\, \overline{T}_0$$

$$L\left(Q_0\; E_0\right) = Q_0^{\otimes}\, \overline{E}_0$$

Donde $P_0^{\otimes}$ y $Q_0^{\otimes}$ son dos operadores diferenciales que dependen de s.

De esta manera se obtiene, respectivamente:

$$3Q_0^{\otimes} Q_v^{\otimes} \bar{\varepsilon}_{yy} = \left(Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} - Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}\right) \bar{\sigma}_{xx} \tag{6.72}$$

$$3Q_0^{\otimes} Q_0^{\otimes} \bar{\varepsilon}_{xx} = \left(Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} + 2Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}\right) \bar{\sigma}_{xx} \tag{6.73}$$

De la ecuación (6.73) se obtiene:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} + 2\, Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}}{3\, Q_0^{\otimes} Q_v^{\otimes}} \bar{\sigma}_{xx} \tag{6.74}$$

Si el medio continuo es elástico lineal, se tiene:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} \tag{6.75}$$

Aplicando el Principio de Correspondencia, $\bar{E}$ será igual a:

$$\bar{E} = \frac{3\, Q_0^{\otimes} Q_v^{\otimes}}{Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} + 2\, Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}} \tag{6.76}$$

Si ahora despejamos $\bar{\varepsilon}_{yy}$ y se divide entre $-\bar{\varepsilon}_{xx}$:

$$\bar{v} = -\frac{\bar{\varepsilon}_{yy}}{\bar{\varepsilon}_{xx}} = \frac{Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes} - Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes}}{Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} + 2\, Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}} \tag{6.77}$$

Estas cantidades, $\bar{E}$ y $\bar{v}$, son las que utiliza el Principio de Correspondencia para obtener la solución inelástica a problemas de continuos sometidos a sistemas de fuerzas externas, cuando se conoce la solución elástica del problema.

P Problema resuelto 6.2

Considere el cilindro que se muestra en la figura (6.10) sometido a un estado unixial de esfuerzos que se comporta como un cuerpo de Bourgers. Si las componentes volumétrica y distorsional del tensor esfuerzo están dadas por:

$$T_v = q_0 E_v$$

$$P_2\ddot{T}_0 + P_1\dot{T}_0 + T_0 = q_2\ddot{E}_0 + q_1\dot{E}_0 \qquad \text{(Ecs. 6.20 y 6.21)}$$

Calcule las constantes viscoelásticas $\overline{E}$ y $\overline{v}$.

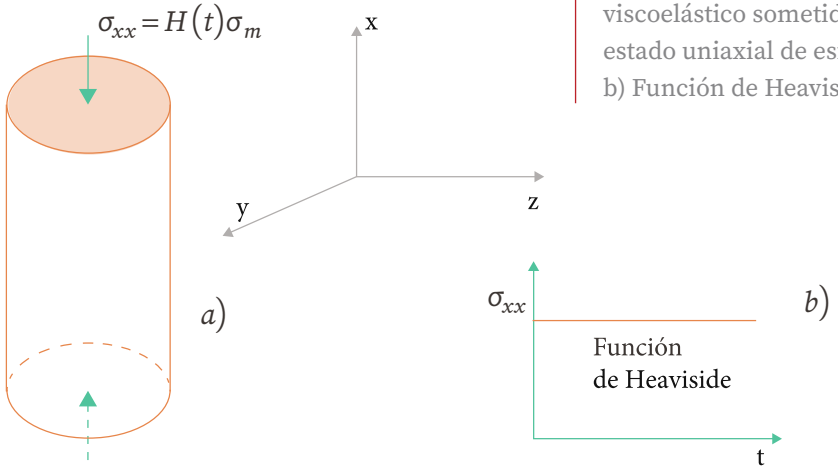


Figura 6.10 a) Cilindro viscoelástico sometido a un estado uniaxial de esfuerzo b) Función de Heaviside

Primeramente, identificaremos los operadores diferenciales P_v, Q_v, P_0, Q_0, que aparecen en las ecuaciones anteriores.

Para la componente volumétrica, se tiene que:

$$P_v T_v = Q_v E_v, \quad \text{entonces} \quad P_v = 1 \text{ y } Q_v = q_0$$

Para la componente desviadora, se tiene que:

$$P_0\, T_0 = Q_0\, E_0\,, \quad \text{entonces}$$

$$P_0 = P_2 \frac{d^2}{dt^2} + P_1 \frac{d}{dt} + 1 \tag{P.6.7}$$

$$Q_0 = q_2 \frac{d^2}{dt^2} + q_1 \frac{d}{dt} \tag{P.6.8}$$

Usando la transformada de Laplace, la componente volumétrica queda como:

$$L\left(1 \times T_v\right) = 1 \times \overline{T}_v \quad \Rightarrow \quad P_v^{\otimes} = 1 \tag{P.6.9}$$

$$L\left(q_0 \times \overline{E}_v\right) = q_0 \times \overline{E}_v \quad \Rightarrow \quad Q_v^{\otimes} = q_0$$

Para la componente desviadora, se tiene:

$$P_0^{\otimes} = P_2 s^2 + P_1 s + 1; \;\cdots\; Q_0^{\otimes} = q_2 s^2 + q_1 s \tag{P.6.10}$$

Por lo tanto de las ecuaciones (6.76) y (6.77), se obtienen los parámetros viscoélasticos $\overline{E}$ y $\overline{v}$, siendo:

$$\overline{E} = \frac{3\left(q_2 s^2 + q_1 s\right) q_0}{\left(q_2 s^2 + q_1 s\right) + 2\, q_0 \left(P_2 s^2 + P_1 s + 1\right)} \tag{P.6.11}$$

$$\overline{v} = \frac{q_0\left(P_2 s^2 + P_1 s + 1\right) - \left(q_2 s^2 + q_1 s\right)}{\left(q_2 s^2 + q_1 s\right) + 2\, q_0 \left(P_2 s^2 + P_1 s + 1\right)} \tag{P.6.12}$$

Para el cilindro que se muestra en la figura (6.10), aceptemos que:

$$\sigma_{xx} = \sigma_m \, H(t) \qquad \text{(P.6.13)}$$

siendo $\sigma_m = \text{cte}$.

La teoría elástica conduce a:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E}$$

Ahora, haciendo la transformación, se llega a:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{\bar{\sigma}_{xx}}{\bar{E}} \; ; \; \bar{\sigma}_{xx} = \frac{\sigma_m}{s} \qquad \text{(P.6.14)}$$

Aplicando el Principio de Correspondencia, se tiene:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \frac{q_2 s^2 + q_1 s + 2 q_0 \left(P_2 s^2 + P_1 s + 1\right)}{3 q_0 q_2 s \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} \frac{\sigma_m}{s} \qquad \text{(P.6.15)}$$

Para obtener la solución inelástica es necesario en primer lugar, descomponer en fracciones simples la ecuación (P.6.15).

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \left\{ \frac{q_2 + 2 q_0 P_2}{3 q_0 q_2 \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} + \frac{q_1 + 2 q_0 P_1}{3 q_0 q_2 s \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} + \frac{2 q_0}{3 q_0 q_2 s^2 \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} \right\} \sigma_m \qquad \text{(P.6.16)}$$

Esta última ecuación se puede representar como:

$$\bar{\varepsilon}_{xx} = \left\{ \frac{C_1}{\left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} + \frac{C_2}{s \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} + \frac{C_3}{s^2 \left(s + \dfrac{q_1}{q_2}\right)} \right\} \sigma_m \qquad \text{(P.6.17)}$$

Siendo:

$$C_1=\frac{q_2+2\,q_0\,P_2}{3\,q_0\,q_2}\;;\;\; C_2=\frac{q_1+2\,q_0\,P_1}{3\,q_0\,q_2}\;;\;\; C_3=\frac{2q_0}{3\,q_0\,q_2}$$

Antitransformando la ecuación (P.6.17), se obtiene la solución inelástica.

Para cada una de las fracciones, se tiene:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{\left(s+\frac{q_1}{q_2}\right)}\right]=e^{-\frac{q_1}{q_2}t} \qquad \text{(P.6.18)}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s\left(s+\frac{q_1}{q_2}\right)}\right]=\left(1-e^{-\frac{q_1}{q_2}t}\right)\frac{1}{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)} \qquad \text{(P.6.19)}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^2\left(s+\frac{q_1}{q_2}\right)}\right]=\frac{1}{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2}\left[e^{-\frac{q_1}{q_2}t}+\frac{q_1}{q_2}t-1\right] \qquad \text{(P.6.20)}$$

$$\varepsilon_{xx}=\left\{C_1 e^{-\frac{q_1}{q_2}t}+C_2\left(1-e^{-\frac{q_1}{q_2}t}\right)\frac{1}{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)}+C_3\frac{1}{\left(\frac{q_1}{q_2}\right)^2}\left(1-e^{-\frac{q_1}{q_2}t}+\frac{q_1}{q_2}t-1\right)\right\}\sigma_m$$

(P.6.21)

La ecuación (6.21) se puede representar como:

$$\varepsilon_{xx}=\left\{A_1+A_2\,t+A_3\left(1-e^{-\frac{q_1}{q_2}t}\right)\right\}\sigma_m \qquad \text{(P.6.22)}$$

Donde A_1 , A_2 , A_3 y q_1/q_2 son constantes.

Se puede observar de la ecuación (P.6.22) que cuando $t = 0$, $\varepsilon_{xx} = A_1 \sigma_m$, la cual representa una deformación instantánea. Cuando $t = \infty$, el término $A_3 \left(1 - e^{-\frac{q_1}{q_2} t}\right) \sigma_m = A_3 \sigma_m$, valor que representa una deformación límite diferida por efectos viscosos lineales, sin embargo, la deformación del cuerpo de Bourgers tiende a infinito debido al término $A_2 t$ que representa una deformación por flujo plástico con viscosidad lineal.

Los términos de la ecuación (P.6.22) tienen el significado gráfico que se indica en la figura (6.11).

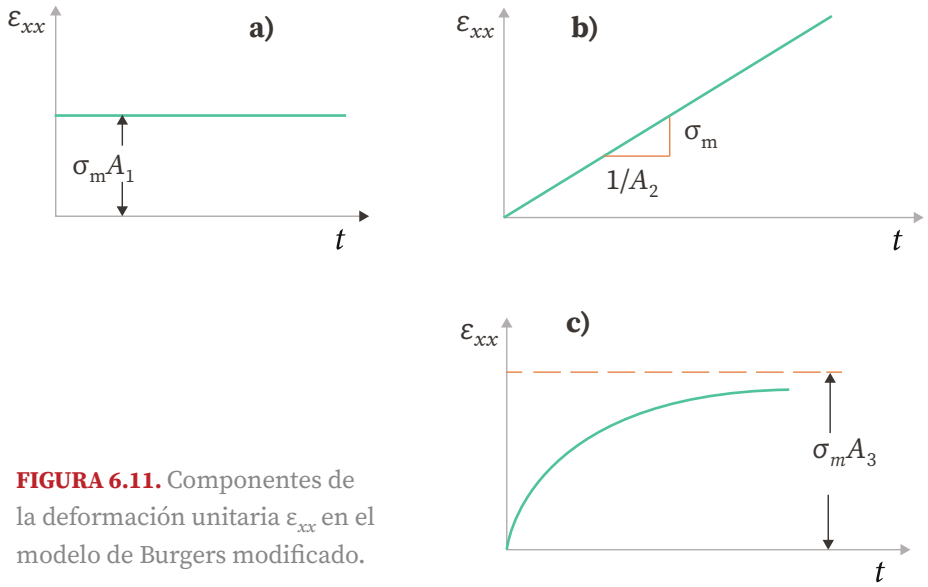


FIGURA 6.11. Componentes de la deformación unitaria ε_{xx} en el modelo de Burgers modificado.

a) deformación instántanea;
b) deformación por flujo plástico lineal;
c) deformación diferida por efectos viscosos lineales.

$$\varepsilon_{xx} = \left\{ A_1 + A_2 t + A_3 \left(1 - e^{-\frac{q_1}{q_2} t}\right) \right\} \sigma_m$$

En un instante cualquiera la deformación unitaria está constituida por tres partes.

- Deformación unitaria instantánea constante.
- Deformación diferida debida a efectos viscosos lineales.
- Deformación diferida debida al flujo plástico lineal.

6.6 Cálculo de las constantes que aparecen en los modelos matemáticos representativos del comportamiento de materiales

De acuerdo con la ecuación (6.18), los parámetros viscoelásticos P_1, P_2, q_1, q_2, y q_0 están relacionados con las constantes viscoelásticas del modelo de Burgers modificado como:

$$P_2 = \frac{\eta_M \, \eta_K}{G_M \, G_K} \; ; \quad P_1 = \left(\frac{\eta_M}{G_M} + \frac{\eta_M}{G_K} + \frac{\eta_K}{G_K} \right) ; \quad q_2 = \frac{\eta_M \, \eta_K}{G_K} \; ; \quad q_1 = \eta_M \; ; \quad q_0 = 3K$$

Sea

$$\sigma_{xx} = \sigma_m \, H(t)$$

Llamando a $\phi = \frac{\varepsilon_{xx}}{\sigma_m}$ *la deformación específica*, se puede graficar esta última en función del tiempo, tal como se muestra en la figura (6.13).

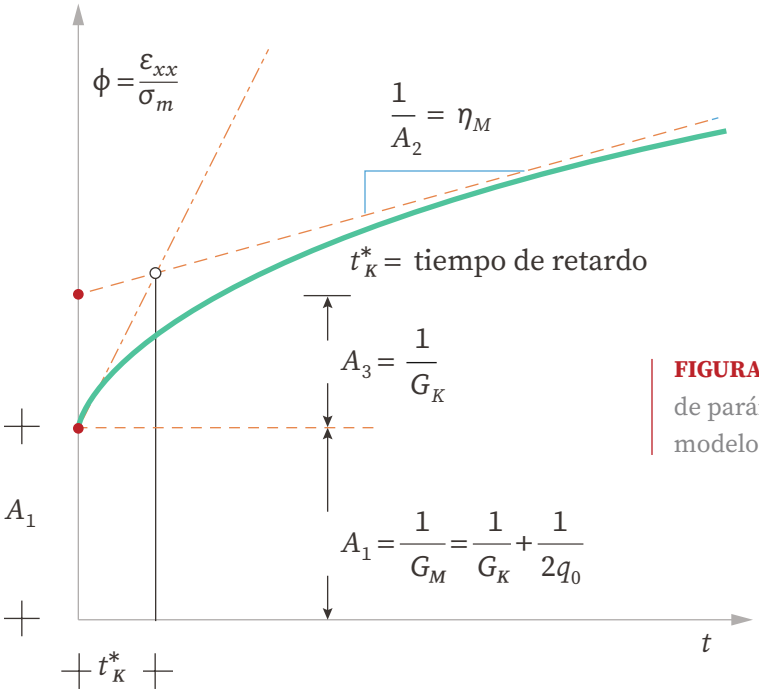


FIGURA 6.12. Definición de parámetros en el modelo de Burgers

Este diagrama de deformación específica figura (6.12) permite reconocer a algunas de las constantes viscoelásticas que aparecen en el modelo, pudiéndose calcular sus valores numéricos.

De experimentos bien controlados, en materiales sometidos a esfuerzos constantes, en intervalos de esfuerzo intermedio, se obtiene como respuesta.

$$x = \frac{1}{G_M} + \frac{t}{\eta_M} + \frac{1}{G_K}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_K^*}}\right) \qquad \text{(P.6.23)}$$

La ecuación (P.6.23) se grafica en función del tiempo en la figura (6.13).

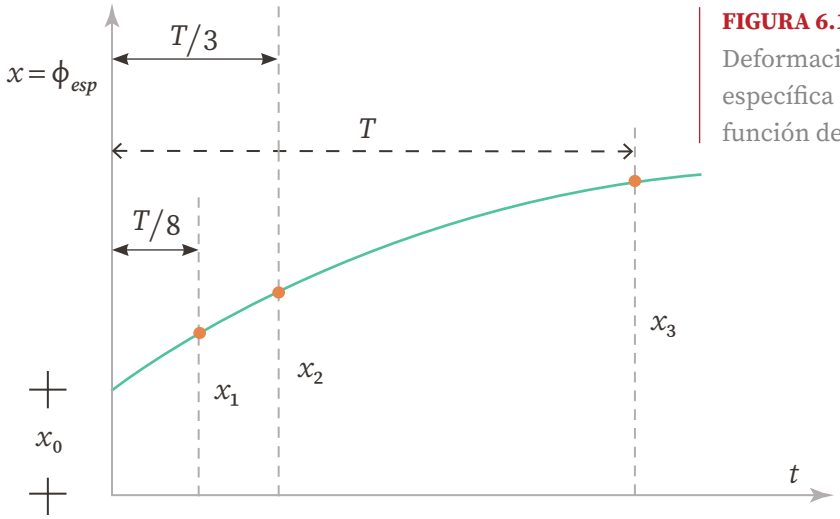


FIGURA 6.13.
Deformación específica en función del tiempo

De experimentos se obtienen datos del siguiente tipo:

$$\{t\} = \begin{Bmatrix} t_0 \\ t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_n \end{Bmatrix}; \qquad \{x\} = \begin{Bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix}$$

Interesa asociar este conjunto de datos a los resultados teóricos derivados del modelo.

Para ello, se puede recurrir a programas que minimicen la desviación estándar entre resultados teóricos y experimentales.

El análisis por el procedimiento antes descrito, tomando como base resultados de pruebas experimentales, ha mostrado la posibilidad de representar mediante el modelo de Burgers, el comportamiento de algunos materiales usados en ingeniería.

Las constantes viscoelásticas de las probetas estudiadas han demostrado ser dependientes de la estructura de los materiales y de la temperatura.

P Problema resuelto 6.3

El estado de esfuerzos que genera una carga puntual F_0, aplicada en la superficie de un semiespacio elástico lineal figura (6.14), fue resuelto por Boussines y está representado por el tensor esfuerzo T_{ij}, cuyos componentes en coordenadas cilíndricas están dadas por la ecuación siguiente:

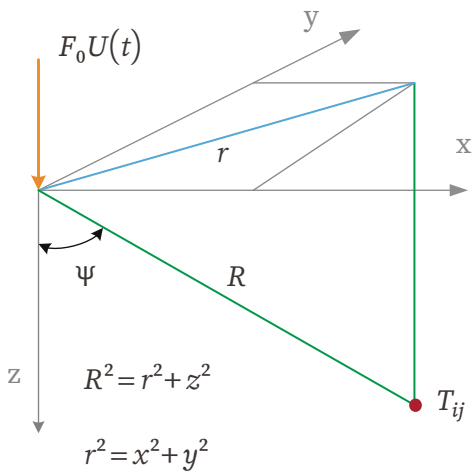


Figura 6.14 Estado de esfuerzos provocado por una carga puntual aplicada en la superficie de un semiespacio elástico lineal

$$T_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{rr} & 0 & \tau_{zr}\\ 0 & \sigma_{\theta\theta} & 0\\ \tau_{rz} & 0 & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

Para el caso particular del esfuerzo radial σ_{rr}, este tiene como solución elástica la expresión siguiente:

$$\sigma_{rr}=\frac{F_0}{2\pi}\left[-\frac{3zr^2}{R^5}+\frac{(1-2v)}{R(R+z)}\right] \qquad \text{(P.6.24)}$$

Llamando a:

$$A(r,z)=\frac{1}{R(R+z)}\;;\quad B(r,z)=\frac{3zr^2}{R^5}$$

El esfuerzo radial se puede expresar como:

$$\sigma_{rr}=\frac{F_0}{2\pi}\left[(1-2\nu)\,A(r,z)-B(r,z)\right] \qquad \text{(P.6.25)}$$

Suponiendo que el semiespacio es un cuerpo viscoelástico de Kelvin-Voigt y que la fuerza aplicada puede expresarse como $F(t)=F_0\,U(t)$, determine el esfuerzo radial correspondiente.

S Solución

Dado que se conoce la solución elástica para el esfuerzo radial, se aplicará el Principio de Correspondencia para encontrar la solución viscoelástica, para lo cual bastará con calcular la transformada de Laplace de la relación de Poisson ν que aparece en la solución elástica y finalmente antitransformar la solución encontrada para expresar el esfuerzo radial en función del tiempo.

Para el modelo de Kelvin-Voigt, se tiene (ecuación (6.5)):

$$\sigma_{rr}=2\left\{G_K+\eta_K\frac{d}{dt}\right\}\varepsilon_{rr}$$

Para la componente desviadora del tensor esfuerzo se tiene que:

$$P_0T_0=Q_0E_0$$

Cuyo valor transformado resulta:

$$P_0^{\otimes}\,\overline{T}_0 = Q_0^{\otimes}\,\overline{E}_0$$

De igual manera para la componente volumétrica se tiene:

$$P_v\,T_v = Q_v\,E_v$$

Cuya transformación conduce a:

$$P_v^{\otimes}\,\overline{T}_v = Q_v^{\otimes}\,\overline{E}_v$$

Identificando términos, se tiene que:

$$Q_0 = 2\left\{G_K + \eta_K \frac{d}{dt}\right\},$$

cuyo valor transformado se puede calcular haciendo uso del operador lineal $Q_0^{\otimes} = \sum_{n=0}^{n=1} a_n\, s^n$ (ecuación (6.52)), resultando:

$$Q_0^{\otimes} = a_0 + a_1 s = 2\,G_K + 2\,\eta_K s$$

Dado que $P_0 = 1$, su valor transformado se calcula nuevamente con la ecuación (6.52), con $n = 0$, resultando:

$$P_0^{\otimes} = a_0 = 1$$

Para la componente volumétrica se tiene, $P_v = 1$ y $Q_v = 3K$, y usando la misma ecuación (6.52), con $n = 0$, se obtienen los valores transformados:

$$P_v^{\otimes} = a_0 = 1 \;\text{ y }\; Q_v^{\otimes} = a_0 = 3\,K$$

La relación de Poisson transformada es (ecuación (6.77)):

$$\bar{v} = \frac{Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes} - Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes}}{Q_0^{\otimes} P_v^{\otimes} + 2 Q_v^{\otimes} P_0^{\otimes}}$$

Sustituyendo las relaciones establecidas en esta última ecuación, se tiene:

$$\bar{v}(s) = \frac{3K - 2(G_K + \eta_K s)}{6K - 2(G_K + \eta_K s)} \qquad \text{(P.6.26)}$$

Sustituyendo este último valor en la solución elástica se obtiene la solución transformada del esfuerzo radial $\sigma_{rr}(s)$ resultando:

$$\sigma_{rr}(s) = \frac{3F_0}{2\pi} \left\{ \frac{(G_K + \eta_K s)\, A(r,z)}{(3K + G_K)s + \eta_K s^2} - \frac{B(r,z)}{3s} \right\} \qquad \text{(P.6.27)}$$

Para antitransformar la ecuación (P.6.27), conviene expresarla en fracciones parciales para cada uno de los términos que la componen, así para el término:

$$\frac{(G_K + \eta_K s)}{(3K + G_K)s + \eta_K s^2} = \frac{A_1}{A_2 s + A_3 s^2} + \frac{A_2}{A_2 + A_3 s}$$

Con $A_1 = G_K$; $A_2 = (3K + G_K)$; $A_3 = \eta_K$

Antitransformando las fracciones parciales incluyendo el término $B(r,z)/3s$, se obtiene la solución viscoelástica del problema planteado:

$$\sigma_{rr}(s) = \frac{3F_0}{2\pi} \left[\left\{ \frac{G_K}{3K + G_K} - \frac{3K e^{-\left(\frac{3K + G_K}{\eta_K}\right) t}}{3K + G_K} \right\} A(r,z) - \frac{B(r,z)}{3} \right] \qquad \text{(P.6.28)}$$

De la anterior ecuación se puede ver que:

$$\text{Si } t=0\,; \quad \sigma_{rr}=\frac{3F_0}{2\pi}\left[A(r,z)-\frac{B(r,z)}{3}\right]$$

$$\text{Si } t=\infty\,; \quad \sigma_{rr}=\frac{3F_0}{2\pi}\left[\frac{GA(r,z)}{3K+G}-\frac{B(r,z)}{3}\right]$$

Dado que:

$1-2\nu=\left[\frac{3G}{3K+G}\right]$, esta última ecuación $(t=\infty)$ representa la solución elástica del problema.

La relación de Poisson ν queda expresada como:

$$\nu=\frac{3K-2GK}{2(3K+GK)}$$

P Problema resuelto 6.4

Una viga simplemente apoyada constituida de un material viscoelástico se somete a una carga por unidad de longitud p_0, tal como se muestra en la figura (6.15).

Suponiendo que el material de la viga se comporta de acuerdo con el modelo de Maxwell, determine el desplazamiento de la viga al centro del claro si la carga aplicada es $p=p_0\,U(t)$.

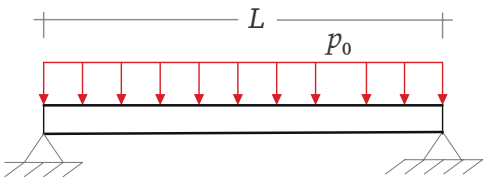


Figura 6.15 Barra prismática sometida a una carga uniformemente repartida

El desplazamiento elástico al centro de la viga es igual a:

$$\delta\left(x=\frac{L}{2}\right)=\frac{5p_0L^4}{384EI} \qquad \text{(P.6.29)}$$

Siendo I el momento de inercia centroidal de la viga.

Para encontrar la solución viscoelástica, se aplicará nuevamente el Principio de Correspondencia, para lo cual será suficiente con calcular la transformada de Laplace del módulo de elasticidad en la solución elástica y después antitransformar dicha solución para obtener el desplazamiento en función del tiempo.

Para el modelo de Maxwell, se tiene (ecuación (6.3)):

$$\sigma_{xx}\left\{\frac{1}{t_M^*}+\frac{d}{dt}\right\}=2G_M\left\{\frac{d}{dt}\right\}\varepsilon_{xx}$$

De la ecuación anterior se puede ver que los operadores diferenciales para la componente desviadora del tensor esfuerzo son:

$$P_0=\left\{\frac{1}{t_M^*}+\frac{d}{dt}\right\};\ Q_0=2G_M\left\{\frac{d}{dt}\right\};$$

En tanto que para la componente volumétrica los operadores diferenciales siguen siendo:

$$P_v=1\ ;\ Q_v=3K$$

La transformada de Laplace de los operadores diferenciales resulta:

$$P_0^{\otimes}=\left\{\frac{1}{t_M^*}\right\}+s\ ;\ Q_0^{\otimes}=2\,G_M\{s\}\ ;\ P_v^{\otimes}=1\ ;\ Q_v^{\otimes}=3K$$

La transformada de Laplace del módulo de Elasticidad $\overline{E}$ es:

$$\overline{E}=\frac{3Q_0^{\otimes}\,Q_v^{\otimes}}{Q_0^{\otimes}\,P_v^{\otimes}+2\,Q_v^{\otimes}\,P_0^{\otimes}}$$

Sustituyendo los operados diferenciales transformados en esta última ecuación se obtiene:

$$E(s)=\frac{9\,G_M\,Ks}{\frac{3K}{\tau_M^*}+(3K+GM)s} \qquad \text{(P.6.30)}$$

Para antitransformar la ecuación (P.6.30), hay que tomar en cuenta que $p=p_0U(t)$, cuya transformada de Laplace es $p(s)=p_0/s$, por lo tanto la ecuación (P.6.30) puede expresarse como:

$$\frac{p_0}{sE(s)}=p_0\frac{\frac{3K}{t_M^*}+(3K+G_M)s}{9\,G_M\,Ks^2} \qquad \text{(P.6.31)}$$

Antitransformando esta última ecuación y sustituyendo en la solución elástica se obtiene el desplazamiento al centro de la viga en función del tiempo, resultando:

$$\delta\left(x=\frac{L}{2},t\right)=\frac{5p_0L^4}{384I}\left[\frac{t}{3\mu_M}+\frac{3K+G_M}{9KG_M}\right] \qquad \text{(P.6.32)}$$

6.7 Problemas propuestos

P Problema 6.5

Un material viscoelástico se coloca dentro de un molde rígido tal como se muestra en la figura (6.16). Si se aplica una carga uniformente repartida en la superficie del material $p = -p_0 U(t)$ y considerando que dicho material se comporta de acuerdo con el modelo de Maxwell, determine el esfuerzo horizontal σ_{xx} que se genera sobre las paredes rígidas del molde.

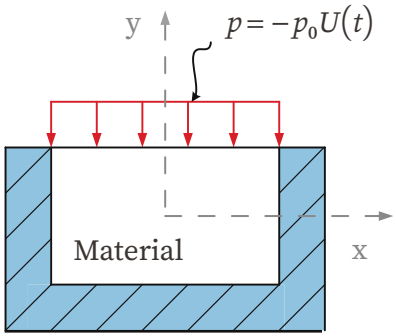


Figura 6.16 Material confinado en un molde rígido sometido a una carga uniformemente repartida en su superficie

S Solución

$$\sigma_{xx}(t) = -p_0 \left[1 - \frac{6G_M}{3K + 4G_M} \right] e^{\left(- \frac{3K}{(3K+4G_M)\tau^*_M} \right) t}$$

P Problema 6.6

El tubo que se muestra en la figura (6.17) está constituido de un material elástico lineal y se somete a una presión interna p_0, la cual genera un desplazamiento radial u_r igual a:

$$u_r = \frac{1+v}{E}\left[A(1-2v)r + \frac{B}{r}\right]$$

Siendo A y B dos constantes que involucran a p_0.

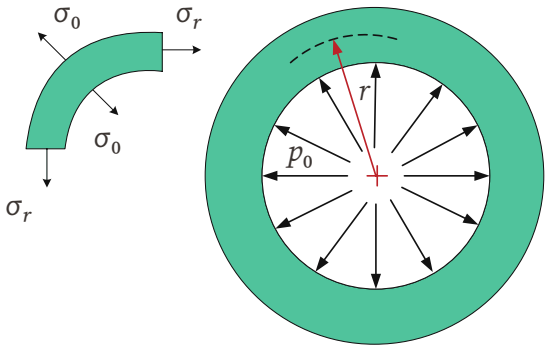


Figura 6.17 Material confinado en un molde rígido sometido a una carga uniformemente repartida en su superficie

Suponiendo que el material del tubo es viscoelástico y que cuando se aplica una carga $p = p_0\,U(t)$ sigue el modelo de Kelvin-Voigt, determine el desplazamiento radial u_r en función del tiempo.

S Solución

$$u_r(t) = \frac{3Ar}{6K + 2G_K}\left[1 - e^{-\frac{(3K+G_K)t}{G_K\, t_K^*}}\right]U(t) + \frac{B}{2G_K r}\left[1 - e^{-\frac{t}{t_K^*}}\right]U(t)$$

CAPÍTULO

7

Teorías de falla y ruptura

Introducción

En el capítulo 2 se estableció que las fuerzas externas aplicadas a un medio continuo generan estados de esfuerzo en los diferentes puntos del medio y estos a su vez producen estados de deformación (capítulo 3). Para ligar los esfuerzos con las deformaciones fue necesario involucrar las propiedades del material. Como una primera aproximación a su comportamiento real; dicha liga se hizo mediante la teoría de los materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos (capítulo 4).

Es claro que la falla o ruptura de un material deberá estar ligada a los esfuerzos o a las deformaciones que experimente este cuando se somete a ciertas solicitaciones, o bien, a un concepto que involucre tanto los esfuerzos como las deformaciones, tal es el caso de la energía de deformación. Normalmente la falla de un material se asocia a una condición límite que no necesariamente involucra la pérdida de continuidad del cuerpo deformable, condición bajo la cual estaríamos hablando de una franca ruptura del medio, en cuyo caso deja de ser aplicable la mecánica del medio continuo.

En este capítulo se establecen criterios de falla y ruptura, algunos aplicables a materiales dúctiles y otros a frágiles. Si bien la temperatura es una variable que influye de manera notable en el comportamiento de los materiales, esta no se toma en cuenta en ninguno de los criterios de falla y ruptura que se expondrán más adelante.

Cabe señalar que históricamente las primeras teorías de falla desarrolladas fueron para el caso del comportamiento de metales y es hasta una época más reciente que se han establecido teorías de falla para otros materiales involucrados en el diseño de las obras civiles, como ha sido el caso del concreto, los suelos y las rocas.

Normalmente la condición de falla en un material se establece al comparar el estado de esfuerzos o deformaciones que generan las cargas aplicadas en el medio con su resistencia, determinada esta en una prueba de laboratorio representativa del fenómeno estudiado.

En el caso de los metales cuyo comportamiento a tensión o compresión es muy similar, la prueba representativa que se emplea en laboratorio para determinar su resistencia es la de tensión que se ejecuta en una probeta representativa del material en estudio y la cual se denominará en adelante S_f. Cuando se aplican esfuerzos superiores a S_f el material puede fluir o se rompe (comportamiento inelástico), por lo que asumiremos en lo que sigue que S_f representa el límite de aplicabilidad de la teoría elástica para el estado de esfuerzos aplicado a la probeta. Este valor límite se le conoce también como límite elástico y no necesariamente representa el esfuerzo de fluencia del material bajo el cual este puede alcanzar la ruptura. En materiales como el concreto, el suelo y la roca, cuya resistencia a la tensión es muy limitada en comparación con su resistencia a la compresión, es usual que el valor límite S_f se establezca en una prueba de compresión que tome en cuenta las diferentes variables que influyen en el comportamiento del material.

Para un medio continuo sometido a un estado de esfuerzos principales, la función que define la región donde el material tiene un comportamiento elástico, se puede expresar como:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0 \tag{7.1}$$

En los párrafos siguientes se describirán algunas teorías de falla y ruptura comúnmente empleadas para establecer bajo qué condiciones se alcanza la falla o ruptura de un material sometido a ciertas solicitaciones (superficies de fluencia). Como ya se hizo ver con anterioridad la mayoría de estas teorías tienen su aplicación principal en el comportamiento de metales y permiten establecer la condición límite de falla del material (comportamiento inelástico) y no tanto la condición de ruptura o pérdida de continuidad. Para estudiar esta última condición se abordarán las teorías de Mohr-Coulomb, ampliamente utilizada en la mecánica suelos y rocas así como la de Griffith, esta última con mayores aplicaciones a la mecánica de rocas.

7.1 Teoría de Rankine

Esta teoría establece que en un material sometido a un estado de esfuerzos principales se genera fluencia cuando cualquiera de los esfuerzos principales alcanza el valor límite S_f, este valor obtenido de una probeta representativa del mismo material sometida a una prueba de tensión en el laboratorio. Como la teoría de Rankine asocia la falla del material sólo a los esfuerzos normales, también se le conoce como la Teoría del esfuerzo normal máximo. Matemáticamente estas condiciones quedan expresadas por:

$$|\sigma_1| = |S_f| \tag{7.2}$$

$$|\sigma_2| = |S_f| \tag{7.3}$$

$$|\sigma_3| = |S_f| \tag{7.4}$$

Las condiciones anteriores se pueden representar gráficamente en un sistema de referencia donde los ejes corresponden a los esfuerzos σ_1, σ_2 y σ_3.

De esta manera, el límite de aplicabilidad de la teoría elástica queda definido por seis superficies planas que conforman a un cubo de lado $2\,S_f$ (figura (7.1)).

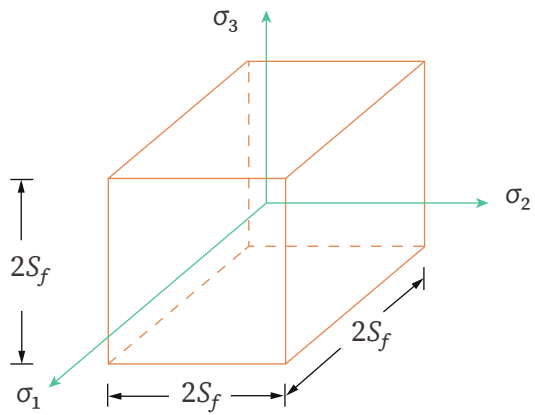


FIGURA 7.1 Volumen de fluencia. Teoría de Rankine

Cuando un punto $P(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, que representa a un estado tridimensional de esfuerzos, se ubica en el sistema de referencia establecido, se tendrá una condición de fluencia incipiente si P se encuentra en las caras del cubo, pero si P se localiza dentro del cubo, el material tiene un comportamiento elástico.

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, se obtendrá la superficie límite o de fluencia que se muestra en la figura (7.2), delimitada por las siguientes ecuaciones:

$$\sigma_1 = \pm S_f \;\; ; \;\; \sigma_2 = \pm S_f \tag{7.5}$$

Un punto en este plano representaría a un estado de esfuerzo plano. Cuando el punto está dentro del cuadrado, el material tiene un comportamiento elástico, mientras que, si está en los bordes del cuadrado, el material está en una condición de fluencia incipiente.

La teoría de Rankine es aplicable sobre todo a materiales frágiles, esto es, aquellos materiales que presentan bajos niveles de deformación antes de alcanzar la condición de fluencia.

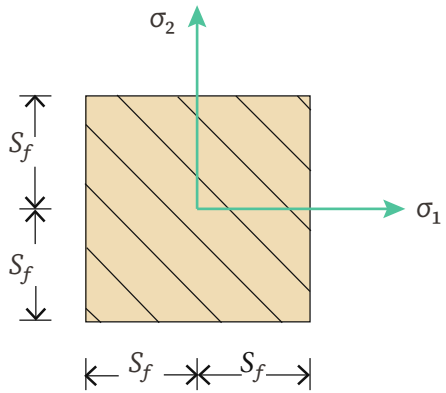


FIGURA 7.2 Superficie de fluencia para el estado de esfuerzo plano. Teoría de Rankine

7.2 Teoría de Coulomb-Tresca

El material deja de ser elástico cuando el esfuerzo cortante máximo generado por un estado de esfuerzos principales, en un punto cualquiera del cuerpo, iguala al esfuerzo cortante máximo que se engendra en una probeta sometida a tensión en laboratorio.

Para un estado tridimensional de esfuerzos, el esfuerzo cortante máximo queda definido por:

$$\left|\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\right| = \left|\frac{S_f}{2}\right| \tag{7.6}$$

$$\left|\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right| = \left|\frac{S_f}{2}\right| \tag{7.7}$$

$$\left|\frac{\sigma_2-\sigma_3}{2}\right| = \left|\frac{S_f}{2}\right| \tag{7.8}$$

Si cualquiera de las condiciones anteriores es satisfecha, se tendría la condición límite para que el medio deje de ser elástico.

Para un estado de esfuerzo plano con $\sigma_3 = 0$, las condiciones matemáticas que indican iniciación de fluencia serían:

De la ecuación (7.6):

$$|\sigma_1-\sigma_2| = |S_f| \quad \Rightarrow \quad \sigma_1-\sigma_2 = +S_f \quad ; \quad \sigma_1-\sigma_2 = -S_f \tag{7.9}$$

De la ecuación (7.7):

$$|\sigma_1| = |S_f| \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = +S_f \quad ; \quad \sigma_1 = -S_f \tag{7.10}$$

De la ecuación (7.8):

$$|\sigma_2| = |S_f| \quad \Rightarrow \quad \sigma_2 = +S_f \quad ; \quad \sigma_2 = -S_f \tag{7.11}$$

Representando gráficamente estas condiciones en el plano σ_1, σ_2, se obtendrían seis líneas rectas límites que definen la superficie de fluencia (figura (7.3)).

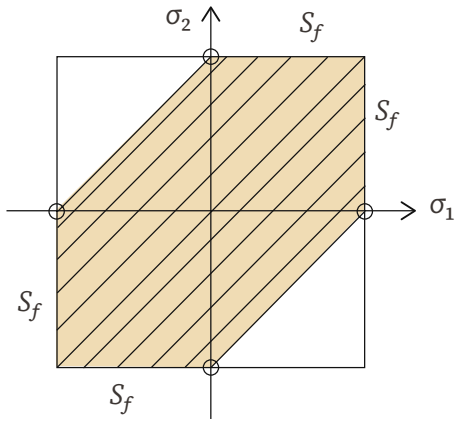


FIGURA 7.3 Superficie de fluencia para el estado de esfuerzo plano. Teoría de Coulomb-Tresca

De acuerdo con la teoría del esfuerzo cortante máximo, si se agregan esfuerzos hidróstaticos de tensión o de compresión, no es posible predecir ningún cambio en la respuesta del material.

La suma de estos esfuerzos simplemente desplaza el círculo de Mohr a lo largo del eje σ pero $\tau_{máx}$ permanece constante.

Cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2, son del mismo signo, se tienen dos condiciones para alcanzar la fluencia del material:

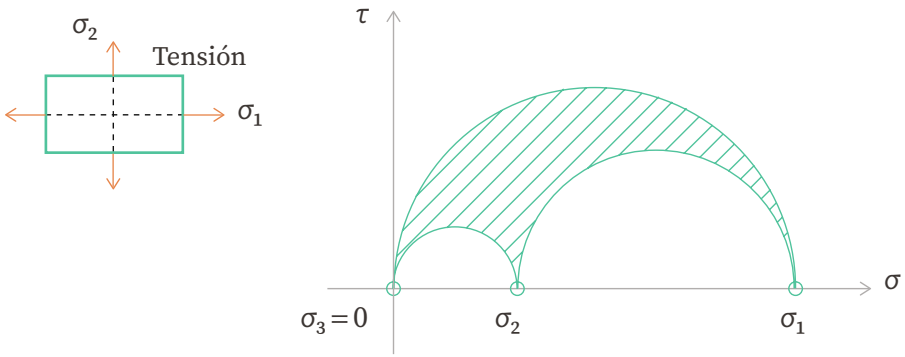


FIGURA 7.4 Estado de esfuerzo plano; tensión

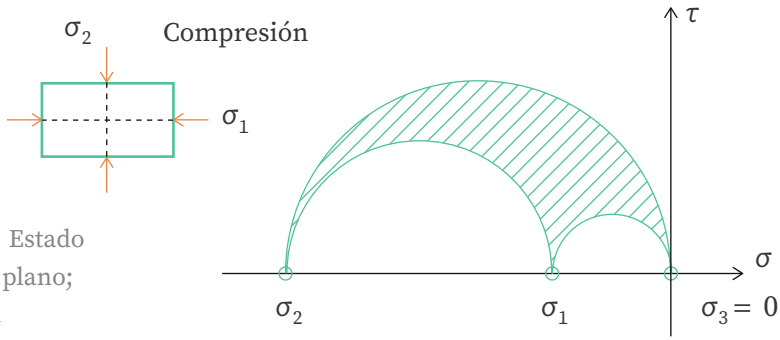


FIGURA 7.5 Estado de esfuerzo plano; compresión

Para el estado de esfuerzos de tensión que se muestra en la figura (7.4), se debe cumplir:

$$|\sigma_1| > |\sigma_2| \Rightarrow |\sigma_1| \leq S_f \tag{7.12}$$

Para el estado de esfuerzos de compresión, figura (7.5), se tiene:

$$|\sigma_2| > |\sigma_1| \Rightarrow |\sigma_2| \leq S_f \tag{7.13}$$

Por lo tanto, podemos concluir que, cuando los esfuerzos principales σ_1 y σ_2 son del mismo signo, las teorías de Rankine y Coulomb-Tresca coinciden.

Si σ_1 y σ_2 son de signo contrario, se tiene que:

$$\left|\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right| \leq \left|\frac{S_f}{2}\right| \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2) \leq \pm S_f \tag{7.14}$$

Por lo tanto, cuando σ_1 y σ_2 son de signo contrario, las teorías de Rankine y Coulomb-Tresca difieren.

De las figuras (7.4) y (7.5), se puede observar que el estado de esfuerzos representado en el circulo de Mohr, sigue siendo una región, por lo que

dicho estado de esfuerzos es estrictamente tridimensional. Sin embargo, en el caso del estado de esfuerzo plano, se asume que el circulo crítico es el de radio mayor.

7.3 Teoría de Saint Venant

El material deja de ser elástico cuando una de las deformaciones principales, ε_1, ε_2, o ε_3 alcanza el valor de la deformación principal ε_f, que se genera en una probeta sometida a tensión.

Para un estado uniaxial de esfuerzos, dicha deformación se puede expresar como:

$$\varepsilon_f = \frac{S_f}{E} \tag{7.15}$$

Para un estado de esfuerzos tridimensional, las deformaciones principales quedan definidas por:

$$|\varepsilon_1| = \left| \frac{1}{E}\left(\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)\right) \right| = |\varepsilon_f| \tag{7.16}$$

$$|\varepsilon_2| = \left| \frac{1}{E}\left(\sigma_2 - \nu(\sigma_1 + \sigma_3)\right) \right| = |\varepsilon_f| \tag{7.17}$$

$$|\varepsilon_3| = \left| \frac{1}{E}\left(\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right) \right| = |\varepsilon_f| \tag{7.18}$$

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, las condiciones de fluencia resultarían ser:

De la ecuación (7.16):

$$|\sigma_1 - \nu\sigma_2| = |S_f| \;\Rightarrow\; \sigma_1 - \nu\sigma_2 = S_f \tag{7.19}$$

$$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = -S_f$$

De la ecuación (7.17):

$$|\sigma_2 - \nu\sigma_1| = |S_f| \;\rightarrow\; \sigma_2 - \nu\sigma_1 = S_f \tag{7.20}$$

$$\sigma_2 - \nu\sigma_1 = -S_f$$

De la ecuación (7.18):

$$\left|-\nu(\sigma_1 + \sigma_2)\right| = |S_f| \;\rightarrow\; -\nu(\sigma_1 + \sigma_2) = S_f \tag{7.21}$$

$$\nu(\sigma_1 + \sigma_2) = +S_f$$

Reordenando términos, las ecuaciones de las seis rectas límites resultan ser:

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} - \frac{S_f}{\nu} \quad ; \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1}{\nu} + \frac{S_f}{\nu} \tag{7.22}$$

$$\sigma_2 = \nu\sigma_1 + S_f \quad ; \quad \sigma_2 = \nu\sigma_1 - S_f \tag{7.23}$$

$$\sigma_2 = -\sigma_1 + \frac{S_f}{\nu} \quad ; \quad \sigma_2 = -\sigma_1 - \frac{S_f}{\nu} \tag{7.24}$$

La región que estas ecuaciones definen se muestra en la figura (7.6), en la que se puede observar que la teoría de Saint Venant permite lograr

niveles de esfuerzos mayores antes de alcanzar la falla, que los que definen las teorías de Rankine y Tresca.

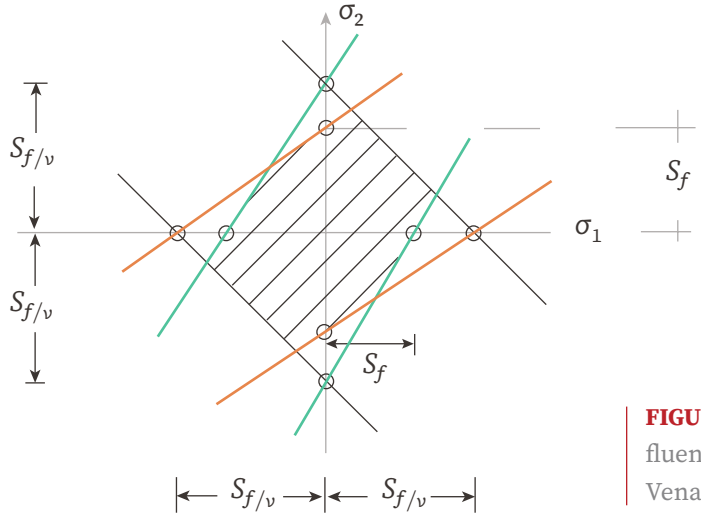


FIGURA 7.6 Superficie de fluencia, criterio de Saint Venant

7.4 Teoría de Nadai

Esta teoría es aplicable principalmente a materiales dúctiles, y establece que la fluencia en una partícula de un medio continuo se inicia cuando se aplica a esta una energía de deformación igual a la energía de deformación que se genera en una partícula de una probeta sometida a tensión.

La energía de deformación elástica por unidad de volumen, o densidad de energía, para un estado uniaxial de esfuerzos, tal como se definió en el capítulo 4, resulta igual a:

$$U = \frac{\sigma_1 \varepsilon_1}{2}$$

Esta ecuación representa el área bajo la curva esfuerzo-deformación.

De acuerdo con esta teoría, la probeta dejará de ser elástica cuando:

$$U_{prob} = \frac{S_f \varepsilon_f}{2} = \frac{S_f S_f}{2E} = \frac{S_f^2}{2E} \tag{7.25}$$

Para un estado tridimensional de esfuerzos, la densidad de energía puede expresarse como:

$$U = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3\right)\right] \tag{7.26}$$

Entonces, la fluencia se presentará cuando:

$$\frac{S_f^2}{2E} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3\right)\right] \tag{7.27}$$

Por lo tanto, la condición de fluencia queda representada como:

$$S_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu\left(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3\right) \tag{7.28}$$

Para un estado de esfuerzo plano, con $\sigma_3 = 0$, la condición de fluencia queda definida por:

$$S_f^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\nu\sigma_1 \sigma_2 \tag{7.29}$$

La representación geométrica de la región que define la ecuación (7.29) se muestra en la figura (7.7).

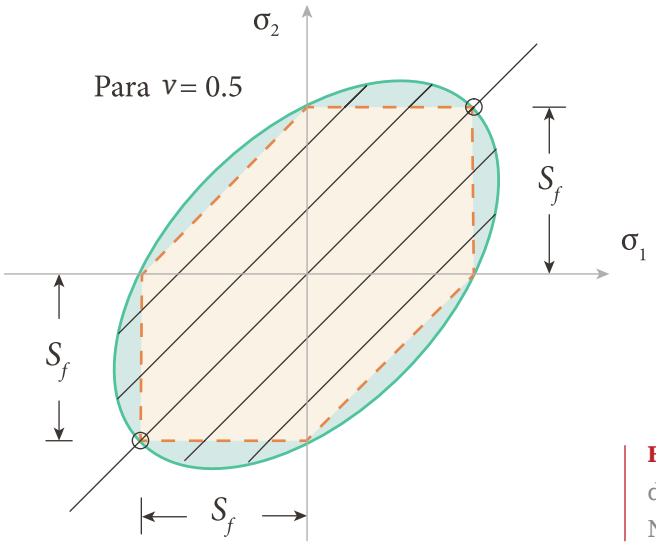


FIGURA 7.7 Superficie de fluencia; teoría de Nadai

7.5 Teoría de Von Mises-Hencky (VMH)

Se alcanza la fluencia en una partícula de un medio continuo cuando la energía de deformación distorsional en un estado de esfuerzos cualquiera, iguala la energía de deformación distorsional en una probeta sometida a tensión.

$$U = \left[U_0\right]_{prob}$$

De acuerdo con la ecuación (4.59), capítulo 4, la energía de deformación distorsional U_0 se puede evaluar como:

$$U_0 = \frac{1+\nu}{6E}\left\{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2\right\} \qquad (7.30)$$

Desarrollando esta última ecuación se llega a:

$$U_0 = \frac{1+\nu}{3E}\left\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_1\,\sigma_3+\sigma_2\,\sigma_3\right)\right\} \tag{7.31}$$

En una probeta sometida a tensión: $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$

$$\left[U_0\right]_{prob} = \frac{1+\nu}{3E}\,\sigma_1^2 \tag{7.32}$$

Se alcanza la falla del material cuando: $\left[U_0\right]_{prob} = U_0$, por lo tanto:

$$\frac{1+\nu}{3E}\,S_f^2 = \frac{1+\nu}{3E}\left\{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_1\,\sigma_3+\sigma_2\,\sigma_3\right)\right\}$$

De donde resulta:

$$S_f^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-\left(\sigma_1\,\sigma_2+\sigma_1\,\sigma_3+\sigma_2\,\sigma_3\right) \tag{7.33}$$

Esta última ecuación representa la condición de fluencia de VMH. De la ecuación (7.28) se puede ver que cuando $\nu = 0.5$, el criterio de fluencia de VMH se vuelve un caso particular del de Nadai.

Para el estado de esfuerzo plano.

$$S_f^2 = \sigma_1^2+\sigma_2^2-\sigma_1\,\sigma_2 \tag{7.33}$$

De manera experimental, se ha demostrado que la teoría de VMH es la que mejor predice el esfuerzo de fluencia de los materiales si σ_1 y σ_2 son positivos o si alguno de los dos es positivo.

Si ambos esfuerzos principales son negativos, la teoría de VMH da resultados conservadores. Esta teoría es aplicable sobre todo a metales.

La teoría de VMH puede ser expresada en términos de los invariantes del tensor esfuerzo, como sigue.

Para un estado de esfuerzo principal se tiene que:

$$I_1 = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \tag{7.35}$$

$$I_2 = (\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_1 \sigma_3 + \sigma_2 \sigma_3) \tag{7.36}$$

Elevando la ecuación (7.35) al cuadrado:

$$I_1^2 = (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 + 2\sigma_1 \sigma_2 + 2\sigma_1 \sigma_3 + 2\sigma_2 \sigma_3) \tag{7.37}$$

Multiplicando la ecuación (7.36) por 3:

$$-3I_2 = -3\sigma_1 \sigma_2 - 3\sigma_1 \sigma_3 - 3\sigma_2 \sigma_3 \tag{7.38}$$

Sumando las ecuaciones (7.37) y (7.38), se tiene:

$$I_1^2 - 3I_2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1 \sigma_2 - \sigma_1 \sigma_3 - \sigma_2 \sigma_3$$

lo cual indica que existe fluencia en un material si:

$$S_f^2 = I_1^2 - 3I_2 \tag{7.39}$$

Esta última expresión puede ser aplicada para cualquier sistema de referencia.

7.6 Teoría de Mohr-Coulomb

La teoría de Mohr-Coulomb establece que se alcanza la ruptura del material cuando el cociente del esfuerzo cortante al esfuerzo normal, asociados a un plano que pasa por un punto del medio continuo, donde se conoce el tensor esfuerzo provocado por las cargas aplicadas, alcanza un valor máximo. Para un estado general de esfuerzos principales, esta condición se alcanza en el punto de tangencia de los círculos de Mohr correspondientes. La resistencia del material queda expresada como:

$$\tau = c + \sigma \tan \phi \tag{7.40}$$

siendo c y ϕ los parámetros de resistencia del material, conocidos dentro de la mecánica de suelos como cohesión y ángulo de fricción interna, respectivamente. En el plano de Mohr (σ, τ), el parámetro c representa la ordenada al origen de la recta tangente al círculo de esfuerzos principales asociado con la ruptura del material y el parámetro ϕ representa la pendiente de dicha recta.

La superficie de fluencia para un estado de esfuerzo plano (con $\sigma_2 = 0$ hipótesis frecuentemente adoptada en mecánica de suelos), puede ser definida a partir de la ecuación (7.40), sustituyendo los valores de τ y σ, asociados a cada circulo de falla. Por lo tanto, la falla del material se alcanza bajo la condición siguiente:

$$\text{Máx}\left[\frac{|\sigma_1 - \sigma_3|}{2} - c - k\,\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}\,;\,\frac{|\sigma_1|}{2} - c - k\,\frac{\sigma_1}{2}\,;\,\frac{|\sigma_3|}{2} - c - k\,\frac{\sigma_3}{2}\right] \tag{7.41}$$

siendo $k = \tan \phi$.

Obsérvese que la ecuación (7.41) representa seis rectas cuya intersección define la superficie de fluencia correspondiente (figura (7.8)). En este caso los valores límite de los esfuerzos R_T (resistencia a la tensión) y R_C (resistencia a la compresión) que se indican en dicha figura dependen de los parámetros c y ϕ.

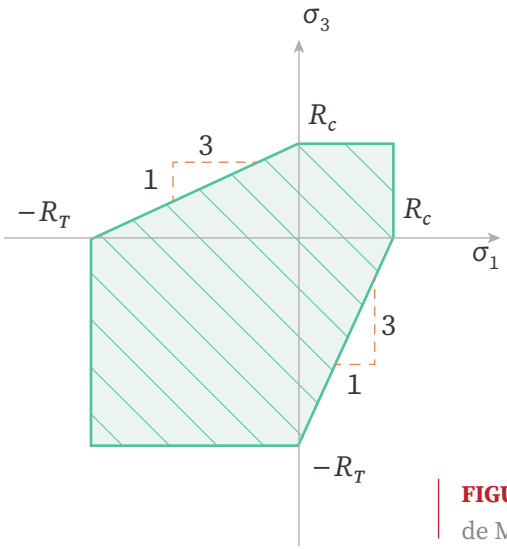


FIGURA 7.8 Criterio de falla de Mohr-Coulomb

7.7 Teoría de Griffith

Esta teoría de ruptura se estableció en un principio para estudiar el comportamiento del vidrio, pero posteriormente se aplicó a las rocas con resultados razonables. Se asume la existencia de discontinuidades dentro de la masa del material, como es el caso de las rocas fisuradas.

Se analizará el caso ideal de una masa de roca sometida a un estado de esfuerzo plano $(\sigma_2 = 0)$ dado por σ_1 y σ_3, en la que se encuentra una grieta o discontinuidad (figura (7.9)).

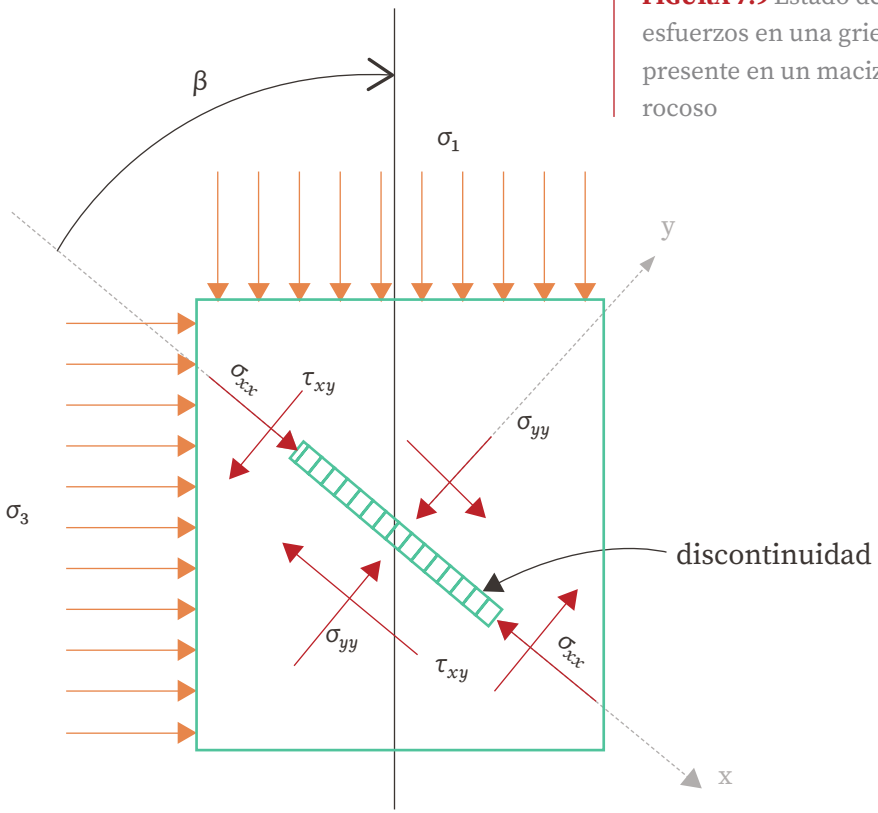
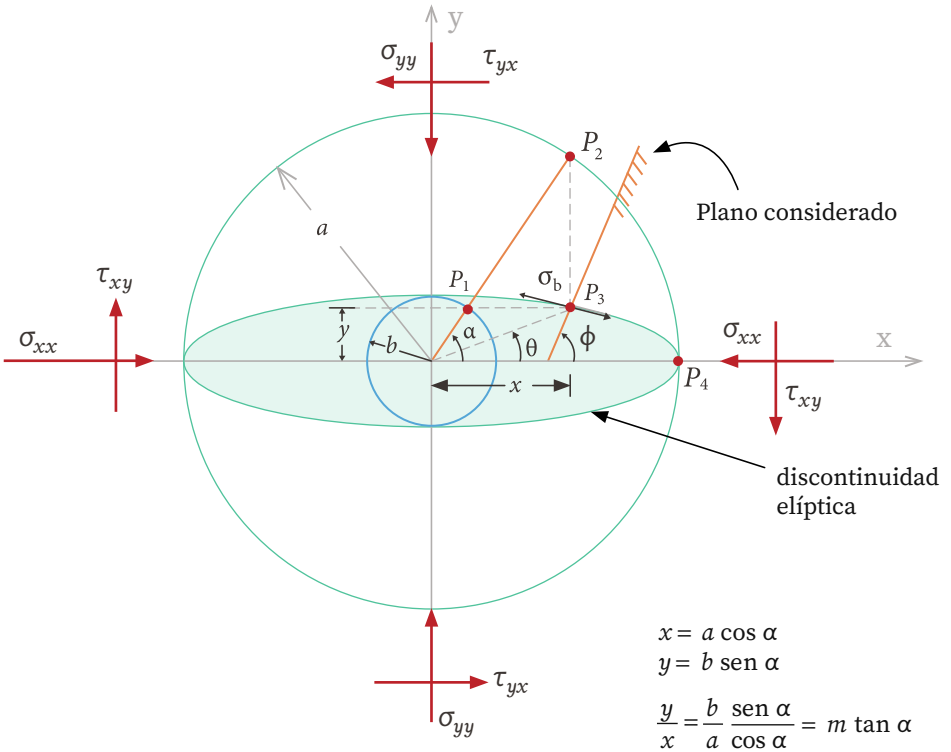


FIGURA 7.9 Estado de esfuerzos en una grieta presente en un macizo rocoso

Se considerará en un primer análisis que $\beta = cte$, siendo β el ángulo que forma la dirección del esfuerzo principal mayor σ_1 y el eje longitudinal de la grieta. Este caso correspondería por ejemplo al de una probeta de roca sedimentaria con planos de sedimentación paralelos entre sí.

Para realizar el análisis, supondremos que sólo existe una discontinuidad y esta tiene forma elíptica muy achatada, según se muestra en la figura (7.10).



$$x = a \cos \alpha$$
$$y = b \operatorname{sen} \alpha$$
$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = m \tan \alpha$$
$$\frac{y}{x} = \tan \theta \; ; \; \tan \theta = m \tan \alpha$$

FIGURA 7.10 Esquema para determinar el esfuerzo normal de ruptura σ_b en una grieta de un macizo rocoso

En una prueba triaxial dada, se conocen σ_1 y σ_3 y, mediante el uso del círculo de Mohr de esfuerzos, se pueden determinar σ_{xx}, σ_{yy}, y τ_{xy}.

Se desea determinar la magnitud del esfuerzo normal σ_b en términos de los esfuerzos σ_{xx}, σ_{yy}, y τ_{xy} y de la geometría de la discontinuidad. Este problema ha sido resuelto en el marco de la teoría de la elasticidad y el esfuerzo σ_b se expresa mediante la siguiente fórmula:

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{yy}\left[m(m+2)\cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha\right] + \sigma_{xx}\left[(1+2m)\operatorname{sen}^2\alpha - m^2\cos^2\alpha\right] - }{m^2\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\frac{-\tau_{xy}\left[2(1+m^2)\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha\right]}{m^2\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha} \qquad (7.42)$$

siendo $m = \dfrac{b}{a}$ la excentricidad de la elipse.

La falla del material está asociada con el valor máximo de σ_b, siendo este un esfuerzo de tensión que ocurre en los labios de la discontinuidad.

Analicemos los estados de esfuerzos en la vecindad de la cúspide de la elipse (punto P_4), es decir, para el caso en que $\alpha = 0$, suponiendo además una grieta o discontinuidad infinita de espesor pequeño, o sea $m = 0$. En estas condiciones:

$$\cos\alpha \approx 1 \text{ y } \operatorname{sen}\alpha \approx \alpha$$

y la expresión anterior queda:

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{yy}\left[m^2 + 2m - \alpha^2\right] + \sigma_{xx}\left[(1+2m)\alpha^2 - m^2\right] - \tau_{xy}\left[2(1+m^2)\alpha\right]}{m^2 + \alpha^2} \qquad (7.43)$$

Despreciando los términos de segundo orden, por ser muy pequeños comparados con los de primer orden, obtendremos:

$$\sigma_b = \frac{\sigma_{yy}(2m) - \tau_{xy}(2\alpha)}{m^2 + \alpha^2}$$

es decir:

$$\sigma_b = \frac{2\left[m\sigma_{yy} - \alpha\tau_{xy}\right]}{m^2+\alpha^2} \tag{7.44}$$

A partir de esta expresión, podemos encontrar el valor máximo de σ_b en la vecindad del punto P_4.

Si:

$\sigma_{b\,máx}$ < Resistencia a la tensión de la matriz rocosa, la falla no se presenta
$\sigma_{b\,máx}$ = Resistencia a la tensión de la matriz rocosa, hay equilibrio límite
$\sigma_{b\,máx}$ > Resistencia a la tensión de la matriz rocosa, se presenta la falla

Para conocer en qué punto de la elipse se presenta esta condición, obtendremos el máximo esfuerzo de tensión, para ello hagamos:

$$\frac{d\sigma_b}{d\alpha} = 0, \text{ suponiendo } m \text{ constante}$$

$$\frac{d}{d\alpha}\left[2\left(\frac{m\sigma_{yy} - \alpha\tau_{xy}}{m^2+\alpha^2}\right)\right] = \frac{-2\tau_{xy}\left(m^2+\alpha^2\right) - 4\alpha\left(m\sigma_{yy} - \alpha\tau_{xy}\right)}{\left(m^2+\alpha^2\right)^2} = 0 \tag{7.45}$$

es decir:

$$2\tau_{xy}\left(m^2+\alpha^2\right) = -4\alpha\left[m\sigma_{yy} - \alpha\tau_{xy}\right]$$

$$\tau_{xy} = -\left[\frac{2m\sigma_{yy} - 2\alpha\tau_{xy}}{m^2+\alpha^2}\right]\alpha = -\alpha\sigma_b$$

$$\Rightarrow \qquad \alpha = \frac{-\tau_{xy}}{\sigma_b} \tag{7.46}$$

Sustituyendo (7.46) en (7.44) queda:

$$\sigma_b = \frac{2\left[m\,\sigma_{yy} + \dfrac{\tau_{xy}^2}{\sigma_b}\right]}{m^2 + \dfrac{\tau_{xy}^2}{\sigma_b^2}} = \frac{2\,m\,\sigma_{yy}\,\sigma_b^2 + 2\,\tau_{xy}^2\,\sigma_b}{m^2\sigma_b^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$m^2\sigma_b^2 + \tau_{xy}^2 = 2\,m\,\sigma_{yy}\,\sigma_b + 2\,\tau_{xy}^2$$

$$\therefore \quad m^2\,\sigma_b^2 - 2\,m\,\sigma_{yy}\,\sigma_b - \tau_{xy}^2 = 0$$

resolviendo la ecuación de segundo grado obtenemos:

$$\left(m\,\sigma_b - \sigma_{yy}\right)^2 = \sigma_{yy}^2 + \tau_{xy}^2 \qquad (7.47)$$

$$m\,\sigma_b = \sigma_{yy} \pm \left(\sigma_{yy}^2 + \tau_{xy}^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (7.48)$$

Para el caso particular en que los ejes x y y coincidan con las direcciones de los esfuerzos principales, se tiene: $\tau_{xy} = 0$ y $\sigma_{yy} = \sigma_t$, siendo σ_t la resistencia a la tensión del material. Sustituyendo esta condición en la ecuación (7.48), se tiene que $m\sigma_b = 2\,\sigma_t$. Por lo tanto, el esfuerzo de falla se puede expresar como $\sigma_b = \dfrac{2\sigma_t}{m}$.

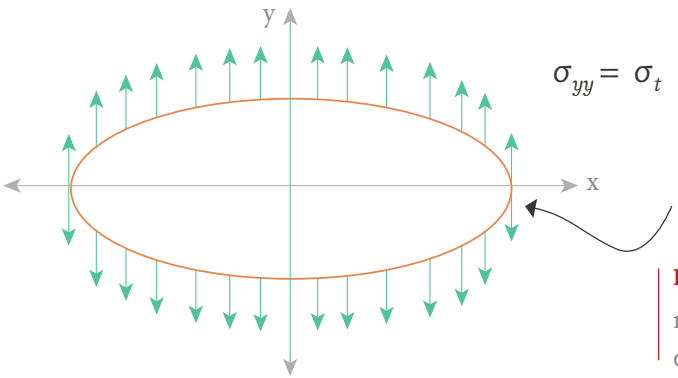


FIGURA 7.11. Esfuerzo normal σ_{yy} en la discontinuidad elíptica

Cuando $m\,\sigma_b = 2\,\sigma_t$, la expresión (7.48) queda como:

$$2\,\sigma_t = \sigma_{yy} \pm \sqrt{\sigma_{yy}^2 + \tau_{xy}^2}$$

Despejando τ_{xy}^2 de esta ecuación, se obtiene:

$$\tau_{xy}^2 = 4\,\sigma_t\left(\sigma_t - \sigma_{yy}\right) \qquad (7.49)$$

Matemáticamente, la ecuación (7.49) representa una parábola en el plano $\tau_{xy} - \sigma_{yy}$ y constituye la envolvente de resistencia de Mohr para una falla de tipo frágil.

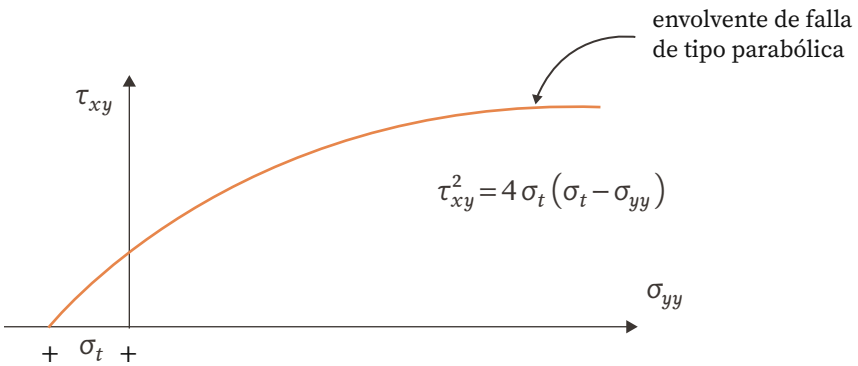


FIGURA 7.12. Envolvente de falla, criterio de Griffith

Este criterio de falla explica el porqué se relaciona la curvatura de la envolvente de falla con la presencia de fisuras en la roca.

Obtengamos ahora una expresión que relacione directamente al esfuerzo máximo de tensión σ_b con los esfuerzos principales σ_1 y σ_3. Para ello utilizaremos las ecuaciones que permiten calcular los esfuerzos normal (ecuación (1.62)) y cortante (ecuación (1.63)) asociados a un plano

de corte que forma un ángulo β con la dirección del esfuerzo principal mayor σ_1, dado un tensor esfuerzo plano principal. Así:

$$2\,\sigma_{yy} = (\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\beta \tag{7.50}$$

$$2\,\tau_{xy} = (\sigma_1 - \sigma_3)\ \text{sen}\,2\beta \tag{7.51}$$

Sustituyendo las ecuaciones (7.50) y (7.51) en la ecuación (7.48), se tiene:

$$m\,\sigma_b = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\beta\right]$$

$$\pm\left[\frac{1}{4}(\sigma_1 + \sigma_3)^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\cos 2\beta + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2\cos^2 2\beta + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{4}(\sigma_1 - \sigma_3)^2\,\text{sen}^2 2\beta\right]^{\frac{1}{2}}$$

Así, obtenemos finalmente:

$$m\,\sigma_b = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\beta\right] \pm$$

$$\pm\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2 + \sigma_3^2) - (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)\cos 2\beta\right]} \tag{7.52}$$

Ahora, analicemos el caso general cuando el ángulo β es variable (figura 7.13).

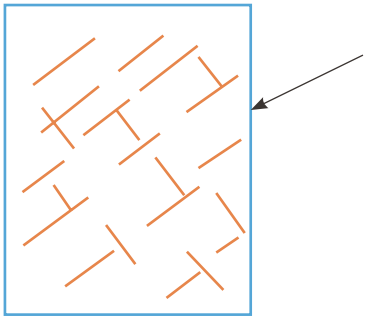


FIGURA 7.13.
Discontinuidades con diferente inclinación

Encontremos el σ_b máximo *maximorum* haciendo variar la ecuación (7.48) con respecto a α (lo que ya se hizo con anterioridad), y con respecto a β.

Para obtener el σ_b máximo *maximorum*, derivemos la ecuación (7.52) con respecto a β e igualemos a cero, así:

$$\frac{d\sigma_b}{d\beta}=\frac{1}{2}(\sigma_1-\sigma_3)2\operatorname{sen}2\beta \pm \frac{1}{2}\frac{\frac{1}{2}(\sigma_1^2-\sigma_3^2)2\operatorname{sen}2\beta}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_3^2)-(\sigma_1^2-\sigma_3^2)\cos 2\beta\right]}}=0$$

$$(\sigma_1-\sigma_3)\operatorname{sen}2\beta\left(1\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_3^2)-(\sigma_1^2-\sigma_3^2)\cos 2\beta\right]}}\right)=0$$

Esta última ecuación se cumple si:

$$1\pm\frac{1}{2}\frac{\sigma_1+\sigma_3}{\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1^2+\sigma_3^2)-(\sigma_1^2-\sigma_3^2)\cos 2\beta\right]}}=0$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)-\left(\sigma_1^2-\sigma_3^2\right)\cos 2\beta\right]} = \mp\frac{1}{2}\left(\sigma_1+\sigma_3\right) \tag{7.53}$$

Desarrollando esta última ecuación, se tiene:

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)-\left(\sigma_1^2-\sigma_3^2\right)\cos 2\beta\right]=\frac{1}{4}\left(\sigma_1+\sigma_3\right)^2$$

$$\frac{1}{2}\left[\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)\cos 2\beta=\frac{1}{2}\left(\sigma_1^2+\sigma_3^2\right)-\frac{1}{4}\left(\sigma_1+\sigma_3\right)^2\right.$$

$$\cos 2\beta=\frac{\frac{1}{2}\sigma_1^2+\frac{1}{2}\sigma_3^2-\sigma_1\sigma_3}{\sigma_1^2-\sigma_3^2}$$

$$\cos 2\beta=\frac{\left(\sigma_1+\sigma_3\right)^2}{2\left(\sigma_1-\sigma_3\right)\left(\sigma_1+\sigma_3\right)}$$

$$\cos 2\beta=\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2\left(\sigma_1+\sigma_3\right)} \tag{7.54}$$

La ecuación (7.54) permite calcular el valor del ángulo β que conduce al máximo valor del término $m\,\sigma_b$.

Si hacemos que: $k=\dfrac{\sigma_3}{\sigma_1}$

$$\cos 2\beta=\frac{1-k}{2\left(1+k\right)}$$

Conocidos σ_1 y σ_3, se puede evaluar el plano donde se va a presentar la falla del material. Sustituyendo las ecuaciones (7.53) y (7.54) en la (7.52), se obtiene:

$$m\,\sigma_b = \frac{1}{2}\left[(\sigma_1+\sigma_3)-(\sigma_1-\sigma_3)\,\frac{\sigma_1-\sigma_3}{2(\sigma_1+\sigma_3)}\right]-\frac{1}{2}(\sigma_1+\sigma_3)$$

$$m\,\sigma_b = -\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4(\sigma_1+\sigma_3)} = 2\,\sigma_t \qquad (7.55)$$

Esta última expresión representa la envolvente general de Griffith para un material con fisuramiento isótropo.

En una prueba de compresión simple $\sigma_3 = 0$, $\sigma_1 \neq 0$, y la ecuación (7.55) se reduce a:

$$\sigma_1^2 + 8\,\sigma_t\,\sigma_1 = 0$$

$$\sigma_1 = -8\,\sigma_t = R_c \qquad (7.56)$$

De la ecuación anterior, puede observarse que la resistencia a la compresión simple (R_c) es 8 veces la resistencia de la roca a la tensión (σ_t). En la práctica se ha encontrado que la R_c es del orden de 10 veces la resistencia a la tensión.

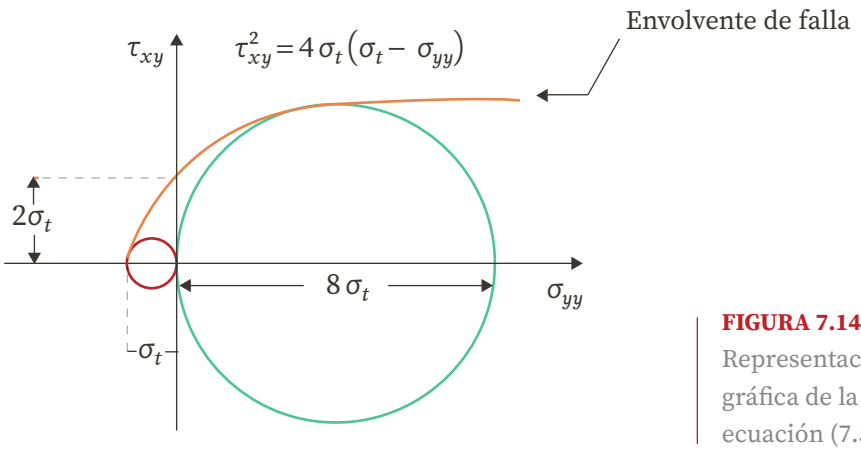


FIGURA 7.14. Representación gráfica de la ecuación (7.56)

La ecuación de la parábola, que se muestra en la figura (7.14), tiene como ecuación:

$$\tau_{xy}^2 = 4\,\sigma_t\left(\sigma_t - \sigma_{yy}\right) \tag{7.57}$$

Si $\sigma_{yy} = 0$, se obtiene la cohesión de la roca:

$$\tau_{xy} = 2\,\sigma_t = c$$

De lo anterior, puede concluirse que la cohesión de la roca es la cuarta parte de su resistencia a la compresión simple R_c.

La falla de la muestra de roca se va a presentar por insuficiencia de resistencia a la tensión en la matriz rocosa, en un punto cercano a la cúspide de la elipse representativa de la discontinuidad más desfavorable para su estabilidad. Las fisuras se propagan en un principio con un ángulo 2β con respecto al eje de la discontinuidad, y posteriormente tienden a tomar la dirección paralela al esfuerzo σ_1, no siendo ya peligrosas cuando llegan a este punto, debido a que el esfuerzo de confinamiento σ_3 no deja progresar la grieta.

7.8 Problemas resueltos

Problema 7.1

El tensor esfuerzo en la viga, que se muestra en la figura (7.14), está dado por:

$$T_{ij} = \frac{3P}{4c^3}\begin{bmatrix} 2xy & c^2 - y^2 & 0 \\ c^2 - y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo c el semiperalte de la sección transversal de la viga y P una carga puntual aplicada en su extremo.

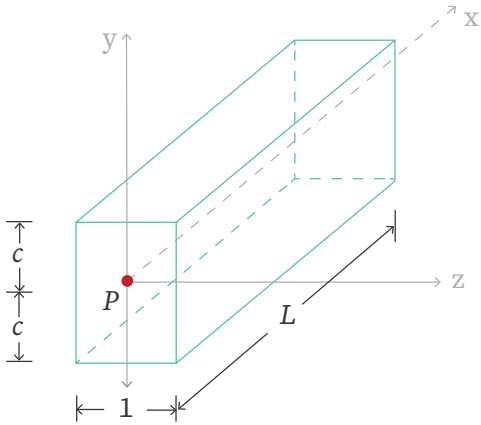


FIGURA 7.15 Barra prismática sometida a una carga puntual P en su extremo libre

Determine, aplicando el criterio de VMH, el valor límite de la fuerza P, de tal forma que la viga se mantenga dentro del rango elástico.

S Solución

La teoría del medio continuo será aplicable si $I_1^2 - 3I_2 \leq S_f^2$, en todos los puntos del medio.

Si en algún punto $I_1^2 - 3I_2 = S_f^2$, se establecería el límite del tensor T_{ij} hasta donde sería aplicable la mecánica del medio continuo.

Si en algunas regiones $I_1^2 - 3I_2 < S_f^2$, la teoría de la mecánica del medio continuo no será aplicable.

Si P se aplica al medio, se busca definir la región en la cual sea aplicable la Teoría Elástica.

Llamando: $k_2 = \dfrac{3P}{4c^3}$

Entonces los invariantes valen:

$$I_1 = 2\,xy\,k_2$$

$$I_2 = -\left(c^2 - y^2\right)^2\,k^2$$

Sustituyendo los valores de I_1 e I_2 en la ecuación (7.39), existirá fluencia cuando:

$$4x^2\,y^2\,k^2 + 3k^2\left(c^4 - 2c^2y^2 + y^4\right) = S_f^2$$

$$4x^2\,y^2 + 3\left(c^4 - 2c^2y^2 + y^4\right) = \frac{S_f^2}{k^2}$$

Esta última ecuación representa la condición de fluencia de VMH.

La elasticidad sería aplicable mientras no se plastifique algún punto. Los puntos más esforzados son a $(L, -c)$ y $b\,(L, +c)$.

Se iniciará la fluencia en el medio en el instante en que las coordenadas de los puntos a y b satisfagan la condición de VMH.

Sustituyendo las coordenadas de los puntos en la condición de fluencia, se tiene:

$$4L^2c^2 + 3\left(c^4 - 2c^4 + c^4\right) = \frac{S_f^2}{k^2}$$

$$4L^2c^2 = \frac{S_f^2}{k^2} \qquad \therefore \qquad k^2 = \frac{S_f^2}{4L^2c^2}$$

$$\frac{9P^2}{16c^6} = \frac{S_f^2}{4L^2c^2}\,, \quad \Rightarrow \quad P^2 = \frac{16c^4S_f^2}{36L^2} = \frac{4c^4S_f^2}{9L^2}$$

$$P = \pm \frac{2c^2 S_f}{3L}$$

Si la fuerza P del extremo está comprendida entre los límites:

$-\frac{2c^2 s_f}{3L} < P < \frac{2c^2 s_f}{3L}$, el medio es elástico.

Si $\left| P \right| < \frac{2c^2 \sigma_f}{3L}$, el material deja de ser elástico.

P Problema 7.2

El tensor esfuerzo en la viga que se muestra en la figura (7.14) está dado por:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{M_z}{I_z} x & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Siendo M_z el momento flexionante aplicado en los extremos de la viga e I_z el momento de la inercia centroidal de la misma. Determine, aplicando el criterio de VMH, el momento de fluencia M_f de la viga.

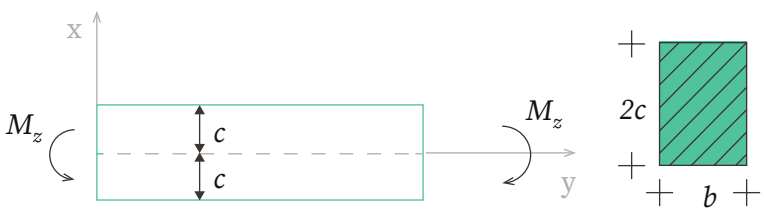


FIGURA 7.16 Viga sometida a flexión pura

S **Solución**

Existirá plastificación si $I_1^2 - 3I_2 > S_f^2$

$$\left(\frac{M_z}{I_z}x\right)^2 = S_f^2 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{I_z}{M_z}S_f$$

Las rectas límites pasan por el borde de la sección si $x = c = \frac{I_z S_f}{M_f}$, por lo tanto, $M_z = M_f$.

Así $M_f = S_f$ multiplica $\frac{I_z}{c}$

Si $|M_f| < S_f$ multiplica $\frac{I_z}{c}$ $\Rightarrow$ todo el medio es elástico.

Si $|M_f| > S_f$ multiplica $\frac{I_z}{c}$ $\Rightarrow$ el medio deja de ser elástico y sólo una porción próxima al eje y permanecerá elástica.

Esta distribución de esfuerzos aparecerá cuando la sección se ha plastificado completamente, y será engendrada por un momento plástico total M_p, tal que:

$$M_p > M_f$$

Por estática se puede afirmar que el M_p es la fuerza resultante F de la distribución de esfuerzos en la sección transversal completamente plastificada, esto es:

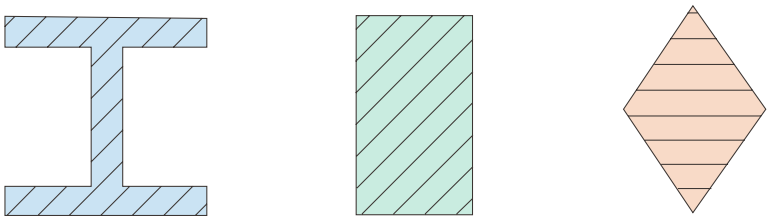
$$M_p = Fc \quad \Rightarrow \quad M_p = S_f bc^2$$

Por otra parte:

$$M_f = \frac{1}{12}\,\frac{b(2c)^3}{c}\,S_f = \frac{2}{3}bc^2 S_f \;\Rightarrow\; M_f = \frac{2}{3}M_p$$

Este último resultado muestra que el momento plástico, M_p, es 1.5 veces el momento de fluencia M_f, que se alcanza en la fibra más alejada de la sección de la viga $(x = \pm c)$, por lo tanto, se puede incrementar el momento que provoca la primera fluencia en 50 % para alcanzar el momento que provoca fluencia en toda la sección transversal.

La relación que existe entre el momento de la fluencia y el momento de plastificación total, M_p/M_f, depende de la forma de la sección transversal de la viga y puede oscilar entre 1 y 2.5.



$1.07 < \frac{M_p}{M_f} < 1.17$ $\qquad$ $\frac{M_p}{M_f} = 1.5$ $\qquad$ $\frac{M_p}{M_f} > 1.5$

FIGURA 7.17 Relación M_p/M_f para diferentes secciones

P Problema 7.3

Para el estado de esfuerzo:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix}$$ siendo σ y τ dos constantes

Determine el esfuerzo de fluencia empleando los criterios de Coulomb-Tresca y VMH.

Los esfuerzos principales se obtienen resolviendo la ecuación característica, y resultan:

$$\sigma_1 = \sigma + \tau \qquad \sigma_2 = \sigma \qquad \sigma_3 = \sigma - \tau$$

Así, el tensor esfuerzo principal queda como:

$$T_{ij} = \begin{bmatrix} (\sigma + \tau) & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma - \tau) \end{bmatrix}$$

Condición de fluencia de VMH:

$$I_1^2 - 3 I_2 = S_f^2$$

Los invariantes del tensor esfuerzo son:

$$I_1 = 3\sigma$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} (\sigma+\tau) & 0 \\ 0 & \sigma \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & (\sigma-\tau) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} (\sigma-\tau) & 0 \\ 0 & (\sigma+\tau) \end{vmatrix}$$

$$I_2 = (\sigma+\tau)\sigma + \sigma(\sigma-\tau) + (\sigma-\tau)(\sigma+\tau)$$

$$I_2 = \sigma^2 + \tau\sigma + \sigma^2 - \tau\sigma + \sigma^2 + \tau\sigma - \tau\sigma - \tau^2$$

$$I_2 = 3\sigma^2 - \tau^2$$

Por lo que, aplicando la condición de fluencia de VMH, se tiene:

$$(3\sigma)^2 - 3(3\sigma^2 - \tau^2) = S_f^2$$

$$9\sigma^2 - 9\sigma^2 + 3\tau^2 = S_f^2$$

$$S_f^2 = 3\tau^2 \;\Rightarrow\; S_f = \pm\sqrt{3\tau^2}$$

$$S_f = \pm 1.73\tau$$

Utilizando el criterio de Coulomb-Tresca:

$$\tau_{máx} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{S_f}{2}$$

$$\frac{(\sigma + \tau) - (\sigma - \tau)}{2} = \frac{S_f}{2} \;;\Rightarrow\; S_f = 2\tau$$

Obsérvese que este último criterio permite un mayor esfuerzo de fluencia comparado con la teoría de VMH.

P Problema 7.4

Una muestra cilíndrica de un material deformable está confinada por un molde rígido que no le permite deformarse lateralmente, bajo una presión constante p. Aplicando el criterio de VMH, diga si el material alcanza la condición de fluencia.

Para establecer el estado de esfuerzos y deformaciones, suponga que el cuerpo deformable es elástico lineal, homogéneo e isótropo. Suponga además que no se producen esfuerzos cortantes en el contacto molde-muestra.

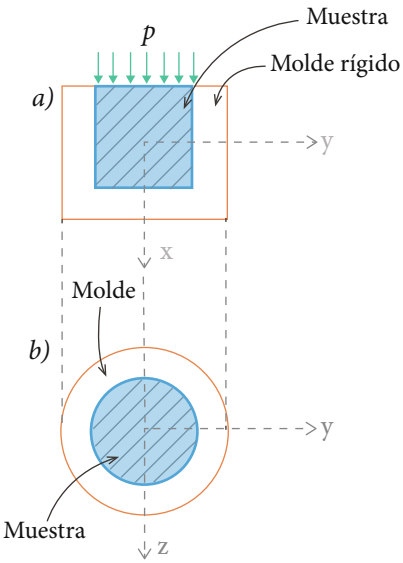


FIGURA 7.18 Muestra cilíndrica en un molde rígido; a) alzado, b) planta

Datos:

$$E = 2.1\times10^{8}\ \text{kPa}$$
$$\nu = 0.2$$
$$S_f = 4000\times10^{2}\ \text{kPa}$$
$$p = 1000\times10^{2}\ \text{kPa}$$

S Solución

Las ecuaciones constitutivas de los materiales elásticos lineales, homogéneos e isótropos para un estado de esfuerzo principal, son:

$$\sigma_{xx} = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda J_1$$
$$\sigma_{yy} = 2G\varepsilon_{yy} + \lambda J_1$$
$$\sigma_{zz} = 2G\varepsilon_{zz} + \lambda J_1$$

Cálculo de las constantes elásticas.

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{2.1\times10^{8}}{2(1+0.2)} = 0.875\times10^{8}\ \text{kPa}$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} = \frac{0.2 \times 2.1 \times 10^8}{(1+0.2)(1-2\times 0.2)} = 0.583 \times 10^8 \text{ kPa}$$

De los datos del problema, se pueden establecer las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= -p \quad ; \quad \varepsilon_{xx} \neq 0 \\ \sigma_{yy} &\neq 0 \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = 0 \\ \sigma_{zz} &\neq 0 \quad ; \quad \varepsilon_{zz} = 0 \end{aligned}$$

Para σ_{yy}, se tiene: $\sigma_{yy} = \lambda J_1$

Para σ_{zz}, se tiene: $\sigma_{zz} = \lambda J_1 \quad \rightarrow \quad \sigma_{yy} = \sigma_{zz}$

Para σ_{xx}, se tiene:

$$\sigma_{xx} = -1000 \times 10^2 = 2G\varepsilon_{xx} + \lambda J_1 (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) - 1000 \times 10^2 =$$

$$= 2G\varepsilon_{xx} + \lambda \varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx}(2G + \lambda)$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{-1000 \times 10^2}{(2G + \lambda)} = \frac{-1000 \times 10^2}{(2 \times 0.875 \times 10^8 + 0.583 \times 10^8)}$$

$$\varepsilon_{xx} = -0.428 \times 10^{-3} = J_1$$

$$\sigma_{yy} = 0.583 \times 10^8 \times (-0.428 \times 10^{-3}) = -249.5 \times 10^2 \text{ kPa}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -249.5 \times 10^2 \text{ kPa}$$

Por lo tanto, el tensor esfuerzo resulta igual a:

$$T_{ij}=\begin{bmatrix} -1000 & 0 & 0 \\ 0 & -249.5 & 0 \\ 0 & 0 & -249.5 \end{bmatrix} \times 10^2 \text{ kPa}$$

Aplicando el criterio de VMH, se tiene: $S_f^2 = I_1^2 - 3\,I_2$

Cálculo del primer invariante I_1:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = -1000 \times 10^2 - 249.5 \times 10^2 - 249.5 \times 10^2$$

$$= -1499.0 \times 10^2 \text{ kPa}$$

$$I_2 = \left\{ \left(-1000 \times -249.5\right) + \left(-249.5 \times -249.5\right) + \left(-249.5 \times -1000\right) \right\} \times 10^4$$

$$I_2 = 561\,250 \times 10^4$$

$$S_f^2 = 1499.0^2 \times 10^4 - 3 \times 561\,250 \times 10^4 = 563\,251 \times 10^4$$

$$S_f = 750.5 \times 10^2 \text{ kPa} \quad \left(\text{esfuerzo de fluencia calculado}\right)$$

Dado que 750.5×10^2 kPa $< 4\,000 \times 10^2$ kPa, no se presenta fluencia en el material.

CAPÍTULO

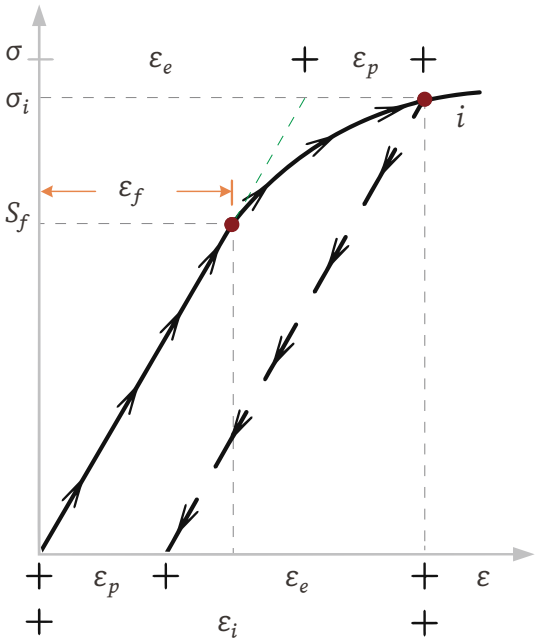
8 Elastoplasticidad

Introducción

En este capítulo se desarrollan algunos conceptos fundamentales de la teoría de la plasticidad como son la condición de fluencia, el potencial plástico, la regla de flujo, el Principio del trabajo plástico máximo, el endurecimiento isotrópico, el Postulado de estabilidad de Drucker, el endurecimiento cinemático y combinado y las ecuaciones generales esfuerzo-deformación para los materiales plásticos.

8.1 Criterio de fluencia

La condición que define el límite de aplicabilidad de la teoría de la elasticidad y el inicio de las deformaciones irreversibles o plásticas es conocida como la condición de fluencia del material o criterio de fluencia. En la figura 8.1 se muestra una curva esfuerzo-deformación para un material ideal, donde se aplicó un ciclo de carga-descarga, lo cual puso de manifiesto las deformaciones elásticas o reversibles (ε_e) y las plásticas o irreversibles (ε_p).



S_f: esfuerzo de fluencia
ε_f: deformación de fluencia
$\varepsilon_i = \varepsilon_e + \varepsilon_p$

Figura 8.1 Curva esfuerzo-deformación para un estado uniaxial de esfuerzos. Deformaciones elásticas y plásticas

En el caso de un estado de esfuerzos uniaxial, el criterio de fluencia está dado por un esfuerzo límite, el cual, una vez superado, hace que aparezcan deformaciones plásticas en el material. En el espacio de esfuerzos principales $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$, dicho esfuerzo límite queda representado por *un punto*. Para un estado de esfuerzos plano, el criterio de fluencia queda representado por *una curva*, en tanto que, para un estado general de esfuerzos, lo constituye *una superficie*. Se puede afirmar que cuando el estado de esfuerzos en un punto del material, generado por las cargas aplicadas, se ubica dentro de la superficie de fluencia, el material es elástico, pero si se ubica sobre la superficie de fluencia se tendrán deformaciones plásticas.

Matemáticamente, el criterio de fluencia se puede expresar en términos de los elementos del tensor esfuerzo (seis elementos independientes en el

caso de un tensor cartesiano o tres elementos si se trata de un tensor principal) o bien en función de los invariantes del tensor esfuerzo T_{ij} como:

$$f(T_{ij}) = f(I_1, I_2, I_3) = 0 \tag{8.1}$$

Cabe resaltar que, un estado de esfuerzos con $f > 0$ estaría fuera de la superficie de fluencia, no obstante, esta última condición es inadmisible en la teoría de la plasticidad, y se asume que el material no puede existir bajo ese estado de esfuerzos.

8.2 Potencial plástico y regla de flujo

Se estableció que, cuando el estado de esfuerzos que experimenta el material en un punto debido a las cargas aplicadas se ubica sobre la superficie de fluencia (SF), comienzan a aparecer deformaciones plásticas. La evaluación de estas deformaciones es una de las tareas fundamentales de la teoría de la plasticidad. Si las direcciones principales de esfuerzo coinciden con las direcciones principales de deformación, como es el caso de los metales, el incremento del tensor deformación plástico se puede evaluar mediante:

$$(dE_{ij})_p = d\lambda \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \tag{8.2}$$

Siendo $d\lambda$ un escalar positivo que controla la magnitud de las deformaciones plásticas y g una función denominada *potencial plástico*, que controla la dirección de las deformaciones plásticas, éste último puede ser igual o diferente del criterio de fluencia y puede adoptar el siguiente formato:

$$g(T_{ij}) = g(I_1, I_2, I_3) = 0 \tag{8.3}$$

La ecuación (8.2), se conoce también como *regla de flujo plástico*, y permite calcular los incrementos de deformación plástica a partir del potencial plástico. Cuando el potencial plástico es igual al criterio de fluencia la regla de flujo se llama *asociada* o *regla de normalidad*. Cabe señalar que en el caso de los suelos con un alto grado de anisotropía esta regla no siempre se cumple.

8.3 Principio del trabajo plástico máximo

Supongamos que se conoce el incremento del tensor de deformación plástico $(dE_{ij})_p$, calculado con la regla de normalidad a partir del tensor esfuerzo T_{ij} y representado por un punto P sobre la SF f. Si T^*_{ij} representa el tensor esfuerzo en un punto arbitrario P^*, sobre o interior a la *SF*, entonces, la diferencia de los trabajos plásticos realizados por ambos estados de esfuerzos sobre $(dE_{ij})_p$, se puede expresar como (figura (8.2)):

$$dW_p = (T_{ij} - T^*_{ij})(dE_{ij})_p \tag{8.4}$$

De acuerdo con la figura 8.1, la ecuación (8.4) representa el producto punto de los vectores $\overline{P^*P}$ y $\overline{PQ}$. Si la SF f es convexa, el ángulo que forman estos dos vectores es menor de 90° y, por lo tanto, su producto punto es positivo. Así:

$$(T_{ij} - T^*_{ij})(dE_{ij})_p \geq 0 \tag{8.5}$$

La ecuación (8.5) es conocida como el Principio del Trabajo Plástico Máximo, el cual se puede enunciar como *el trabajo realizado por un tensor de esfuerzos T_{ij} sobre el incremento del tensor deformación $(dE_{ij})_p$ es siempre igual o mayor que el trabajo realizado por un tensor de esfuerzos arbitrario que no rebase la superficie de fluencia*. Del principio del trabajo plástico

máximo se pueden derivar dos conceptos importantes: primero, la SF f es convexa y, segundo, el incremento de deformación plástica $(dE_{ij})_p$ es ortogonal a la SF.

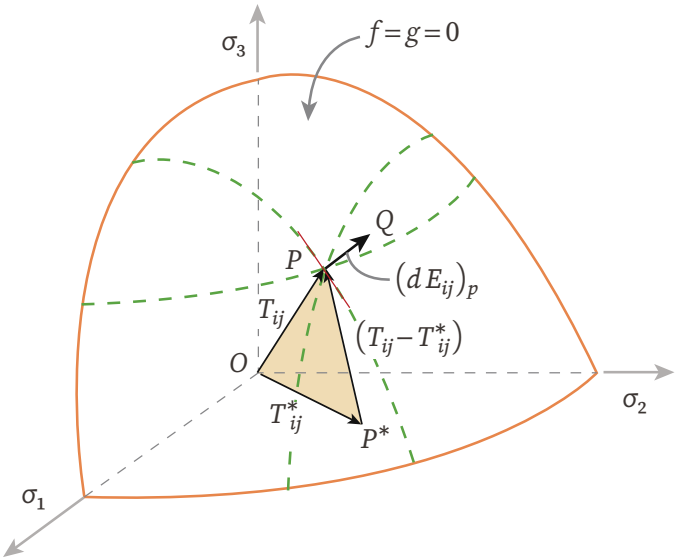


Figura 8.2
Definición de trabajo plástico máximo

8.4 Endurecimiento por deformación y plasticidad perfecta

Es un hecho reconocido en la teoría de la plasticidad que la SF no está fija en el espacio de esfuerzos, sino que ella se puede expandir o contraer en función de las deformaciones plásticas experimentadas por el material y la historia de cargas.

Considérese en primer lugar el caso en que las deformaciones plásticas sólo cambian el tamaño de la SF, pero no la forma. Si la SF se incrementa el fenómeno se conoce como *endurecimiento isotrópico* en el caso de que disminuya el fenómeno recibe el nombre de *ablandamiento isotrópico*. En ambos casos la SF también recibe el nombre de *superficie de carga*.

Esta última puede ser representada matemáticamente por:

$$f\left(T_{ij}\,,\,(dE_{ij})_p\right)=0 \tag{8.6}$$

Cuando la SF no cambia con la historia de esfuerzos, el material tiene un comportamiento perfectamente plástico.

Tomando en cuenta la ecuación (8.6), se pueden establecer las condiciones matemáticas que debe cumplir un material que endurece por las deformaciones que experimenta cuando se somete a un estado de esfuerzos, para que su comportamiento sea elástico o plástico, esto es:

$$\text{Si}\quad f\left(T_{ij}\,,\,(dE_{ij})_p\right)<0\quad \text{ó}\quad df=\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}\,dT_{ij}\leq 0 \Rightarrow \text{material elástico} \tag{8.7}$$

$$\text{Si}\quad f\left(T_{ij}\,,\,(dE_{ij})_p\right)=0\quad \text{ó}\quad df=\frac{\partial f}{\partial T_{ij}}\,dT_{ij}>0 \Rightarrow \text{material plástico} \tag{8.8}$$

El incremento de deformación plástica puede calcularase también como:

$$(dE_{ij})_p=G_{ij}\,df \tag{8.9}$$

Siendo G_{ij} un tensor simétrico, el cual es función del estado de esfuerzos, así como de la historia de deformaciones, siendo independiente del tensor incremento de esfuerzos. Esta última condición se puede satisfacer expresando G_{ij} como:

$$G_{ij}=h\,\frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \tag{8.10}$$

Siendo h y g dos funciones escalares del tensor esfuerzo y dependen también de la historia de deformaciones. Específicamente g recibe el nombre de *Potencial Plástico*.

Sustituyendo la ecuación (8.10) en la (8.9), el incremento de deformación plástica se puede calcular como:

$$\left(d E_{ij}\right)_p = h \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} df \tag{8.11}$$

8.5 Postulado de estabilidad de Drucker

En la figura 8.3a se muestra la curva esfuerzo-deformación de un material ideal para un estado de esfuerzos uniaxial, en tanto que en la figura 8.3b se muestra la curva esfuerzo-deformación plástica de dicho material. En esta última figura se observa que para un incremento de deformación plástica el trabajo plástico total realizado es $\int \sigma \, d\varepsilon_p$, que representa el área bajo la curva *ABCD*. Obsérvese en la figura (8.3), que el área *ABDE* representa el trabajo plástico realizado por el esfuerzo σ_i, que corresponde al punto donde el incremento de deformación plástica inicia, siendo su valor $\sigma_i d\varepsilon_p$ y está representado por el área *ABDE*, en tanto que, el trabajo plástico realizado por $d\sigma$ vale $d\sigma \, d\varepsilon_p$, y está dado por el área *CDE*. Si la curva esfuerzo-deformación es monótonamente creciente $d\sigma \, d\varepsilon_p > 0$, en caso contrario dicho producto será negativo. Si el trabajo plástico es positivo el postulado de Drucker define el comportamiento del material como *estable* y si es negativo será *inestable*.

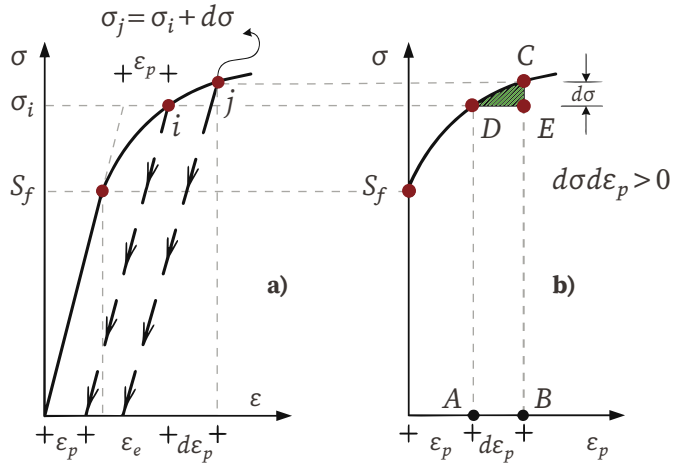


Figura 8.3
Definición de comportamiento estable e inestable

Con base en lo anterior, para un estado de esfuerzos arbitrario T^*_{ij}, dentro o sobre la superficie de fluencia, el postulado de estabilidad de Drucker permite establecer desde el punto de vista matematico, dos inigualdades fundamentales para el comportamiento plástico de los materiales, ellas son:

$$\left(T_{ij} - T^*_{ij}\right)\left(dE_{ij}\right)_p \geq 0 \tag{8.12}$$

$$\left(dT_{ij}\right)\left(dE_{ij}\right)_p \geq 0 \tag{8.13}$$

Cabe señalar que la ecuación (8.12) es la misma derivada del Principio del trabajo plástico máximo.

En resumen, un material con comportamiento estable, en términos del postulado de Drucker, debe satisfacer las siguientes condiciones:

a) La SF debe ser convexa.
b) El incremento de deformación plástica es ortogonal a la SF (regla de flujo asociada).

c) La curva esfuerzo-deformación deberá ser monótonamente creciente, esto es, el incremento de deformación plástica durante el endurecimiento por deformación será positivo o cero.

d) Es válido el Principio del Trabajo Plástico Máximo.

8.6 Endurecimiento por deformación isotrópico y cinemático

El endurecimiento por deformación significa que la SF puede cambiar de tamaño, forma y trasladarse, en función de la historia de cargas, esta última pudiéndose expresar en términos de las deformaciones plásticas. Cuando se conoce la condición de fluencia inicial, la modificación de la SF por flujo plástico se puede establecer a partir de la regla de flujo.

8.6.1 Endurecimiento isotrópico

Esta condición se tiene cuando la forma de la SF no cambia y no se traslada, pudiendo expandirse o contraerse uniformemente con relación a su centro geométrico (figura (8.4)).

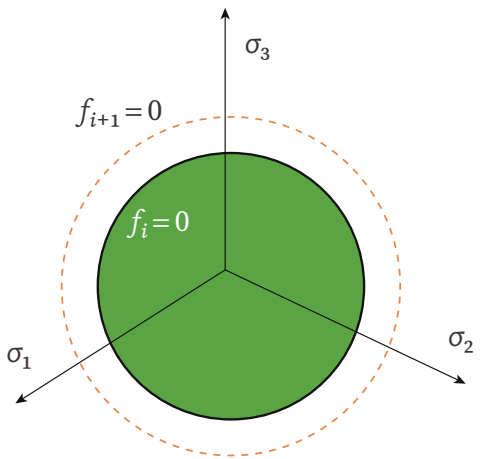


Figura 8.4
Endurecimiento isotrópico con expansión uniforme de la superficie de fluencia

Cuando la SF tiene su centro geométrico en el origen del espacio de esfuerzos principales, esta se puede representar matemáticamente como:

$$f = f(T_{ij}) - R(\alpha) = 0 \tag{8.14}$$

Ecuación en la cual R representa el tamaño de la SF, siendo función de las deformaciones plásticas experimentadas por el material, estas últimas pudiéndose expresar en función de un parámetro de endurecimiento α (variable de estado). Es usual que la variable de estado se exprese como una función de las deformaciones plásticas, dando lugar a lo que se conoce como endurecimiento por deformación (*strain hardening*). Sin embargo, hay que tomar en cuenta que la variable de estado puede evolucionar si existe alguna otra condición que modifique el límite de fluencia del material considerado. Es común expresar este parámetro en términos de la deformación plástica equivalente, como:

$$\alpha = \sqrt{2/3} \int \left[\left(dE_{ij}\right)_p \left(dE_{ij}\right)_p \right]^{\frac{1}{2}} \tag{8.15}$$

Pero también en términos del trabajo plástico como:

$$\alpha = \int T_{ij} \left(dE_{ij}\right)_p \tag{8.16}$$

8.6.2 Endurecimiento cinemático

Cuando durante el flujo plástico del material la SF mantiene su forma y tamaño y sólo se traslada, esta condición se conoce como endurecimiento cinemático.

Matemáticamente el endurecimiento cinemático se puede describir como:

$$f = f(T_{ij} - \alpha_{ij}) - R_0 = 0 \tag{8.17}$$

Ecuación en la cual α_{ij} representa las coordenadas del centroide de la SF y R_0 es una constante del material que representa el tamaño inicial de la SF. La ecuación (8.17) muestra que cuando α_{ij} cambia debido al flujo plástico del material, la SF se traslada en el espacio de esfuerzos manteniendo su tamaño y forma. De esta manera la regla de flujo para α_{ij} puede ser expresada en términos de $\left(d E_{ij}\right)_p$ y T_{ij}.

Uno de los primeros modelos de endurecimiento por deformación cinemático fue propuesto por Prager (1955), citado por Yu HS (2006), el cual asume que la SF mantiene su forma y tamaño original y sólo se traslada en la dirección del incremento del tensor deformación plástica (figura (8.5a)). Matemáticamente esta condición se puede expresar de manera simple a partir de una regla de flujo lineal, como:

$$d\alpha_{ij} = c\left(d E_{ij}\right)_p \tag{8.18}$$

Siendo c una constante del material. Este modelo da buenos resultados para estados de esfuerzos uniaxiales, pero su predicción es deficiente cuando el problema es bidimensional o tridimensional, ya que en cada caso se tiene que utilizar una SF distinta.

Para superar la deficiencia del modelo de Prager, otro investigador, Ziegler(1959), citado por Yu HS (2006), asume que la SF se mueve en dirección del vector $T_{ij} - \alpha_{ij}$ (figura (8.5b)), cuya representación matemática de su modelo resulta:

$$d\alpha_{ij} = d\mu\left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right) \tag{8.19}$$

Siendo $d\mu$ una constante del material.

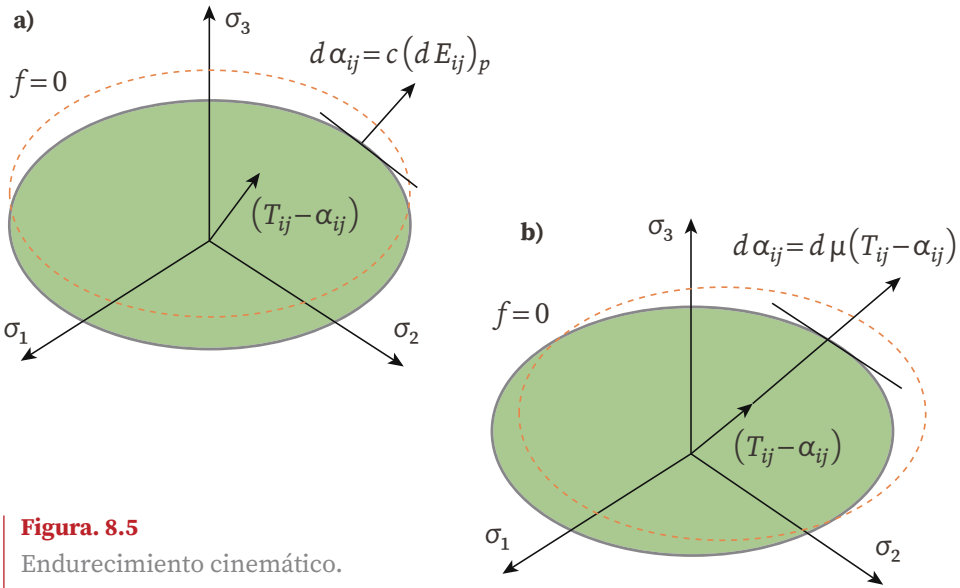


Figura. 8.5
Endurecimiento cinemático.
a) Regla de flujo de Prager
b) Regla de flujo de Ziegler

8.6.3 Endurecimiento cambinado o mixto

Si la SF puede cambiar de forma y tamaño y además trasladarse, cuando el material está sometido a flujo plástico, este fenómeno recibe el nombre de endurecimiento combinado o mixto. En este caso el tamaño y el centroide de la SF dependen de las deformaciones plásticas, pudiéndose expresar matemáticamente este modelo de endurecimiento como:

$$f = f\left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right) - R(\alpha) = 0 \qquad (8.20)$$

En este modelo el tamaño de la SF puede expresarse como una función de las deformaciones plásticas o del trabajo plástico. La traslación de la SF se puede describir con el modelo de Prager o bien el de Ziegler.

8.7 Relaciones esfuerzo-deformación para materiales elastoplásticos

Existen ciertas condiciones que deben cumplir los materiales plásticos perfectos o bien los que presentan endurecimiento por deformación, también conocidas como *condiciones de consistencia*. En el primer caso, asumiendo que el estado de esfuerzos parte de la SF, esto es, $f(T_{ij}) = 0$, entonces el estado de esfuerzos generado por la aplicación de cargas permanece sobre la SF. En el segundo caso dichas condiciones significan que, durante el flujo plástico, el estado de esfuerzos se ubica sobre la SF subsecuente.

8.7.1 Condiciones de consistencia para materiales que presentan endurecimiento por deformación isotrópico

En este caso la SF puede ser descrita como:

$$f(T_{ij}, \alpha) = 0 \tag{8.21}$$

Calculando la diferencial total de la función f, se tiene:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} d\alpha = 0 \tag{8.22}$$

Puesto que el parámetro de endurecimiento depende de las deformaciones plásticas, calculando su diferencial total en términos de las deformaciones plásticas, la ecuación (8.22) se puede reescribir como:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial (E_{ij})_p} d(E_{ij})_p = 0 \tag{8.23}$$

El incremento de deformación plástica $d(E_{ij})_p$ que aparece en la ecuación (8.23) puede ser determinado a partir del potencial plástico (ecuación (8.11)), una vez conocido el valor de la función h, o la regla de flujo plástico (ecuación (8.2)), cuya aplicación requiere de conocer la cantidad positiva $d\lambda$. Para ello, se puede hacer uso de la regla de consistencia dada por la ecuación (8.22) para determinar $d\lambda$.

Con base en lo anterior es posible establecer un procedimiento general para determinar las relaciones esfuerzo-deformación para materiales perfectamente plásticos o que presentan endurecimiento por deformación. La secuencia es como sigue:

a) El incremento de deformación total dE_{kl} se puede dividir en una parte elástica $(E_{kl})_e$ y otra plástica $(E_{kl})_p$, como:

$$dE_{kl} = d(E_{kl})_e + (E_{kl})_p \tag{8.24}$$

b) Las relaciones esfuerzo-deformación para materiales elásticos lineales homogéneos e isótropos, permiten calcular las deformaciones elásticas, en función del tensor esfuerzo T_{ij} y de la matriz de constantes elásticas del material D_{ijkl}, como:

$$dT_{ij} = D_{ijkl}(E_{kl})_e = D_{ijkl}\left[dE_{kl} - (dE_{kl})_p\right] \tag{8.25}$$

c) El incremento del tensor deformación plástica que aparece en la ecuación (8.25) se puede expresar en términos del potencial plástico (Ec. (8.2)), quedando la ecuación como:

$$dT_{ij} = D_{ijkl}\left[dE_{kl} - d\lambda \frac{\partial g}{\partial T_{kl}}\right] \tag{8.26}$$

Sustituyendo esta última ecuación en la ecuación de consistencia (ecuación (8.23)), y despejando $d\lambda$ se obtiene:

$$d\lambda = \frac{1}{H}\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} D_{ijkl}\, dE_{kl} \tag{8.27}$$

Ecuación en la cual H está dada por:

$$H = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial T_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial (E_{ij})_p} \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \tag{8.28}$$

Sustituyendo la ecuación (8.27) en la (8.26), se obtienen las relaciones generales esfuerzo-deformación para materiales elasto-plásticos, esto es:

$$d\,T_{ij} = (D_{ijkl})_{ep}\, d\,E_{kl} \tag{8.29}$$

Siendo $(D_{ijkl})_{ep}$ la matriz de rigidez elasto-plástica, definida por:

$$(D_{ij})_{ep} = D_{ijkl} - \frac{1}{H} D_{ijmn} \frac{\partial g}{\partial T_{mn}} \frac{\partial f}{\partial T_{pq}} D_{pqkl} \tag{8.30}$$

Para materiales plásticos perfectos la SF no cambia, por lo tanto, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, por lo que la ecuación (8.28) se reduce a:

$$H = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} D_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial T_{kl}} \tag{8.31}$$

8.7.2 Condiciones de consistencia para materiales que presentan endurecimento por deformación cinemático

Se estableció con anterioridad que en los materiales que presentan endurecimiento por deformación cinemático su SF puede ser expresada por la ecuación (8.17).

Calculando la diferencial total de la función f dada por la ecuación (8.17), se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} d\alpha_{ij} = 0 \tag{8.32}$$

Derivando la ecuación (8.17) con respecto a T_{ij} y después con respecto a α_{ij}, y dado que ambos resultados están igualados a cero, se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} = -\frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \tag{8.33}$$

Sustituyendo en la ecuación (8.32) las ecuaciones (8.2), (8.18) (criterio de endurecimiento de Prager) y (8.33), se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = c \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} d\lambda \frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \tag{8.34}$$

La ecuación (8.34) permite calcular el multiplicador plástico $d\lambda$ como:

$$d\lambda = \frac{1}{c} \frac{\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij}}{\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \frac{\partial g}{\partial T_{ij}}} = \frac{1}{c} \frac{df}{\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \frac{\partial g}{\partial T_{ij}}} \tag{8.35}$$

Sustituyendo la ecuación (8.35) en la (8.2) se obtiene el incremento de deformación plástica $(dE_{ij})_p$, y si este resultado se sustituye a su vez en la ecuación (8.18) es posible calcular el parámetro plástico α_{ij} como:

$$d\alpha_{ij} = \frac{df}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}}\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}}\frac{\partial g}{\partial T_{ij}} \tag{8.36}$$

Por lo tanto, el incremento del tensor deformación plástica $(dE_{ij})_p$ queda como:

$$d(E_{ij})_p = \frac{1}{c}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}}\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}}df \tag{8.37}$$

Tomando en cuenta la ecuación (8.25), el incremento del tensor deformación elástico $(E_{ij})_e$ se puede expresar como:

$$(dE_{ij})_e = C_{ijkl}\,dT_{kl} \tag{8.38}$$

Siendo $[C_{ijkl}] = [D_{ijkl}]^{-1}$ la matriz de flexibilidades del material elástico.

Por lo tanto, el incremento del tensor deformación total dE_{ij} queda expresado como (ecuación (8.24)):

$$d(E_{ij})_p = C_{ijkl}\,dT_{kl} + \frac{1}{c}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}}\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}}df \tag{8.39}$$

Esta última ecuación se puede escribir como:

$$dE_{ij} = [C_{ijkl}]_{ep}\,dT_{kl} \tag{8.40}$$

Siendo:

$$\left[C_{ijkl}\right]_{ep} = C_{ijkl} + \frac{1}{c}\frac{\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}\dfrac{\partial f}{\partial T_{kl}}}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}}\dfrac{\partial g}{\partial T_{ij}}} \tag{8.41}$$

Las relaciones esfuerzo-deformación de un material elasto-plástico, empleando el criterio de endurecimiento de Ziegler, se pueden derivar con un procedimiento similar al seguido para el criterio de endurecimiento de Prager.

Aplicando el Principio de Consistencia de Prager (ecuación (8.32)) a la ecuación (8.17) y tomando en cuenta la ecuación (8.33), se obtiene:

$$\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij} = \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right) d\mu \tag{8.42}$$

De esta última ecuación se puede despejar el parámetro plástico $d\mu$, dando como resultado.

$$d\mu = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}} dT_{ij}}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}} \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right)} = \frac{df}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}} \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right)} \tag{8.43}$$

De la ecuación (8.19) se puede determinar el parámetro plástico $d\alpha_{ij}$, quedando como:

$$d\alpha_{ij} = d\mu \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right) = \frac{df}{\dfrac{\partial f}{\partial T_{ij}} \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right)} \left(T_{ij} - \alpha_{ij}\right) \tag{8.44}$$

Es importante destacar que la ecuación (8.44), derivada sobre la base del criterio de consistencia de Prager y la regla de endurecimiento de Ziegler, no involucra el incremento de deformación plástica $d\left(E_{ij}\right)_p$. Sin embargo, para superar este problema Melan (1938), citado por Yu HS (2006), propuso calcular el incremento de deformación plástico $d\left(E_{ij}\right)_p$ a partir de un potencial plástico, de la forma:

$$d\left(E_{ij}\right)_p = \frac{1}{K_p} \frac{\frac{\partial g}{\partial T_{ij}}}{\frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \frac{\partial g}{\partial T_{ij}}} df \qquad (8.45)$$

Ecuación en la cual K_p representa un módulo de plasticidad que puede ser determinado experimentalmente de pruebas de compresión o tensión uniaxiales. Se puede observar que el valor de K_p es equivalente al valor de c en la regla de endurecimiento de Prager (ecuación (8.41))

8.8 Teoremas de colapso plástico

En este inciso se desarrollan los conceptos de trabajo virtual y los teoremas de colapso plástico, que son la base de la teoría de la plasticidad, cuyas aplicaciones en la mecánica de sólidos son muy variadas.

8.8.1 El Principio del Trabajo Virtual

El principio del trabajo virtual (PTV) es una forma de expresar las condiciones de equilibrio y continuidad para un cuerpo deformable en equilibrio estático.

Consideremos un cuerpo deformable en equilibrio estático de volumen V, envuelto por un área A, sometido a un sistema de fuerzas de superficie t_{0i} y desplazamientos δ_{0i}, ambos conocidos, en dos regiones perfectamente diferenciadas del área total del cuerpo, denominadas A_T y A_δ, respectivamente (figura (8.6)). Se supone también que el cuerpo está sometido a un campo de fuerzas de cuerpo f_i. Dado que el sistema de fuerzas de superficie y los desplazamientos son conocidos, las condiciones de frontera son:

$$\delta_i = \delta_{0i} \qquad \text{sobre área } A_\delta \tag{8.46}$$

$$t_{0i} = T_{ij}\, n_j \qquad \text{sobre área } A_T \tag{8.47}$$

El PTV se puede expresar para todo el cuerpo deformable como:

$$\iiint_V T_{ij}\, dE_{ij}\, dV = \iiint_V f_i\, d\delta_i\, dV + \iint_{A_T} t_{0i}\, d\delta_i\, dA \tag{8.48}$$

Ecuación en la cual el incremento tensor deformación está dado por:

$$dE_{ij} = \frac{1}{2}\left(d\delta_{i,j} + d\delta_{j,i}\right) \tag{8.49}$$

En la ecuación (8.48), el primer miembro de la ecuación representa el *trabajo interno* efectuado por el tensor esfuerzo T_{ij} en cada punto material del cuerpo, sobre el tensor deformación diferencial virtual dE_{ij}, mientras que el segundo miembro de la ecuación representa el *trabajo externo* efectuado por las fuerzas de cuerpo actuando en cada dV (primer término) y las fuerzas de superficie conocidas en la región A_T, sobre el vector desplazamiento diferencial virtual $d\delta_i$ (segundo término).

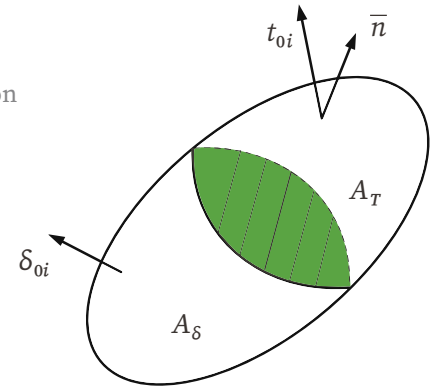


Figura 8.6 Definición de trabajo virtual

8.8.2 Teoremas de colapso plástico en el análisis límite

Cuando un material plástico perfecto se somete a un sistema de cargas externas en su superficie, las cuales se incrementan gradualmente, llega un momento en que dichas cargas alcanzan un cierto valor límite, a partir del cual el material ya no es capaz de soportar incrementos de carga adicionales. Este valor límite recibe el nombre de *estado límite de carga o colapso plástico,* cuya determinación es fundamental en la ingeniería civil y mecánica. El método de análisis límite está basado en dos teoremas fundamentales, que permiten establecer una cota inferior y superior al sistema de cargas límite que es capaz de soportar el sólido elasto-plástico perfecto antes de alcanzar el colapso plástico.

8.8.2.1 Primer teorema de colapso plástico, cota inferior del sistema de cargas límite

Si un sólido plástico perfecto es sometido solamente a un sistema de fuerzas de superficie mt_{0i}, siendo m un coeficiente de proporcionalidad que varía desde cero hasta un valor final m_c (figura (8.7)). Si t_{0i} se hace unitario, el coeficiente m, será una medida directa de la magnitud de t_{0i}. En otras palabras, si el coeficiente m es relativamente pequeño, digamos

$0 < m < m_c$, el material tendrá un comportamiento puramente elástico, pero cuando $m = m_c$ el material comienza a comportarse plásticamente y puede ocurrir que ante esta condición de carga límite el material se siga deformando sin que se incrementen los esfuerzos. Cuando $m < m_c$ ciertas partes del material alcanzan la plastificación, aunque existirán otras partes que se seguirán comportando elásticamente.

Por simplicidad de exposición, se supondrá que los desplazamientos conocidos δ_{0i} en la región A_δ son cero, esto es, el trabajo realizado por las fuerzas reactivas es nulo.

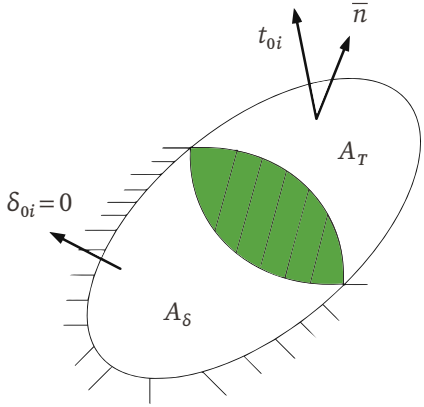


Figura 8.7 Definición de teoremas de colapso plástico

El primer teorema de colapso plástico permite determinar la cota inferior del factor de carga de colapso m_c, cuyo enunciado es como sigue:

> *Si todas las deformaciones por cambio de volumen del material son despreciables cuando se alcanza el sistema de cargas límite o colapso plástico, el factor de carga de colapso derivado de un sistema de cargas estáticamente admisible $(m_c)_s$ es siempre menor que el factor de carga de colapso real m_c, esto es $(m_c)_s \leq m_c$.*

Para probar este teorema, aplicaremos el PTV (ecuación (8.48)), para dos estados de esfuerzo, T_{ij} y $(T_{ij})_s$, siendo el primero de ellos el estado de esfuerzos correspondiente a una condición de colapso plástico con

su correspondiente estado de deformación dE_{ij}, y, el segundo de ellos, es el estado de esfuerzos estáticamente admisible (el punto Q es interior a la superficie de fluencia, figura (8.5)) el cual está en equilibrio con el factor de carga $(m_c)_s$. Al aplicar el PTV a estos dos estados de esfuerzos (figura (8.8)), se obtiene que:

$$\iiint_V \left[T_{ij} - (T_{ij})_s\right] dE_{ij}\, dV \geq 0 \tag{8.50}$$

Obsérvese en la ecuación (8.50) que el término $\left[T_{ij} - (T_{ij})_s\right] dE_{ij}$ representa el producto punto de dos vectores que forman un ángulo entre ellos menor de 90° (por ser la superficie de fluencia convexa), por lo que dicho producto siempre será mayor o igual a cero.

Desarrollando la ecuación (8.50), se tiene:

$$\iiint_V \left[T_{ij} - (T_{ij})_s\right] dE_{ij}\, dV = \left[m_c - (m_c)_s\right] \iint_{A_T} t_{0i}\, d\delta_i\, dA \geq 0 \tag{8.51}$$

Analizando la ecuación (8.51), se puede constatar que el trabajo realizado por el vector esfuerzo t_{0i} es positivo, por lo tanto se debe cumplir que:

$$(m_c)_s \leq m_c \tag{8.52}$$

Desigualdad que representa el primer teorema de colapso plástico o la cota inferior del sistema de cargas límite.

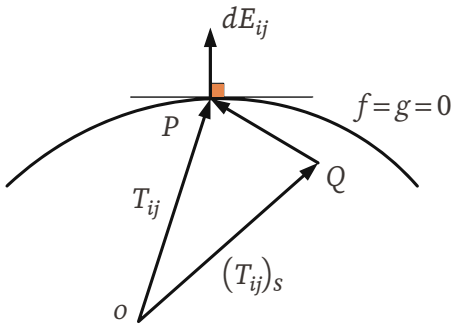


Figura 8.8 Primer teorema de colapso plástico

8.8.2.2 Segundo teorema de colapso plástico, cota superior del sistema de cargas límite

Para demostrar el segundo teorema de colapso plástico consideremos un campo de velocidades cinemáticamente admisible, esto es, satisface las condiciones de frontera sobre A_δ (figura (8.9)). Adicionalmente, se definirá a $(m_c)_k$ como el factor de carga de colapso asociado al campo de velocidades cinemáticamente admisible. De esta manera, se puede enunciar el segundo teorema de colapso plástico como sigue:

> *Si todas las deformaciones por cambio de volumen del material son despreciables cuando se alcanza el sistema de cargas límite o colapso plástico, el factor de carga de colapso derivado de un campo de velocidades cinemáticamente admisible* $(m_c)_k$ *es siempre mayor o igual que el factor de carga de colapso real* m_c*, esto es,* $(m_c)_k \geq m_c$ *.*

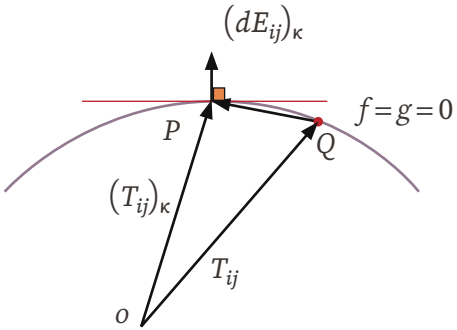


Figura 8.9 Segundo teorema de colapso plástico

Para probar este segundo teorema, haremos uso nuevamente del PTV, para dos estados de esfuerzo, T_{ij} y $(T_{ij})_k$, siendo el primero de ellos el estado de esfuerzos correspondiente a un estado de colapso plástico (el punto Q está sobre la superficie de fluencia, figura (8.7)), y, el segundo de ellos, es el estado de esfuerzos asociado con el estado rapidez de deformación $(dE_{ij})_k$, que satisface la ley de flujo asociada (condición de

ortogonalidad). Al aplicar el PTV a estos dos estados de esfuerzos, se debe cumplir que:

$$\iiint_V \left[(T_{ij})_k - T_{ij}\right] d(E_{ij})_k \, dV \geq 0 \tag{8.53}$$

Definiendo un factor de carga cinemáticamente admisible $(m_c)_k$, se puede establecer que:

$$\iiint_V (T_{ij})_k \, (dE_{ij})_k \, dV = (m_c)_k \iint_{A_T} t_{0i} \, (d\delta_i)_k \, dA \tag{8.54}$$

Aplicando el PTV, se obtiene:

$$\iiint_V \left[(T_{ij})_k - T_{ij}\right](dE_{ij})_k dV = \left[(m_c)_k - m_c\right] \iint_{A_T} t_{0i} \, (d\delta_i)_k \, dA \geq 0 \tag{8.55}$$

Analizando la ecuación (8.55), se puede constatar que si se escoge un campo de velocidades cinemáticamente admisible tal que el término:

$$\iint_{A_T} t_{0i} \, (d\delta_i)_k \, dA \geq 0 \tag{8.56}$$

Entonces se cumple que:

$$(m_c)_k \geq m_c \tag{8.57}$$

Desigualdad que representa el segundo teorema de colapso plástico o la cota superior del sistema de cargas límite.

APÉNDICE

A Elementos de análisis tensorial

El *análisis tensorial* se centra en el estudio de entes abstractos llamados tensores, cuyas propiedades son independientes de los sistemas de referencia empleados para determinarlos.

Un tensor está representado en un sistema de referencia particular mediante un conjunto de funciones llamadas *componentes.*

El que un conjunto de funciones represente a un tensor depende de la ley de transformación de estas funciones de un sistema coordenado a otro.

Los tensores se clasifican por su orden y el número de componentes en un sistema de referencia cartesiano es 3^N, siendo N el orden del tensor. En la tabla (A.1) se reportan algunos tensores, su representación en notación indicial y el número de componentes.

Tabla A.1 Clasificación de los tensores

Orden N	Nombre del tensor	Símbolo	No. de componentes
0	escalar	a	1
1	vector	b_i	3
2	diada	T_{ij}	9
3	triada	E_{ijk}	27
:	:	:	:

La ubicación del punto P en el sistema de referencia x_1, x_2, x_3 está dada por el vector $\overline{OP} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3$, siendo $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$ los vectores base asociados al sistema de referencia x_1, x_2, x_3. La ubicación de dicho punto en el sistema de referencia x'_1, x'_2, x'_3 es $\overline{OP} = x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + x'_3\bar{e}'_3$ (figura (A.1)).

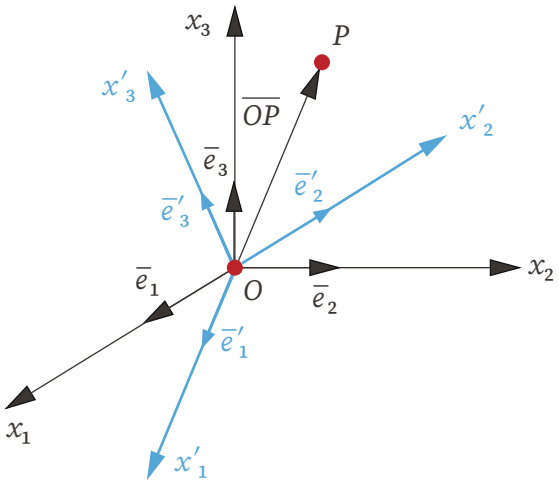


Figura A.1
Coordenadas de un punto P en un sistema de referencia cartesiano

Un conjunto de ecuaciones:

$$x'_i = f_i(x_1, x_2, x_3)$$

describe una transformación de las variables x_1, x_2, x_3 a las variables x'_1, x'_2, x'_3. De la misma forma, se puede plantear la transformación inversa como:

$$x_i = g_i(x'_1, x'_2, x'_3)$$

Con objeto de asegurar que la transformación inversa existe y es uno a uno, en una región R, se debe cumplir lo siguiente:

a) Las funciones f_i tienen valor único en el punto P, son continuas así como sus primeras derivadas.

b) El determinante del jacobiano no se anula en ningún punto de la región R, esto es:

$$J = \left| \frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x'_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x'_3}{\partial x_3} \end{vmatrix} \neq 0$$

Si se cumple lo establecido en a) y b), se dice que la transformación es admisible. Si el jacobiano es positivo en cualquier punto de la región R, se afirma que la transformación es propia, en caso contrario, la transformación es impropia.

En el estudio de los medios continuos, que se aborda en estos apuntes, se acepta que las transformaciones son admisibles y propias.

Consideremos un sistema de referencia cartesiano x_1, x_2, x_3 y los vectores base asociados a cada eje $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$ y $\bar{e}_3$, tal como se muestra en la figura (A.2).

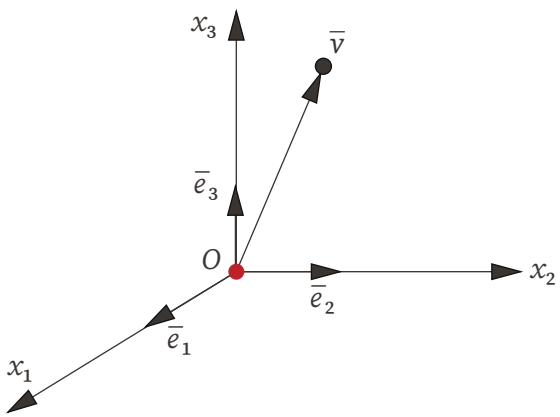


FIGURA A.2
Sistema de referencia cartesiano

Debido a que los vectores base son mutuamente ortogonales y tienen un módulo unitario, se dice que forman una base ortonormal.

Cualquier vector $\bar{v}$, puede ser expresado en esta base como:

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 + v_3 \bar{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} v_i \bar{e}_i \qquad \text{(A.1)}$$

siendo v_1, v_2 y v_3 los componentes del vector $\bar{v}$.

Notación suma

Siempre que en una ecuación tensorial aparezca un subíndice repetido, se entenderá que se debe sumar el producto de las letras con subíndice repetido. De esta manera, si se está en un espacio de n dimensiones, se sumará de 1 a n. Los índices repetidos son mudos (o falsos), ya que el resultado final es independiente de la letra usada.

Por lo tanto, la ecuación (A.1) se puede expresar como:

$$\bar{v} = v_i \bar{e}_i = v_j \bar{e}_j \qquad \text{(A.2)}$$

E **Ejemplo A.1**

Sin importar por el momento el significado de las siguientes ecuaciones, representarlas en forma expandida, con variación de los subíndices de 1 a 3.

a) $u_i\, v_i\, w_j\, \bar{e}_j$ **b)** $T_{ij}\, v_i\, \bar{e}_j$ **c)** $T_{ii}\, v_j\, \bar{e}_j$

S Solución

a) Desarrollando primero el subíndice i y luego el j:

$$u_i\, v_i\, w_j\, \bar{e}_j = \left(u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3\right)\left(w_1 \bar{e}_1 + w_2 \bar{e}_2 + w_3 \bar{e}_3\right)$$

b)
$$\begin{aligned} T_{ij}\, v_i\, \bar{e}_j &= T_{1j}\, v_1\, \bar{e}_j + T_{2j}\, v_2\, \bar{e}_j + T_{3j}\, v_3\, \bar{e}_j \\ &= T_{11} v_1 \bar{e}_1 + T_{12} v_1 \bar{e}_2 + T_{13} v_1 \bar{e}_3 + T_{21} v_2 \bar{e}_1 \\ &\quad + T_{22} v_2 \bar{e}_2 + T_{23} v_2 \bar{e}_3 + T_{31} v_3 \bar{e}_1 + T_{32} v_3 \bar{e}_2 \\ &\quad + T_{33} v_3 \bar{e}_3 \\ &= \left(T_{11} v_1 + T_{21} v_2 + T_{31} v_3\right)\bar{e}_1 + \left(T_{12} v_1 + T_{22} v_2 + T_{32} v_3\right)\bar{e}_2 \\ &\quad + \left(T_{13} v_1 + T_{23} v_2 + T_{33} v_3\right)\bar{e}_3 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} T_{ii}\, v_j\, \bar{e}_j &= \left(T_{11} + T_{22} + T_{33}\right) v_j\, \bar{e}_j \\ &= \left(T_{11} + T_{22} + T_{33}\right)\left(v_1\, \bar{e}_1 + v_2\, \bar{e}_2 + v_3\, \bar{e}_3\right) \end{aligned}$$

D Definiciones

1) Suma de vectores en notación indicial:

$$\bar{w} = \bar{u} + \bar{v} \qquad w_i\, \bar{e}_i = \left(u_i + v_i\right)\bar{e}_i \tag{A.3}$$

2) Multiplicación de un vector por un escalar:

$$\lambda \bar{v} = \lambda v_i\, \bar{e}_i \tag{A.4}$$

Delta de Kronecker

Este símbolo se define como:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & si \quad i = j \\ 0 & si \quad i \neq j \end{cases} \tag{A.5}$$

De acuerdo con la convención suma:

$$\delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3$$

Este símbolo nos permitirá expresar el producto punto de dos vectores de la siguiente manera:

Sean $\overline{u}$ y $\overline{v}$, dos vectores cualesquiera cuyas componentes son:

$$\overline{u} = u_1 \overline{e}_1 + u_2 \overline{e}_2 + u_3 \overline{e}_3 = u_i \overline{e}_i$$

$$\overline{v} = v_1 \overline{e}_1 + v_2 \overline{e}_2 + v_3 \overline{e}_3 = v_j \overline{e}_j$$

Por definición de producto punto, tenemos:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = | \overline{u} | | \overline{v} | \cos\theta \tag{A.6}$$

Siendo θ el ángulo que forman los dos vectores con origen común. De esta manera, si $\theta = 90^{o}$, $\overline{u} \cdot \overline{v} = 0$, lo cual significa que los vectores son ortogonales. En notación indicial, la ecuación (A.6) se puede representar como:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = \left(u_i \overline{e}_i\right) \cdot \left(v_j \overline{e}_j\right) = u_i v_j \overline{e}_i \cdot \overline{e}_j$$

Por la definición del símbolo delta de Kronecker :

$\overline{e}_i \cdot \overline{e}_j = \delta_{ij}$, por lo tanto:

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_i \, v_j \, \delta_{ij} \qquad \text{(A.7)}$$

$$\overline{u} \cdot \overline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

Símbolo de permutación

Este símbolo se define como:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{permutación par: } 1, 2, 3;\ \ 2, 3, 1;\ 3, 1, 2 \\ -1 & \text{permutación impar: } 1, 3, 2;\ \ 3, 2, 1;\ \ 1, 3, 2 \\ 0 & \text{aparece al menos un subíndice repetido} \end{cases}$$

El símbolo de permutación tiene las siguientes propiedades:

$$e_{ijk} = -e_{kji} = e_{kij} = -e_{ikj}$$

D Definiciones

El producto cruz de dos vectores $\overline{u} \times \overline{v}$, es igual a:

$$\overline{u} \times \overline{v} = \left| \overline{u} \right| \left| \overline{v} \right| \operatorname{sen} \theta \qquad \text{(A.8)}$$

$$\overline{u} \times \overline{v} = \begin{bmatrix} \overline{e}_1 & \overline{e}_2 & \overline{e}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$= \bar{e}_1 (u_2 v_3 - u_3 v_2) - \bar{e}_2 (u_1 v_3 - u_3 v_1) + \bar{e}_3 (u_1 v_2 - u_2 v_1)$$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) \bar{e}_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \bar{e}_2 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \bar{e}_3$$

En notación indicial se tiene:

$$\bar{u} \times \bar{v} = (u_i \, \bar{e}_i) \times (v_j \, \bar{e}_j) = u_i v_j \, \bar{e}_i \times \bar{e}_j$$

Obsérvese que:

$$\bar{e}_i \times \bar{e}_j = \varepsilon_{ijk} \, \bar{e}_k \qquad \textbf{(A.9)}$$

Por lo tanto:

$$\bar{u} \times \bar{v} = u_i \, v_j \, \varepsilon_{ijk} \, \bar{e}_k = \varepsilon_{ijk} \, u_i \, v_j \, \bar{e}_k \qquad \textbf{(A.10)}$$

Producto tensorial o externo de dos vectores (diada).

Dado que los vectores son tensores de orden 1, entonces se puede generalizar la definición de producto externo al caso de dos tensores de orden arbitrario, cuyo resultados será un tensor cuyo orden será la suma de los órdenes de los tensores factores y cuyas componentes se determinan multiplicando cada componente de uno de los tensores por todos los componentes del otro. De esta manera sean:

$$\bar{u} = u_i \, \bar{e}_i \; ; \; \bar{v} = v_j \, \bar{e}_j$$

$$\bar{u} \, \bar{v} = u_i \, \bar{e}_i \, v_j \, \bar{e}_j = u_i \, v_j \, \bar{e}_i \, \bar{e}_j$$

Desarrollando esta ecuación, se tiene:

$$\overline{u}\,\overline{v} = u_1\, v_j\, \overline{e}_1\, \overline{e}_j + u_2\, v_j\, \overline{e}_2\, \overline{e}_j + u_3\, v_j\, \overline{e}_3\, \overline{e}_j$$

$$= u_1\, v_1\, \overline{e}_1\, \overline{e}_1 + u_1\, v_2\, \overline{e}_1\, \overline{e}_2 + u_1\, v_3\, \overline{e}_1\, \overline{e}_3 + u_2\, v_1\, \overline{e}_2\, \overline{e}_1$$

$$+ u_2\, v_2\, \overline{e}_2\, \overline{e}_2 + u_2\, v_3\, \overline{e}_2\, \overline{e}_3 + u_3\, v_1\, \overline{e}_3\, \overline{e}_1 + u_3\, v_2\, \overline{e}_3\, \overline{e}_2 + u_3\, v_3\, \overline{e}_3\, \overline{e}_3$$

La suma de estos nueve términos se puede representar de manera matricial como:

$$M = \begin{bmatrix} u_1 v_1 & u_1 v_2 & u_1 v_3 \\ u_2 v_1 & u_2 v_2 & u_2 v_3 \\ u_3 v_1 & u_3 v_2 & u_3 v_3 \end{bmatrix} = u v^T$$

Frecuentemente se utiliza para el producto tensorial de dos vectores la siguiente notación:

$$\overline{u} \otimes \overline{v} = u_i\, \overline{e}_i \otimes v_j\, \overline{e}_j = u_i\, v_j$$

La suma de diadas, expresada por:

$$\overline{u}_1\, \overline{v}_1 + \overline{u}_2\, \overline{v}_2 + \cdots + \overline{u}_N\, \overline{v}_N,$$

se denomina "diádica".

El producto $\overline{e}_i \otimes \overline{e}_j$ se le denomina diadas unitarias.

Productos vector-diada

1) $\overline{u}\cdot\left(\overline{v}\otimes\overline{w}\right)=u_i\,\overline{e}_i\cdot\left(v_j\,\overline{e}_j\,w_k\,\overline{e}_k\right)=u_i\,v_i\,w_k\,\overline{e}_k$

2) $\left(\overline{u}\otimes\overline{v}\right)\cdot\overline{w}=\left(u_i\,\overline{e}_i\,v_j\,\overline{e}_j\right)\cdot w_k\,\overline{e}_k=u_i\,v_j\,w_j\,\overline{e}_i$

3) $\overline{u}\times\left(\overline{v}\otimes\overline{w}\right)=\left(u_i\,e_i\times v_j\,e_j\right)w_k\,e_k=\varepsilon_{ijk}\,u_i\,v_j\,w_k\,\overline{e}_q\,\overline{e}_k$

4) $\left(\overline{u}\otimes\overline{v}\right)\times\overline{w}=u_i\,\overline{e}_i\left(v_j\,\overline{e}_j\times w_k\,\overline{e}_k\right)=\varepsilon_{jkq}\,u_i\,v_j\,w_k\,\overline{e}_i\,\overline{e}_q$

Producto diada-diada

$$\left(\overline{u}\otimes\overline{v}\right)\cdot\left(\overline{w}\otimes\overline{k}\right)=\;u_i\,\overline{e}_i\left(v_j\,\overline{e}_j\cdot w_k\,\overline{e}_k\right)s_q\,\overline{e}_q=u_i\,v_j\,w_j\,s_q\,\overline{e}_i\,\overline{e}_q$$

Producto vector-tensor

a) $\overline{v}\cdot T=v_i\,\overline{e}_i\;\cdot\;T_{jk}\,\overline{e}_j\,\overline{e}_k=v_i\,T_{jk}\,\delta_{ij}\,\overline{e}_k=v_i\,T_{ik}\,\overline{e}_k$

b) $T\cdot\overline{v}\;=T_{ij}\,\overline{e}_i\,\overline{e}_j\cdot v_k\,\overline{e}_k=T_{ij}\,\overline{e}_i\;\delta_{jk}\,v_k=T_{ij}\,v_j\,\overline{e}_i$

Producto tensor – tensor

c) $T\cdot S=T_{ij}\,\overline{e}_i\,\overline{e}_j\;\cdot\;S_{pq}\,\overline{e}_p\,\overline{e}_q=T_{ij}\,S_{jq}\,\overline{e}_i\,\overline{e}_q$

Suma de tensores

Los tensores cartesianos del mismo orden se pueden sumar o restar componente a componente.

$$A_{ijk}\cdots+B_{ijk}=T_{ijk}$$

Multiplicación de cada componente de un tensor por un escalar:

$$b_i = \lambda\, a_i$$
$$B_{ij} = \lambda\, A_{ij}$$

Producto externo de tensores en notación indicial

Como ya se estableció para el caso del producto tensorial de dos vectores, esta operación para el caso de dos tensores de cualquier orden, da como resultado un tensor cuyo orden es la suma de los órdenes factores.

$$a_i\, b_j = T_{ij} \quad ; \quad D_{ij}\, T_{km} = \phi_{ijkm}$$
$$v_i\, F_{jk} = \alpha_{ijk} \; ; \quad \varepsilon_{ijk}\, v_m = \psi_{ijkm}$$

Contracción de tensores en notación indicial

La contracción de un tensor respecto a dos índices libres es la operación que consiste en asignar a ambos índices una misma letra como subíndices, cambiando de esta manera estos índices por seudoíndices.

La contracción produce un tensor que tiene un orden dos veces menor que el original.

Contracción de :

$$\begin{aligned} T_{ij} &\rightarrow T_{ii} \\ a_i\, v_j &\rightarrow u_{ii} \\ E_{ij}\, a_k &\rightarrow E_{ij}\, a_j = b_i \\ E_{ij}\, a_i &= c_j \\ E_{ii}\, a_k &= d_k \end{aligned}$$

Contracción de $E_{ij}\,F_{km}$:

$$E_{ii}\,F_{km} = G_{km}$$
$$E_{ij}\,F_{im} = H_{jm}$$
$$E_{ij}\,F_{jm} = R_{im}$$

Producto interno

El producto interno de dos tensores es el resultado de una contracción que da lugar a un índice por cada tensor, y después se debe realizar el producto externo de los dos tensores.

Producto externo		Contracción	Producto interno
$a_i\,b_j$	$\rightarrow$	$i = j$	$a_i\,b_i$
$a_i\,E_{jk}$	$\rightarrow$	$j = i$	$a_i\,E_{ik} = f_k$
$E_{ij}\,F_{km}$	$\rightarrow$	$k = j$	$E_{ij}\,F_{jm} = G_{im}$
$E_{ij}\,E_{km}$	$\rightarrow$	$k = j$	$E_{ij}\,E_{jm} = B_{im}$

La derivada parcial de un campo tensorial respecto a una variable t se simboliza con el operador $\frac{\partial}{\partial t}$ y sigue las mismas reglas del cálculo convencional.

Así, la derivada parcial respecto a la coordenada x_q se indica como:

$\frac{\partial}{\partial x_q}$, que de manera compacta se puede expresar como ∂_q.

De esta manera el operador ∂_{qm} representa la derivada parcial segunda $\frac{\partial^2}{\partial x_q\,\partial x_m}$.

Frecuentemente la derivada parcial respecto a la variable x_i se representa en notación indicial haciendo uso de la coma, esto es:

a) $\dfrac{\partial \phi}{\partial x_i} = \phi_{,\,i}$; **b)** $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,\,i}$

c) $\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j} = v_{i,\,j}$; **d)** $\dfrac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_k} = v_{i,\,jk}$

e) $\dfrac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} = T_{ij,\,k}$; **f)** $\dfrac{\partial^2 T_{ij}}{\partial x_k \partial x_m} = T_{ij,\,km}$

Algunos operadores utilizados en el cálculo vectorial se representan en notación indicial como sigue:

$$\text{Nabla}\,;\ \overline{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x_1}\overline{e}_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}\overline{e}_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}\overline{e}_3$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_i}\overline{e}_i = \partial_i \overline{e}_i$$

Gradiente de un campo escalar:

$$\overline{\nabla}\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\overline{e}_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\overline{e}_2 + \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\overline{e}_3$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x_i}\overline{e}_i = \phi_{,\,i}\,\overline{e}_i$$

Divergencia de un campo vectorial:

Sea $\overline{v} = v_1\overline{e}_1 + v_2\overline{e}_2 + v_3\overline{e}_3$

$$\text{div}\,\bar{v} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = v_{i,i}$$

Rotacional de un campo vectorial $\bar{v}$:

$$rot\,\bar{v} = \bar{\nabla} \times \bar{v}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\,\bar{e}_i \right) \times \left(v_j\,\bar{e}_j \right) = \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\,\bar{e}_i \times \bar{e}_j$$

$$= v_{j,i}\,\bar{e}_i \times \bar{e}_j = v_{j,i}\,\varepsilon_{kij}\,\bar{e}_k$$

B Rotación de ejes coordenados

Las componentes del vector $\bar{v}$ en el sistema de referencia x_1, x_2, se pueden expresar como:

$$\bar{v} = v_1 \bar{e}_1 + v_2 \bar{e}_2 = v_j \bar{e}_j$$

Si el sistema de referencia original se gira un ángulo θ respecto al eje x_1, el nuevo sistema de referencia será x'_1, x'_2. Ahora el vector $\bar{v}$ se puede expresar en este nuevo sistema de referencia de la siguiente manera:

$$\bar{v} = v'_1 \bar{e}'_1 + v'_2 \bar{e}'_2 = v'_i \bar{e}'_i$$

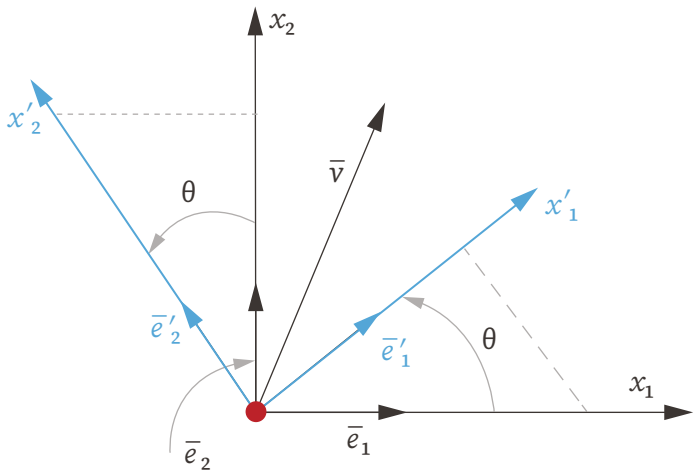


FIGURA B.1
Rotación de ejes coordenados

Primeramente, se buscará la transformación de coordenadas:

$$x'_i = f_i\left(x_1\ ,\ x_2\right)$$

Los vectores base correspondientes al sistema de referencia x'_1, x'_2, se pueden expresar como

$$\bar{e}'_1 = \cos\theta\ \bar{e}_1 + \operatorname{sen}\theta\ \bar{e}_2 \qquad \textbf{(B.1)}$$

$$\bar{e}'_2 = -\operatorname{sen}\theta\ \bar{e}_1 + \cos\theta\ \bar{e}_2 \qquad \textbf{(B.2)}$$

$$\bar{e}'_1 = a_{11}\,\bar{e}_1 + a_{12}\,\bar{e}_2 = a_{1j}\,\bar{e}_j$$

$$\bar{e}'_2 = a_{21}\,\bar{e}_1 + a_{22}\,\bar{e}_2 = a_{2j}\,\bar{e}_j$$

$$\bar{e}'_i = a_{ij}\,\bar{e}_j \qquad \textbf{(B.3)}$$

El vector $\bar{v}$ puede ser expresado en las coordenadas sin primas de la siguiente forma:

$$\bar{v} = v_j \bar{e}_j \qquad \textbf{(B.4)}$$

y en el sistema con primas como:

$$\bar{v} = v'_i\,\bar{\boldsymbol{e}}'_i \qquad \textbf{(B.5)}$$

Sustituyendo la ecuación (B.3) en (B.5), se obtiene:

$$\bar{v} = v'_i\,a_{ij}\,\bar{e}_j \qquad \textbf{(B.6)}$$

Comparando la ecuación (B.4) con (B.6), se obtiene:

$$v_j = v'_i\,a_{ij} \qquad \textbf{(B.7)}$$

Ahora se busca la transformación inversa $x_i = g_i(x'_1, x'_2)$.

Los vectores base $\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ se pueden expresar como:

$$\bar{e}_1 = \cos\theta\, \bar{e}'_1 - \operatorname{sen}\theta\, \bar{e}'_2$$

$$\bar{e}_2 = \operatorname{sen}\theta\, \bar{e}'_1 + \cos\theta\, \bar{e}'_2$$

$$\bar{e}_1 = a_{11}\bar{e}'_1 + a_{21}\bar{e}'_2 = a_{i1}\bar{e}'_i$$

$$\bar{e}_2 = a_{12}\bar{e}'_1 + a_{22}\bar{e}'_2 = a_{i2}\bar{e}'_i$$

Generalizando, se tiene:

$$\bar{e}_j = a^T_{ij}\,\bar{e}'_i \qquad \textbf{(B.8)}$$

El vector $\bar{v}$ puede ser expresado en el sistema coordenado con primas:

$$\bar{v} = v'_i\,\bar{e}'_i \qquad \textbf{(B.9)}$$

y en el sistema coordenado, sin primas:

$$\bar{v} = v_j\,\bar{e}_j \qquad \textbf{(B.10)}$$

Sustituyendo la ecuación (B.8) en (B.10), se tiene:

$$\bar{v} = v_j\, a^T_{ij}\,\bar{e}'_i \qquad \textbf{(B.11)}$$

Comparando la ecuación (B.9) con (B.11), se obtiene:

$$v'_i = v_j\, a^T_{ij} \qquad \textbf{(B.12)}$$

Las ecuaciones (B.7) y (B.12) representan la ley de transformación para un tensor de orden (1).

Esta ley se puede generalizar para un tensor de orden 2, cuya ley de transformación es:

$$T'_{ij} = a_{ik}\, a_{jl}\, T_{kl} \tag{B.13}$$

El término a_{jl} representa la matriz de cosenos directores entre los ejes coordenados x'_i y x_j dada por $[a_{ij}] = \cos(x'_i, x_j)$, tal como se muestra en la figura (B.2).

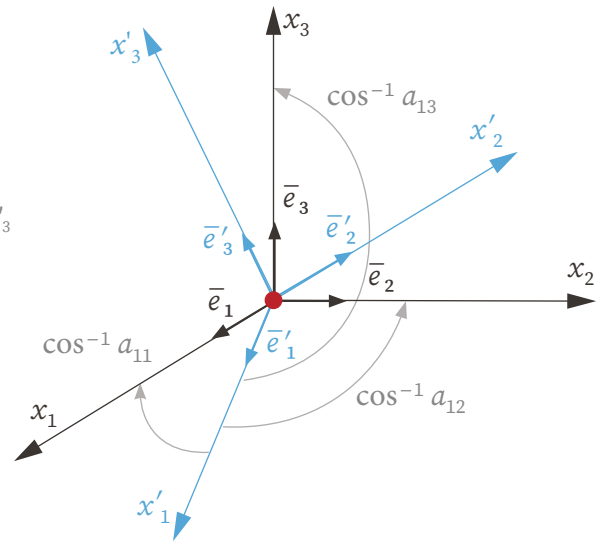


FIGURA B.2
Transformación de un sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 en x'_1, x'_2 y x'_3

		$\bar{e}_1$	$\bar{e}_2$	$\bar{e}_3$
		x_1	x_2	x_3
$\bar{e}'_1$	x'_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}
$\bar{e}'_2$	x'_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}
$\bar{e}'_3$	x'_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}

Tabla B.1 Tabla de deformación de coordenadas

BIBLIOGRAFÍA

ERINGEN, A. C., 1967, *Mechanics of Continua*, First Edition, New York, John Wiley and Sons.

FUNG, Y. C., 1965, *Foundations of Solid Mechanics*, New Jersey, Prentice-Hall.

FUNG, Y. C., 1994, *A first Course in Continuum Mechanics,* Third Edition, New Jersey, Prentice-Hall.

GERMAIN, P., et MULLER, P., 1980, *Introduction à la mécanique des milieux continus,* París, Masson.

HAI, SUI. YU., 2006, *Plasticity and Geotechnics*, *Chapter* 3, *Springer Science Bousiness Media, LLC.*

Hai-Sui-Yu (2006). *Plasticity and Geotechnics, Advances in Mechanics and Mathematics,* Vol. 13, Nottingham, UK., Springer.

Hill, R. (1950). *The Mathematical Theory of Plasticity,* Clarendon Press, Oxford.

LEVY, E., 1980, *Elementos de mecánica del medio continuo,* primera edición, México, Limusa.

MALVERN, L. E., 1997, *Introduction to the mechanics of continuous medium,* New Jersey, Prentice-Hall.

MASE, G. E., 1978, *Mecánica del medio continuo.* México, McGraw-Hill, Series Schaum.

MASE, G. T., and MASE, G. E., 1999, *Continuum Mechanics for Engineers,* Second Edition, Boca Raton, USA, CRC Press.

RODRÍGUEZ C. N., 1981, *Notas de la clase de mecánica del medio continuo,* México, UNAM, Facultad de Ingeniería, División de Estudios de Posgrado.



UNIDAD DE APOYO EDITORIAL

Fundamentos de mecánica del medio continuo

Se publicó la tercera edición, primera electrónica
de un ejemplar (6 MB) en formato PDF en agosto de 2024,
en el repositorio de la Facultad de Ingeniería, UNAM,
Ciudad Universitaria, Ciudad de México. C.P. 04510

El diseño estuvo a cargo de la Unidad de Apoyo Editorial
de la Facultad de Ingeniería. Las familias tipográficas utilizadas
fueron Source Serif Pro para texto, Sienna Math Pro para
fórmulas matemáticas y Bree para títulos.