

PROBLEMAS RESUELTOS DE  
**DINÁMICA**

---

**Ph.D. Genner Villarreal Castro**

**PREMIO NACIONAL ANR 2006, 2007, 2008**

Lima – Perú

2017

## **Problemas Resueltos de DINÁMICA**

**Primera Edición Julio 2017**

Tiraje: 1000 ejemplares

Diagramación: Víctor Dionicio Torres

Carátula: Pasarela Arganzuela de Dominique Perrault - Madrid

Estilo: Brenda de Jesús Crisanto Panta

Autor – Editor:

© Ph.D. Genner Villarreal Castro

Calle Pablo Picasso 567 Urb. El Bosque

Trujillo-Perú

Teléfono: 278584 / 950907260

[www.gennervillarrealcastro.blogspot.com](http://www.gennervillarrealcastro.blogspot.com)

Impresión:

Editora & Imprenta Gráfica Norte S.R.L.

Calle Oswaldo Herculles 401 Urb. Los Granados

Trujillo-Perú

Teléfono: 402705 / 969960030

[graficanorte@hotmail.com](mailto:graficanorte@hotmail.com)

Julio, 2017

©Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú N° 2017-07822

ISBN: 978-612-00-2745-5

Prohibida la reproducción total o parcial sin autorización del Autor.

La Cinemática es parte de la Mecánica Teórica, en la cual se estudia el movimiento del punto material y del cuerpo sólido, independiente de la acción de las cargas, es decir, desde un punto de vista puramente geométrico.

La Dinámica también es parte de la Mecánica Teórica, en la cual se estudia el movimiento del punto material y del cuerpo sólido debido a la acción de las fuerzas y considerando la inercia de los propios cuerpos materiales.

Por lo general, el dictado de los cursos de Dinámica, se centran en la descripción teórica y en la resolución de un escaso número de problemas, lo cual dificulta el proceso de aprendizaje, más aún, tratándose de un curso eminentemente práctico y con una diversidad de problemas.

El presente libro nació, después de comprobar las grandes dificultades mostradas por los alumnos de pregrado en sus prácticas calificadas y exámenes. Es por ello, que tomé el reto de escribir un libro, que haga más didáctico el proceso de estudio individual, resolviendo en forma seria y con el rigor científico 61 problemas tipo, propiciando, de esta manera, una forma más amena de convivencia con la Dinámica y conducente a un mejor dominio de la materia.

En el presente libro, se tratan temas que en la mayoría de universidades se estudian, excepto su aplicación a la ingeniería estructural, que es muy importante en su formación profesional.

Como base se tomó la experiencia adquirida en el dictado de los cursos de Dinámica en la Universidad de San Martín de Porres y Universidad Privada Antenor Orrego.

En mi modesta opinión, el presente libro es único en su género, tanto en la forma de resolución de problemas; así como en su contenido, que no es una repetición de otros textos, editados anteriormente.

El presente libro consta de 3 capítulos y bibliografía.

En el primer capítulo se resuelven problemas de la cinemática del punto y del cuerpo sólido.

En el segundo capítulo se resuelven problemas de la dinámica del punto y del cuerpo sólido.

En el tercer capítulo se resuelven problemas de la dinámica aplicada a la ingeniería estructural.

El primer y segundo capítulo han sido escritos en base a los apuntes de clase recibidos durante mi formación profesional en la Universidad Nacional de Ingeniería Civil y Arquitectura de Kiev, habiendo sido mis Profesores el Ph.D. Mijail Grigorievich Gontar y la Ph.D. Natalia Mijailovna Zavrazhina, quienes tuvieron la responsabilidad de prepararme para la Olimpiada de Mecánica Teórica en el año 1988, teniendo el gran honor de haberlo ganado y ser parte de la historia de mi Alma Mater.

El tercer capítulo ha sido escrito en su totalidad por mi persona, considerando de vital importancia la conexión entre el curso tradicional de Dinámica con la Ingeniería Estructural.

El presente texto está dirigido a estudiantes de Ingeniería Civil y docentes que imparten el curso de Dinámica; así como, a ingenieros civiles e investigadores en el área de estructuras.

Este libro se lo dedico a mis alumnos de Dinámica de la Universidad de San Martín de Porres y de la Universidad Privada Antenor Orrego, quienes con sus consultas me motivaron a escribir el presente libro, culminando con éxito este pequeño aporte para los amantes de la Ingeniería Estructural.

Ph.D. Genner Villarreal Castro

genner\_vc@hotmail.com

Lima, Julio del 2017

# CAPÍTULO 1

## CINEMÁTICA

### 1.1 CINEMÁTICA DEL PUNTO

**PROBLEMA 1.1** Determinar la trayectoria, velocidad y aceleración del punto medio M de la biela y de la corredera B de un mecanismo de biela y manivela, si  $r = L = a$ ,  $\varphi = \omega t$ , siendo  $\omega = \text{const}$ ,  $r$  - longitud de la manivela OA,  $L$  - longitud de la biela AB, tal como se muestra en la figura 1.1

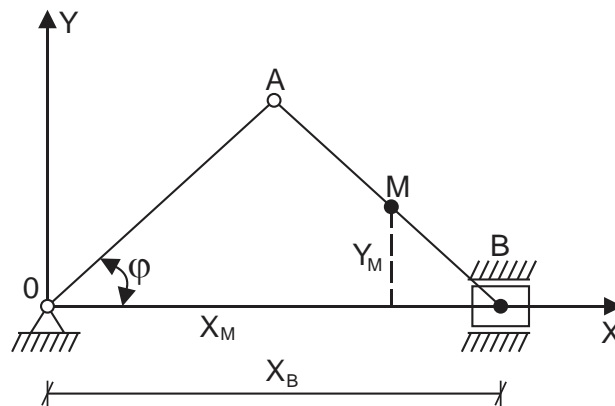


Fig. 1.1

**Solución:**

Planteamos las ecuaciones del movimiento del punto M

$$x_M = r \cos \varphi + \frac{1}{2} L \cos \varphi$$

$$y_M = \frac{1}{2} L \sin \varphi$$

De donde, considerando que  $r = L = a$ ,  $\varphi = \omega t$ , obtenemos:

$$x_M = \frac{3}{2} a \cos \omega t$$

$$y_M = \frac{1}{2} a \sin \omega t$$

Para determinar la ecuación de la trayectoria del punto M, despejamos las ecuaciones de  $\sin \omega t$  y  $\cos \omega t$ , elevando al cuadrado y sumando, obteniéndose:

$$\frac{x^2}{\left(\frac{3a}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{a}{2}\right)^2} = 1$$

La ecuación de la trayectoria del punto M es una elipse, con radios  $3a/2$  y  $a/2$

Ahora, determinamos las proyecciones de la velocidad del punto M en los ejes coordenados:

$$V_X = \dot{x}_M = -\frac{3}{2} a \omega \sin \omega t$$

$$V_Y = \dot{y}_M = \frac{1}{2} a \omega \cos \omega t$$

El módulo de la velocidad del punto M, lo determinamos por la siguiente fórmula:

$$V_M = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{(\dot{x}_M)^2 + (\dot{y}_M)^2} = \frac{a\omega}{2} \sqrt{1 + 8\text{sen}^2 \omega t}$$

La orientación del vector velocidad lo determinamos por los cosenos directores:

$$\cos(\vec{V}_M; \text{OX}) = \frac{V_X}{V_M} = -\frac{3\text{sen}\omega t}{\sqrt{1 + 8\text{sen}^2 \omega t}}$$

$$\cos(\vec{V}_M; \text{OY}) = \frac{V_Y}{V_M} = \frac{\cos \omega t}{\sqrt{1 + 8\text{sen}^2 \omega t}}$$

Posteriormente, determinamos la proyección del vector aceleración del punto M en los ejes coordenados:

$$a_X = \ddot{x}_M = -\frac{3}{2} a\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_Y = \ddot{y}_M = -\frac{1}{2} a\omega^2 \text{sen}\omega t$$

El módulo y orientación del vector aceleración del punto M se calculan por las siguientes fórmulas:

$$a_M = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \sqrt{(\ddot{x}_M)^2 + (\ddot{y}_M)^2} = \frac{1}{2} a\omega^2 \sqrt{1 + 8\cos^2 \omega t}$$

$$\cos(\vec{a}_M; \text{OX}) = \frac{a_X}{a_M} = -\frac{3\cos \omega t}{\sqrt{1 + 8\cos^2 \omega t}}$$

$$\cos(\vec{a}_M; \text{OY}) = \frac{a_Y}{a_M} = -\frac{\text{sen}\omega t}{\sqrt{1 + 8\cos^2 \omega t}}$$

Ahora, planteamos las ecuaciones de movimiento de la corredera B

$$x_B = 2a \cos \omega t$$

$$y_B = 0$$

La proyección de la velocidad de la corredera B en los ejes coordenados es:

$$V_{BX} = \dot{x}_B = -2a\omega \text{sen}\omega t$$

$$V_{BY} = \dot{y}_B = 0$$

$$V_B = \sqrt{V_{BX}^2 + V_{BY}^2} = 2a\omega |\text{sen}\omega t|$$

$$\cos(\vec{V}_B; \text{OX}) = \frac{V_{BX}}{V_B} = -\frac{\text{sen}\omega t}{|\text{sen}\omega t|}$$

El vector  $\vec{V}_B$  siempre está orientado en el eje OX

La proyección de la aceleración del punto B es:

$$a_{BX} = \ddot{x}_B = -2a\omega^2 \cos \omega t$$

$$a_{BY} = \ddot{y}_B = 0$$

$$a_B = \sqrt{a_{BX}^2 + a_{BY}^2} = 2a\omega^2 |\cos \omega t|$$

$$\cos(\vec{a}_B; \text{OX}) = -\frac{\cos \omega t}{|\cos \omega t|}$$

La aceleración también está orientada en el eje OX

**PROBLEMA 1.2** Están dadas las ecuaciones de movimiento de un punto en el plano XOY, siendo  $x = 4 - 2t$ ,  $y = 2 - 3t^2$ , donde  $x$  e  $y$  están dados en metros y  $t$  en segundos. Determinar la ecuación de la trayectoria del punto y para el momento  $t = 1s$  calcular su velocidad, aceleración total, aceleración tangencial, aceleración normal y radio de curvatura.

**Solución:**

Para determinar la ecuación de la trayectoria del punto, despejamos el valor de  $t$

$$t = \frac{4 - x}{2}$$

Luego, lo reemplazamos en  $y$ , obteniendo:

$$y = 2 - \frac{3}{4}(4 - x)^2 = 2 - \frac{3}{4}(x - 4)^2$$

La ecuación de la trayectoria es una parábola con extremo en el punto  $M_0(4;2)$ , intersectando al eje OX en los puntos  $x_1 = 2,37m$ ;  $x_2 = 5,63m$ ; tal como se muestra en la figura 1.2

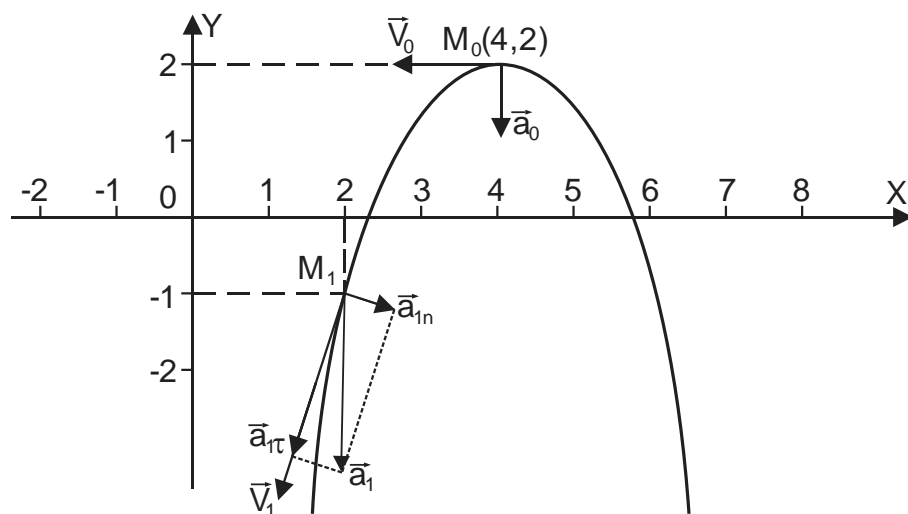


Fig. 1.2

Cuando  $t = 0$ ,  $x = 4m$ ,  $y = 2m$ , esto es, en el inicio la posición del punto es  $M_0$ . Si  $t = 1s$ ,  $x = 2m$ ,  $y = -1m$ . En este momento, el punto se encuentra en  $M_1$

Determinamos la velocidad del punto:

$$V_X = \dot{x} = -2$$

$$V_Y = \dot{y} = -6t$$

En consecuencia:

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{4 + 36t^2} = 2\sqrt{1 + 9t^2}$$

Por cuanto,  $V_x$  y  $V_y$  son negativos, entonces la trayectoria del punto es la parte izquierda de la parábola y el punto, todo el tiempo se mueve en una sola dirección.

Si  $t = 1s$ ;  $V_x = -2m/s$ ;  $V_y = -6m/s$  y  $V_1 = 2\sqrt{10} = 6,324m/s$

$$\cos(\vec{V}_1; OX) = -\frac{1}{\sqrt{10}} = -0,316$$

$$\cos(\vec{V}_1; OY) = -\frac{3}{\sqrt{10}} = -0,948$$

Ahora, determinamos la aceleración del punto:

$$a_x = \ddot{x} = 0$$

$$a_y = \ddot{y} = -6$$

En consecuencia:

$$a_1 = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 6m/s^2$$

$$\cos(\vec{a}_1; OX) = \frac{0}{6} = 0$$

$$\cos(\vec{a}_1; OY) = -\frac{6}{6} = -1$$

De esta manera, se deduce que el vector aceleración del punto M todo el tiempo está orientado por la vertical hacia abajo.

La aceleración tangencial lo determinamos por la fórmula:

$$a_{1\tau} = \frac{V_x \cdot a_x + V_y \cdot a_y}{V} = \frac{-2 \cdot 0 - 6 \cdot (-6)}{6,324} = -5,692m/s^2$$

Determinamos la aceleración normal del punto:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{6^2 - (-5,692)^2} = 1,897m/s^2$$

El radio de curvatura de la trayectoria en el punto  $M_1$  será:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{6,324^2}{1,897} = 21,082m$$

**PROBLEMA 1.3** Están dadas las ecuaciones de movimiento de un punto en el plano XOY, siendo

$x = 4 - 4\sin \frac{\pi}{6}t$ ,  $y = 14 - 16\cos^2 \frac{\pi}{6}t$ , donde x e y están dados en metros y t en segundos.

Determinar la ecuación de la trayectoria del punto y para el momento  $t = 1s$  calcular su velocidad, aceleración total, aceleración tangencial, aceleración normal y radio de curvatura.

**Solución:**

De las ecuaciones de movimiento del punto, despejamos las funciones:

$$\cos^2 \frac{\pi}{6}t = \frac{14 - y}{16}$$

$$\text{sen}^2 \frac{\pi}{6} t = \frac{(4-x)^2}{16}$$

Sumamos ambas funciones y obtenemos la ecuación de la trayectoria.

$$y = -2 + (x - 4)^2$$

De esta manera, la ecuación de la trayectoria es una parábola con extremo en el punto  $M_0(4;-2)$ , intersecando al eje OX en los puntos  $x_1 = 2,6\text{m}$ ;  $x_2 = 5,4\text{m}$ ; tal como se muestra en la figura 1.3

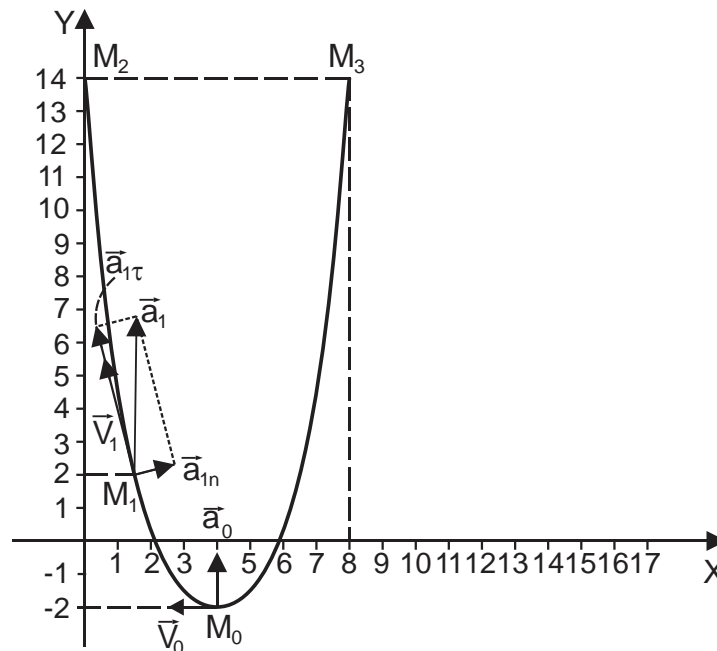


Fig. 1.3

El eje OY se interseca con la parte izquierda de la trayectoria en el punto  $M_2(0;14)$ . Cuando  $t = 0$ ,  $x = 4\text{m}$ ,  $y = -2\text{m}$ , esto es, en un inicio el punto se encuentra en la parte más baja de la parábola, mostrado como  $M_0$ . Si  $t = 1\text{s}$ ,  $x_1 = 2\text{m}$ ,  $y_1 = 2\text{m}$

De las ecuaciones de movimiento del punto, se desprende que  $x_{\text{mín}} = 0$ ,  $x_{\text{máx}} = 8\text{m}$ ,  $y_{\text{mín}} = -2\text{m}$ ,  $y_{\text{máx}} = 14\text{m}$

De esta manera, la trayectoria del punto es la parábola  $M_2M_0M_3$

Determinamos las proyecciones del vector velocidad en los ejes coordenados:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -\frac{2\pi}{3} \cos \frac{\pi}{6} t$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{8\pi}{3} \text{sen} \frac{\pi}{6} t$$

Cuando  $t = 0$ ,  $V_{0x} = -2,094\text{m/s}$ ,  $V_{0y} = 0$ ,  $V_0 = 2,094\text{m/s}$ . Como  $V_{0y} = 0$  y  $V_{0x} \neq 0$ , cuando  $t = 0$  el vector velocidad  $\vec{V}_0$  tiene una orientación horizontal opuesta a la dirección del eje OX, es decir a la izquierda, debido a que  $V_{0x} < 0$

Si  $t = 1\text{s}$  se tendrá:

$$V_{1X} = -\frac{\pi}{\sqrt{3}} = -1,814\text{m/s}$$

$$V_{1Y} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = 7,255\text{m/s}$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1X}^2 + V_{1Y}^2} = \sqrt{(-1,814)^2 + (7,255)^2} = 7,478\text{m/s}$$

El punto en un inicio se mueve de  $M_0$  a  $M_2$ , luego en forma inversa a  $M_3$  y así sucesivamente.

Los cosenos directores del vector velocidad  $\vec{V}_1$  son:

$$\cos(\vec{V}_1; \text{OX}) = \frac{V_{1X}}{V_1} = -0,242$$

$$\cos(\vec{V}_1; \text{OY}) = \frac{V_{1Y}}{V_1} = 0,970$$

Determinamos las proyecciones del vector aceleración en los ejes coordenados:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi^2}{9} \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} t$$

$$a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{8\pi^2}{9} \operatorname{cos} \frac{\pi}{3} t$$

$$\text{Cuando } t = 0, a_{0X} = 0, a_{0Y} = \frac{8\pi^2}{9} = 8,773\text{m/s}^2, a_0 = 8,773\text{m/s}^2$$

En un inicio la aceleración está orientada verticalmente hacia arriba.

Si  $t = 1\text{s}$ , se tendrá:

$$a_{1X} = \frac{\pi^2}{18} = 0,548\text{m/s}^2$$

$$a_{1Y} = \frac{4\pi^2}{9} = 4,386\text{m/s}^2$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1X}^2 + a_{1Y}^2} = \sqrt{0,548^2 + 4,386^2} = 4,420\text{m/s}^2$$

Los cosenos directores del vector aceleración  $\vec{a}_1$ :

$$\cos(\vec{a}_1; \text{OX}) = \frac{a_{1X}}{a_1} = \frac{0,548}{4,420} = 0,124$$

$$\cos(\vec{a}_1; \text{OY}) = \frac{a_{1Y}}{a_1} = \frac{4,386}{4,420} = 0,992$$

Determinamos la aceleración tangencial, proyectando  $\vec{a}_1$  por la tangente:

$$a_{1\tau} = \frac{V_X \cdot a_x + V_Y \cdot a_y}{V} = \frac{-1,814 \cdot 0,548 + 7,255 \cdot 4,386}{7,478} = 4,122\text{m/s}^2$$

Como  $a_{1\tau} > 0$ , la orientación del vector aceleración tangencial  $\vec{a}_{1\tau}$  concuerda con la dirección del vector velocidad  $\vec{V}_1$

Ahora, determinamos la aceleración normal:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{4,420^2 - 4,122^2} = 1,595 \text{ m/s}^2$$

El radio de curvatura de la trayectoria para  $t = 1\text{s}$  es:

$$\rho = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{7,478^2}{1,595} = 35,060 \text{ m}$$

**PROBLEMA 1.4** Están dadas las ecuaciones de movimiento de un punto en el plano XOY, siendo

$x = -2 \cos \frac{\pi}{2} t$ ,  $y = 2 \text{sen} \frac{\pi}{4} t - 2$ , donde  $x$  e  $y$  están dados en metros y  $t$  en segundos.

Determinar la ecuación de la trayectoria del punto y para el momento  $t = 1\text{s}$  calcular su velocidad, aceleración total, aceleración tangencial, aceleración normal y radio de curvatura.

**Solución:**

Efectuamos las siguientes transformaciones:

$$\frac{y+2}{2} = \text{sen} \frac{\pi}{4} t, \quad -\frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{2} t, \quad 1 - \cos \frac{\pi}{2} t = 2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{4} t$$

De donde:

$$-\frac{x}{2} = 1 - 2 \text{sen}^2 \frac{\pi}{4} t \quad \Rightarrow \quad -\frac{x}{2} = 1 - \frac{(y+2)^2}{2}$$

Obteniendo:

$$x = -2 + (y+2)^2$$

La ecuación de la trayectoria es una parábola con extremo en el punto  $M_0(-2;-2)$ , siendo el eje de simetría paralelo al eje OX, tal como se muestra en la figura 1.4

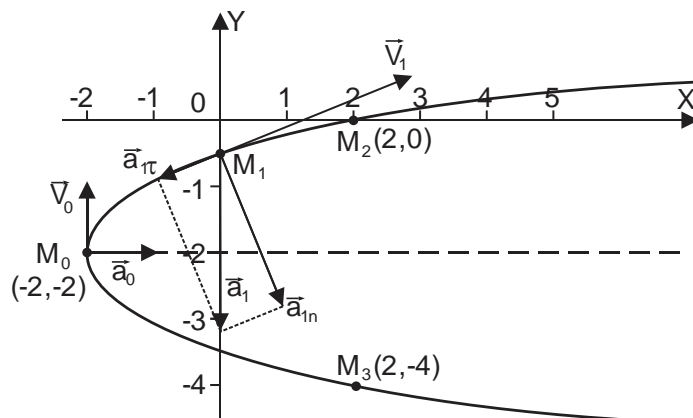


Fig. 1.4

La parábola interseca al eje OY en los puntos  $(0;-0,6)$  y  $(0;-3,4)$  y al eje OX en el punto  $(2;0)$ .

Cuando  $t = 0$ ,  $x = -2\text{m}$ ,  $y = -2\text{m}$ , esto es, en el momento inicial el punto se encuentra en la posición  $M_0$ . Si  $t = 1\text{s}$ ,  $x = 0$ ,  $y = -0,585\text{m}$ , siendo el punto  $M_1$  mostrado en la figura 1.4

De las ecuaciones de movimiento del punto, se desprende que  $x_{\text{mín}} = -2\text{m}$ ,  $x_{\text{máx}} = 2\text{m}$ ,

$$y_{\text{mín}} = -4\text{m}, y_{\text{máx}} = 0$$

De esta manera, la trayectoria del punto es la parábola  $M_2M_0M_3$

Determinamos las proyecciones del vector velocidad en los ejes coordenados:

$$V_X = \frac{dx}{dt} = \pi \text{sen} \frac{\pi}{2} t$$

$$V_Y = \frac{dy}{dt} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{4} t$$

$$\text{Si } t = 0, V_{0X} = 0, V_{0Y} = \frac{\pi}{2} = 1,571\text{m/s}, V_0 = 1,571\text{m/s}$$

En consecuencia, en un inicio el vector velocidad está orientado verticalmente hacia arriba.

Cuando  $t = 1\text{s}$  se tendrá:

$$V_{1X} = \pi = 3,141\text{m/s}$$

$$V_{1Y} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4} = 1,111\text{m/s}$$

$$V_1 = \sqrt{V_{1X}^2 + V_{1Y}^2} = \sqrt{3,141^2 + 1,111^2} = 3,331\text{m/s}$$

Los cosenos directores del vector velocidad  $\vec{V}_1$  son:

$$\cos(\vec{V}_1; OX) = \frac{V_{1X}}{V_1} = 0,943$$

$$\cos(\vec{V}_1; OY) = \frac{V_{1Y}}{V_1} = 0,333$$

Determinamos las proyecciones del vector aceleración del punto en los ejes coordenados:

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\pi^2}{2} \cos \frac{\pi}{2} t$$

$$a_Y = \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\pi^2}{8} \text{sen} \frac{\pi}{4} t$$

$$\text{Si } t = 0, a_{0X} = \frac{\pi^2}{2} = 4,935\text{m/s}^2, a_{0Y} = 0, a_0 = 4,935\text{m/s}^2$$

De esta manera, el vector  $\vec{a}_0$  está orientado en la horizontal en la dirección positiva del eje OX.

Cuando  $t = 1\text{s}$  se tendrá:

$$a_{1X} = 0$$

$$a_{1Y} = -\frac{\pi^2\sqrt{2}}{16} = -0,872\text{m/s}^2$$

$$a_1 = \sqrt{a_{1X}^2 + a_{1Y}^2} = 0,872\text{m/s}^2$$

Como  $a_{1X} = 0$  y  $a_{1Y} < 0$ , el vector aceleración  $\vec{a}_1$  está orientado verticalmente hacia abajo, tal como se muestra en la figura 1.4

Determinamos la aceleración tangencial, proyectando  $\vec{a}_1$  por la tangente:

$$a_{1\tau} = \frac{V_X \cdot a_X + V_Y \cdot a_Y}{V} = \frac{3,141 \cdot 0 + 1,111 \cdot (-0,872)}{3,331} = -0,291 \text{ m/s}^2$$

Como  $a_{1\tau} < 0$ , la orientación del vector  $\vec{a}_1$  está orientado en el sentido opuesto del vector velocidad  $\vec{V}_1$ , tal como se muestra en la figura 1.4

Ahora, determinamos la aceleración normal:

$$a_{1n} = \sqrt{a_1^2 - a_{1\tau}^2} = \sqrt{0,872^2 - (-0,291)^2} = 0,822 \text{ m/s}^2$$

El radio de curvatura de la trayectoria para  $t = 1\text{s}$  es:

$$\rho = \frac{V_1^2}{a_{1n}} = \frac{3,331^2}{0,822} = 13,498 \text{ m}$$

**PROBLEMA 1.5** Están dadas las ecuaciones de movimiento de un punto en el plano XOY, siendo

$x = akt$ ,  $y = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$ . Determinar la ecuación de la trayectoria del punto, la ley de movimiento

de su trayectoria, su velocidad, aceleración total, aceleración tangencial, aceleración normal y radio de curvatura.

**Solución:**

Despejamos  $t$  de la primera ecuación  $t = x/ak$  y lo reemplazamos en la segunda ecuación, obteniendo:

$$y = \frac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

Esta ecuación es de una catenaria, cuyo gráfico se muestra en la figura 1.5. Si  $t = 0$ ,  $x = 0$ ,  $y = a$ , esto es, en el momento inicial el punto se encuentra en la posición  $M_0$ . Conforme transcurre el tiempo, las coordenadas del punto serán positivas y la función creciente, por ello, la trayectoria del punto es la parte derecha de la catenaria y el punto todo el tiempo se mueve en una sola dirección.

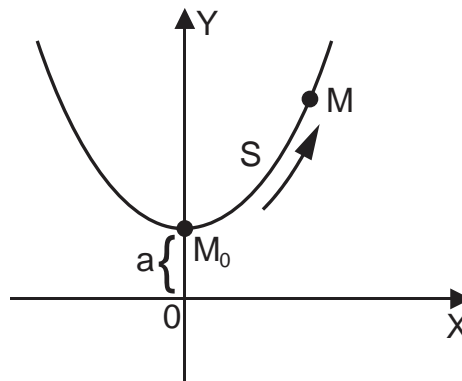


Fig. 1.5

Determinamos la velocidad del punto:

$$V_X = \dot{x} = ak$$

$$V_Y = \dot{y} = \frac{1}{2}ak(e^{kt} - e^{-kt})$$

$$V = \sqrt{V_X^2 + V_Y^2} = \sqrt{(ak)^2 + \frac{1}{4}a^2k^2(e^{kt} - e^{-kt})^2} = \frac{1}{2}ak(e^{kt} + e^{-kt})$$

Considerando que  $S_0 = 0$ , determinamos la ley de movimiento del punto por su trayectoria.

$$S = \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt = \frac{1}{2}ak \int_0^t (e^{kt} + e^{-kt}) dt = \frac{1}{2}a(e^{kt} - e^{-kt})$$

La función  $S = S(t)$  es una función creciente. En consecuencia, el punto  $M$  se va a mover todo el tiempo por la dirección positiva, alejándose de su posición inicial.

Determinamos la aceleración del punto:

$$a_X = \frac{d^2x}{dt^2} = 0$$

$$a_Y = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{1}{2}ak^2(e^{kt} + e^{-kt})$$

$$a = \sqrt{a_X^2 + a_Y^2} = \frac{1}{2}ak^2(e^{kt} + e^{-kt})$$

Calculamos la aceleración tangencial:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{1}{2}ak^2(e^{kt} - e^{-kt})$$

Ahora, determinamos la aceleración normal:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = ak^2$$

Esto implica, que en el movimiento del punto, su aceleración normal no varía.

Ahora, determinamos el radio de curvatura de la trayectoria:

$$\rho = \frac{V^2}{a_n} = \frac{a^2k^2(e^{kt} + e^{-kt})^2}{4ak^2} = \frac{a}{4}(e^{kt} + e^{-kt})^2$$

Pero, como:

$$e^{kt} + e^{-kt} = \frac{2y}{a}$$

Se tendrá:

$$\rho = \frac{a}{4} \left( \frac{2y}{a} \right)^2 = \frac{y^2}{a}$$

**PROBLEMA 1.6** Un automóvil se desplaza por un puente convexo con una velocidad constante  $V = 20\text{m/s}$ . El centro de gravedad del automóvil describe una parábola  $y = -0,005x^2$ , donde  $x$  e  $y$  están dados en metros. Determinar el módulo de la aceleración del centro de gravedad del automóvil en la parte más alta del puente, es decir, en el punto  $M$  mostrado en la figura 1.6

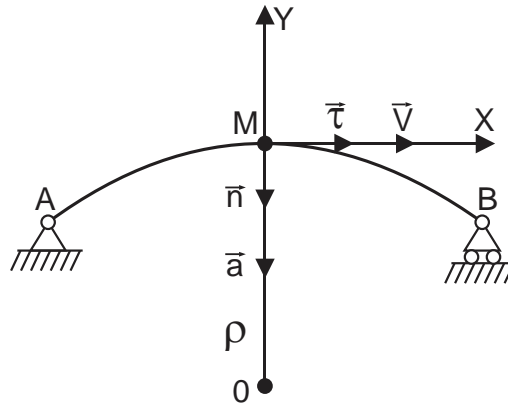


Fig. 1.6

**Solución:**

Como es conocida la trayectoria del centro de gravedad del automóvil, determinamos su aceleración proyectándolo en los ejes naturales, con la condición que la velocidad es constante e igual a  $V = 20\text{m/s}$ , es por ello que  $a_\tau = 0$  y  $a = a_n$

$$a = a_n = \frac{V^2}{\rho}$$

Como es conocida la trayectoria del centro de gravedad del automóvil, determinamos su radio de curvatura, utilizando para el radio de curvatura en el punto  $M$ , una fórmula muy conocida del curso de análisis matemático.

$$\rho = \frac{[1 + (y')^2]^{3/2}}{|y''|}$$

Donde:

$$y' = \frac{dy}{dx} = -0,01x$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = -0,01$$

En consecuencia, se tendrá:

$$\rho = \frac{(1 + 0,0001x^2)^{3/2}}{0,01}$$

Reemplazamos valores, considerando que en la parte más alta  $x = 0$ , obteniendo:

$$\rho = 100\text{m}$$

$$a = \frac{20^2}{100} = 4\text{m/s}^2$$

## 1.2 MOVIMIENTOS DE TRASLACIÓN Y ROTACIÓN DEL CUERPO SÓLIDO

**PROBLEMA 1.7** El disco de una turbina una vez encendida gira de acuerdo a la ley  $\varphi = \pi.t^3$ . Determinar la velocidad y aceleración angular después de 3s de encendida la turbina, así como la velocidad y aceleración de los puntos del disco ubicados en el contorno exterior, si el radio del disco es  $r = 0,5\text{m}$

**Solución:**

Determinamos la ley de variación de la velocidad angular:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 3\pi.t^2$$

Si  $t = 3\text{s}$ ,  $\omega = 27\pi \text{ rad/s}$

Ahora, determinamos la ley de variación de la aceleración angular del disco:

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 6\pi.t$$

Si  $t = 3\text{s}$ ,  $\alpha = 18\pi \text{ rad/s}^2$

La velocidad de los puntos en el contorno exterior del disco es:

$$V = \omega.r = 27\pi.0,5 = 42,41\text{m/s}$$

La aceleración tangencial de los puntos en el contorno exterior del disco en dicho momento es:

$$a_{\tau} = \alpha.r = 18\pi.0,5 = 28,27\text{m/s}^2$$

La aceleración normal será:

$$a_n = \omega^2.r = (27\pi)^2.0,5 = 3597,47\text{m/s}^2$$

La aceleración total se calculará por la fórmula:

$$a = \sqrt{(a_n)^2 + (a_{\tau})^2} = 3597,58\text{m/s}^2$$

Determinamos la orientación de la aceleración:

$$\text{tg}\alpha = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{\alpha}{\omega^2} = \frac{18\pi}{(27\pi)^2} = 0,00786\text{rad}$$

De donde:

$$\alpha = 0,45^\circ$$

La orientación de la velocidad, aceleración normal, aceleración tangencial y aceleración total son las mostradas en la figura 1.7

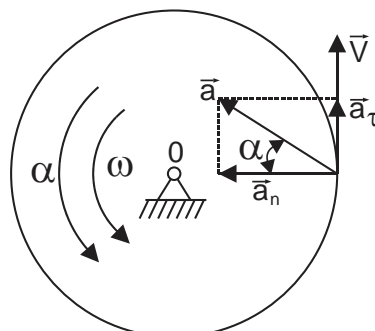


Fig. 1.7

**PROBLEMA 1.8** Un árbol de radio  $R = 0,1\text{m}$  se somete a un movimiento rotacional por una pesa  $P$ , unido al mismo por un cable. El movimiento de la pesa se expresa a través de la ecuación  $x = t^2$ , donde “ $x$ ” es la distancia en metros mostrada en la figura 1.8 y “ $t$ ” es el tiempo en segundos. Determinar la velocidad angular  $\omega$  y la aceleración angular  $\alpha$  del árbol, así como la velocidad y aceleración total de los puntos en la superficie del árbol en el momento “ $t$ ”

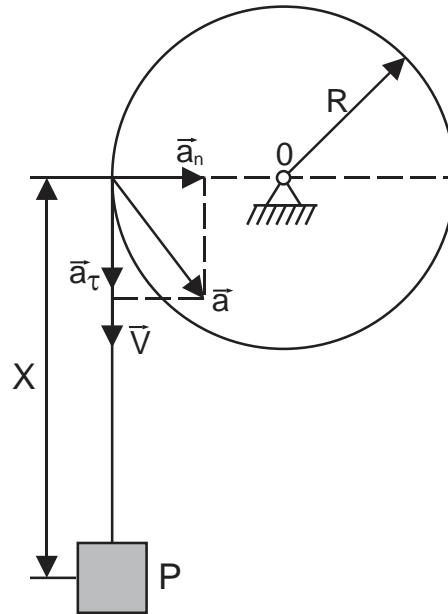


Fig. 1.8

**Solución:**

Conociendo la ley de movimiento de la pesa  $P$ , determinamos la ley de movimiento rotacional del árbol:

$$\varphi = \frac{x}{R} = \frac{t^2}{0,1} = 10t^2$$

Determinamos la velocidad angular del árbol:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 20t \text{ rad/s}$$

Ahora, determinamos la aceleración angular del árbol:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = 20 \text{ rad/s}^2$$

La velocidad de los puntos en el contorno del árbol es:

$$V = \frac{dx}{dt} = 2t \text{ m/s}$$

La aceleración total de los puntos del contorno del árbol lo determinamos por la fórmula:

$$a = R\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = 0,1\sqrt{20^2 + (20t)^4} = 2\sqrt{1 + 400t^4} \text{ m/s}^2$$

**PROBLEMA 1.9** Durante el encendido, la aceleración angular del rotor de un motor se incrementa en forma proporcional al tiempo y su velocidad angular dentro de 4s es igual a  $24\pi$  rad/s. Determinar el número de vueltas que realizó el rotor en los 4s, así como la velocidad y aceleración de los puntos ubicados en el contorno del rotor, si su radio es  $r = 0,25\text{m}$

**Solución:**

La aceleración angular del rotor varía de acuerdo a la ley:

$$\alpha = \ddot{\phi} = kt$$

Donde:

k - coeficiente de proporcionalidad

Considerando que  $\alpha = \frac{d\omega}{dt}$ , reemplazamos en la ecuación anterior, obteniendo:

$$d\omega = kt dt$$

Integramos esta ecuación y obtenemos:

$$\omega = \frac{kt^2}{2} + C_1$$

Si  $t = 0$ ,  $\omega = 0$ , por cuanto el rotor se encuentra sin movimiento y, en consecuencia,  $C_1 = 0$ , quedando la velocidad angular de la siguiente forma:

$$\omega = \frac{kt^2}{2}$$

Determinamos el valor del coeficiente de proporcionalidad, a partir de la condición del problema, que cuando  $t = 4\text{s}$  la velocidad angular es  $24\pi$  rad/s.

$$24\pi = \frac{k \cdot 4^2}{2} \quad \Rightarrow \quad k = 3\pi$$

De esta forma, las fórmulas para la aceleración y velocidad angular son:

$$\alpha = 3\pi \cdot t$$

$$\omega = 1,5\pi \cdot t^2$$

Cuando  $t = 4\text{s}$  obtendremos:

$$\alpha = 12\pi \text{ rad/s}^2$$

$$\omega = 24\pi \text{ rad/s}$$

Conociendo la ley de variación de la velocidad angular y considerando que  $\omega = \frac{d\phi}{dt}$ , determinamos

la ley de variación del ángulo de giro del rotor.

$$\frac{d\phi}{dt} = 1,5\pi \cdot t^2$$

$$\phi = \frac{1,5\pi}{3} t^3 + C_2 = 0,5\pi \cdot t^3 + C_2$$

Si  $t = 0$ ,  $\phi = 0$  y, en consecuencia,  $C_2 = 0$

Es por ello, que:

$$\varphi = 0,5\pi.t^3$$

Cuando  $t = 4s$ , el ángulo de giro del rotor será:

$$\varphi = 0,5\pi.4^3 = 32\pi \text{ rad}$$

En consecuencia, en los 4s el rotor realizó:

$$N = \frac{32\pi}{2\pi} = 16 \text{ vueltas}$$

A continuación, determinamos la velocidad y aceleración de los puntos ubicados en el contorno del rotor (figura 1.9)

$$V = \omega.r = 24\pi.0,25 = 6\pi = 18,85 \text{ m/s}$$

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = 0,25\sqrt{(12\pi)^2 + (24\pi)^4} = 1421,25 \text{ m/s}^2$$

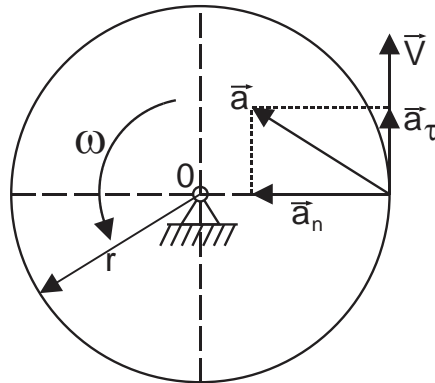


Fig. 1.9

**PROBLEMA 1.10** Un árbol empieza a girar con una velocidad angular  $\omega_0 = 2\pi \text{ rad/s}$  y en 10s realiza 30 vueltas. Determinar la aceleración de los puntos ubicados en el contorno del árbol, en el momento cuando la velocidad de los puntos de contorno del árbol es  $2\pi \text{ m/s}$  y su radio es  $r = 0,5\text{m}$

**Solución:**

Para determinar la aceleración angular del árbol, utilizamos las fórmulas:

$$\omega = \omega_0 + \alpha.t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0.t + \frac{\alpha.t^2}{2}$$

Si  $t = 10s$  el ángulo de giro es:

$$\varphi = 30.2\pi = 60\pi \text{ rad}$$

Considerando que  $\varphi_0 = 0$ , se tendrá:

$$60\pi = 2\pi.10 + 50\alpha$$

$$\alpha = \frac{40\pi}{50} = 0,8\pi \text{ rad/s}^2$$

A través de la fórmula  $V = \omega \cdot r$  determinamos la velocidad angular:

$$\omega = \frac{V}{r} = \frac{2\pi}{0,5} = 4\pi \text{ rad/s}$$

De esta manera, la aceleración de los puntos del contorno del árbol es:

$$a = r\sqrt{\alpha^2 + \omega^4} = 0,5\sqrt{(0,8\pi)^2 + (4\pi)^4} = 78,97 \text{ m/s}^2$$

**PROBLEMA 1.11** Desde el momento de apagada la turbina de un avión, que gira con una velocidad angular correspondiente a  $n = 1200 \text{ rev/min}$ , realiza 80 vueltas hasta detenerse. Determinar el tiempo que transcurrió desde el momento de ser apagado el motor hasta su detención final de movimiento y su aceleración angular.

**Solución:**

De acuerdo a la condición del problema, en un inicio:

$$\omega_0 = \frac{\pi \cdot n}{30} = \frac{1200\pi}{30} = 40\pi \text{ rad/s}$$

Para determinar el tiempo transcurrido hasta su detención, consideramos que  $\varphi_0 = 0$

$$\omega = \omega_0 + \alpha \cdot t$$

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2} = \omega_0 \cdot t + \frac{\alpha \cdot t^2}{2}$$

Como en el momento de su detención  $\omega = 0$ , de la ecuación de la velocidad angular obtenemos:

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t}$$

Reemplazamos el valor obtenido en la ecuación del ángulo de giro, considerando que  $\varphi = 2\pi \cdot 80 = 160\pi \text{ rad}$  y obtenemos:

$$\varphi = \omega_0 \cdot t - \frac{\omega_0 \cdot t}{2} = \frac{\omega_0 \cdot t}{2}$$

De donde:

$$t = \frac{2\varphi}{\omega_0} = \frac{2 \cdot 160\pi}{40\pi} = 8 \text{ s}$$

Calculamos la aceleración angular:

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{40\pi}{8} = -5\pi \text{ rad/s}^2$$

**PROBLEMA 1.12** El punto A de una polea se encuentra en su contorno, tal como se muestra en la figura 1.10 y tiene una velocidad  $V_A = 0,5 \text{ m/s}$ . El punto B, que se encuentra en el mismo radio que el punto A se mueve con una velocidad  $V_B = 0,1 \text{ m/s}$  y la distancia  $\overline{AB} = 0,2 \text{ m}$ . Determinar la velocidad angular, el radio de la polea y la aceleración del punto A

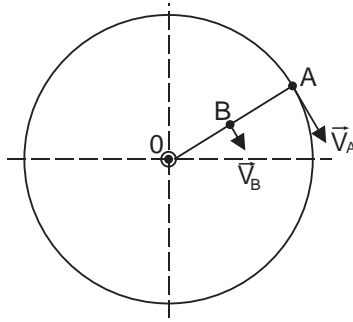


Fig. 1.10

**Solución:**

Como los puntos A y B se encuentran en un mismo radio, sus velocidades son perpendiculares al mismo y proporcionales a la distancia que los separa con el eje de giro.

$$\frac{V_A}{V_B} = \frac{R}{R - \overline{AB}}$$

De donde:

$$R = \frac{V_A \cdot \overline{AB}}{V_A - V_B} = \frac{0,5 \cdot 0,2}{0,5 - 0,1} = 0,25\text{m}$$

La velocidad angular de la polea será:

$$\omega = \frac{V_A}{R} = \frac{0,5}{0,25} = 2 \text{ rad/s}$$

Como la velocidad angular de la polea es constante, la aceleración del punto A será igual a su aceleración normal.

$$a_A = a_A^n = R \cdot \omega^2 = 0,25 \cdot 2^2 = 1\text{m/s}^2$$

**PROBLEMA 1.13** Un torno B se une con una polea A por medio de una faja, tal como se muestra en la figura 1.11. Los radios del torno y la polea son  $r_1 = 0,75\text{m}$  y  $r_2 = 0,3\text{m}$  respectivamente. Después de encendido el torno, su aceleración angular es  $0,4\pi \text{ rad/s}^2$ . Despreciando la fricción de la faja con el torno y la polea, determinar el tiempo que debe de transcurrir para que el torno realice 300rev / min

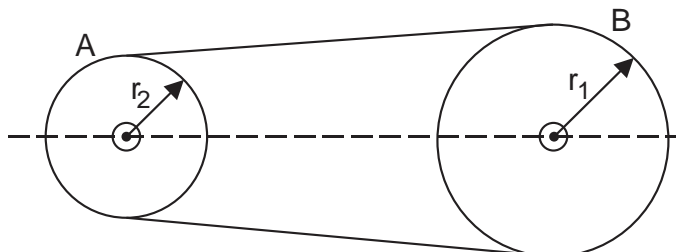


Fig. 1.11

**Solución:**

El número de revoluciones que realiza el torno lo determinamos por la relación:

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

De donde:

$$n_1 = \frac{n_2 \cdot r_2}{r_1} = \frac{300 \cdot 0,3}{0,75} = 120 \text{ rev / min}$$

La velocidad angular del torno es:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{120\pi}{30} = 4\pi \text{ rad / s}$$

El torno gira uniformemente acelerado y su velocidad angular inicial es cero, obteniéndose:

$$\omega_1 = \alpha_1 \cdot t$$

De donde:

$$t = \frac{\omega_1}{\alpha_1} = \frac{4\pi}{0,4\pi} = 10 \text{ s}$$

**PROBLEMA 1.14** El disco propulsor I realiza  $n_1 = 600 \text{ rev / min}$ , desplazándose de tal manera que la distancia del plano del disco hasta el eje de giro del disco conducido II varía por la ley  $x = 10 - 0,5t$ . Determinar la velocidad y aceleración angular del disco II, así como la velocidad y aceleración del punto B en el momento cuando  $x = r$ , considerando que  $R = 15 \text{ cm}$  y  $r = 5 \text{ cm}$

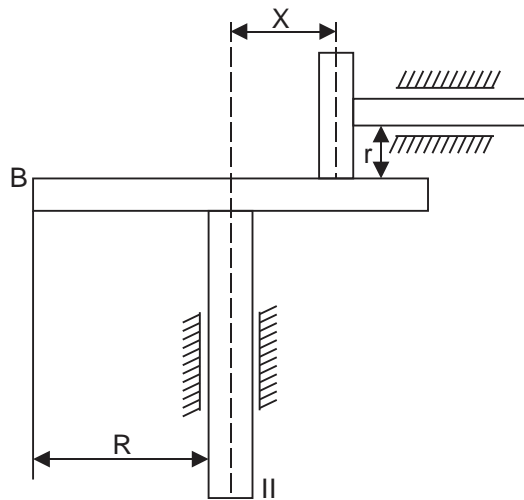


Fig. 1.12

**Solución:**

En un inicio, determinamos la velocidad angular del disco propulsor I:

$$\omega_1 = \frac{\pi \cdot n_1}{30} = \frac{600\pi}{30} = 20\pi \text{ rad / s}$$

Considerando que no existe deslizamiento entre las poleas para la transmisión del movimiento rotatorio del disco I al disco II, calculamos la velocidad angular  $\omega_2$  del disco conducido a partir de la siguiente relación:

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r}{x}$$

De donde:

$$\omega_2 = \frac{r}{x} \omega_1 = \omega_1 \cdot \frac{r}{10 - 0,5t}$$

Reemplazamos los valores de  $\omega_1$  y  $r$  en la ecuación anterior, obteniendo:

$$\omega_2 = \frac{20\pi \cdot 5}{10 - 0,5t} = \frac{100\pi}{x} \text{ rad/s}$$

La aceleración angular del disco II, lo obtenemos a través de la derivada de la velocidad angular respecto al tiempo.

$$\alpha_2 = \frac{d\omega}{dt} = \frac{50\pi}{(10 - 0,5t)^2} = \frac{50\pi}{x^2} \text{ rad/s}^2$$

En el momento, cuando  $x = r$ , se obtendrá:

$$\omega_2 = \frac{100\pi}{r} = \frac{100\pi}{5} = 20\pi \text{ rad/s}$$

$$\alpha_2 = \frac{50\pi}{r^2} = \frac{50\pi}{5^2} = 2\pi \text{ rad/s}^2$$

Determinamos, la velocidad del punto B:

$$V_B = \omega_2 \cdot R = 20\pi \cdot 15 = 300\pi \text{ cm/s}$$

Ahora, calculamos la aceleración del punto B:

$$a_B = R \sqrt{\alpha_2^2 + \omega_2^4} = 15 \sqrt{(2\pi)^2 + (20\pi)^4} = 30\pi \sqrt{1 + 40000\pi^2} \text{ cm/s}^2$$

**PROBLEMA 1.15** Un mecanismo está compuesto de tres ruedas escalonadas 2, 3 y 4, unidas entre si o conectadas por una faja de transmisión y por una regla dentada 1, y el peso 5, el cual está unido a la rueda 4 en el punto D, tal como se muestra en la figura 1.13. Los radios de las ruedas son:  $r_2 = 0,02\text{m}$ ;  $R_2 = 0,04\text{m}$ ;  $r_3 = 0,06\text{m}$ ;  $R_3 = 0,08\text{m}$ ;  $r_4 = 0,12\text{m}$ ;  $R_4 = 0,16\text{m}$ . Determinar la velocidad y aceleración del punto A y del peso 5, cuando  $t = 2\text{s}$ , si la ley de movimiento de la regla dentada es  $s = (2t^2 - 5t) \cdot 10^{-2} \text{m}$

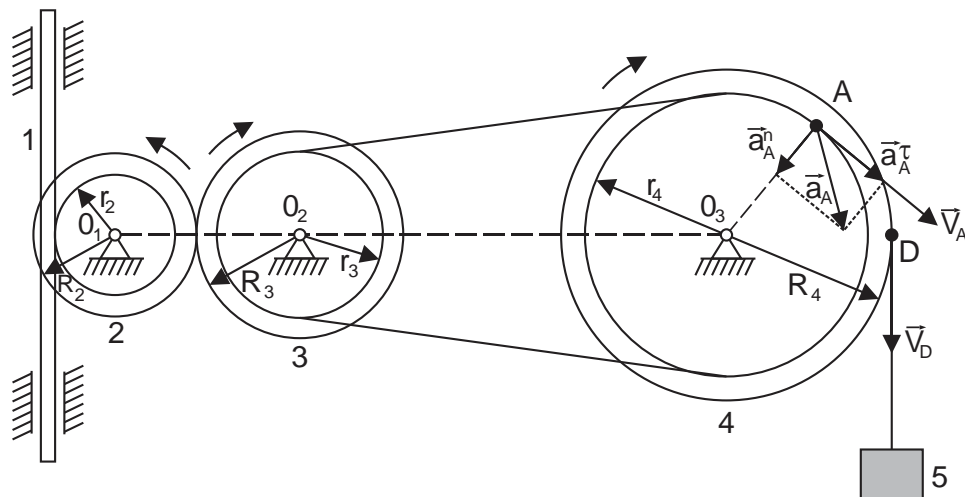


Fig. 1.13

**Solución:**

Conociendo la ley de movimiento de la regla 1, determinamos su velocidad:

$$V_1 = \frac{ds}{dt} = (4t - 5) \cdot 10^{-2} \text{ m/s}$$

De esta manera, la velocidad angular de la rueda 2 será:

$$\omega_2 = \frac{V_1}{r_2} = \frac{(4t - 5) \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 0,5(4t - 5) \text{ rad/s}$$

A partir de la siguiente relación, calculamos la velocidad angular de la rueda 3

$$\frac{\omega_3}{\omega_2} = \frac{R_2}{R_3}$$

De donde:

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{0,5(4t - 5) \cdot 0,04}{0,08} = 0,25(4t - 5) \text{ rad/s}$$

La aceleración angular de la rueda 3 es:

$$\alpha_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 1 \text{ rad/s}^2$$

Ahora, calculamos la velocidad angular de la rueda 4:

$$\frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_4}$$

$$\omega_4 = \frac{\omega_3 r_3}{r_4} = \frac{0,25(4t - 5) \cdot 0,06}{0,12} = 0,125(4t - 5) \text{ rad/s}$$

De esta manera, la aceleración angular de la rueda 4 será:

$$\alpha_4 = \frac{d\omega_4}{dt} = 0,5 \text{ rad/s}^2$$

Si  $t = 2\text{s}$ , la velocidad angular de la rueda 4 es:

$$\omega_4 = 0,125(4 \cdot 2 - 5) = 0,375 \text{ rad/s}$$

Ahora, calculamos la velocidad del punto A:

$$V_A = r_4 \omega_4 = 0,12 \cdot 0,375 = 0,045 \text{ m/s}$$

Las aceleraciones normal y tangencial del punto A, lo determinamos por las siguientes relaciones:

$$a_A^n = r_4 \omega_4^2 = 0,12 \cdot 0,375^2 = 0,017 \text{ m/s}^2$$

$$a_A^\tau = r_4 \alpha_4 = 0,12 \cdot 0,5 = 0,06 \text{ m/s}^2$$

La aceleración total del punto A será:

$$a_A = \sqrt{(a_A^n)^2 + (a_A^\tau)^2} = \sqrt{0,017^2 + 0,06^2} = 0,062 \text{ m/s}^2$$

Como la velocidad del peso 5 será igual a la velocidad del punto D de la rueda 4, se tendrá:

$$V_5 = V_D = R_4 \omega_4 = 0,16 \cdot 0,375 = 0,06 \text{ m/s}$$

La aceleración del peso 5 es igual a la aceleración tangencial del punto D de la rueda 4

$$a_5 = a_D^t = R_4 \alpha_4 = 0,16 \cdot 0,5 = 0,08 \text{ m/s}^2$$

### 1.3 MOVIMIENTO PLANOPARALELO DEL CUERPO SÓLIDO

**PROBLEMA 1.16** Determinar las velocidades en los puntos  $M_1, M_2, M_3, M_4$  de la rueda mostrada en la figura 1.14, la cual realiza un movimiento por la superficie horizontal sin existir fricción. Considere que la velocidad en el centro de la rueda es  $V_0$

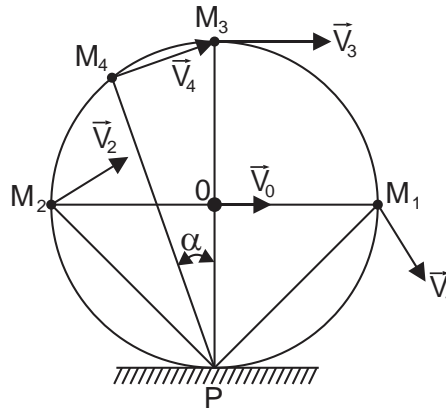


Fig. 1.14

**Solución:**

Como el punto P es el de contacto entre la rueda y la superficie, entonces dicho punto se denomina centro instantáneo de velocidades, siendo  $\vec{V}_P = 0$ . En consecuencia:

$$\vec{V}_1 \perp PM_1; \quad \vec{V}_2 \perp PM_2; \quad \vec{V}_3 \perp PM_3; \quad \vec{V}_4 \perp PM_4$$

$$\frac{V_4}{PM_4} = \frac{V_0}{PO}$$

De donde:

$$V_4 = \frac{PM_4}{PO} V_0 = \frac{2R \cos \alpha}{R} V_0 = 2V_0 \cos \alpha$$

Análogamente, determinamos las velocidades de los puntos  $M_1, M_2, M_3$

$$V_1 = V_2 = \frac{R\sqrt{2}}{R} V_0 = V_0 \sqrt{2}$$

$$V_3 = \frac{2R}{R} V_0 = 2V_0$$

Como se puede apreciar, la mayor velocidad se obtiene en el punto  $M_3$

**PROBLEMA 1.17** Una barra AB se apoya sobre un muro en el punto C y sobre una superficie horizontal en el punto A, tal como se muestra en la figura 1.15. El extremo inferior A se desplaza por el eje horizontal OX con una velocidad  $V_A = 4 \text{ m/s}$ . Determinar la velocidad del punto C de la barra en el momento cuando el ángulo  $\varphi = 30^\circ$ . Considere  $\overline{AC} = 2 \text{ m}$

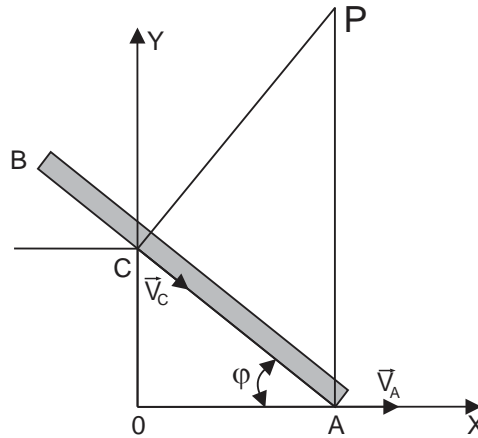


Fig. 1.15

**Solución:**

La velocidad del punto C está orientada a lo largo de la barra y la velocidad en el punto A por el eje OX, tal como se muestra en la figura 1.15

Para determinar el módulo de la velocidad del punto C, utilizamos el teorema acerca de las proyecciones de las velocidades de dos puntos, por cuanto, el ángulo  $\varphi$  es conocido.

De esta manera, obtenemos:

$$V_C = V_A \cos \varphi = 4 \cos 30^\circ = 3,464 \text{ m/s}$$

La velocidad del punto C también se puede calcular, utilizando el centro instantáneo de velocidades, es decir:

$$\frac{V_C}{CP} = \frac{V_A}{AP}$$

$$V_C = \frac{CP}{AP} V_A = \frac{4 \cos 30^\circ}{4} \cdot 4 = 3,464 \text{ m/s}$$

**PROBLEMA 1.18** La barra AB de longitud 0,6m gira alrededor del apoyo A y se mueve como consecuencia de la manivela OE de longitud 0,1m; la cual realiza  $n = 100 \text{ rev/min}$  unidos al sistema de palancas BC y CD, cada uno de longitud 0,4m. Determinar la velocidad angular de la barra AB en la posición del mecanismo mostrado en la figura 1.16, considerando  $OK = 0,8\text{m}$

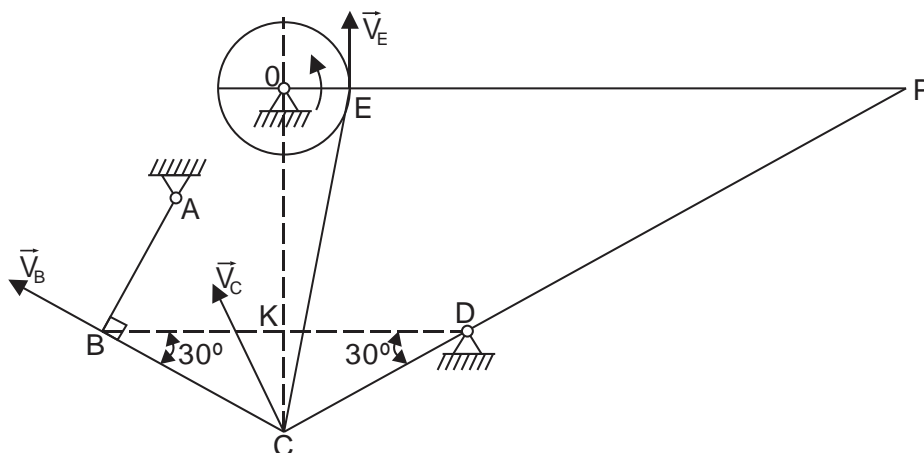


Fig. 1.16

**Solución:**

A través de la velocidad del punto B, determinamos la velocidad angular de la barra AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{AB}$$

Para determinar la velocidad  $\vec{V}_B$ , previamente calculamos la velocidad del punto E, el cual pertenece a la manivela OE y realiza un movimiento rotacional alrededor del punto O. Es por ello, que se cumple:

$$\vec{V}_E \perp OE$$

$$V_E = OE \cdot \omega_{OE} = \frac{OE \cdot \pi n}{30} = \frac{0,1 \cdot \pi \cdot 100}{30} = 1,047 \text{ m/s}$$

La velocidad del punto C es perpendicular a la barra CD, siendo D apoyo fijo.

Conociendo las orientaciones de las velocidades de los puntos C y E, determinamos la ubicación del centro instantáneo de velocidades de la barra CE, siendo el punto P. De esta manera, la velocidad del punto C lo determinamos por la siguiente relación:

$$\frac{V_C}{PC} = \frac{V_E}{PE}$$

De donde:

$$V_C = \frac{PC}{PE} \cdot V_E$$

Las distancias PC y PE lo determinamos del triángulo OPC

$$OC = OK + CD \sin 30^\circ = 0,8 + 0,4 \cdot 0,5 = 1,00 \text{ m}$$

$$PC = \frac{OC}{\sin 30^\circ} = 2,00 \text{ m}$$

$$PE = OP - OE = PC \cos 30^\circ - OE = 2 \cos 30^\circ - 0,1 = 1,632 \text{ m}$$

En consecuencia:

$$V_C = \frac{2,00}{1,632} \cdot 1,047 = 1,283 \text{ m/s}$$

La velocidad del punto B lo determinamos por el teorema de proyecciones de velocidades:

$$V_B = V_C \cos 30^\circ = 1,283 \cos 30^\circ = 1,111 \text{ m/s}$$

Finalmente, determinamos la velocidad angular de la barra AB

$$\omega_{AB} = \frac{V_B}{AB} = \frac{1,111}{0,6} = 1,85 \text{ rad/s}$$

**PROBLEMA 1.19** La manivela OA gira alrededor del eje O con una velocidad angular  $\omega$  y genera el movimiento del engranaje I, el cual se mueve por medio del engranaje fijo II. Los radios de los engranajes son iguales a "r". Con el engranaje I está unida la biela BD de longitud L, la cual a su vez se une con el balancín DC. Determinar la velocidad angular de la biela BD y del balancín DC en la posición del mecanismo mostrado en la figura 1.17

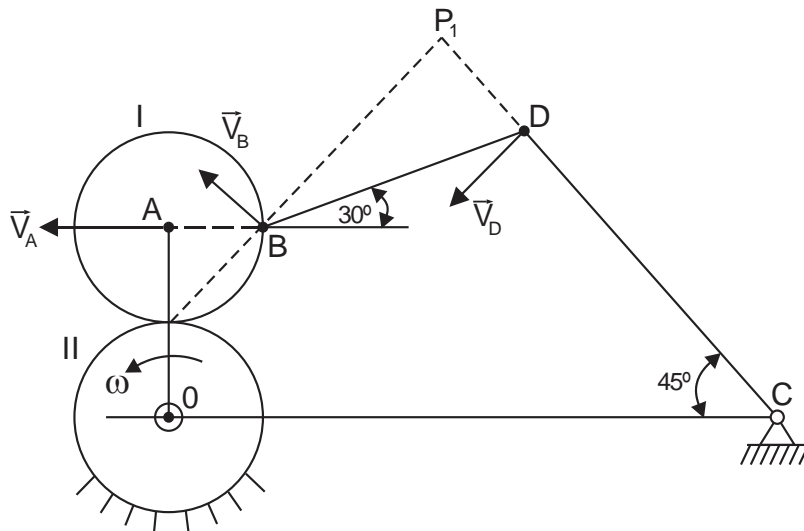


Fig. 1.17

**Solución:**

Para determinar la velocidad angular de la biela BD y el balancín DC, es necesario, conocer las velocidades de los puntos B y D y la ubicación del centro instantáneo de velocidades de ambos mecanismos.

En un inicio, determinamos la velocidad del punto A, siendo perpendicular a la manivela OA y por módulo es:

$$V_A = 2r\omega$$

El centro instantáneo de velocidades del engranaje I se encuentra en el punto P, que es el de contacto entre los engranajes I y II, debido a que el engranaje II es fijo.

De esta manera, la velocidad del punto B es perpendicular al tramo BP y por módulo es:

$$V_B = \frac{V_A}{\cos 45^\circ} = 2\sqrt{2}r\omega$$

Trazando perpendiculares a las orientaciones de las velocidades en los puntos B y D, obtenemos el centro instantáneo de velocidades, el cual es el punto P<sub>1</sub> para la barra BD. De la figura 1.17 tenemos

$$\text{que } BP_1 = L\text{sen}75^\circ \text{ y } DP_1 = L\text{sen}15^\circ$$

La velocidad angular de la biela BD es:

$$\omega_{BD} = \frac{V_B}{BP_1} = \frac{2\sqrt{2}r\omega}{L\text{sen}75^\circ} = 2,928 \frac{r\omega}{L}$$

$$V_D = \omega_{BD} \cdot DP_1 = 0,758r\omega$$

La velocidad angular del balancín DC es:

$$\omega_{DC} = \frac{V_D}{DC} = \frac{1,072r\omega}{4r + L}$$

Donde:

$$DC = \frac{2r + L\text{sen}30^\circ}{\text{sen}45^\circ} = \frac{4r + L}{\sqrt{2}}$$

**PROBLEMA 1.20** Determinar el módulo y la orientación de la velocidad  $\vec{V}_0$  del eje del bloque móvil mostrado en la figura 1.18, si la carga  $M$  se desplaza verticalmente hacia arriba con una velocidad  $V_M = 8\text{cm/s}$  y la carga  $M_1$  se desplaza verticalmente hacia abajo con una velocidad  $V_{M_1} = 20\text{cm/s}$ . El radio del bloque móvil es  $r = 16\text{cm}$

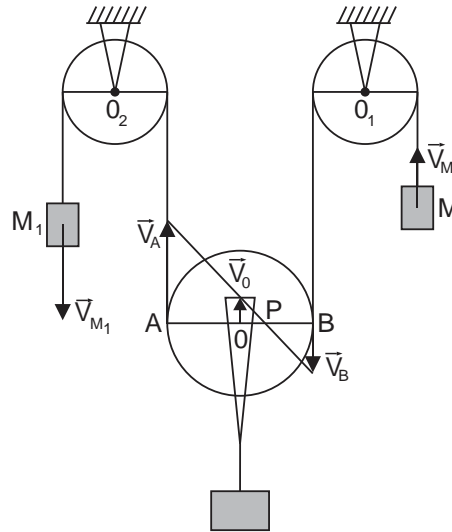


Fig. 1.18

**Solución:**

Determinamos la ubicación del centro instantáneo de velocidades del bloque móvil. Para ello, unimos los extremos de los vectores de las velocidades  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$ . El punto P de la intersección de esta línea con el diámetro horizontal AB del bloque se denomina centro instantáneo de velocidades. La distancia OP y la velocidad angular del bloque móvil, lo determinamos por las siguientes relaciones:

$$V_B = V_M = (r - OP)\omega$$

$$V_A = V_{M_1} = (r + OP)\omega$$

Dónde:

$\omega$  - velocidad angular del bloque móvil

Dividimos la primera ecuación entre la segunda y obtenemos:

$$\frac{V_M}{V_{M_1}} = \frac{r - OP}{r + OP}$$

Reemplazamos valores:

$$\frac{8}{20} = \frac{16 - OP}{16 + OP}$$

De donde:

$$OP = 6,857\text{cm}$$

Luego, despejamos la velocidad angular, obteniendo:

$$\omega = \frac{V_M}{r - OP} = \frac{8}{16 - 6,857} = 0,875\text{rad/s}$$

De esta manera, el módulo de la velocidad  $\vec{V}_0$  será:

$$V_0 = (OP) \cdot \omega = 6,857 \cdot 0,875 = 6 \text{ cm/s}$$

**PROBLEMA 1.21** Un mecanismo compuesto por un balancín  $O_1A$ , el cual se inicia en el punto  $O_1$  y transmite a través de la biela  $AB$  el movimiento a la manivela  $OB$ , que se apoya en el punto  $O$ . En dicho punto se encuentra una rueda I. La biela  $AB$  termina en la rueda II, la cual está unida firmemente a la biela. Determinar la velocidad angular de la manivela  $OB$  y la rueda I, en el momento cuando  $\alpha = 60^\circ$ ,  $\beta = 90^\circ$ , si  $r_I = r_{II} = 30\sqrt{3} \text{ cm}$ ,  $O_1A = 75 \text{ cm}$ ,  $AB = 150 \text{ cm}$  y la velocidad angular del balancín  $\omega_0 = 6 \text{ rad/s}$

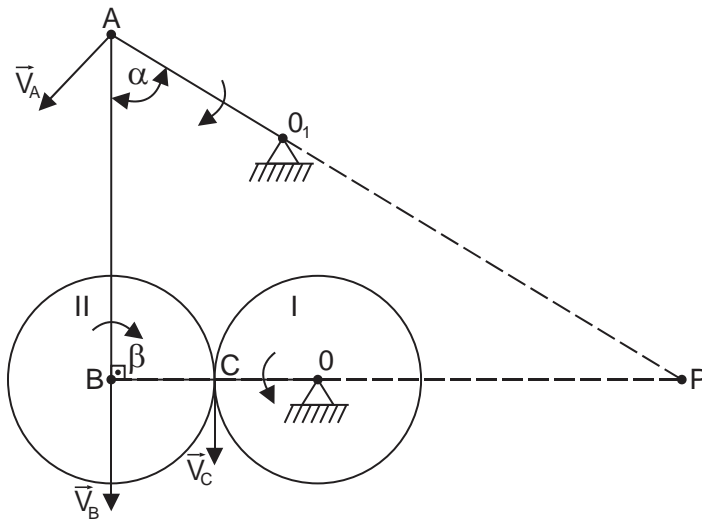


Fig. 1.19

**Solución:**

El balancín  $O_1A$  realiza un movimiento giratorio alrededor del punto  $O_1$ , por ello que la velocidad  $V_A \perp O_1A$  y se orienta en la dirección mostrada en la figura 1.19.

La biela  $AB$  junto con la rueda II realizan un movimiento planoparalelo. La posición del centro instantáneo de velocidades se determina por la intersección  $P$ , perpendicular a los vectores  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$ .

En base a la ley de distribución de velocidades respecto al centro instantáneo de velocidades, se tiene:

$$\frac{V_B}{V_A} = \frac{BP}{AP}$$

Siendo:

$$V_A = (O_1A) \cdot \omega_0 = 75 \cdot 6 = 450 \text{ cm/s}$$

$$BP = (AB) \cdot \tan 60^\circ = 150 \sqrt{3} \text{ cm}$$

$$AP = \frac{AB}{\cos 60^\circ} = \frac{150}{0,5} = 300 \text{ cm}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$V_B = V_A \cdot \frac{BP}{AP} = 450 \cdot \frac{150\sqrt{3}}{300} = 225\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

La velocidad del punto C de la rueda II, unida firmemente a la biela AB, se determinará por la siguiente relación:

$$\frac{V_C}{V_B} = \frac{CP}{BP}$$

Siendo:

$$CP = BP - BC = 150\sqrt{3} - 30\sqrt{3} = 120\sqrt{3} \text{ cm}$$

De esta manera:

$$V_C = V_B \cdot \frac{CP}{BP} = 225\sqrt{3} \cdot \frac{120\sqrt{3}}{150\sqrt{3}} = 180\sqrt{3} \text{ cm/s}$$

La velocidad angular de la rueda I será:

$$\omega_I = \frac{V_C}{OC} = \frac{180\sqrt{3}}{30\sqrt{3}} = 6 \text{ rad/s}$$

La velocidad angular de la manivela OB se determinará así:

$$\omega_{OB} = \frac{V_B}{OB} = \frac{225\sqrt{3}}{60\sqrt{3}} = 3,75 \text{ rad/s}$$

**PROBLEMA 1.22** La rueda se desliza sin fricción por el plano inclinado mostrado en la figura 1.20. Determinar las aceleraciones de los puntos  $M_1$  y  $M_2$ , si en un determinado momento, la velocidad del centro de la rueda es  $V_0 = 1 \text{ m/s}$  y su aceleración  $a_0 = 3 \text{ m/s}^2$ . El radio de la rueda es  $R = 0,5 \text{ m}$

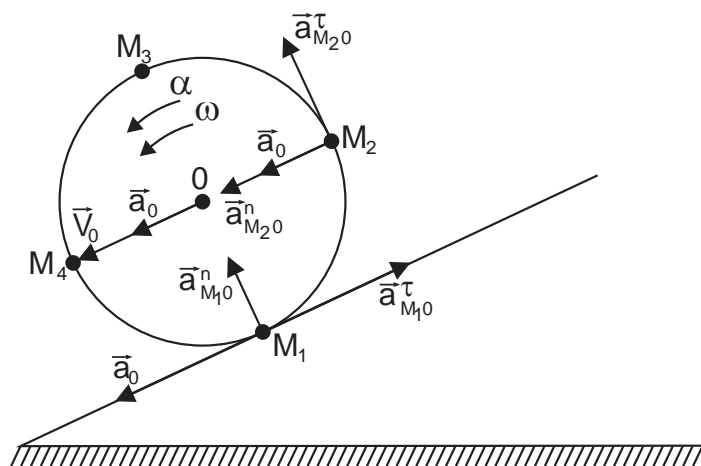


Fig. 1.20

**Solución:**

La aceleración de los puntos  $M_1$  y  $M_2$  se determinan de las fórmulas de distribución de aceleraciones. Como polo consideramos el punto O, debido a que son conocidos su velocidad y aceleración.

De esta manera, se tendrá:

$$\vec{a}_{M_1} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{M_1 0} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{M_1 0}^n + \vec{a}_{M_1 0}^\tau$$

$$\vec{a}_{M_2} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{M_2 0} = \vec{a}_0 + \vec{a}_{M_2 0}^n + \vec{a}_{M_2 0}^\tau$$

El punto  $M_1$  se denomina centro instantáneo de velocidades, por ello, la velocidad angular de la rueda es:

$$\omega = \frac{V_0}{OM_1} = \frac{V_0}{R}$$

La aceleración angular de la rueda será:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{V_0}{R} \right) = \frac{1}{R} \cdot \frac{dV_0}{dt} = \frac{a_0}{R}$$

En el momento indicado en el problema, se tendrá:

$$\omega = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{3}{0,5} = 6 \text{ grad/s}^2$$

Luego, determinamos las aceleraciones normal  $a_{M_1,0}^n$  y tangencial  $a_{M_1,0}^\tau$

$$a_{M_1,0}^n = R\omega^2 = 0,5 \cdot 2^2 = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{M_1,0}^\tau = R\alpha = 0,5 \cdot 6 = 3 \text{ m/s}^2$$

Como  $OM_2 = OM_1 = R$ , entonces se tendrá:

$$a_{M_2,0}^n = a_{M_1,0}^n = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{M_2,0}^\tau = a_{M_1,0}^\tau = 3 \text{ m/s}^2$$

De esta manera, las aceleraciones en los puntos  $M_1$  y  $M_2$  serán:

$$a_{M_1} = \sqrt{(a_0 - a_{M_1,0}^\tau)^2 + (a_{M_1,0}^n)^2} = a_{M_1,0}^n = 2 \text{ m/s}^2$$

$$a_{M_2} = \sqrt{(a_0 + a_{M_2,0}^n)^2 + (a_{M_2,0}^\tau)^2} = \sqrt{(3 + 2)^2 + 3^2} = 5,83 \text{ m/s}^2$$

La aceleración del punto  $M_1$  se orienta de dicho punto hacia el centro de la rueda.

**PROBLEMA 1.23** La manivela OA de longitud 0,1m gira uniformemente alrededor del punto O con una velocidad angular  $\omega_0 = 5 \text{ rad/s}$  y genera el movimiento de la biela AB de longitud 0,5m. La corredera B se mueve linealmente y en forma horizontal. Determinar las aceleraciones de los puntos B y M, si  $AM=BM$  y el ángulo  $AOB = 90^\circ$

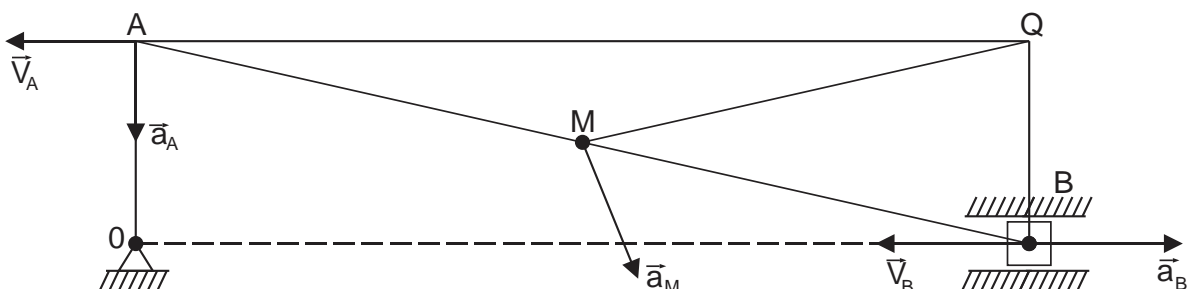


Fig. 1.21

**Solución:**

Como las velocidades de los puntos A y B de la biela son paralelos, quiere decir que la biela realiza un movimiento de traslación instantánea y su velocidad angular en dicho momento es cero. Es por ello, que el centro instantáneo de aceleraciones de la biela AB se encuentra en el punto de intersección de las perpendiculares de las aceleraciones  $\vec{a}_A$  y  $\vec{a}_B$ .

Por cuanto la manivela OA gira uniformemente, entonces se tendrá:

$$a_A = (OA) \cdot \omega_0^2 = 0,1 \cdot 5^2 = 2,5 \text{ m/s}^2$$

Las aceleraciones de los puntos de la biela son proporcionales a las distancias al centro instantáneo de aceleraciones.

$$\frac{a_A}{AQ} = \frac{a_B}{BQ} = \frac{a_M}{MQ}$$

De la figura 1.21 determinamos las distancias AQ y MQ

$$AQ = \sqrt{(AB)^2 - (OA)^2} = \sqrt{0,5^2 - 0,1^2} = 0,49 \text{ m}$$

$$MQ = \frac{AB}{2} = \frac{0,5}{2} = 0,25 \text{ m}$$

Reemplazamos valores en la fórmula anterior y obtenemos:

$$a_M = \frac{MQ}{AQ} a_A = \frac{0,25}{0,49} \cdot 2,5 = 1,28 \text{ m/s}^2$$

$$a_B = \frac{BQ}{AQ} a_A = \frac{0,1}{0,49} \cdot 2,5 = 0,51 \text{ m/s}^2$$

La aceleración  $a_M$  es perpendicular al tramo MQ

**PROBLEMA 1.24** La manivela OA de longitud 0,2m gira uniformemente con una velocidad angular  $\omega_0 = 10 \text{ rad/s}$  y genera el movimiento de la biela AB de longitud 1m. La corredera B se mueve por el eje vertical. Determinar la velocidad angular y aceleración angular de la biela, así como, la aceleración de la corredera B en el momento cuando la biela y la manivela son mutuamente perpendiculares y forman con el eje horizontal ángulos  $\gamma = \pi/4$  y  $\beta = \pi/4$

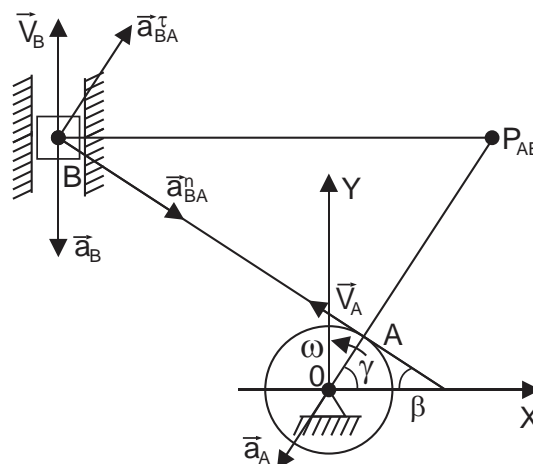


Fig. 1.22

**Solución:**

El módulo de la velocidad del punto A es:

$$V_A = (OA) \cdot \omega_0 = 0,2 \cdot 10 = 2 \text{ m/s}$$

El vector de velocidad del punto B está orientado en el eje vertical.

El centro instantáneo de velocidades de la biela AB se encuentra en el punto  $P_{AB}$ , que se obtiene por la intersección de las perpendiculares de las velocidades en los puntos A y B.

La velocidad angular de la biela AB es:

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}$$

Por cuanto  $\gamma = \beta = \pi/4$ , se tendrá:

$$AP = AB = 1 \text{ m}$$

$$\omega_{AB} = \frac{2}{1} = 2 \text{ rad/s}$$

La aceleración del punto A será:

$$a_A = a_A^n = \frac{V_A^2}{OA} = \frac{2^2}{0,2} = 20 \text{ m/s}^2$$

Dicha aceleración se orienta de A hacia el punto O.

La aceleración de la corredera B se va a determinar en función de la fórmula de distribución de aceleraciones, teniendo en cuenta que se orienta en el sentido vertical.

Para ello, elegimos al punto A como polo y determinamos:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

Siendo:

$$a_{BA}^n = (AB) \cdot \omega_{AB}^2 = 1 \cdot 2^2 = 4 \text{ m/s}^2$$

$$a_{BA}^\tau = (AB) \cdot \alpha_{AB}$$

La orientación de las aceleraciones  $\vec{a}_{BA}^n$  y  $\vec{a}_{BA}^\tau$  se muestran en la figura 1.22

Para determinar el módulo de la aceleración  $a_{BA}^\tau$ , proyectamos la igualdad vectorial en el eje horizontal OX y obtenemos:

$$-a_A \cos 45^\circ + a_{BA}^n \cos 45^\circ + a_{BA}^\tau \cos 45^\circ = 0$$

$$a_{BA}^\tau = a_A - a_{BA}^n = 20 - 4 = 16 \text{ m/s}^2$$

De esta manera, la aceleración angular de la biela AB será:

$$\alpha_{AB} = \frac{a_{BA}^\tau}{AB} = \frac{16}{1} = 16 \text{ rad/s}^2$$

El módulo de la aceleración de la corredera B lo determinamos proyectando la igualdad vectorial en la dirección de la biela AB, obteniendo:

$$a_B \cos 45^\circ = a_{BA}^n$$

$$a_B = \frac{a_{BA}^n}{\cos 45^\circ} = \frac{4}{1/\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} = 5,66 \text{ m/s}^2$$

**PROBLEMA 1.25** El cuadrado ABCD de lado 2cm realiza un movimiento plano. En cierto momento la aceleración de los extremos A y B son  $a_A = 2 \text{ cm/s}^2$  y  $a_B = 4\sqrt{2} \text{ cm/s}^2$ , respectivamente y están orientadas en las direcciones mostradas en la figura 1.23. Determinar la velocidad angular y aceleración angular del cuadrado, así como la aceleración del punto C

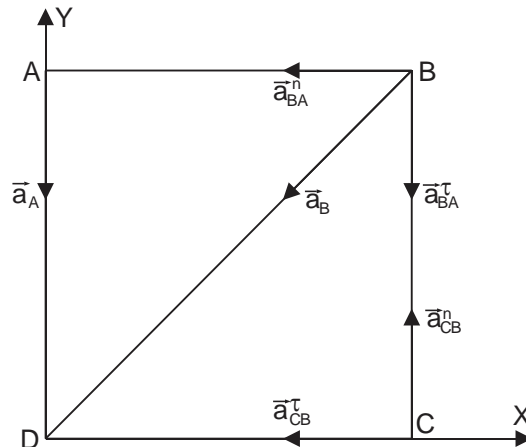


Fig. 1.23

**Solución:**

Por condición del problema, las aceleraciones de los puntos A y B son conocidos. Es que elegimos el punto A como polo y obtenemos:

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA} = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^\tau$$

Siendo:

$$a_{BA}^n = (AB) \cdot \omega^2$$

$$a_{BA}^\tau = (AB) \cdot \alpha$$

La aceleración normal va de B hacia A y la aceleración tangencial es perpendicular al tramo AB. Para determinar la velocidad angular y aceleración angular del cuadrado, proyectamos la igualdad vectorial en los ejes OX y OY

$$-a_B \cos 45^\circ = -a_{BA}^n$$

$$-a_B \sin 45^\circ = -a_A - a_{BA}^\tau$$

De esta manera:

$$a_{BA}^n = a_B \cos 45^\circ = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 4 \text{ cm/s}^2$$

$$a_{BA}^\tau = a_B \sin 45^\circ - a_A = 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2 = 2 \text{ cm/s}^2$$

Luego:

$$\omega = \sqrt{\frac{a_{BA}^n}{AB}} = \sqrt{\frac{4}{2}} = \sqrt{2} \text{ rad/s}$$

$$\alpha = \frac{a_{BA}^{\tau}}{AB} = \frac{2}{2} = 1 \text{ rad/s}^2$$

Ahora, determinamos la aceleración del punto C

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB} = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^{\tau}$$

La aceleración normal se orienta del punto C al punto B y la aceleración tangencial en forma perpendicular al tramo CB

Para determinar el módulo y dirección de la aceleración del punto C, proyectamos en los ejes coordenados OX y OY

$$a_{CX} = -a_B \cos 45^\circ - a_{CB}^{\tau} = -4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 2.1 = -6 \text{ cm/s}^2$$

$$a_{CY} = a_{CB}^n - a_B \sin 45^\circ = 2(\sqrt{2})^2 - 4\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

De esta manera:

$$a_C = \sqrt{a_{CX}^2 + a_{CY}^2} = 6 \text{ cm/s}^2$$

Considerando las proyecciones de la aceleración en C por los ejes coordenados, concluimos que dicha aceleración en C va orientada de C hacia D.

#### 1.4 MOVIMIENTO COMPUESTO DEL PUNTO

**PROBLEMA 1.26** En un vehículo que se mueve a la derecha en forma recta con velocidad  $V_0 = 0,2 \text{ m/s}$  y aceleración  $a_0 = 0,492 \text{ m/s}^2$ , se coloca un motor eléctrico, el cual gira de acuerdo a la ecuación  $\varphi = t^2$ , estando expresado el ángulo  $\varphi$  en radianes. El radio del motor es  $0,2 \text{ m}$ . Determinar la velocidad absoluta y aceleración absoluta del punto A, cuando  $t = 1 \text{ s}$ , si en ese momento el punto se encuentra ubicado en la posición mostrada en la figura 1.24

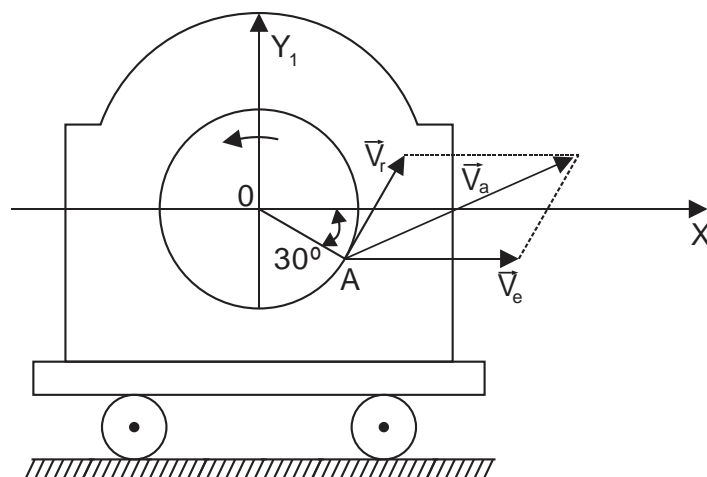


Fig. 1.24

**Solución:**

Elegimos un sistema móvil de coordenadas, unido al vehículo, el cual tiene un movimiento de traslación. En consecuencia, el movimiento del punto A es de traslación. El punto se mueve por el círculo con centro en O y radio  $r=0,2 \text{ m}$

La velocidad absoluta del punto A es la suma de la velocidad de arrastre y de la velocidad relativa.

$$\vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Siendo:

$$V_e = V_0 = 0,2\text{m/s}$$

$$V_r = r\omega$$

$$\omega = \frac{d\phi}{dt} = 2t$$

Cuando  $t=1\text{s}$  tendremos:

$$\omega_{t=1\text{s}} = 2 \cdot 1 = 2\text{rad/s}$$

$$(V_r)_{t=1\text{s}} = 0,2 \cdot 2 = 0,4\text{m/s}$$

La velocidad absoluta del punto A, lo determinamos por el teorema de cosenos.

$$V_A = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_e V_r \cos 60^\circ} = \sqrt{0,2^2 + 0,4^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,4 \cdot 0,5} = 0,53\text{m/s}$$

La aceleración absoluta del punto A, lo determinamos por el teorema de superposición de aceleraciones.

$$\vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Como el movimiento es de traslación, entonces la aceleración de Coriolis es  $\vec{a}_c = 0$

$$\vec{a}_A = \vec{a}_e + \vec{a}_r = \vec{a}_e + \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^\tau$$

El módulo del vector de aceleración absoluta, lo determinamos por el método de proyecciones, mostrado en la figura 1.25

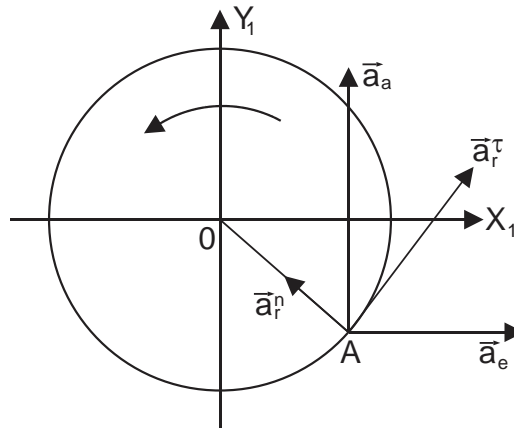


Fig. 1.25

Del gráfico tenemos:

$$a_{AX_1} = a_e + a_r^\tau \cos 60^\circ - a_r^n \cos 30^\circ$$

$$a_{AY_1} = a_r^\tau \sin 60^\circ + a_r^n \sin 30^\circ$$

Siendo:

$$a_e = a_0 = 0,492\text{m/s}^2$$

$$a_r^n = r \cdot \omega^2 = 0,2 \cdot 2^2 = 0,8\text{m/s}^2$$

$$a_r^\tau = r \cdot \alpha = 0,2 \cdot 2 = 0,4 \text{ m/s}^2$$

Dónde:

$$\alpha = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = 2 \text{ rad/s}^2$$

Ahora, determinamos los valores de las proyecciones de la aceleración absoluta en los ejes  $OX_1Y_1$

$$a_{AX_1} = 0,492 + 0,4 \cdot \frac{1}{2} - 0,8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$$

$$a_{AY_1} = 0,4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 0,8 \cdot \frac{1}{2} = 0,746 \text{ m/s}^2$$

El módulo de la aceleración absoluta del punto A será:

$$a_A = \sqrt{(a_{AX_1})^2 + (a_{AY_1})^2} = 0,746 \text{ m/s}^2$$

Su orientación es por el eje  $OY_1$ , tal como se mostró en la figura 1.25

**PROBLEMA 1.27** Por el radio de un disco que gira alrededor del eje  $O_1O_2$  con velocidad angular  $\omega = 2t \text{ (s}^{-1}\text{)}$ , se mueve un punto M del centro de disco al borde por la ley  $OM = 0,4t^2 \text{ (m)}$ . El radio OM forma un ángulo de  $60^\circ$  con el eje  $O_1O_2$ . Determinar la velocidad y aceleración absoluta del punto M, cuando  $t = 1\text{ s}$

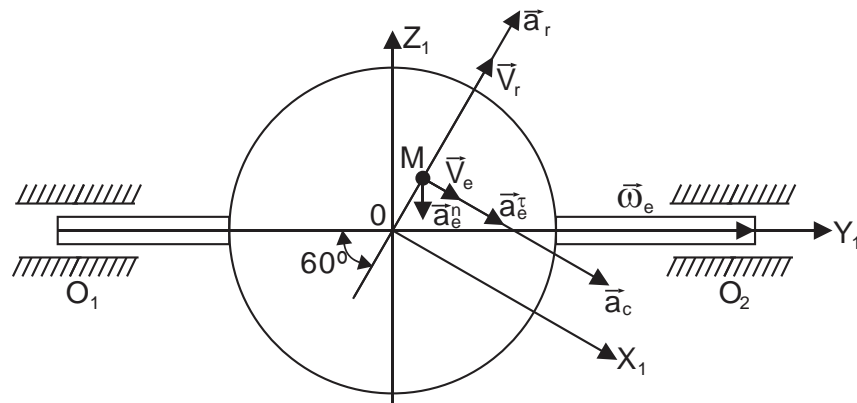


Fig. 1.26

**Solución:**

Elegimos un sistema móvil de coordenadas  $OX_1Y_1Z_1$ , unido al disco y que gira junto con él.

La velocidad absoluta del punto M es:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

Dónde:

$V_e$  - velocidad de transporte del punto M durante su giro con el disco

$V_r$  - velocidad relativa del punto M debido a su movimiento lineal por el radio del disco

El módulo de la velocidad de transporte será:

$$V_e = (OM)\text{sen}60^\circ \omega_e = 0,4t^2 \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{d\phi}{dt} = 0,4t^2 \frac{\sqrt{3}}{2} 2t = 0,4t^3 \sqrt{3} \text{ (m/s)}$$

Cuando  $t=1\text{s}$  se tendrá que  $V_e = 0,693\text{m/s}$  y está orientado en forma perpendicular con el plano del disco en la dirección del giro.

El módulo de la velocidad relativa será:

$$V_r = \frac{d(OM)}{dt} = 0,8t \text{ (m/s)}$$

Cuando  $t=1\text{s}$  se tendrá que  $V_r = 0,8\text{m/s}$

Como  $\vec{V}_e \perp \vec{V}_r$ , se tendrá que la velocidad absoluta es:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{0,693^2 + 0,8^2} = 1,06\text{m/s}$$

La aceleración absoluta la determinamos por la ecuación:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

El módulo de la aceleración relativa es:

$$a_r = \frac{dV_r}{dt} = \frac{d^2(OM)}{dt^2} = 0,8\text{m/s}^2$$

La aceleración relativa es constante y está orientada por el radio desde el centro O

La aceleración de transporte está formada por su aceleración normal y tangencial.

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^\tau$$

El módulo de la aceleración normal de transporte es:

$$a_e^n = (OM)\text{sen}60^\circ \omega_e^2 = 0,4t^2 \frac{\sqrt{3}}{2} (2t)^2 = 0,8\sqrt{3}t^4 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Cuando  $t=1\text{s}$ , se tendrá  $a_e^n = 0,8\sqrt{3} = 1,386\text{m/s}^2$

La aceleración angular del movimiento de transporte será:

$$\alpha_e = \frac{d\omega_e}{dt} = \frac{d^2\phi}{dt^2} = 2\text{rad/s}^2$$

Por cuanto  $\alpha_e > 0$ , la orientación de la aceleración tangencial concuerda con la velocidad de transporte y su módulo es:

$$a_e^\tau = (OM)\text{sen}60^\circ \alpha_e = 0,4 \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = 0,693\text{m/s}^2$$

La aceleración de Coriolis será:

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$$

Siendo su módulo:

$$a_c = 2\omega_e V_r \text{sen}(\vec{\omega}_e \wedge \vec{V}_r) = 2 \cdot 2t \cdot 0,8t \text{sen}60^\circ = 3,2t^2 \frac{\sqrt{3}}{2} = 1,6t^2 \sqrt{3} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Cuando  $t=1s$  será  $a_c = 1,6\sqrt{3} = 2,771m/s^2$

El módulo de la aceleración del punto M lo determinamos por el método de proyecciones.

$$a_{ax_1} = a_e^t + a_c = 0,693 + 2,771 = 3,464m/s^2$$

$$a_{ay_1} = a_r \cos 60^\circ = 0,8 \cdot 0,5 = 0,4m/s^2$$

$$a_{az_1} = -a_e^n + a_r \sin 60^\circ = -1,386 + 0,8 \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,693m/s^2$$

De esta manera:

$$a_a = \sqrt{(a_{ax_1})^2 + (a_{ay_1})^2 + (a_{az_1})^2} = \sqrt{3,464^2 + 0,4^2 + (-0,693)^2} = 3,555m/s^2$$

**PROBLEMA 1.28** Una lámina rectangular gira alrededor de un eje fijo por la ley  $\varphi = 4(t^2 - t)$  rad.

Por la lámina en la dirección de la recta BD se mueve un punto M con una ley de movimiento relativo

$s = BM = 0,2(t^3 + 2t^2)$  m. Determinar la velocidad y aceleración absoluta del punto M en el

momento  $t = 1s$

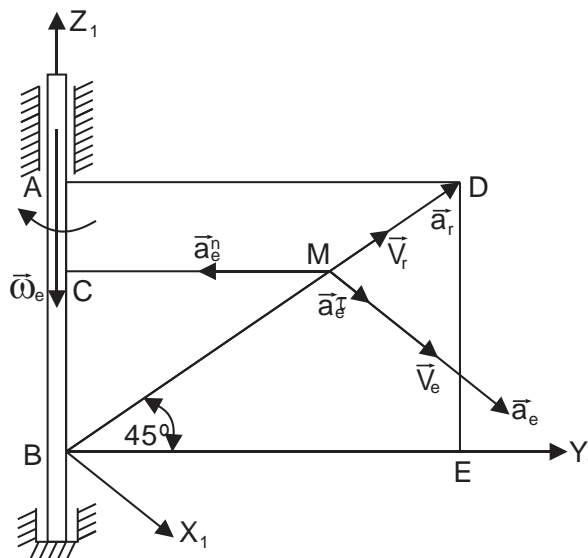


Fig. 1.27

**Solución:**

Unimos el sistema móvil de ejes coordenados con la lámina, la cual realiza un movimiento rotacional. Para el movimiento rotacional de transporte, la velocidad y aceleración absoluta lo determinamos por las fórmulas:

$$\vec{V}_A = \vec{V}_e + \vec{V}_r$$

$$\vec{a}_a = \vec{a}_e + \vec{a}_r + \vec{a}_c$$

Siendo:

$$\vec{a}_e = \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^t$$

El movimiento relativo del punto M es un movimiento lineal por la diagonal BD.

Cuando  $t = 1s$  se tendrá que  $BM = s = 0,6m$

Determinamos las proyecciones de los vectores  $\vec{V}_r$  y  $\vec{a}_r$  en la dirección BD

$$V_r = \frac{ds}{dt} = 0,2(3t^2 + 4t)$$

$$a_r = \frac{d^2s}{dt^2} = 0,2(6t + 4)$$

Cuando  $t = 1s$  se tendrá  $V_r = 1,4m/s$  y  $a_r = 2m/s^2$

La orientación de los vectores  $\vec{V}_r$  y  $\vec{a}_r$  se muestran en la figura 1.27

Ahora, determinamos la velocidad angular  $\omega_e$  y aceleración angular  $\alpha_e$  del movimiento rotacional de transporte.

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 4(2t - 1)$$

$$\alpha_e = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 8rad/s$$

Cuando  $t = 1s$  se tendrá que  $\omega_e = 4rad/s$

Los signos de  $\omega_e$  y  $\alpha_e$  indican que cuando  $t = 1s$ , sus orientaciones coinciden con el valor positivo de  $\varphi$

Determinamos la distancia CM

$$CM = (BM)\text{sen}45^\circ = 0,6 \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,424m$$

La velocidad y aceleración de transporte del punto M lo determinamos como velocidad y aceleración del movimiento rotacional.

$$V_e = (CM)\omega_e = 0,424 \cdot 4 = 1,696m/s$$

$$a_e^n = (CM)\omega_e^2 = 0,424 \cdot 4^2 = 6,784m/s^2$$

$$a_e^\tau = (CM)\alpha_e = 0,424 \cdot 8 = 3,392m/s^2$$

La orientación de los vectores  $\vec{a}_e^n$  y  $\vec{a}_e^\tau$  se muestra en la figura 1.27

La orientación de la aceleración de Coriolis  $\vec{a}_c = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$  se determina por el producto vectorial o por el Principio de Zhukovski.

El módulo del vector  $\vec{a}_c$  es:

$$a_c = 2\omega_e V_r \text{sen}45^\circ = 2 \cdot 4 \cdot 1,4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 7,92m/s^2$$

Los vectores  $\vec{V}_r$  y  $\vec{V}_e$  son mutuamente perpendiculares, por ello, se tendrá que la velocidad absoluta es:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2} = \sqrt{1,696^2 + 1,4^2} = 2,2m/s$$

Para la determinación del módulo del vector  $\vec{a}_a$  se proyectan en los ejes del sistema de coordenadas.

$$a_{ax_1} = a_e^t + a_c = 3,392 + 7,92 = 11,312 \text{m/s}^2$$

$$a_{ay_1} = a_r \text{sen}45^\circ - a_e^n = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} - 6,784 = -5,37 \text{m/s}^2$$

$$a_{az_1} = a_r \text{sen}45^\circ = 2 \frac{\sqrt{2}}{2} = 1,414 \text{m/s}^2$$

Determinamos la aceleración absoluta del punto M

$$a_a = \sqrt{(a_{ax_1})^2 + (a_{ay_1})^2 + (a_{az_1})^2} = \sqrt{11,312^2 + (-5,37)^2 + 1,414^2} = 12,60 \text{m/s}^2$$

## CAPÍTULO 2 DINÁMICA

### 2.1 DINÁMICA DEL PUNTO

**PROBLEMA 2.1** Un punto material de masa  $m$  se mueve en un plano por la ley

$$x = a \cos \beta t$$

$$y = b \sin \beta t$$

Determinar la fuerza que actúa en dicho punto.

**Solución:**

Si despejamos de la ecuación el tiempo  $t$ , obtenemos la ecuación de la trayectoria

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Esta es la ecuación de una elipse con polos  $a$  y  $b$ .

Las proyecciones en los ejes coordenados de la fuerza  $F$ , que actúa en el punto son:

$$F_x = m \frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$F_y = m \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Calculamos la segunda derivada de las ecuaciones:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -a\beta^2 \cos \beta t$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -b\beta^2 \sin \beta t$$

De esta manera, obtenemos las componentes de la fuerza en sus ejes coordenados.

$$F_x = -ma\beta^2 \cos \beta t = -m\beta^2 x$$

$$F_y = -mb\beta^2 \sin \beta t = -m\beta^2 y$$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = m\beta^2 \sqrt{x^2 + y^2}$$

La fuerza  $\vec{F}$  estará orientada hacia el centro de la elipse, siendo su forma vectorial la siguiente:

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y = -m\beta^2 (\vec{i}x + \vec{j}y)$$

Para determinar su orientación, aplicamos los cosenos directores:

$$\cos(OX \wedge \vec{F}) = \frac{F_x}{F}$$

$$\cos(OY \wedge \vec{F}) = \frac{F_y}{F}$$

**PROBLEMA 2.2** Para trasladar un automóvil, la fuerza de tracción crece proporcionalmente al tiempo en la forma  $F = kt$ . Determinar la ecuación de movimiento del automóvil, si en el momento inicial se encontraba en reposo.

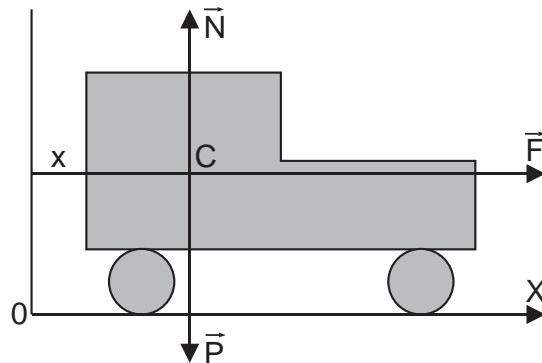


Fig. 2.1

**Solución:**

Orientamos el eje OX por el camino a trasladarse el automóvil.

Como ejes de referencia iniciales consideramos la posición inicial del automóvil, el cual será tratado como un punto material.

Las condiciones iniciales son:

$$\text{Si } t = 0 \Rightarrow x_0 = 0 \text{ y } \dot{x}_0 = 0$$

El automóvil realiza un movimiento de traslación bajo la acción de la fuerza  $\vec{F}$  y el peso  $\vec{P}$ , siendo su reacción normal  $\vec{R}$

La ecuación diferencial del movimiento del automóvil en el eje OX tiene la forma:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = kt$$

Si dividimos esta última ecuación entre m obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{k}{m}t$$

De esta manera tenemos, que la fuerza  $\vec{F}$ , actuante en el punto, solo depende del tiempo t

Consideramos que:

$$\frac{dx}{dt} = V$$

Reemplazamos esta relación en la integración de la ecuación diferencial y obtenemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{k}{m}t$$

De donde:

$$dV = \frac{k}{m}t dt$$

Integramos esta ecuación, obteniendo:

$$\int_0^v dV = \frac{k}{m_0} \int_0^t t dt$$

$$V = \frac{k}{2m} t^2$$

Luego:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{k}{2m} t^2$$

De donde:

$$dx = \frac{k}{2m} t^2 dt$$

Integramos y obtenemos:

$$\int_0^x dx = \frac{k}{2m} \int_0^t t^2 dt$$

$$x = \frac{k}{6m} t^3$$

Esta última es la ecuación de movimiento del automóvil debido a la fuerza de tracción.

**PROBLEMA 2.3** Un punto material de peso  $P$  es lanzado desde la superficie terrestre hacia arriba con una velocidad  $V_0$  y se mueve bajo la acción de la fuerza de gravedad. Determinar la velocidad del punto en función de la distancia hasta el centro de la tierra.

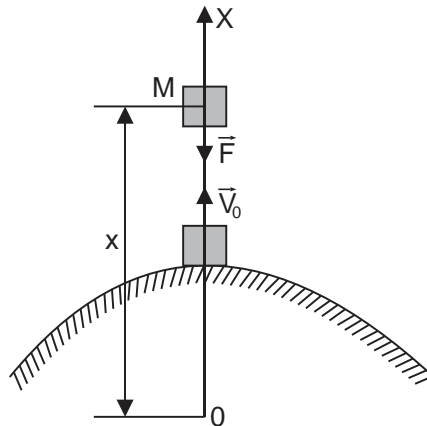


Fig. 2.2

**Solución:**

En este problema la fuerza actuante en el punto, depende de la distancia  $x$  y del radio de la tierra  $R$

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

De esta manera, la ecuación diferencial del movimiento del punto en el eje OX será:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mgR^2}{x^2}$$

Simplificamos m y obtenemos:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{x^2}$$

Consideramos que:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = V \frac{dV}{dx}$$

De esta manera se tendrá:

$$VdV = -\frac{gR^2}{x^2} dx$$

Integramos y obtenemos:

$$\int_{V_0}^V VdV = -gR^2 \int_R^x \frac{dx}{x^2}$$

$$\frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = gR^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)$$

De donde:

$$V = \sqrt{V_0^2 + 2gR^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{R} \right)}$$

## 2.2 TEOREMA DEL MOVIMIENTO DEL CENTRO DE MASA

**PROBLEMA 2.4** Determinar la presión sobre el terreno que ejerce una bomba de extracción de agua, si el peso de la máquina D y su cimiento E es  $P_1$ , el peso de la manivela OA es  $P_2$ , el peso del bastidor y del pistón es  $P_3$ . La manivela OA gira uniformemente con una velocidad angular  $\omega$

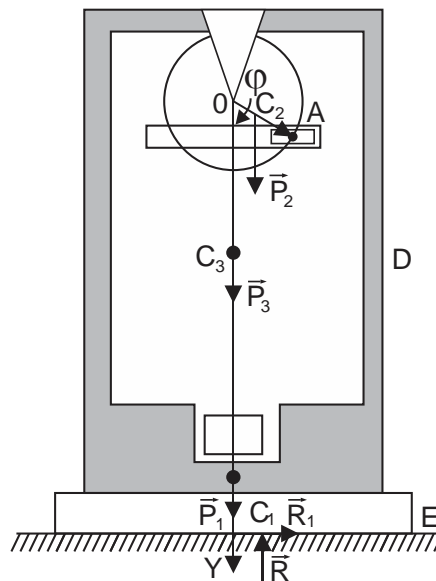


Fig. 2.3

**Solución:**

En tal sistema actúan las siguientes fuerzas externas:

$\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  - pesos de las partes de la bomba

$\bar{R}$  - reacción normal del cimiento

$\bar{R}_1$  - reacción tangencial del cimiento

Los pesos  $\bar{P}_1, \bar{P}_2, \bar{P}_3$  actúan en los centros de gravedad  $C_1, C_2, C_3$ , tal como se muestra en la figura

2.3

Orientamos el eje OY en la dirección vertical hacia abajo, siendo su inicio el punto O

El bastidor y el pistón se mueven por la ley  $y_{C_3} = a \cos \omega t$

La manivela OA realiza un movimiento giratorio, siendo su centro de masa  $C_2$ , el cual se mueve por

la ley  $y_{C_2} = \frac{a}{2} \cos \omega t$

Las coordenadas del centro de gravedad son:

$$y_{C_1} = L_1 = \text{const}$$

$$y_{C_3} = L + a \cos \omega t$$

Siendo:

L - magnitud constante

Para determinar la presión de la bomba en el terreno, planteamos las ecuaciones diferenciales del movimiento del centro de masa en el eje OY

$$M y_C = P_1 + P_2 + P_3 - R$$

Determinamos la coordenada del centro de masa:

$$y_C = \frac{m_1 L_1 + m_2 \frac{a}{2} \cos \omega t}{M} + \frac{m_3 (L + a \cos \omega t)}{M}$$

Siendo:

$$M = m_1 + m_2 + m_3$$

De donde:

$$y_C = - \frac{m_2 \frac{a \omega^2}{2} \cos \omega t}{M} - \frac{m_3 a \omega^2 \cos \omega t}{M} = - \frac{a \omega^2 \cos \omega t (m_2 + 2m_3)}{2M}$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$R = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{m_2 + 2m_3}{2} a \omega^2 \cos \omega t = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a \omega^2 \cos \omega t$$

La máxima presión de la bomba sobre el terreno se dará cuando el punto se encuentra en la posición inferior, siendo  $\cos \omega t = 1$  y será menor cuando se encuentre en la posición superior, siendo  $\cos \omega t = -1$

$$R_{\text{máx}} = P_1 + P_2 + P_3 + \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a \omega^2$$

$$R_{\text{mín}} = P_1 + P_2 + P_3 - \frac{P_2 + 2P_3}{2g} a \omega^2$$

**PROBLEMA 2.5** En el plano inclinado FG de un prisma de cuatro lados, desciende un bloque A de peso  $P_A = 100\text{N}$ , el cual transmite el movimiento al bloque B de peso  $P_B = 60\text{N}$ . Determinar el desplazamiento del prisma DEFG de peso  $P = 200\text{N}$  por el plano liso horizontal, si el bloque A se ha desplazado en el plano inclinado una distancia de 1m. Considerar que en un inicio el sistema se encontraba en reposo.

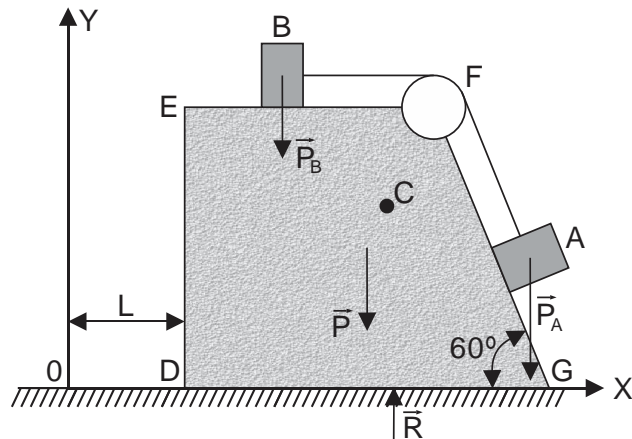


Fig. 2.4

**Solución:**

Las cargas externas actuantes en el sistema son:

$\vec{P}_A$  - peso del bloque A

$\vec{P}_B$  - peso del bloque B

$\vec{P}$  - peso del prisma

$\vec{R}$  - reacción del plano liso horizontal

Como todas las fuerzas son perpendiculares al eje OX, se tendrá  $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$

Es por ello, que  $x_C = \text{const}$  y como en un inicio el sistema se encontraba en reposo  $\dot{x}_C = 0$

La posición del centro de masa del sistema se determinará por la siguiente ecuación

$$x_{OC} = \frac{m_1 x_{O1} + m_A x_{OA} + m_B x_{OB}}{m + m_A + m_B}$$

Siendo:

$x_O, x_{OA}, x_{OB}$  - coordenadas del centro de gravedad de cada uno de los cuerpos

$m, m_A, m_B$  - sus correspondientes masas

Suponemos que si el bloque A descendió por el plano inclinado una distancia  $s = 1\text{m}$ , entonces el prisma se desplazó hacia la derecha una longitud L. De esta manera, el centro de masa del sistema C se determinará de la siguiente manera.

$$x_{IC} = \frac{(x_O + L)m + (x_{OA} + L + s \cos 60^\circ)m_A + (x_{OB} + L + s)m_B}{m + m_A + m_B}$$

Como  $x_C = \text{const}$ , se tendrá que  $x_{OC} = x_{IC}$ , entonces:

$$mL + \left(L + \frac{1}{2}s\right)m_A + (L + s)m_B = 0$$

También puede ser expresada en función de los pesos

$$PL + \left(L + \frac{1}{2}s\right)P_A + (L + s)P_B = 0$$

De donde:

$$L = -\frac{s(P_A + 2P_B)}{2(P + P_A + P_B)} = -\frac{1(100 + 2 \cdot 60)}{2(200 + 100 + 60)} = -0,306\text{m}$$

El signo (-) indica que el prisma se desplazó en la dirección opuesta a la elegida.

### 2.3 TEOREMA DE LA VARIACIÓN DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

**PROBLEMA 2.6** Para determinar el peso de un vagón de un tren, se colocó un dinamómetro. La medición media del dinamómetro en 120s fue 987,84kN. En este tiempo el vagón alcanzó una velocidad de 16m/s. Considerar que en un inicio el vagón se encontraba en reposo y que el coeficiente de resistencia al movimiento es  $k=0,02$

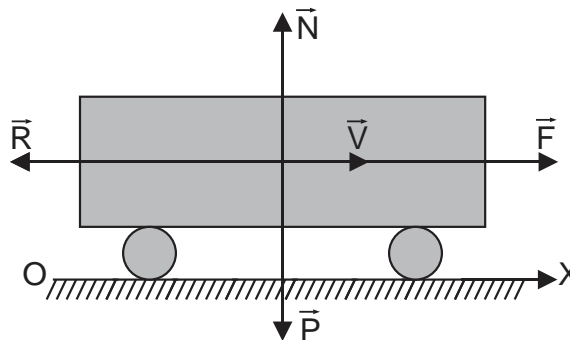


Fig. 2.5

**Solución:**

Considerar que el vagón realiza un movimiento de traslación y lo expresamos como un punto material.

En el vagón actúan las siguientes fuerzas:

$\vec{F}$  - fuerza de tracción del vagón

$\vec{P}$  - fuerza de gravedad

$\vec{N}$  - reacción normal

$\vec{R}$  - resistencia al movimiento

Basado en el Teorema de la variación de la cantidad de movimiento del punto material, en la proyección del eje OX se tendrá:

$$mV - mV_o = \int_0^t (F - R) dt$$

Reemplazando el peso e integrando, se tendrá:

$$\frac{P}{g}(V - V_o) = (F - R)t$$

Considerando que  $V_o = 0$  y  $R = kP$ , obtenemos el peso del vagón

$$P = \frac{Ftg}{V + kgt} = \frac{987,84 \cdot 120 \cdot 9,81}{16 + 0,02 \cdot 9,81 \cdot 120} = 29407,38 \text{ kN}$$

**PROBLEMA 2.7** Sobre una plataforma horizontal de peso  $\bar{P}_1$  se coloca un plano inclinado que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. Por este plano inclinado se levanta una carga de peso  $\bar{P}_2$ , de tal manera que la distancia varía por la ley  $s = \frac{1}{2}at^2$ . Considerar que en un inicio el sistema se encontraba en reposo. Determinar la velocidad con la que se mueve la plataforma, despreciando la resistencia al movimiento de la misma.

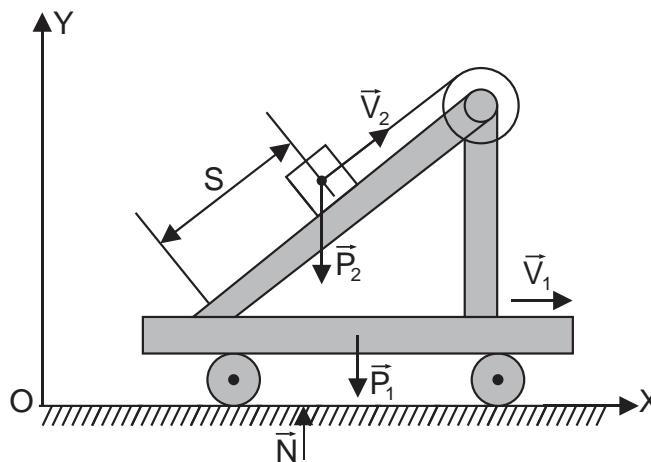


Fig. 2.6

**Solución:**

Tal sistema está compuesto por dos cuerpos: la plataforma y la carga, siendo las fuerzas externas que actúan sobre el sistema las siguientes:

$\bar{P}_1$  - peso de la plataforma

$\bar{P}_2$  - peso de la carga

$\bar{N}$  - reacción normal del plano de apoyo

Como todas las fuerzas son verticales, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$$

Si consideramos que en un inicio el sistema se encontraba en reposo, entonces la proyección de la cantidad de movimiento en el eje OX será cero.

$$\frac{P_1}{g} V_{1x} + \frac{P_2}{g} V_{2x} = 0$$

Siendo:

$\bar{V}_1$  - velocidad de la plataforma

$\bar{V}_2$  - velocidad absoluta de la carga

La carga realiza un movimiento compuesto y su velocidad absoluta es:

$$\vec{V}_2 = \vec{V}_1 + \vec{V}_{2t}$$

Es por ello, que:

$$V_{2X} = V_1 + V_{2t} \cos \alpha$$

Siendo:

$V_{2t}$  - velocidad relativa de la carga

Por condición del problema es conocida la ley de movimiento de la carga respecto a la plataforma, por ello se tendrá:

$$V_{2t} = \frac{ds}{dt} = at$$

$$V_{1X} = V_1$$

En consecuencia:

$$V_{2X} = V_1 + at \cos \alpha$$

De esta manera, obtenemos:

$$\frac{P_1}{g} V_1 + \frac{P_2}{g} (V_1 + at \cos \alpha) = 0$$

De donde:

$$V_1 = -\frac{P_2 at \cos \alpha}{P_1 + P_2}$$

El signo (-) indica que la plataforma se mueve en sentido opuesto al considerado.

**PROBLEMA 2.8** Determinar el módulo y dirección del vector principal de la cantidad de movimiento de un elipsógrafo, si el peso de la manivela es  $P_1$ , el peso de la regla AB del elipsógrafo es  $2P_1$  y el peso de las correderas A y B es  $P_2$ . Considerar que  $OC=AC=CB=L$  y que los centros de masa de la manivela y regla están en su mitad. La manivela gira con una velocidad angular  $\omega$

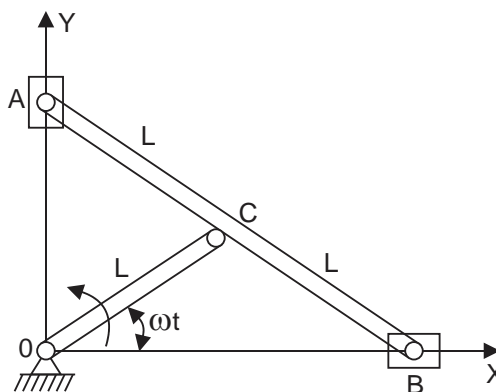


Fig. 2.7

**Solución:**

El vector de la cantidad de movimiento del sistema se puede determinar por la fórmula:

$$\vec{K} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i$$

Siendo:

$m_i$  - masa de cada parte del sistema

$\vec{V}_i$  - velocidad de los centros de masa de cada parte del sistema

Esta igualdad vectorial es equivalente a dos igualdades escalares.

$$K_x = \sum_{i=1}^n m_i \dot{X}_i$$

$$K_y = \sum_{i=1}^n m_i \dot{Y}_i$$

En este problema, las partes del sistema son la manivela OC, la regla AB y las correderas A y B

De esta manera, las coordenadas de los centros de masas de estos elementos son:

$X_1 = \frac{L}{2} \cos \omega t$	$Y_1 = \frac{L}{2} \operatorname{sen} \omega t$
$X_2 = L \cos \omega t$	$Y_2 = L \operatorname{sen} \omega t$
$X_3 = 0$	$Y_3 = 2L \operatorname{sen} \omega t$
$X_4 = 2L \cos \omega t$	$Y_4 = 0$

Las proyecciones de la cantidad de movimiento  $\vec{K}$  en los ejes coordenados son:

$$K_x = -\frac{\omega L}{2g} (5P_1 + 4P_2) \operatorname{sen} \omega t$$

$$K_y = \frac{\omega L}{2g} (5P_1 + 4P_2) \cos \omega t$$

El módulo del vector de la cantidad de movimiento  $\vec{K}$  es:

$$K = \sqrt{K_x^2 + K_y^2} = \frac{\omega L}{2g} (5P_1 + 4P_2)$$

La dirección del vector  $\vec{K}$  lo determinamos a través del ángulo  $\alpha$  que forma con el eje OX

$$\cos \alpha = \cos(\vec{K} \wedge \text{OX}) = \frac{K_x}{K} = -\operatorname{sen} \omega t = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \omega t\right)$$

De esta manera, concluimos que el vector  $\vec{K}$  es perpendicular a la manivela OC

## 2.4 TEOREMA DE LA VARIACIÓN DEL MOMENTO DE LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO

**PROBLEMA 2.9** Un elipsógrafo está formado por dos correderas A y B de peso P cada una, una manivela OC de peso P y una regla AB de peso 2P. La manivela OC gira alrededor del eje OZ con una velocidad angular  $\omega$ . Determinar el momento de la cantidad de movimiento de este sistema, considerando que la regla AB y la manivela OC son barras delgadas homogéneas, y que las correderas A y B son puntos materiales. Considerar  $OC=AC=CB=L$

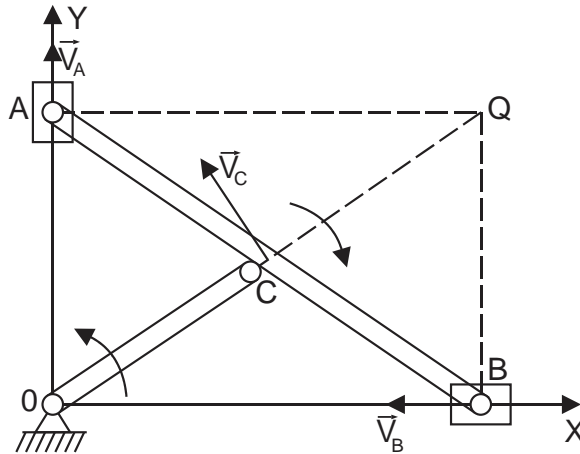


Fig. 2.8

**Solución:**

Tal mecanismo está formado por cuatro elementos: manivela OC, regla AB, correderas A y B. Es por ello, que el momento de cantidad de movimiento de este sistema respecto al eje OZ es:

$$L_Z = L_Z^{OC} + L_Z^{AB} + L_Z^A + L_Z^B$$

El momento cinemático de la manivela lo determinamos por la fórmula:

$$L_Z^{OC} = I_Z^{OC} \omega$$

Siendo:

$I_Z^{OC}$  - momento de inercia de la manivela respecto al eje OZ

Sabemos que:

$$I_Z^{OC} = \frac{PL^2}{3g}$$

En consecuencia:

$$L_Z^{OC} = \frac{PL^2}{3g} \omega$$

Como las correderas A y B se orientan por los ejes OY y OX respectivamente, intersecando el eje OZ, se tendrá:

$$L_Z^A = L_Z^B = 0$$

El movimiento de la regla AB es planoparalelo y su momento cinemático respecto al eje OZ se puede determinar por la fórmula:

$$L_Z^{AB} = M_Z(M_1 \vec{V}_C) + I_C^{AB} \omega_1$$

Dónde:

$M$  - masa de la barra AB

$\vec{V}_C$  - velocidad del centro de masa C

$I_C^{AB}$  - momento de inercia de la barra AB respecto del eje que pasa por su centro de masa C y perpendicular al plano XOY

$\omega_1$  - velocidad angular de giro de la barra AB

$$I_C^{AB} = \frac{(2P)(AB)^2}{12g} = \frac{(2P) \cdot 4L^2}{12g} = \frac{2PL^2}{3g}$$

$$V_C = L\omega$$

$$M_Z(M_1 \vec{V}_C) = M_1 L^2 \omega = \frac{2P}{g} \omega L^2$$

La barra AB gira en sentido horario alrededor del centro de masa.

El módulo de la velocidad angular  $\omega_1$  lo determinamos a través del centro instantáneo de velocidades.

$$\omega_1 = \frac{V_C}{QC} = \frac{V_C}{OC} = \omega$$

En consecuencia:

$$L_Z^{AB} = \frac{2PL^2\omega}{g} - \frac{2PL^2\omega}{3g} = \frac{4PL^2\omega}{3g}$$

De esta manera:

$$L_Z = \frac{PL^2\omega}{3g} + \frac{4PL^2\omega}{3g} = \frac{5PL^2\omega}{3g}$$

**PROBLEMA 2.10** Un equipo experimental C para determinar los momentos de inercia se fija en un vástago AB, en la cual se une un cilindro de radio R. Sobre el cilindro se une un cable, en cuyo extremo se carga con un peso P. Despreciando la fricción y resistencia del aire, determinar el momento de inercia del equipo, si la carga ha descendido sin velocidad inicial una distancia h en un tiempo t. Considerar que el centro de gravedad del equipo se encuentra en el eje del vástago y el momento de inercia de la barra con el cilindro respecto al eje Z es  $I_0$

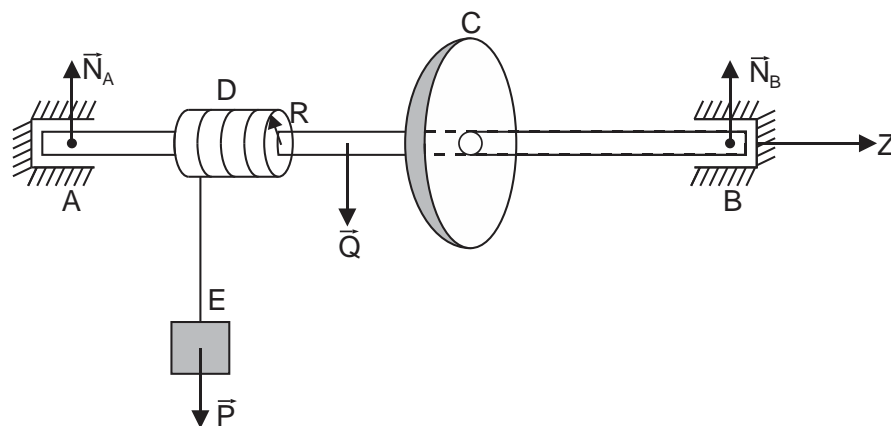


Fig. 2.9

**Solución:**

Analizamos el sistema formado por el equipo experimental C, cilindro D con la barra y carga E. Aplicamos el teorema de variación del momento de la cantidad de movimiento respecto al eje Z

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z^e$$

El momento de la cantidad de movimiento es igual a la suma de los momentos cinemáticos del equipo C, la barra con el cilindro D y la carga E

$$L_Z = L_Z^c + L_Z^D + L_Z^E$$

Por cuanto  $L_Z^C = I_Z^C \omega$  se tendrá:

$$L_Z^D = I_0 \omega$$

$$L_Z^E = mVR$$

Siendo:

$I_Z^C$  - momento de inercia del equipo

$V = \omega R$  - velocidad de la carga E

De esta manera:

$$L_Z = (I_Z^C + I_0 + mR^2) \frac{V}{R}$$

Las fuerzas externas que actúan sobre el sistema son:

$\vec{P}$  - peso de la carga E

$\vec{Q}$  - peso del equipo C, barra y cilindro D

$\vec{N}_A, \vec{N}_B$  - reacciones en los apoyos A y B

Además:

$$M_Z(\vec{N}_A) = M_Z(\vec{N}_B) = M_Z(\vec{Q}) = 0$$

En consecuencia:

$$M_Z^e = PR$$

Reemplazamos dichos valores y obtenemos:

$$(I_Z^C + I_0 + mR^2) \frac{a}{R} = mgR$$

De dónde:

$$a = \frac{mgR^2}{I_Z^C + I_0 + mR^2} = \text{const}$$

Integramos dos veces esta expresión y considerando las condiciones iniciales, tenemos:

$$h = \frac{mgR^2 t^2}{2(I_Z^C + I_0 + mR^2)}$$

De dónde:

$$I_Z^C = \frac{mgR^2 t^2}{2h} - I_0 - mR^2$$

**PROBLEMA 2.11** Por la cuerda MN de un disco de radio r, el cual gira alrededor del eje fijo vertical, se mueve una carga con una velocidad u. Cuando la carga se encuentra en el punto M, la velocidad angular del disco es  $\omega_1$  y la velocidad relativa de la carga es cero. Determinar la velocidad angular



El momento de la cantidad de movimiento del sistema en la posición media de la carga es igual a la suma de los momentos de cantidad de movimiento del disco y la carga respecto al eje Z

$$L_{2Z} = L_{2Z}^d + L_{2Z}^c$$

Siendo:

$$L_{2Z}^d = \frac{Pr^2 \omega_2}{2g}$$

$$L_{2Z}^c = m_2 V_a^c \frac{r}{2}$$

Dónde:

$V_a^c$  - velocidad absoluta de la carga

$m_2$  - masa de la carga

Como la carga realiza un movimiento compuesto, se tendrá:

$$V_a^c = \frac{r}{2} \omega_2 + u$$

De esta manera:

$$L_{2Z} = \frac{Pr^2 \omega_2}{2g} + \frac{Pr}{8g} \left( \frac{r}{2} \omega_2 + u \right) = \frac{9Pr^2 \omega_2}{16g} + \frac{Pr u}{8g}$$

Como  $L_{1Z} = L_{2Z}$ , se tendrá:

$$\frac{3Pr^2 \omega_1}{4g} = \frac{9Pr^2 \omega_2}{16g} + \frac{Pr u}{8g}$$

De dónde:

$$\omega_2 = \frac{4}{3} \omega_1 - \frac{2u}{9r}$$

## 2.5 TEOREMA DE LA VARIACIÓN DE LA ENERGÍA CINÉTICA

**PROBLEMA 2.12** Una carga se sostiene de un cable de longitud L y se lo deja caer sin velocidad inicial desde la posición  $M_0$ , es decir, cuando forma un ángulo  $\varphi_0$  con la vertical. Determinar la velocidad de la carga en el momento cuando el cable forma un ángulo  $\varphi$  con la vertical.

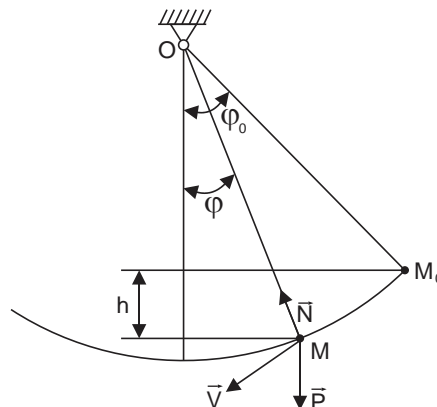


Fig. 2.11

**Solución:**

Aplicamos el Teorema de variación de la energía cinética del punto material.

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = W$$

Sobre la carga actúan las fuerzas:

$\bar{P}$  - peso de la carga

$\bar{N}$  - reacción del cable

El trabajo de la fuerza de la gravedad es:

$$W = Ph$$

Siendo:

$$h = L \cos \varphi - L \cos \varphi_0 = L(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

Como  $V_0 = 0$  se tendrá:

$$\frac{mV^2}{2} = PL(\cos \varphi - \cos \varphi_0)$$

De dónde:

$$V = \sqrt{2gL(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}$$

**PROBLEMA 2.13** Determinar la velocidad inicial, orientada verticalmente hacia arriba, que hace falta aplicar a un cuerpo, para que se levante una altura  $H$  respecto a la superficie terrestre. Considerar que la fuerza de gravedad es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia respecto al centro de la tierra.

$$F = \frac{mgR^2}{x^2}$$

Despreciar la resistencia del aire.

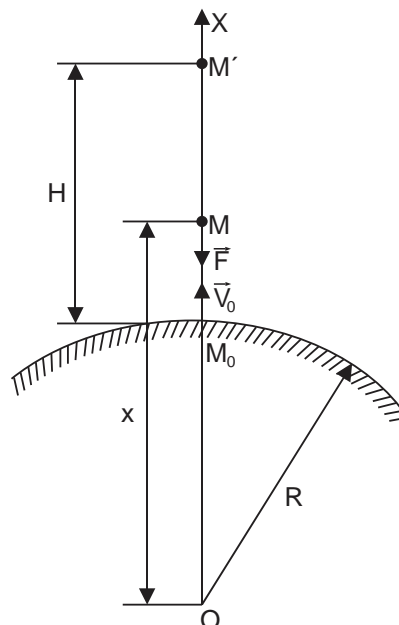


Fig. 2.12

**Solución:**

Consideramos el cuerpo M como un punto material, sobre la cual actúa la fuerza de la gravedad. La proyección de la fuerza  $\vec{F}$  en el eje OX es:

$$F_x = \frac{mgR^2}{x^2}$$

Determinamos el trabajo de esta fuerza durante el desplazamiento del punto M desde  $M_0$  hasta  $M_1$

$$W_{M_0M_1} = \int_R^{R+H} \left( -\frac{mgR^2}{x^2} \right) dx = -mgR^2 \int_R^{R+H} \frac{dx}{x^2} = mgR^2 \left( \frac{1}{R+H} - \frac{1}{R} \right) = -\frac{mgR^2H}{R(R+H)} = -\frac{mgRH}{R+H}$$

Como en el punto más alto, su velocidad es cero, entonces, por el Teorema de variación de la energía cinética obtenemos:

$$-\frac{mV_0^2}{2} = -\frac{mgRH}{R+H}$$

De donde:

$$V_0 = \sqrt{\frac{2gRH}{R+H}}$$

**2.6 MOVIMIENTO ROTACIONAL DE UN CUERPO SÓLIDO RESPECTO A UN EJE FIJO**

**PROBLEMA 2.14** Un cuerpo sólido que se encontraba en reposo, empieza a girar alrededor de un eje fijo con momento constante M, surgiendo un momento de la fuerza de resistencia  $M_1$ , el cual es directamente proporcional al cuadrado de la velocidad angular de giro del cuerpo sólido  $M_1 = \alpha\omega^2$ . Determinar la ley de variación de la velocidad angular del cuerpo, si su momento de inercia respecto al eje de giro es  $I_z$

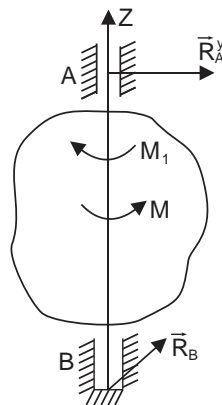


Fig. 2.13

**Solución:**

Escribimos la ecuación diferencial de movimiento rotacional de un cuerpo sólido alrededor del eje fijo.

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^e$$

Siendo:

$I_z$  - momento de inercia del cuerpo alrededor del eje Z

$M_Z^e$  - momento principal de las fuerzas externas, que actúan en el cuerpo respecto al eje Z

$\omega$  - velocidad angular

De acuerdo a las condiciones del problema:

$$I_Z = I$$

$$M_Z^e = M - M_1 = M - \alpha\omega^2$$

Reemplazamos y obtenemos:

$$I \frac{d\omega}{dt} = M - \alpha\omega^2$$

Esta es una ecuación diferencial de primer orden con miembros separados.

De dónde:

$$\frac{d\omega}{M - \alpha\omega^2} = \frac{dt}{I}$$

Integramos considerando las condiciones iniciales, determinando la ley de variación de la velocidad angular.

$$\omega = \sqrt{\frac{M}{\alpha}} \cdot \frac{e^{kt} - 1}{e^{kt} + 1}$$

Dónde:

$$k = \frac{2}{I} \sqrt{\alpha M_1}$$

**PROBLEMA 2.15** Un disco circular homogéneo de radio  $r$ , realiza una vibración alrededor de un eje horizontal fijo, perpendicular al plano del disco y que pasa por el punto O, siendo la distancia del eje del punto O hasta el centro de gravedad C del disco igual a  $r/2$ . Determinar la ley de movimiento del disco para vibraciones pequeñas, así como su período de esta vibración. En el momento inicial el ángulo  $\varphi$  de desviación del disco respecto a su posición de equilibrio es igual a  $\varphi_0$  y su velocidad angular inicial es cero. Considerar que el peso del disco es P y la distancia  $OC=a=r/2$

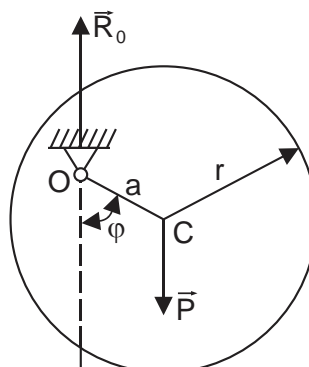


Fig. 2.14

**Solución:**

La ecuación diferencial del giro de un péndulo tiene la forma:

$$I_0 \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -aP \text{sen}\varphi$$

Dónde:

$I_0$  - momento de inercia del disco respecto al eje que pasa por el punto O, perpendicular al plano del disco.

Para desviaciones pequeñas del disco respecto a su posición de equilibrio, se cumplirá:

$$\text{sen}\varphi \approx \varphi$$

La ecuación diferencial de pequeñas desviaciones del disco respecto a su posición de equilibrio, tendrá la forma:

$$I_0\ddot{\varphi} + aP\varphi = 0$$

También lo podemos expresar así:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = 0$$

Siendo:

$$k^2 = \frac{aP}{I_0}$$

Esta ecuación diferencial es de vibraciones armónicas, cuya solución tiene la forma:

$$\varphi = C_1\text{sen}kt + C_2\text{cos}kt$$

Como en el momento inicial  $\varphi = \varphi_0$  y  $\dot{\varphi} = 0$ , entonces  $C_1 = 0$  y  $C_2 = \varphi_0$

En consecuencia:

$$\varphi = \varphi_0\text{cos}kt$$

Esta ecuación expresa la ley de movimiento de un péndulo debido a pequeñas vibraciones. El período de estas vibraciones es:

$$T = \frac{2\pi}{k} = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{aP}}$$

Por condición del problema  $a=r/2$ , el momento de inercia  $I_0$  lo determinamos por el Teorema de momentos de inercia de ejes paralelos.

$$I_0 = I_C + M(OC)^2 = \frac{Mr^2}{2} + M\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{3Mr^2}{4} = \frac{3Pr^2}{4g}$$

Es por ello, que:

$$k = \sqrt{\frac{2g}{3r}}$$

$$\varphi = \varphi_0\text{cos}\left(\sqrt{\frac{2g}{3r}}.t\right)$$

El período del disco:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{3r}{2g}}$$

## 2.7 MOVIMIENTO PLANOPARALELO DEL CUERPO SÓLIDO

**PROBLEMA 2.16** Una llanta de un automóvil sube por una pendiente que forma un ángulo  $\alpha$  con la horizontal. En la llanta de peso  $P$ , actúa un momento giratorio  $M$  y una fuerza  $\vec{F}$ . En un inicio la llanta se encontraba en reposo. Despreciar la resistencia al movimiento de la llanta. Determinar la ley de movimiento del centro de masa y su aceleración.

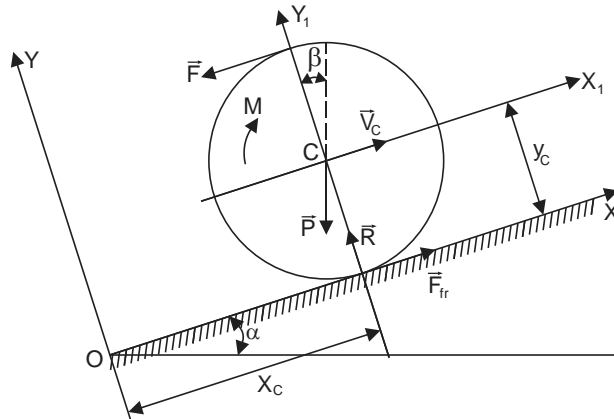


Fig. 2.15

### Solución:

Durante el movimiento de la llanta, sobre ella actúan el momento giratorio  $M$ , el peso  $\vec{P}$ , la fuerza de fricción  $\vec{F}_{fr}$  y la fuerza de resistencia  $\vec{F}$

Se considera positivo el ángulo de giro en sentido horario.

La dirección positiva del eje  $OX$  concuerda con la dirección del movimiento del centro de la llanta  $C$ .

El sistema de coordenadas  $X_1CY_1$  se mueve en forma de traslación con el centro de masa.

Planteamos la ecuación diferencial del movimiento planoparalelo de movimiento de la llanta.

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F_{fr} - P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \beta$$

$$\frac{P}{g} \frac{d^2 y_C}{dt^2} = F \operatorname{sen} \beta - P \cos \alpha + R$$

$$I_C \frac{d^2 \phi}{dt^2} = M - Fr - F_{fr} r$$

Siendo:

$$I_C = \frac{Pr^2}{2g}$$

$$y_C = r$$

$$\frac{d^2 y_C}{dt^2} = 0$$

Reemplazando obtenemos:

$$R = P \cos \alpha - F \operatorname{sen} \beta$$

Aplicando la condición de movimiento de la llanta sin deslizamiento

$$\dot{x}_C = r\dot{\phi}$$

Además:

$$\frac{P}{g} r \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = F_{fr} - P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \beta$$

Si dividimos esta ecuación entre la tercera de la parte inicial del problema, tenemos:

$$\frac{F_{fr} - P \operatorname{sen} \alpha - F \cos \beta}{M - Fr - F_{fr} r} = \frac{2}{r}$$

De dónde:

$$F_{fr} = \frac{1}{3} \left( \frac{2M}{r} + P \operatorname{sen} \alpha + F \cos \beta - 2F \right)$$

Reemplazamos en la primera ecuación del inicio del problema, obteniendo:

$$\frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{2g}{3P} \left( \frac{M}{r} - P \operatorname{sen} \alpha - F(1 + \cos \beta) \right)$$

Integramos la ecuación diferencial considerando las condiciones iniciales y obtenemos la ley de movimiento del centro de masa.

$$x_C = \frac{g}{3P} \left( \frac{M}{r} - P \operatorname{sen} \alpha - F(1 + \cos \beta) \right) t^2$$

De esta manera, deducimos que el centro de masa se moverá con aceleración constante.

$$a_C = \frac{2g}{3P} \left( \frac{M}{r} - P \operatorname{sen} \alpha - F(1 + \cos \beta) \right)$$

**PROBLEMA 2.17** Un cilindro homogéneo circular de peso  $P$ , ha sido enrollado en su parte media por un cable delgado, cuyo extremo está unido a un apoyo fijo. El cilindro cae sin velocidad inicial, desenrollándose el cable. Determinar la velocidad del eje del cilindro, después de haber alcanzado una altura de caída  $h$ , su aceleración y fuerza tensional  $T$  del cable.

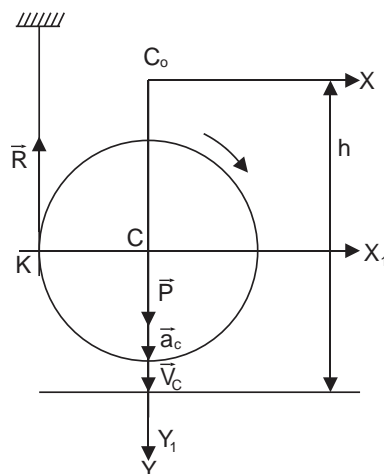


Fig. 2.16

**Solución:**

En el cilindro actúan el peso  $\vec{P}$  del cilindro y la reacción  $\vec{R}$  del cable. Bajo la acción de estas fuerzas, el cilindro realiza un movimiento planoparalelo. Para resolver este problema, planteamos las ecuaciones diferenciales del movimiento planoparalelo.

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = 0$$

$$m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = P - R$$

$$\frac{Pr^2}{2g} \cdot \frac{d^2 \phi}{dt^2} = Rr$$

El movimiento planoparalelo del cilindro se puede analizar como rotacional alrededor del eje, que pasa por el centro instantáneo de velocidades K.

La velocidad angular del cilindro será:

$$\omega = \frac{V_C}{r}$$

Dónde:

$V_C$  - velocidad del eje del cilindro

La aceleración angular es:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{r} \frac{dV_C}{dt} = \frac{a_C}{r}$$

Si reemplazamos esta relación en la tercera ecuación del inicio de esta página, obtenemos:

$$\frac{Pr^2}{2g} \cdot \frac{a_C}{r} = Rr$$

$$\frac{Pa_C}{2g} = R$$

Considerando que  $\frac{d^2 y_C}{dt^2} = a_C$ , reemplazamos en la segunda ecuación del inicio de esta página y obtenemos:

$$\frac{P}{g} a_C = P - R$$

Si resolvemos estas dos últimas ecuaciones, obtenemos:

$$R = \frac{1}{3} P$$

$$a_C = \frac{2}{3} g$$

De esta manera, la tensión del cable es:

$$T = R = \frac{1}{3} P$$

Sabemos que:

$$a_C = \frac{dV_C}{dt}$$

$$V_c = \frac{dy_c}{dt}$$

Es por ello, que:

$$\frac{dV_c}{dt} = \frac{2}{3}g$$
$$V_c = \frac{2}{3}gt + C_1$$

La coordenada  $y_c$  lo determinamos por la ecuación diferencial.

$$\frac{dy_c}{dt} = \frac{2}{3}gt + C_1$$

Integramos y obtenemos:

$$y_c = \frac{gt^2}{3} + C_1t + C_2$$

Para determinar las constantes de integración  $C_1$  y  $C_2$ , aplicamos las condiciones iniciales.

Si  $t = 0$ , entonces  $y_c = 0$ ,  $\dot{y}_c = 0$

Reemplazamos estas condiciones en las fórmulas anteriores y obtenemos:

$$C_1 = C_2 = 0$$

$$y_c = \frac{gt^2}{3}$$

$$\dot{y}_c = \frac{2}{3}gt$$

Entonces, si  $y_c = h$ , se tendrá que  $t = \sqrt{\frac{3h}{g}}$

Es por ello, que la velocidad del eje del cilindro, después que descendió una altura  $h$  será:

$$V_c = \frac{2}{3}g\sqrt{\frac{3h}{g}} = \frac{2}{3}\sqrt{3gh}$$

## CAPÍTULO 3

### DINÁMICA APLICADA A LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL

#### 3.1 MOMENTOS DE INERCIA DE MASA

**PROBLEMA 3.1** Para la barra esbelta mostrada en la figura 3.1, determinar los momentos de inercia de masa  $I_Y$  e  $I_{Y'}$ .

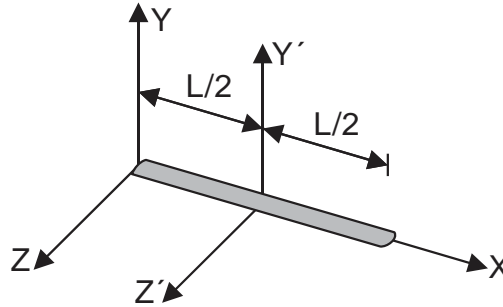


Fig. 3.1

**Solución:**

Determinamos el momento de inercia de masa respecto al eje Y

$$I_Y = \int_m x^2 dm = \frac{m}{L} \int_0^L x^2 dx = \frac{mL^2}{3}$$

Siendo:

$$dm = \frac{m}{L} dx$$

Ahora, determinamos el momento de inercia de masa respecto al eje Y'

$$I_{Y'} = I_Y - m \left( \frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{3} - \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{12}$$

**PROBLEMA 3.2** Para la lámina rectangular delgada mostrada en la figura 3.2, determinar los momentos de inercia de masa respecto a los ejes XYZ y X'Y'Z'.

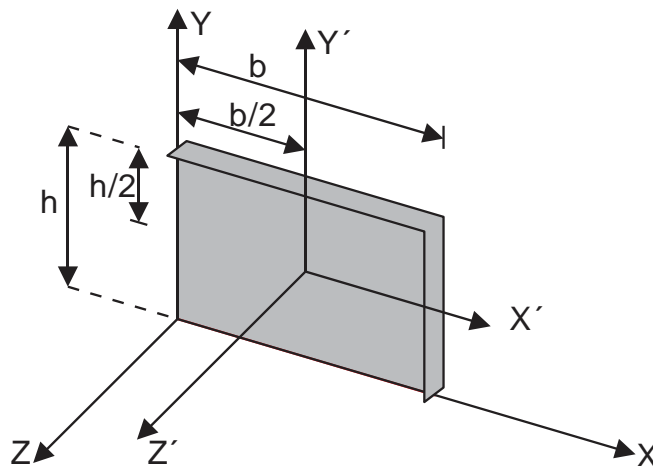


Fig. 3.2

**Solución:**

Determinamos el momento de inercia respecto al eje X, para ello, elegimos un sector paralelo al eje X de longitud "b" y ancho dy.

La masa del sector será:

$$dm = \gamma b dy$$

Siendo:

$$\gamma = \frac{m}{bh}$$

De esta manera, tenemos:

$$I_X = \int y^2 dm = \frac{m}{h} \int_0^h y^2 dy = \frac{mh^2}{3}$$

En forma análoga se obtiene el momento de inercia de masa respecto al eje Y

$$I_Y = \frac{mb^2}{3}$$

Ahora, determinamos el momento de inercia de masa respecto al eje Z

$$I_Z = I_X + I_Y = \frac{mh^2}{3} + \frac{mb^2}{3} = \frac{m(b^2 + h^2)}{3}$$

Finalmente, determinamos los momentos de inercia de masa respecto a los ejes paralelos X'Y'Z', que pasan por el centro de masa de la lámina.

$$I_{X'} = I_X - m\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{mh^2}{3} - \frac{mh^2}{4} = \frac{mh^2}{12}$$

$$I_{Y'} = I_Y - m\left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{mb^2}{3} - \frac{mb^2}{4} = \frac{mb^2}{12}$$

$$I_{Z'} = I_{X'} + I_{Y'} = \frac{mh^2}{12} + \frac{mb^2}{12} = \frac{m(b^2 + h^2)}{12}$$

**PROBLEMA 3.3** Para la lámina rectangular delgada mostrada en la figura 3.3, se pide determinar el momento de inercia de masa respecto a su diagonal.

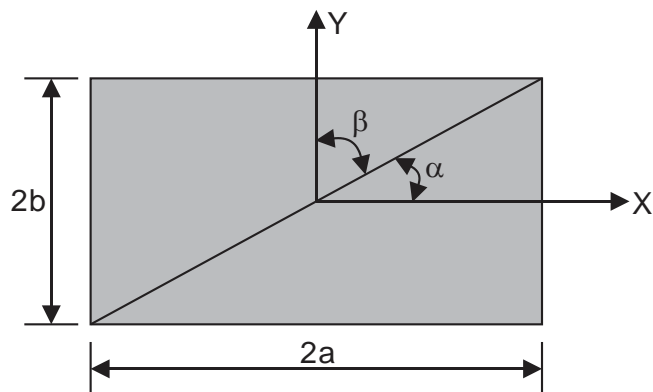


Fig. 3.3

**Solución:**

Los ejes XYZ son ejes de inercia centrales y principales, debido a que el cuerpo es simétrico respecto a estos ejes.

Del gráfico tenemos:

$$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\cos \gamma = \cos 90^\circ = 0$$

Siendo  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  los ángulos que forman con los ejes X, Y, Z, respectivamente.

De acuerdo a los resultados obtenidos en el problema anterior, tenemos:

$$I_X = \frac{mb^2}{3}$$

$$I_Y = \frac{ma^2}{3}$$

$$I_Z = \frac{m(a^2 + b^2)}{3}$$

Aplicamos la fórmula de momento de inercia de masa respecto a cualquier eje y obtenemos para el caso específico de la diagonal su momento de inercia  $I_D$

$$I_D = I_X \cos^2 \alpha + I_Y \cos^2 \beta + I_Z \cos^2 \gamma$$

$$I_D = \frac{mb^2}{3} \left( \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \frac{ma^2}{3} \left( \frac{b^2}{a^2 + b^2} \right) = \frac{2ma^2b^2}{3(a^2 + b^2)}$$

**PROBLEMA 3.4** Para la lámina triangular delgada mostrada en la figura 3.4, se pide determinar los momentos de inercia de masa  $I_X$ ,  $I_{X'}$ ,  $I_Y$ ,  $I_{Y'}$  e  $I_{Z'}$ .

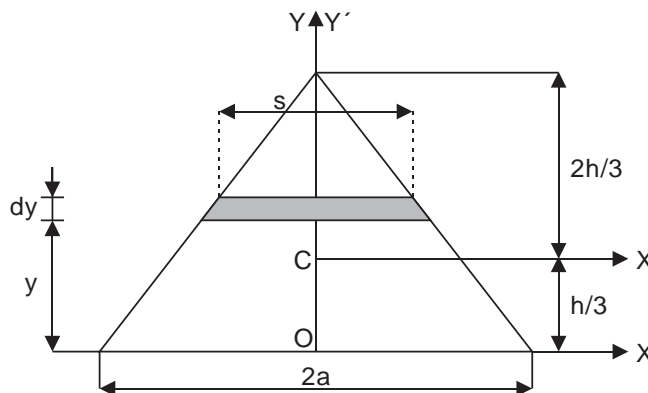


Fig. 3.4

**Solución:**

Determinamos el momento de inercia de la lámina respecto al eje OX y en calidad de área elemental elegimos la zona sombreada paralela al eje OX, cuya longitud es "s" y ancho dy.

La masa del área elemental es:

$$dm = \gamma s dy$$

Siendo:

$$\gamma = \frac{m}{ah}$$

De la relación de triángulos obtenemos:

$$\frac{s}{2a} = \frac{h-y}{h}$$

De donde:

$$s = \frac{2a}{h}(h-y)$$

Considerando que todos los puntos del área elemental se encuentran a la misma distancia del eje OX, obtendremos:

$$I_X = \int_m y^2 dm = \frac{2m}{h^2} \int_0^h y^2 (h-y) dy = \frac{mh^2}{6}$$

Utilizando el teorema de ejes paralelos obtenemos:

$$I_{X'} = \frac{mh^2}{6} - \frac{mh^2}{9} = \frac{mh^2}{18}$$

Para determinar el momento de inercia de la lámina triangular respecto al eje OY, consideramos como sector elemental una barra esbelta de longitud "s"

$$I_Y = I_{Y'} = \frac{1}{12} \int_m s^2 dm = \frac{m}{12ah} \int_0^h s^3 dy = \frac{2ma^2}{3h^4} \int_0^h (h-y)^3 dy = \frac{ma^2}{6}$$

De esta manera:

$$I_Z = I_{X'} + I_{Y'} = \frac{m}{18}(h^2 + 3a^2)$$

**PROBLEMA 3.5** Para el paralelepípedo rectangular mostrado en la figura 3.5, se pide determinar los momentos de inercia de masa  $I_X$ ,  $I_Y$  e  $I_Z$

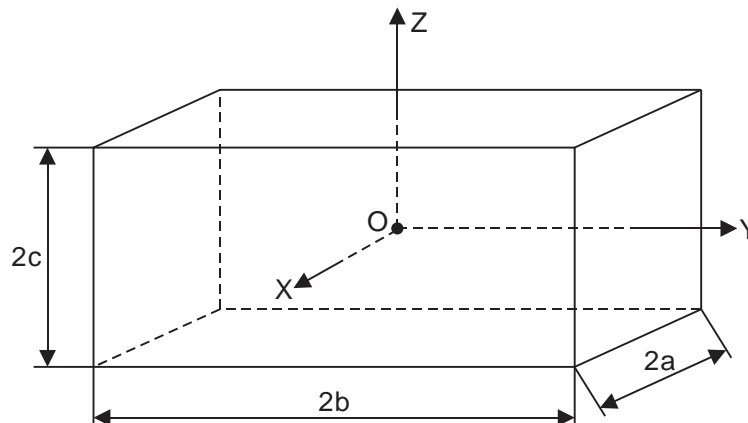


Fig. 3.5

**Solución:**

Determinamos los momentos de inercia de masa respecto a los ejes OX, OY, OZ, que pasan por el centro de masa del paralelepípedo de masa "m"

Sabemos que:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

Ahora, reemplazamos el diferencial de la masa:

$$dm = \gamma dV = \gamma dx dy dz$$

Siendo:

$$\gamma = \frac{m}{V} = \frac{m}{8abc}$$

Luego, analizamos la integral triple:

$$I_x = \iiint \gamma (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{m}{8abc} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \int_{-c}^c (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Este integral se puede expresar de la siguiente manera:

$$I_x = \frac{m}{8abc} \left[ \int_{-a}^a dx \int_{-c}^c dz \int_{-b}^b y^2 dy + \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b dy \int_{-c}^c z^2 dz \right]$$

Integrando y efectuando operaciones obtenemos:

$$I_x = \frac{m}{3} (b^2 + c^2)$$

En forma análoga obtenemos:

$$I_y = \frac{m}{3} (a^2 + c^2)$$

$$I_z = \frac{m}{3} (a^2 + b^2)$$

**3.2 VIBRACIÓN LIBRE CON UN GRADO DE LIBERTAD**

**PROBLEMA 3.6** Sobre un resorte cilíndrico con pequeño ángulo de inclinación del espiral se coloca una masa  $m = 3.10^3 \text{ kg}$ . Las dimensiones del resorte de acero son  $D = 12.10^{-2} \text{ m}$  (diámetro del resorte),  $d = 18.10^{-3} \text{ m}$  (diámetro de la sección transversal del alambre),  $n_1 = 8$  (número de espirales) y  $G = 0,8.10^{11} \text{ N/m}^2$  (módulo de elasticidad en cortante). Determinar la frecuencia de vibraciones libres de la carga, si el paso del resorte es muy pequeño comparado con la magnitud de la carga.

**Solución:**

Determinamos el coeficiente de rigidez del resorte:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3n_1} = \frac{0,8.10^{11}.18^4.10^{-12}}{8.12^3.10^{-6}.8} = 7,594.10^4 \text{ N/m}$$

De esta manera, la frecuencia de vibración libre de la carga será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{7,594 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^3}} = 5,031 \text{ s}^{-1}$$

**PROBLEMA 3.7** Determinar la frecuencia de vibración libre para la viga de sección constante sin peso mostrada en la figura 3.6

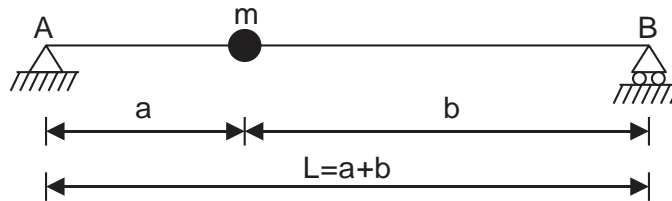


Fig. 3.6

**Solución:**

Para determinar la frecuencia de vibración libre calculamos el coeficiente de rigidez (elástico) "k" de la viga simplemente apoyada mostrada en la figura 3.6. Para ello, en el punto donde se encuentra la masa "m", aplicamos una carga unitaria  $\bar{F} = 1$  (figura 3.7, a) en la dirección del posible movimiento de la masa, esto es en el sentido vertical (figura 3.7, a) y graficamos su diagrama unitario  $\bar{M}_1$  (figura 3.7, b)

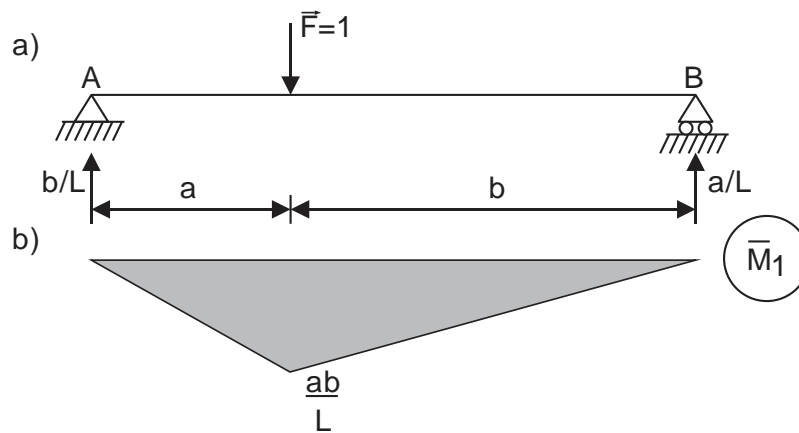


Fig. 3.7

De esta manera:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{ab}{L} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{L} + \frac{1}{2} \cdot b \cdot \frac{ab}{L} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{ab}{L} \right) = \frac{1}{EI} \cdot \frac{a^2 b^2}{3L^2} (a + b) = \frac{a^2 b^2}{3LEI}$$

De donde:

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{3LEI}{a^2 b^2}$$

Luego, la frecuencia de vibración libre será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1}{\delta_{11} m}} = \sqrt{\frac{3LEI}{a^2 b^2 m}} = \frac{1,732}{ab} \sqrt{\frac{LEI}{m}}$$

**PROBLEMA 3.8** Determinar la frecuencia de vibración libre para la estructura de rigidez constante mostrada en la figura 3.8

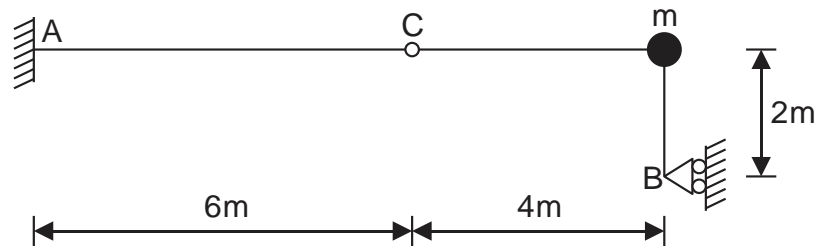


Fig. 3.8

**Solución:**

Para determinar el coeficiente de flexibilidad  $\delta_{11}$ , aplicamos en el punto donde está la masa "m" una carga unitaria  $\bar{F} = 1$  (figura 3.9, a) y graficamos su diagrama unitario  $\bar{M}_1$  (figura 3.9, b)

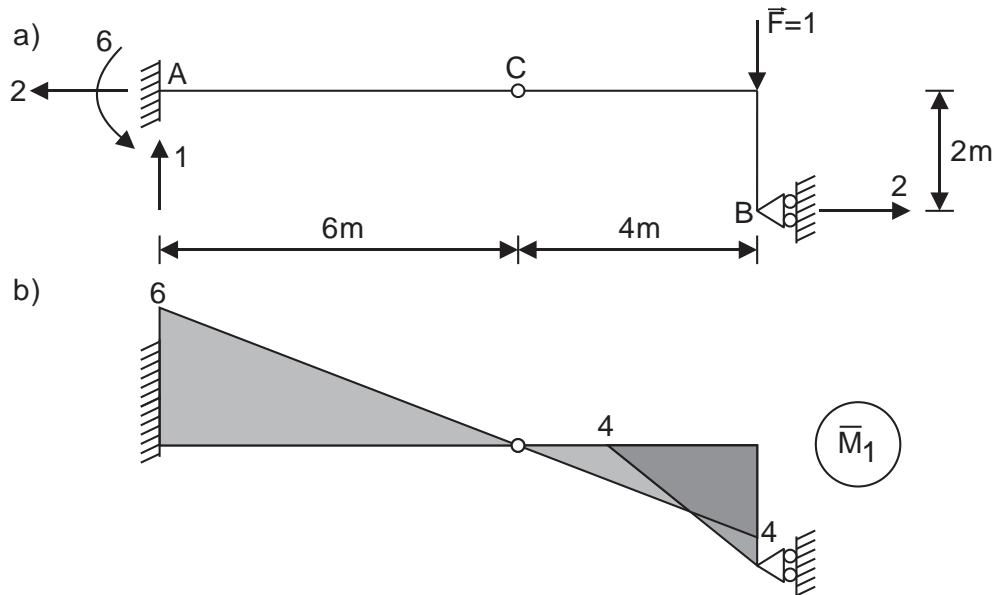


Fig. 3.9

De esta manera:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}_1^2 dx}{EI} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \right) = \frac{104}{EI}$$

De donde:

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{EI}{104}$$

Luego, la frecuencia de vibración libre será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EI}{104m}} = 0,098 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

**PROBLEMA 3.9** Determinar la frecuencia de vibración libre de la viga sin peso mostrada en la figura 3.10, si es de sección constante.

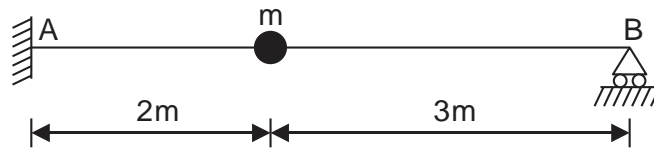


Fig. 3.10

**Solución:**

Determinamos el grado de indeterminación de la viga.

$$G.I. = R - 3 = 4 - 3 = 1$$

Siendo:

R – número de reacciones en los apoyos.

De esta manera, la viga es 1 vez hiperestática.

Elegimos el sistema principal (figura 3.11, a), graficando sus diagramas de momento unitario (figura 3.11, b) y de carga (figura 3.11, c)

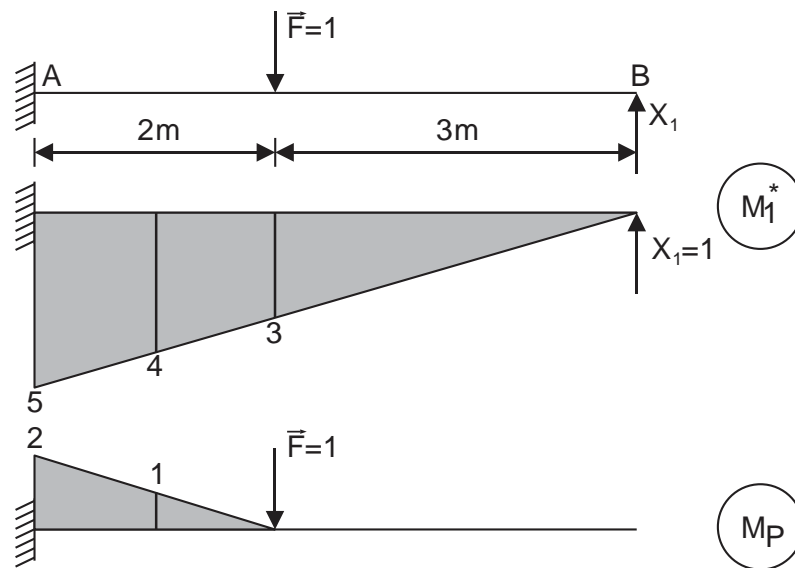


Fig. 3.11

La ecuación canónica será:

$$\delta_{11}^* X_1 + \Delta_{1P}^* = 0$$

Siendo:

$$\delta_{11}^* = \sum \int \frac{(M_1^*)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 5 = \frac{125}{3EI}$$

$$\Delta_{1P}^* = \sum \int \frac{M_1^* M_P}{EI} dx = -\frac{2}{6EI} (5 \cdot 2 + 4 \cdot 4 + 0) = -\frac{26}{3EI}$$

Reemplazando valores, obtenemos:

$$X_1 = 0,208$$

De esta manera, el diagrama final será el mostrado en la figura 3.12 y se obtendrá mediante la siguiente relación:

$$\bar{M} = M_1^* X_1 + M_p$$

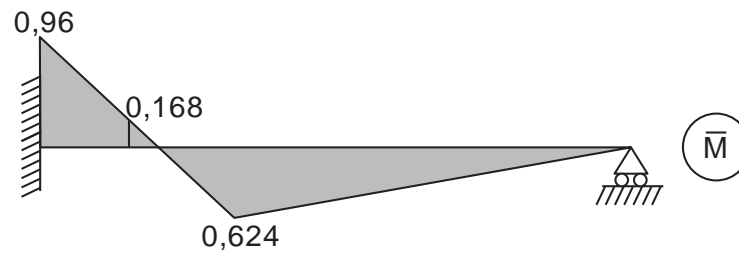


Fig. 3.12

Ahora, determinamos el coeficiente de flexibilidad:

$$\delta_{11} = \sum \int \frac{\bar{M}^2 dx}{EI} = \frac{2}{6EI} (0,96 \cdot 0,96 + 4 \cdot 0,168 \cdot 0,168 + 0,624 \cdot 0,624) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 0,624 \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,624 = \frac{0,864}{EI}$$

Luego:

$$k = \frac{1}{\delta_{11}} = \frac{EI}{0,864}$$

En consecuencia:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{EI}{0,864m}} = 1,076 \sqrt{\frac{EI}{m}}$$

**PROBLEMA 3.10** Determinar la frecuencia de vibración libre del sistema mostrado en la figura 3.13, si  $k_1 = 18,8 \cdot 10^4 \text{ N/m}$ ,  $k_2 = 41,2 \cdot 10^4 \text{ N/m}$  y  $m = 200 \text{ kg}$

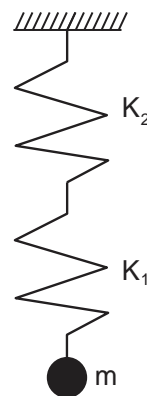


Fig. 3.13

**Solución:**

Determinamos la rigidez equivalente:

$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = \frac{18,8 \cdot 10^4 \cdot 41,2 \cdot 10^4}{18,8 \cdot 10^4 + 41,2 \cdot 10^4} = \frac{774,56 \cdot 10^8}{60 \cdot 10^4} = 12,909 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

De esta manera, la frecuencia de vibración libre será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_e}{m}} = \sqrt{\frac{12,909 \cdot 10^4}{200}} = 25,406 \text{ s}^{-1}$$

### 3.3 VIBRACIÓN FORZADA CON UN GRADO DE LIBERTAD

**PROBLEMA 3.11** Un cimiento rígido de forma cuadrada, tiene una masa  $m_1 = 6T$  y transmite una distribución uniforme de esfuerzos en 4 resortes iguales, ubicados en las esquinas de la cimentación y apoyados sobre un suelo indeformable. Cada resorte tiene un diámetro exterior  $D = 16\text{cm}$  y diámetro de la sección transversal del alambre  $d = 2,8\text{cm}$ . El resorte tiene  $n_1 = 4$  espirales con módulo de elasticidad en cortante  $G = 0,8 \cdot 10^{11} \text{ Pa}$ . En el centro de la cimentación, se coloca una máquina de masa  $m_2 = 2T$  con una masa desequilibrada  $m_o = 0,3m_2$  y con excentricidad  $e = 8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ , que gira alrededor del eje con una velocidad angular  $\theta_o = 155 \text{ rev/min}$ , que genera una fuerza central  $P_o \sin \theta t$ . Determinar la amplitud de la vibración vertical de la cimentación.

**Solución:**

Determinamos el coeficiente de rigidez de cada resorte:

$$k = \frac{Gd^4}{8D^3 n_1} = \frac{0,8 \cdot 10^{11} \cdot 2,8^4 \cdot 10^{-8}}{8 \cdot 16^3 \cdot 10^{-6} \cdot 4} = 37,5 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

De esta manera, los 4 resortes que trabajan en forma paralela, tienen una rigidez equivalente a:

$$k_e = 4k = 4 \cdot 37,5 \cdot 10^4 = 150 \cdot 10^4 \text{ N/m}$$

La frecuencia de vibración libre de la cimentación será:

$$\omega^2 = \frac{k_e}{m_1 + m_2} = \frac{150 \cdot 10^4}{6 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3} = 187,5 \text{ s}^{-2}$$

Ahora, determinamos la frecuencia de vibración forzada:

$$\theta^2 = \left( \frac{2\pi\theta_o}{60} \right)^2 = \left( \frac{2,314 \cdot 155}{60} \right)^2 = 263,2 \text{ s}^{-2}$$

Luego, determinamos la carga vibratoria  $P_o$

$$P_o = m_o \theta^2 e = 0,3m_2 \theta^2 e = 0,3 \cdot 2 \cdot 10^3 \cdot 263,2 \cdot 8 \cdot 10^{-3} = 1263,4 \text{ N}$$

El coeficiente dinámico será:

$$k_{\text{din}} = \frac{1}{1 - \frac{\theta^2}{\omega^2}} = \frac{1}{1 - \frac{263,2}{187,5}} = -2,48$$

De esta manera, la amplitud de vibración será:

$$y_{\text{máx}} = 2y_{\text{din}}^{\text{máx}} = 2P_o \delta_{11} |k_{\text{din}}| = \frac{2P_o |k_{\text{din}}|}{k_e} = \frac{2 \cdot 1263,4 \cdot 2,48}{150 \cdot 10^4} = 4,18 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 4,18 \text{ mm}$$

**PROBLEMA 3.12** Determinar la amplitud máxima de vibración forzada, debido a la acción de la carga armónica  $P_0 \text{sen} \theta t$  aplicada en la masa "m", siendo  $P_0 = 12\text{kN}$  y  $\theta^2 = 0,5\omega^2$ . Considerar que la rigidez  $EI$  es constante en toda su longitud.

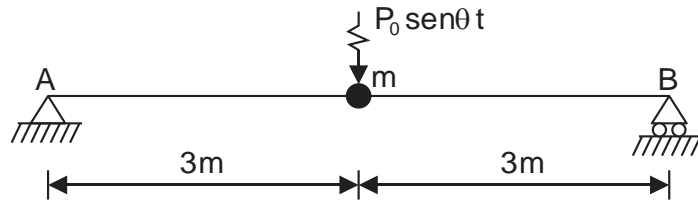


Fig. 3.14

**Solución:**

Resolvemos por el Método de Mohr, para ello, hace falta graficar el diagrama dinámico final de momento, debido a la acción de la carga vibratoria (forzada). Luego, en un estado equivalente, aplicamos una carga unitaria en la masa y graficamos su diagrama de momento. Posteriormente, se multiplican los diagramas.

En forma práctica, tenemos que los diagramas son los mismos, por ello, se multiplican por sí mismo.

En la figura 3.15 se muestra el diagrama debido a la acción de la carga  $\bar{F} = 1$

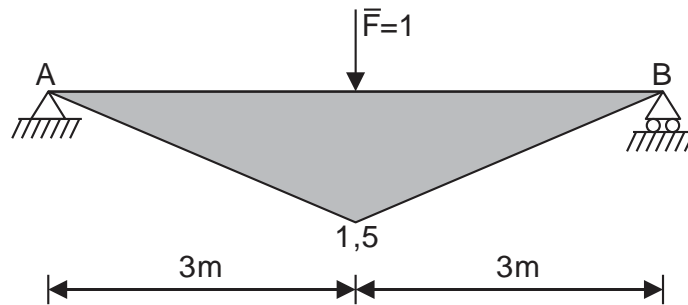


Fig. 3.15

Siendo:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1,5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,5 \cdot 2 = \frac{4,5}{EI}$$

El coeficiente dinámico será:

$$k_{\text{din}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - 0,5} = 2$$

De esta manera, la amplitud máxima será:

$$y_{\text{máx}} = y_{\text{est}} k_{\text{din}} = P_0 \delta_{11} k_{\text{din}} = 12 \cdot \frac{4,5}{EI} \cdot 2 = \frac{108}{EI}$$

**PROBLEMA 3.13** Determinar la amplitud máxima de vibración forzada de la masa "m" para la viga simplemente apoyada de rigidez constante y sin peso mostrada en la figura 3.16, considerando  $P_o = 10\text{kN}$  y  $\theta^2 = 0,6\omega^2$

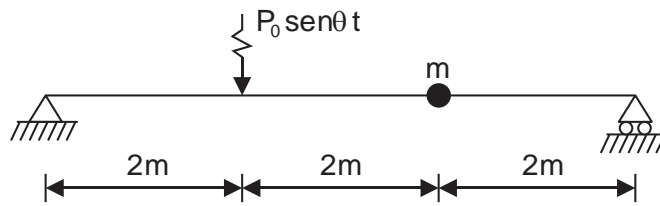


Fig. 3.16

**Solución:**

Como la carga no coincide con la masa, debemos de graficar los diagramas de carga unitaria (donde está la masa) y de carga vibratoria o forzada, tal como se muestra en la figura 3.17

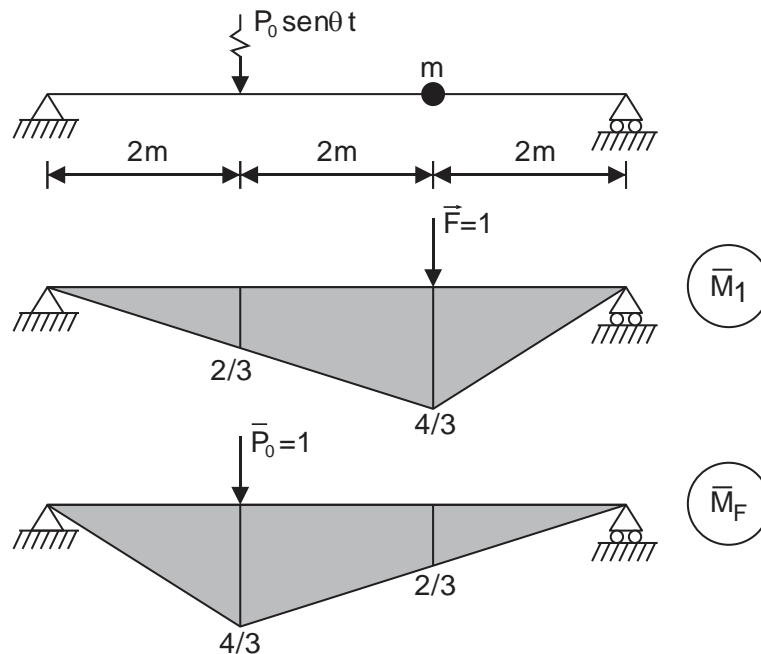


Fig. 3.17

Luego:

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI} \left( \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) + \frac{2}{6EI} \left( \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot 1 \cdot 1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} \right) = \frac{28}{9EI}$$

El coeficiente dinámico será:

$$k_{\text{din}} = \frac{1}{1 - \left( \frac{\theta}{\omega} \right)^2} = \frac{1}{1 - 0,6} = 2,5$$

En consecuencia:

$$y_{\text{máx}} = P_o \delta_{1F} k_{\text{din}} = 10 \cdot \frac{28}{9EI} \cdot 2,5 = \frac{77,78}{EI}$$

**PROBLEMA 3.14** Determinar la amplitud de vibración forzada de la masa “m” del pórtico sin peso mostrado en la figura 3.18, considerando  $q_0 = 4\text{kN/m}$ ,  $P_0 = 12\text{kN}$ ,  $\theta^2 = 0,7\omega^2$  y que es de rigidez constante.

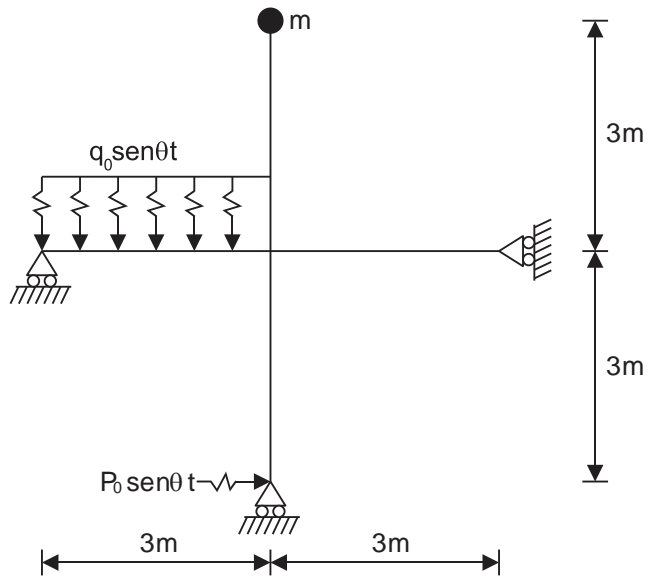


Fig. 3.18

**Solución:**

Graficamos los diagramas de carga unitaria y de carga vibratoria o forzada, tal como se muestran en la figura 3.19

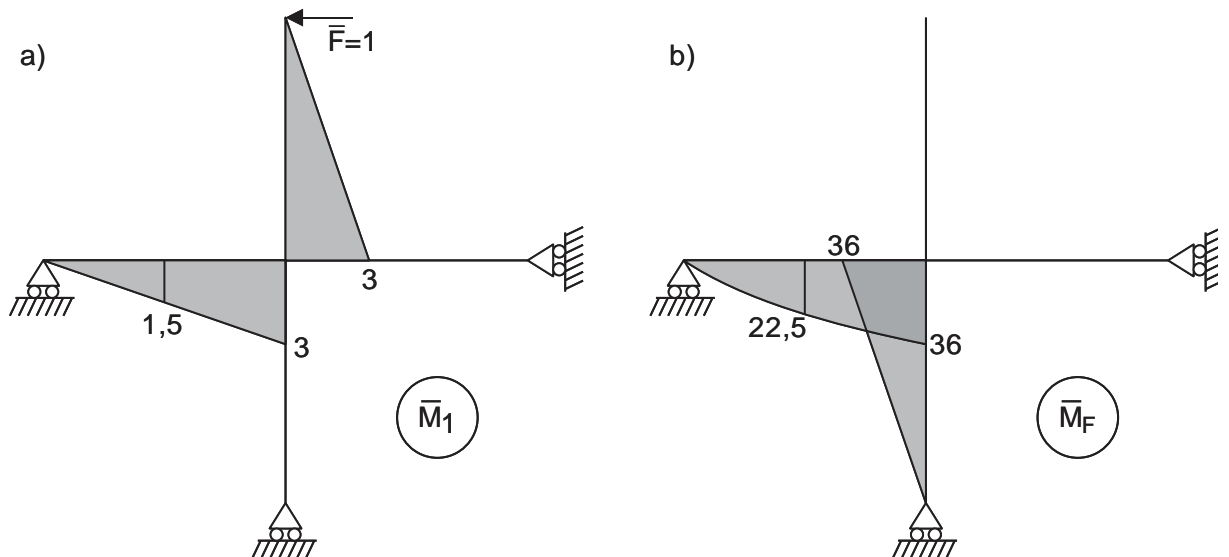


Fig. 3.19

Luego:

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \cdot 2 = \frac{18}{EI}$$

$$\delta_{1F} = \frac{3}{6EI} (0 + 4 \cdot 1,5 \cdot 22,5 + 3 \cdot 36) = \frac{121,5}{EI}$$

En consecuencia:

$$\omega^2 = \frac{1}{\delta_{11} m} = \frac{EI}{18m}$$

El coeficiente dinámico será:

$$k_{din} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\theta}{\omega}\right)^2} = \frac{1}{1 - 0,7} = \frac{10}{3}$$

De esta manera, la amplitud de la vibración forzada será:

$$y_{m\acute{a}x} = \delta_{1F} k_{din} = \frac{121,5}{EI} \cdot \frac{10}{3} = \frac{405}{EI}$$

**PROBLEMA 3.15** Sobre la masa  $m = 60\text{kg}$  cae una masa  $M = 200\text{kg}$  desde una altura  $h = 0,1\text{m}$ . Graficar el diagrama de momento flector dinámico, determinar la deflexión del pórtico en el punto de impacto y el esfuerzo normal en la sección más peligrosa. Considerar una rigidez en flexión  $EI = 12,18 \cdot 10^3 \text{ kPa} \cdot \text{m}^2$  y un módulo de resistencia  $W = 4,84 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$

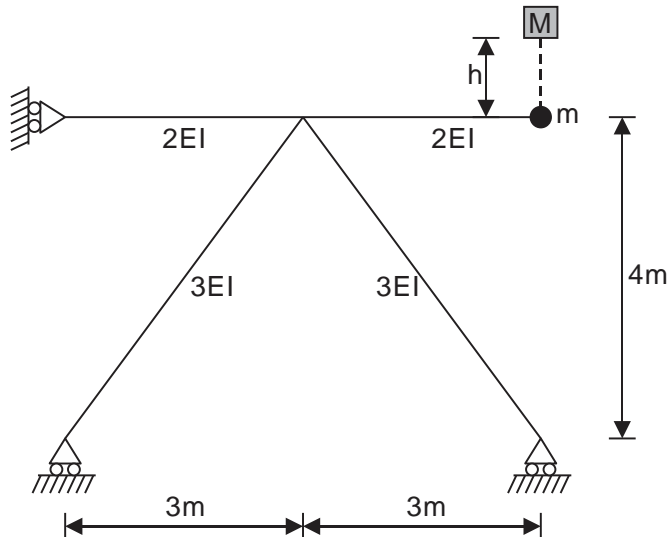


Fig. 3.20

**Solución:**

Graficamos el diagrama de carga unitaria, tal como se muestra en la figura 3.21 y determinamos el coeficiente de flexibilidad  $\delta_{11}$

$$\delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{3EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = \frac{9,5}{EI} = \frac{9,5}{12,18 \cdot 10^3} = 0,78 \cdot 10^{-3} \text{ m/kN}$$

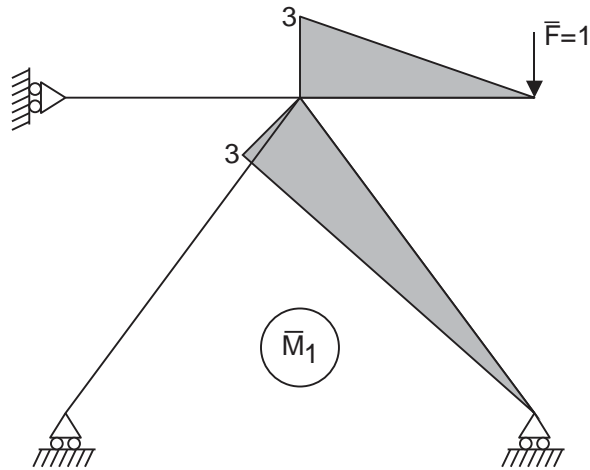


Fig. 3.21

La deflexión estática  $y_{est}$  en el punto de impacto, debido a la acción de la carga  $P = Mg = 200 \cdot 9,8 = 1960\text{N} = 1,96\text{kN}$  es:

$$y_{est} = \delta_{11} P = 0,78 \cdot 10^{-3} \cdot 1,96 = 1,53 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Determinamos el coeficiente dinámico por la fórmula:

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{est} \left(1 + \frac{m}{M}\right)}}$$

Reemplazamos valores y obtenemos:

$$k_{din} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,1}{1,53 \cdot 10^{-3} \left(1 + \frac{60}{200}\right)}} = 11,08$$

Ahora, determinamos la fuerza estática equivalente aplicada en el punto de impacto.

$$F_{equiv} = P k_{din} = 1,96 \cdot 11,08 = 21,717\text{kN}$$

El diagrama de momento flector dinámico se muestra en la figura 3.22

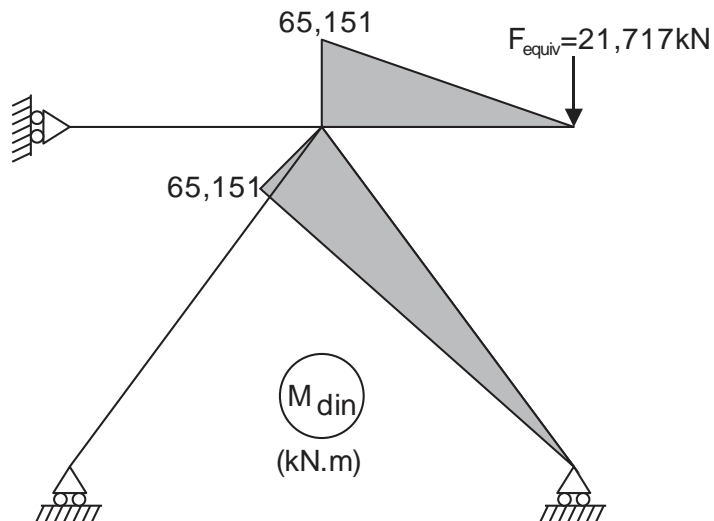


Fig. 3.22

Determinamos la deflexión en el punto de impacto.

$$y = \delta_{11} F_{\text{equiv}} + \delta_{11} mg = 0,78 \cdot 10^{-3} \cdot 21,717 + 0,78 \cdot 10^{-3} \cdot 0,06 \cdot 9,8 = 17,4 \cdot 10^{-3} \text{ m} = 17,4 \text{ mm}$$

El esfuerzo normal máximo ocurre en el punto de intersección de las 4 barras, siendo su valor debido a la carga equivalente igual a:

$$\sigma = \frac{65,151}{W} + \frac{\bar{M}_1 mg}{W} = \frac{65,151}{4,84 \cdot 10^{-4}} + \frac{3,0 \cdot 0,06 \cdot 9,81}{4,84 \cdot 10^{-4}} = 138,25 \text{ MPa}$$

### 3.4 MÉTODO APROXIMADO PARA LA DETERMINACIÓN DE PERÍODOS Y FRECUENCIAS DE VIBRACIÓN LIBRE EN EDIFICACIONES

**PROBLEMA 3.16** En la figura 3.23 se muestra una edificación de 3 pisos modelada como péndulo invertido con rigidez constante  $EI = 19,321 \cdot 10^7 \text{ kN.m}^2$  por toda la altura y masas a nivel de entrepisos  $m_1 = m_2 = 802,4 \text{ T}$  y  $m_3 = 730,5 \text{ T}$ . La altura de cada piso es  $8,25 \text{ m}$  y la altura total del edificio  $24,75 \text{ m}$ . Determinar los períodos y frecuencias de vibración libre de la estructura.

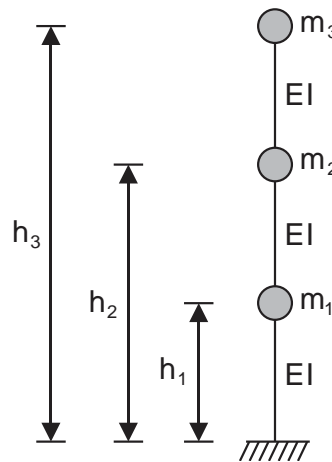


Fig. 3.23

**Solución:**

Para determinar los períodos y frecuencias de vibración libre de la estructura se seguirá el siguiente proceso:

a) Se calcula el determinante:

$$\begin{vmatrix} (\delta_{11} m_1 - \lambda) & \delta_{12} m_2 & \delta_{13} m_3 \\ \delta_{21} m_1 & (\delta_{22} m_2 - \lambda) & \delta_{23} m_3 \\ \delta_{31} m_1 & \delta_{32} m_2 & (\delta_{33} m_3 - \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

Siendo:

$$\text{Si } i = j \Rightarrow \delta_{ii} = \frac{(h_i)^3}{3EI}$$

$$\text{Si } i < j \Rightarrow \delta_{ij} = \frac{h_i}{6EI} [2h_i h_j + h_i (h_j - h_i)]$$

$$\text{Si } i > j \Rightarrow \delta_{ij} = \frac{h_j}{6EI} [2h_i h_j + h_j (h_i - h_j)]$$

Calculados estos coeficientes, obtenemos la siguiente matriz de flexibilidad (m/N)

$$\delta = \begin{bmatrix} 9,687 \cdot 10^{-10} & 2,422 \cdot 10^{-9} & 3,875 \cdot 10^{-9} \\ 2,422 \cdot 10^{-9} & 7,75 \cdot 10^{-9} & 1,356 \cdot 10^{-8} \\ 3,875 \cdot 10^{-9} & 1,356 \cdot 10^{-8} & 2,616 \cdot 10^{-8} \end{bmatrix}$$

b) Resolviendo el determinante, obtenemos una ecuación cúbica de forma:

$$a_3 \lambda^3 - a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0$$

Siendo, para este caso:

$$a_0 = 1,39 \cdot 10^{-9}$$

$$a_1 = 1,811 \cdot 10^{-5}$$

$$a_2 = 0,026$$

$$a_3 = 1$$

Luego, resolvemos la ecuación cúbica y obtenemos los valores  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$

$$\lambda_1 = 0,025$$

$$\lambda_2 = 6,233 \cdot 10^{-4}$$

$$\lambda_3 = 8,781 \cdot 10^{-5}$$

c) De esta manera, la frecuencia de vibración libre será:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_1}} = \sqrt{\frac{1}{0,025}} = 6,325 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_2}} = \sqrt{\frac{1}{6,233 \cdot 10^{-4}}} = 40,055 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{\lambda_3}} = \sqrt{\frac{1}{8,781 \cdot 10^{-5}}} = 106,716 \text{ s}^{-1}$$

d) El período se calculará por la fórmula conocida:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2,314}{6,325} = 0,993 \text{ s}$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = \frac{2,314}{40,055} = 0,157 \text{ s}$$

$$T_3 = \frac{2\pi}{\omega_3} = \frac{2,314}{106,716} = 0,059 \text{ s}$$

## BIBLIOGRAFÍA

1. **Gontar Mijail Grigorievich – Zavrzhina Natalia Mijailovna.** Apuntes de clase de Mecánica Teórica. Universidad Nacional de Ingeniería Civil y Arquitectura de Kiev. Ucrania, 1988. – 145p.
2. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con zapatas aisladas. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2006. – 125p.
3. **Villarreal Castro Genner.** Análisis de estructuras con el programa LIRA 9.0. Lima, 2006. – 115p.
4. **Villarreal Castro Genner.** Interacción suelo-estructura en edificios altos. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2007. – 142p.
5. **Villarreal Castro Genner.** Análisis estructural. Lima, 2008. – 335p.
6. **Villarreal Castro Genner – Oviedo Sarmiento Ricardo.** Edificaciones con disipadores de energía. Asamblea Nacional de Rectores. Lima, 2009. – 159p.
7. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales. Lima, 2009. – 336p.
8. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Problemas resueltos. Lima, 2011. – 227p.
9. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales I: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2012. – 206p.
10. **Villarreal Castro Genner.** Resistencia de materiales II: Prácticas y exámenes USMP. Lima, 2013. – 199p.
11. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería sísmo-resistente: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2013. – 100p.
12. **Villarreal Castro Genner.** Mecánica de materiales: Prácticas y exámenes UPC. Lima, 2015. – 195p.
13. **Villarreal Castro Genner.** Diseño sísmico de edificaciones: Problemas resueltos. Lima, 2015. – 96p.
14. **Villarreal Castro Genner.** Estática: Prácticas y exámenes resueltos. Lima, 2016. – 118p.
15. **Villarreal Castro Genner.** Ingeniería sísmo-resistente: Problemas resueltos. Lima, 2016. – 80p.
16. **Villarreal Castro Genner.** Dinámica estructural: Curso breve. Lima, 2016. – 60p.
17. **Villarreal Castro Genner – Díaz La Rosa Sánchez Marco.** Edificaciones con disipadores viscosos. Lima, 2016. – 133p.
18. **Villarreal Castro Genner.** Interacción sísmica suelo-estructura en edificaciones con plateas de cimentación. Lima, 2017. – 60p.

# ÍNDICE

<b>PRÓLOGO</b> .....	03
<b>CAPÍTULO 1. CINEMÁTICA</b>	
1.1. Cinemática del punto.....	04
1.2. Movimientos de traslación y rotación del cuerpo sólido.....	15
1.3. Movimiento planoparalelo del cuerpo sólido.....	24
1.4. Movimiento compuesto del punto.....	35
<b>CAPÍTULO 2. DINÁMICA</b>	
2.1. Dinámica del punto.....	42
2.2. Teorema del movimiento del centro de masa.....	45
2.3. Teorema de la variación de la cantidad de movimiento.....	48
2.4. Teorema de la variación del momento de la cantidad de movimiento.....	51
2.5. Teorema de la variación de la energía cinética.....	56
2.6. Movimiento rotacional de un cuerpo sólido respecto a un eje fijo.....	58
2.7. Movimiento planoparalelo del cuerpo sólido.....	61
<b>CAPÍTULO 3. DINÁMICA APLICADA A LA INGENIERÍA ESTRUCTURAL</b>	
3.1. Momentos de inercia de masa.....	65
3.2. Vibración libre con un grado de libertad.....	69
3.3. Vibración forzada con un grado de libertad.....	74
3.4. Método aproximado para la determinación de períodos y frecuencias de vibración libre en edificaciones.....	80
<b>Bibliografía</b> .....	82